Übung № 2

Aufgabe 7: Einschränkung von Maßräumen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{A}$. Setze $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} \colon A \subseteq Y\}$. Zeigen Sie, dass $(Y, \mathcal{B}, \mu|_{\mathcal{B}})$ wieder ein Maßraum ist.

Wir zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist. Da $\forall Y \in \mathcal{A} \colon \emptyset \subseteq Y$ folgt $\emptyset \in \mathcal{B}$. Sei $A \in \mathcal{B}$, dann muss $A^c \in \mathcal{B}$ sein. Da $A \subseteq Y$ folgt $A^c = Y \setminus A \subseteq Y$, womit $A^c \in \mathcal{B}$. Seien $A_i \in \mathcal{B}$ mit $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $\forall i \in \mathbb{N} \colon A_i \subseteq Y$, womit:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y = Y$$

Damit ist $\mathcal{B}$ wieder eine σ-Algebra, und $(Y, \mathcal{B})$ ist ein Messraum, womit $(Y, \mathcal{B}, \mu|_{\mathcal{B}})$ ein Maßraum ist.

Aufgabe 8: Maßraum mit Abzählbaren Mengen

Sei X eine Menge. Zeigen Sie

a) $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) \colon |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0\}$ ist eine σ-Algebra auf X

b) die Funktion $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & |A| > \aleph_0 \end{cases}$$

ist ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$.

Zu a: $|\emptyset| = 0 < \aleph_0$ womit $\emptyset \in \mathcal{A}$. Zum Komplement. Sei $A \in \mathcal{A}$:

$$A^c \in \mathcal{A} \Leftrightarrow |A^c| \leq \aleph_0 \vee |(A^c)^c| \leq \aleph_0 \Leftrightarrow |A| \leq \aleph_0 \vee |A^c| \leq \aleph_0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$$

Somit folgt $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}$. Seien $A_i \in \mathcal{A}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir machen eine Fallunterscheidung, ob $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| > \aleph_0$ oder $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| \leq \aleph_0$. Falls $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| \leq \aleph_0$, dann folgt direkt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. Falls $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| > \aleph_0$, dann $\exists I \subseteq \mathbb{N} \colon \forall n \in I \colon |A_n| > \aleph_0$, womit direkt folgt $\forall n \in I \colon |A_n^c| \leq \aleph_0$, hernach:

$$\left| \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right)^c \right| = \left| \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \right| \leq \aleph_0 \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \in \mathcal{A}$$

Somit ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X.

Zu b: Da $|\emptyset| < \aleph_0$ folgt $\mu(\emptyset) = 0$. Seien $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt. Wir machen eine Fallunterscheidung. Falls $\forall i \in \mathbb{N} \colon |A_i| \leq \aleph_0$ und $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| \leq \aleph_0$, dann folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = 0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} 0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Falls $|\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i| > \aleph_0$, dann $\exists I \subseteq \mathbb{N} \colon \forall n \in I \colon |A_i| > \aleph_0$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Für $|I| = 1$, mit $I = \{i_0\}$, gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = 1 = \mu(A_{i_0}) + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \{i_0\}} \mu(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Sei $|I| > 1$. Wir setzen $B_1 = A_{i_0}$ und $B_2 = \biguplus_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&B_1 \uplus B_2 = B_1 \uplus (B_2 \setminus B_1) = B_1 \uplus (B_2 \cap B_1^c) \\
&|B_1| > \aleph_0 \Rightarrow |B_1^c| \leq \aleph_0 \Rightarrow |B_2 \cap B_1^c| \leq \aleph_0 \\
&\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = 1 = \mu(B_1) + \mu(B_2) + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus I} \mu(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)
\end{aligned}$$

Somit ist μ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$ und damit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Aufgabe 9

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und $E \in \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) = \{(A \cap E) \cup (B \cap E^c) | A, B \in \mathcal{A}\}$$

