Blatt № 2

Aufgabe 4: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(y+1)(y-1) \qquad x \in \mathbb{R}$$

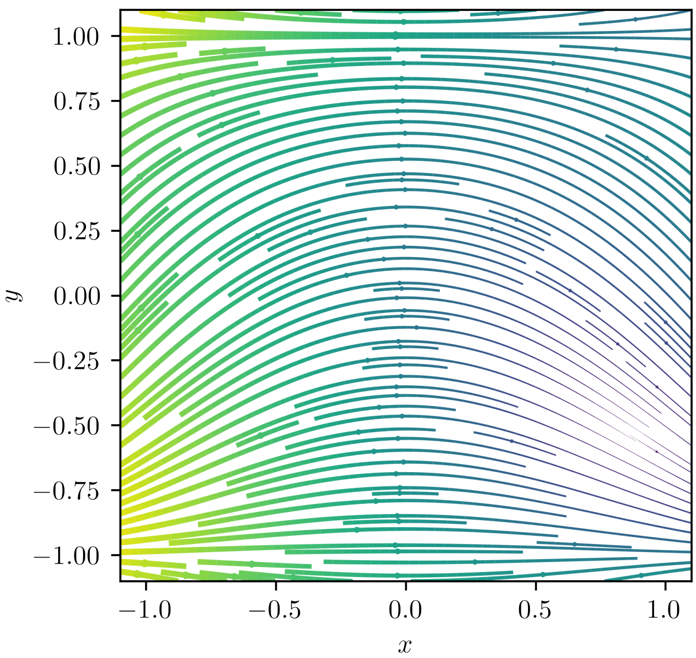

Figure 1: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Zuerst erkennen wir, dass $y = 1$ und $y = -1$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Wir sehen weiters, dass $f(x, y) = g(x)h(y)$, könne also direkt die Trennung der Veränderlichen durchführen:

$$\begin{aligned}
&\frac{y'}{(y+1)(y-1)} = x \\
&\Rightarrow \int \frac{y'(s)\,\mathrm{d}s}{(y(s)+1)(y(s)-1)} = \int s\,\mathrm{d}s = \frac{x^2+c}{2} \\
&\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-2)} = \frac{x^2+c}{2}
\end{aligned}$$

Mittels Partialbruchzerlegung können wir die rationale Funktion z in eine einfache Summe zerlegen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \\
&\Rightarrow A = \frac{1}{z-1}\Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2} \\
&\Rightarrow B = \frac{1}{z+1}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$$

Hier machen wir nun eine Fallunterscheidung. Wir prüfen zuerst $y > 1$:

$$I = \frac{1}{2}\left(\ln(y-1) - \ln(y+1)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right)$$

Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = \frac{x^2+c}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = x^2+c \\
&\Rightarrow \frac{y-1}{y+1} = \mathrm{e}^{x^2+c} \Leftrightarrow y-1 = \mathrm{e}^{x^2+c}y + \mathrm{e}^{x^2+c} \\
&\Leftrightarrow y(1-\mathrm{e}^{x^2+c}) = \mathrm{e}^{x^2+c}+1 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1+\mathrm{e}^{x^2+c}}{1-\mathrm{e}^{x^2+c}} \\
&y > 1 \Leftrightarrow \frac{1+\mathrm{e}^{x^2+c}}{1-\mathrm{e}^{x^2+c}} > 1 \Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{x^2+c} > 0 \Leftrightarrow 1 > \mathrm{e}^{x^2+c} \Rightarrow 0 > x^2+c \Leftrightarrow -c > x^2
\end{aligned}$$

Hier ist anzumerken, dass $c < 0$ für $x \in \mathbb{R}$, daher ist die Lösung nur für $x \in \mathcal{B}_x(0)$ gültig. Weiters untersuchen wir den Fall $y < -1$, womit $\frac{1}{z-1} < 0$ und $\frac{1}{z+1} < 0$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = x^2+c \\
&\Rightarrow \int \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z - \int \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = \ln(1-y) - \ln(-1-y) = \ln\left(\frac{1-y}{-1-y}\right) = x^2+c \\
&\Leftrightarrow \frac{1-y}{-1-y} = \mathrm{e}^{x^2+c} \Leftrightarrow 1-y = -y\mathrm{e}^{x^2+c} - \mathrm{e}^{x^2+c} \Leftrightarrow y(\mathrm{e}^{x^2+c}-1) = -1-\mathrm{e}^{x^2+c} \\
&\Leftrightarrow y(x) = \frac{1+\mathrm{e}^{x^2+c}}{1-\mathrm{e}^{x^2+c}} < -1 \Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{x^2+c} < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2+c \Leftrightarrow x^2 > -c
\end{aligned}$$

