

Blatt № 1

Aufgabe 1: Prüfen einer Lösung

Man zeige, dass die durch

$$u(t) = \frac{1}{\nu} \int_0^t \sin(\nu(t-s))f(s) \, ds$$

für $t > s$ definierte Funktion eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$u''(t) + \nu^2 u(t) = f(t) \quad u(0) = u'(0) = 0$$

Wir erinnern uns an die Leibnizregel für Parameterintegrale. Sei $f: (\alpha, \beta) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(t, s) \mapsto f(t, s)$ stetig in t differenzierbar. Seien weiter $a, b: (\alpha, \beta) \rightarrow (c, d)$ stetig differenzierbar, dann ist F auf (α, β) stetig differenzierbar mit:

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, s) \, ds \Rightarrow F'(t) = f(t, b(t)) \cdot b'(t) - f(t, a(t)) \cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, s) \, ds$$

Hernach können wir u' und u'' bestimmen. Sei $g_1(t, s) = \sin(\nu(t-s))f(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\nu} \int_0^t g_1(t, s) \, ds = \frac{1}{\nu} \left(g_1(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sin(\nu(t-s))f(s) \, ds \right) \\ &= \frac{1}{\nu} \left(\sin(\nu(t-t))f(t) + \int_0^t \nu \cos(\nu(t-s))f(s) \, ds \right) = \int_0^t \cos(\nu(t-s))f(s) \, ds \end{aligned}$$

Sei nun $g_2(t, s) = \cos(\nu(t-s))f(s)$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2}(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t g_2(t, s) \, ds = g_2(t, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \cos(\nu(t-s))f(s) \, ds \\ &= \cos(\nu(t-t))f(t) - \nu \int_0^t \sin(\nu(t-s))f(s) \, ds = f(t) - \nu \int_0^t \sin(\nu(t-s))f(s) \, ds = f(t) - \nu^2 u(t) \end{aligned}$$

Setzen wir in die Gleichung ein erhalten wir:

$$f(t) - \nu^2 u(t) + \nu^2 u(t) = f(t)$$

$u(t)$ erfüllt also die Differentialgleichung. Zuletzt prüfen wir noch die Anfangsbedingungen:

$$u(0) = \frac{1}{\nu} \int_0^0 g_1(t, s) \, ds = 0 \quad u'(0) = \int_0^0 g_2(t, s) \, ds = 0$$

Aufgabe 2: Finden einer Lösung

Analog zu Beispiel 1 bestimme man eine allgemeine Darstellung für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) + \mu u(t) = f(t) \quad u(0) = 0$$

Beginnen wir damit, die Gleichung etwas umzuschreiben, um die Produktregel ausnutzen zu können:

$$\begin{aligned} e^{\mu t} u'(t) + \mu e^{\mu t} u(t) &= e^{\mu t} f(t) \Leftrightarrow (e^{\mu t} u(t))' = e^{\mu t} f(t) \\ \Rightarrow e^{\mu t} u(t) &= \int_0^t e^{\mu s} f(s) \, ds \Leftrightarrow u(t) = e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu s} f(s) \, ds \end{aligned}$$

Mit der Produktregel können wir verifizieren, dass u die Gleichung erfüllt:

$$\frac{du}{dt} = -\mu u(t) + e^{-\mu t} e^{\mu t} f(t) = -\mu u(t) + f(t) \Leftrightarrow u'(t) + \mu u(t) = -\mu u(t) + f(t) + \mu u(t) = f(t)$$

Auch die Randbedingung lässt sich leicht überprüfen:

$$u(0) = \int_0^0 e^{\mu s} f(s) \, ds = 0$$

Aufgabe 3: Orthogonale Signale

Für $k, l \in \mathbb{N}$ beweise man die Orthogonalität

$$I_{kl} = \int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) \, dx = \frac{1}{2} \delta_{kl}$$

Dabei ist δ_{kl} das Kronecker-Delta.

Seien $k = l$, dann gilt $\sin(k\pi x) \sin(l\pi x) = \sin^2(k\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2k\pi x))$. Hernach:

$$I_{kk} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2k\pi x) \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin(2k\pi)}{2k\pi} = \frac{1}{2}$$

Für $k \neq l$ folgt:

$$\begin{aligned} \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) &= \frac{\cos((k-l)\pi x) - \cos((k+l)\pi x)}{2} \\ \Rightarrow I_{k \neq l} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \cos((k-l)\pi x) \, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos((k+l)\pi x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin((k-l)\pi x)}{(k-l)\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \frac{\sin((k+l)\pi x)}{(k+l)\pi} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \frac{\sin((k-l)\pi)}{(k-l)\pi} - \frac{1}{2} \frac{\sin((k+l)\pi)}{(k+l)\pi} \end{aligned}$$

Da $k, l \in \mathbb{N}$: $\exists n, m \in \mathbb{Z}$: $k-l = n \wedge k+l = m$. Da $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\sin(n\pi) = 0$ folgt somit:

$$I_{k \neq l} = 0$$

bzw. für $k, l \in \mathbb{N}$ damit:

$$I_{kl} = \int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) \, dx = \frac{1}{2} \delta_{kl}$$