Sei $\mathcal{E} = \{(A \cap E) \cup (B \cap E^c) | A, B \in \mathcal{A}\}$. Wir beginnen mit $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) \subseteq \mathcal{E}$. Wir zeigen, dass $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra und dass, $\mathcal{A} \cup \{E\} \subseteq \mathcal{E}$, dann folgt $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) \subseteq \mathcal{E}$. Wir beginnen damit zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra ist. Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt $\emptyset \in \mathcal{A}$. Für $A = B = \emptyset$ gilt für $E \in \mathcal{P}(X)$:

$$(\emptyset \cap E) \cup (\emptyset \cap E^c) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Hernach $\emptyset \in \mathcal{E}$. Seien $C_i = (A_i \cap E) \cup (B_i \cap E^c) \in \mathcal{E}$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \in \mathcal{E}$, also $\exists A, B \in \mathcal{A}$, sodass:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i = (A \cap E) \cup (B \cap E^c)$$

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} ((A_i \cap E) \cup (B_i \cap E^c)) = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cap E\right) \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cap E^c\right) \\ &= \left(E \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cup \left(E^c \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right)\end{aligned}$$

Da für $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ mit $i \in \mathbb{N}$ gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$ setzen wir $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ und $B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$, womit:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i = (A \cap E) \cup (B \cap E^c) \in \mathcal{E}$$

Zuletzt das Komplement. Sei $C \in \mathcal{E}$. Wir wollen zeigen $\exists \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{A}$, sodass $C^c = (\tilde{A} \cap E) \cup (\tilde{B} \cap E^c)$.

$$\begin{aligned}C^c &= \left((A \cap E) \cup (B \cap E^c)\right)^c = (A \cap E)^c \cap (B \cap E^c)^c = (A^c \cup E^c) \cap (B^c \cup E) \\ &= (A^c \cup E^c) \cap (B^c \cup E) = ((A^c \cup E^c) \cap B^c) \cup ((A^c \cup E^c) \cap E) \\ &= (A^c \cap B^c \cup E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E \cup E^c \cap E) = (A^c \cap B^c) \cup (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $(A^c \cap B^c) \subseteq (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)$, denn dann folgt $(A^c \cap B^c) \cup (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E) = (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)$.

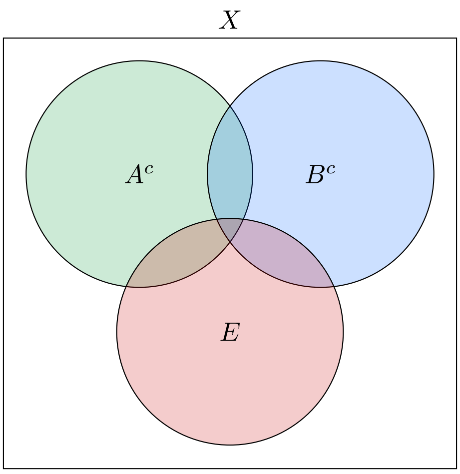

Figure 1: Überblick der Mengenschnitte

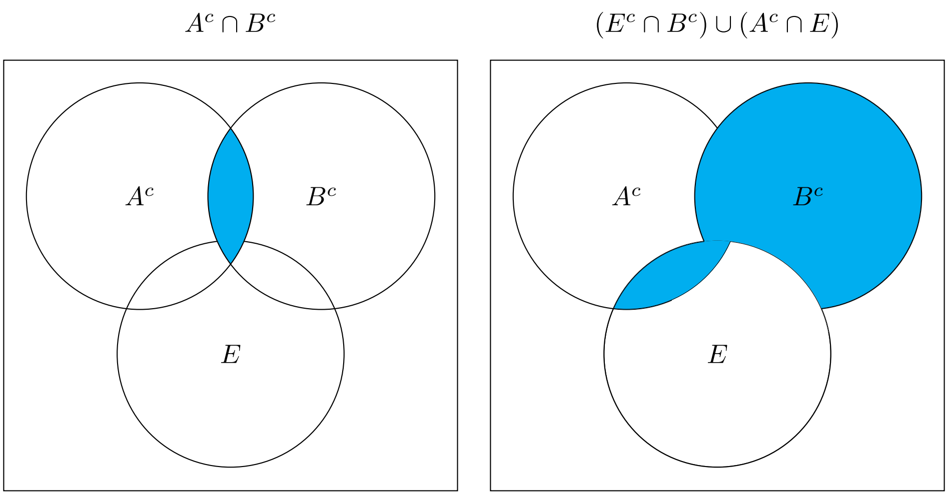

Table 1: Venn-Diagramme zur Veranschaulichung von $(A^c \cap B^c) \subseteq (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)$