Weiter prüfen wir $-1 < y < 1$:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = x^2+c \Leftrightarrow \ln(1-y) - \ln(y+1) = x^2+c \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = x^2+c \\
&\Leftrightarrow \frac{1-y}{1+y} = \mathrm{e}^{x^2+c} \Leftrightarrow 1-y = y\mathrm{e}^{x^2+c} + \mathrm{e}^{x^2+c} \\
&\Leftrightarrow -y\mathrm{e}^{x^2+c} - y = \mathrm{e}^{x^2+c} - 1 \Leftrightarrow y(-\mathrm{e}^{x^2+c}-1) = \mathrm{e}^{x^2+c}-1 \\
&\Leftrightarrow y(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{x^2+c}}{1+\mathrm{e}^{x^2+c}}
\end{aligned}$$

Für ermitteln noch den Wertebereich für c:

$$\begin{aligned}
&-1 < \frac{1-\mathrm{e}^{x^2+c}}{1+\mathrm{e}^{x^2+c}} < 1 \\
&\Leftrightarrow -1-\mathrm{e}^{x^2+c} < 1-\mathrm{e}^{x^2+c} < 1+\mathrm{e}^{x^2+c} \\
&\Leftrightarrow -1-2\mathrm{e}^{x^2+c} < 1-2\mathrm{e}^{x^2+c} < 1 \\
&\Rightarrow 1-2\mathrm{e}^{x^2+c} < 1
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{e}^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ist diese Ungleichung für $c \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Wir erhalten also:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1+\mathrm{e}^{x^2+c}}{1-\mathrm{e}^{x^2+c}} & |y| > 1 \wedge \begin{cases} -c > x^2 & y > 1 \\ -c < x^2 & y < -1 \end{cases} \\ \frac{1-\mathrm{e}^{x^2+c}}{1+\mathrm{e}^{x^2+c}} & |y| < 1 \wedge c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aufgabe 5: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

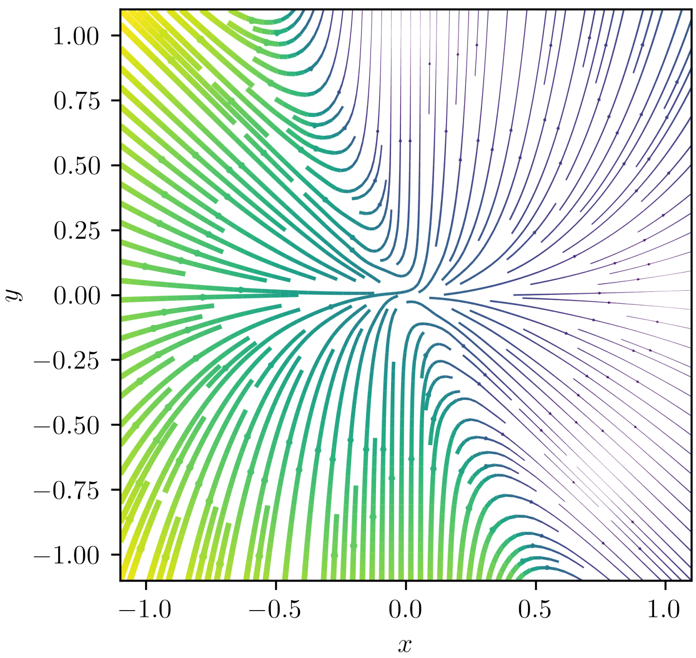

Figure 2: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Wir formen die Gleichung erst etwas um:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = \frac{y^2 + 2xy + x^2}{x^2} = \frac{(y+x)^2}{x^2}$$