Wir sehen, dass $(A^c \cap B^c) \subseteq (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)$, womit $(A^c \cap B^c) \cup (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E) = (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)$, hernach gilt:

$$C^c = (E^c \cap B^c) \cup (A^c \cap E)$$

Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist, gilt $A^c, B^c \in \mathcal{A}$, womit $\exists \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{A}$, sodass $C^c = (\tilde{A} \cap E) \cup (\tilde{B} \cup E^c)$. Damit ist $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra auf X. Wir zeigen noch, dass $(\mathcal{A} \cup \{E\}) \subseteq \mathcal{E}$. Für $A = X$ und $B = \emptyset$ folgt $(X \cap E) \cup (\emptyset \cap E^c) = E \cup \emptyset = E$, womit $E \in \mathcal{E}$. Sei $C \in \mathcal{A}$, dann gilt:

$$(E \cap C) \cup (E^c \cap C) = (E \cup E^c) \cap C = X \cap C = C$$

Somit gilt $C \in \mathcal{E}$, womit $(\mathcal{A} \cup \{E\}) \subseteq \mathcal{E}$, und damit auch $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) \subseteq \mathcal{E}$.

Wir zeigen noch $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cup \{E\})$. Da $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\})$ eine σ-Algebra ist, können wir die entsprechenden Eigenschaften verwenden. Sei $C = (A \cap E) \cup (B \cap E^c)$ für $A, B \in \mathcal{A}$. Wir wollen zeigen $C \in \sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) = \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra ist, gilt $(A \cap E) \in \mathcal{B}$ und wegen $E^c \in \mathcal{B}$ auch $(B \cap E^c) \in \mathcal{B}$, wegen der Durschnittsstabilität von σ-Algebren. Somit folgt $(A \cap E) \cup (B \cap E^c) \in \mathcal{B}$, da C eine endliche Vereinigung von Mengen aus $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\})$ ist.

Wir haben somit gezeigt $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) \subseteq \mathcal{E}$ und $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cup \{E\})$, womit $\sigma(\mathcal{A} \cup \{E\}) = \mathcal{E}$.

Aufgabe 10: Borel-Mengen

Jede Zahl $x \in (0, 1)$ hat eine *Dezimaldarstellung* $x = 0.x_1x_2\cdots$ mit Ziffern $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn wir zusätzlich fordern, dass sie nicht mit 9 periodisch endet. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Borelmengen sind:

a) Alle Zahlen in $(0, 1)$, in denen die Ziffer 2 mindestens einmal vorkommt
b) Alle Zahlen in $(0, 1)$, in denen die Ziffer 2 unendlich oft vorkommt

Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann ist $\mathscr{B}(X) = \sigma(\mathcal{O})$ die Borel-σ-Algebra auf X, also jene σ-Algebra, die von den offenen Mengen auf X erzeugt wird. Wollen wir also zeigen, dass $I \subseteq (0, 1)$ eine Borelmenge ist, müssen wir zeigen, dass sie offen ist.

Wir sehen, dass die x_i einer Dezimalzahl $x \in (0, 1)$ eine beschränkte Folge bilden. Zur Erinnerung: Wir nennen $I \subseteq \mathbb{R}$ offen, falls $\forall x \in I\colon \exists \varepsilon > 0\colon \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq I$.

Zu a: Wir nennen nun $\mathcal{E} = \{x \in (0, 1)\colon \exists i \in \mathbb{N}\colon x_i = 2\}$. Da wir uns auf eindeutige Darstellungen von Zahlen einschränken, können wir uns die folgenden Hilfsmengen zurechtlegen: Sei $A_k = \{x \in (0, 1)\colon x_k = 2\}$, dann gilt $\mathcal{E} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Sind die einzelnen A_k also offen, dann ist auch $\mathcal{E}$ als abzählbare Vereinigung offen und damit eine Borel-Menge.