Wir führen nun die Substitution $u(x) = y(x) + x$ ein, wobei natürlich $u' = y' + 1$, und erhalten die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u^2}{x^2} \Rightarrow \int \frac{u'(s)}{u(s)^2}\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{x} - c \\
&\int \frac{u'(s)}{u(s)}\,\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = -\frac{1}{z} \\
&\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{x} + c \Leftrightarrow u = \frac{1}{\frac{1}{x} + c} = \frac{1}{\frac{1+cx}{x}} = \frac{x}{1+cx} \\
&\Rightarrow y + x = \frac{x}{1+cx} \Leftrightarrow y(x) = \frac{x - x - cx^2}{1+cx} = -\frac{cx^2}{1+cx} = -\frac{x}{\frac{1}{c} - x}
\end{aligned}$$

Hier ist anzumerken, dass wir für $x = -\frac{1}{c}$ eine Polstelle von y erhalten.

Aufgabe 6: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y' + y = 2\sin - \cos$$

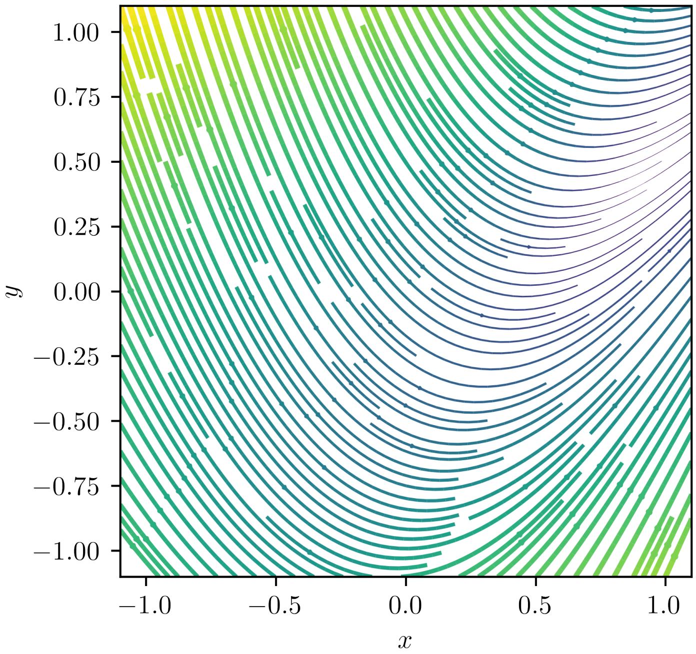

Figure 3: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Wir sehen, dass es sich dabei um eine lineare Differentialgleichung handelt. Wir lösen dazu also zuerst die homogene Gleichung $y' + y = 0$.

$$y_h(x) = \exp\left(-\int 1 \, \mathrm{d}x\right) = \mathrm{e}^{-x}$$

Für $y_p(x)$ wählen wir den Ansatz $y_p(x) = c(x)y_h(x)$. Sei $f(x) = 2\sin(x) - \cos(x)$, dann finden wir einen Ausdruck für $c(x)$:

$$c(x) = \int f(x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

Wir betrachten dazu zuerst $\int \sin(x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
&\sin(x)\mathrm{e}^x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\mathrm{e}^x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{x(1+\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i})}) \\
&\Rightarrow \int \sin(x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{x(1+\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i})} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{x(1+\mathrm{i})} - \frac{1}{1-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i})}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{4\mathrm{i}}(2\mathrm{i}\sin(x) - 2\mathrm{i}\cos(x)) \\
&= \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin(x) - \cos(x))
\end{aligned}$$

Wir gehen analog für $\mathrm{e}^x\cos(x)$ vor:

$$\cos(x)\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\mathrm{e}^x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x(1+\mathrm{i})} + \mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i})})$$

$$\int \cos(x)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{x(1+\mathrm{i})} + \mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i})} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}\mathrm{e}^{x(1+\mathrm{i})} + \frac{1}{1-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{x(1-\mathrm{i})}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}^x}{4}(2\cos(x) + 2\sin(x)) = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos(x) + \sin(x))$$

Hernach erhalten wir für $c(x)$:

$$c(x) = \int 2\sin(x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x\cos(x) \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(\sin(x) - \cos(x)) - \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\cos(x) + \sin(x))$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin(x) - 3\cos(x))$$

Wir erhalten damit die folgende Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - 3\cos(x)) + c\mathrm{e}^{-x}$$