Sei $x \in A_k$. Wir suchen ein $\varepsilon > 0$, sodass $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq A_k$, es muss also gelten: $\forall y \in \mathcal{B}_\varepsilon(x)\colon y \in A_k$. Sei $\varepsilon < 10^{-k-1}$, dann folgt $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq A_k$. Somit sind die A_k offen, und damit auch $\mathcal{E}$.

Zu b: Sei $F = \{x \in (0,1) \colon \exists I \subseteq \mathbb{N} \colon |I| = \aleph_0 \colon \forall i \in I \colon x_i = 2\}$, dann gilt für $x \in F \forall n \in \mathbb{N} \colon \exists m > n \colon x_m = 2$. Sei

$$G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

Betrachten wir zuerst $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Diese Vereinigung beinhaltet alle Zahlen $x \in (0,1)$, die ab n mindestens einmal die Ziffer 2 in ihrer Dezimaldarstellung besitzen, besonders wichtig aber jene $x \in (0,1)$, in denen die 2 ab n unendlich oft in der Dezimaldarstellung vorkommt. Der Durchschnitt aller dieser Vereinigungen beinhaltet also alle Zahlen $x \in (0,1)$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ immer noch unendlich viele Zweier in ihrer Dezimaldarstellung ab n besitzen, was genau unsere $x \in F$ sind. Somit ist F eine G_δ-Menge, da sie als abzählbarer Durchschnitt offener Mengen gebildet werden kann.

Aufgabe 11: Lebesgue-Maß offener Intervalle

Ein *offenes Intervall* in $\mathbb{R}^p$ ist ein kartesisches Produkt von (beschränkten) offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, also eine Menge der Form

$$I = \bigtimes_{i=1}^{p} (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^p$$

wobei $\forall i = 1, \ldots, p \colon -\infty < a_i < b_i < \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass $I \in \mathcal{L}^p$ und

$$\lambda^p(I) = \prod_{i=1}^{p} b_i - a_i$$

Sei $J_i = (a_i, b_i)$ mit $-\infty < a_i < b_i < \infty$, dann setzen wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{i,n} = \lfloor 2^n a_i \rfloor \qquad b_{i,n} = \lfloor 2^n b_i \rfloor$$

Für hinreichend große n gilt:

$$\frac{a_{i,n}}{2^n} \leq a_i < \frac{a_{i,n}+1}{2^n} < \frac{b_{i,n}}{2^n} \leq b_i < \frac{b_{i,n}+1}{2^n}$$

Somit folgt:

$$\biguplus_{j=a_{i,n}}^{b_{i,n}-1} \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] \subseteq J_i \subseteq \biguplus_{j=a_{i,n}}^{b_{i,n}} \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right]$$

Nach dem Fortsetzungssatz gilt $\lambda^p(D) = \mathrm{vol}(D) = 2^{-n}$ für $D \in \mathcal{D}_n^p$. Nach der σ-Additivität folgt also:

$$\frac{b_{i,n} - a_{i,n} - 2}{2^n} \leq \lambda^p(J_i) \leq \frac{b_{i,n} - a_{i,n}}{2^n}$$

Nach dem Einzwicksatz gilt:

$$\lambda(J_i) = \lim_{n \to \infty} \frac{b_{i,n} - a_{i,n} - 2}{2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_{i,n} - a_{i,n}}{2^n}$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_{i,n} - a_{i,n}}{2^n} = \lim_{n \to \infty} b_i - a_i + \mathcal{O}(2^{-n}) = b_i - a_i$$

Seien $D_i \in \mathcal{D}^p$:

$$\bigtimes_{i=1}^{p} \biguplus_{j=a_{i,n}}^{b_{i,n}} \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right] = \biguplus_{i=1}^{p} \bigtimes_{j=1}^{p} \left(\frac{a}{-} \right]$$