Übungsblatt № 11

Aufgabe 45: Charakteristische Funktion der Standard-Cauchy-Verteilung

Zeigen Sie mit Hilfe des Residuen-Kalküls, dass die charakteristische Funktion einer Standard-Cauchy-Verteilung $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ ist.

Wir machen hier einen kleinen Exkurs in die komplexe Analysis, damit die Terminologie klar ist. Bekanntermaßen lassen sich komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen, womit man die kartesische Form $z = a + ib$ erhält. Ähnlich kann man auch Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in ihren Real- und Imaginärteil zerlegen. Dazu betrachten wir $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und setzen $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, wobei $x = \mathfrak{Re}(z)$ und $y = \mathfrak{Im}(z)$. Analog zum reellen Fall nennt man f differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, falls der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Wir nennen f holomorph auf $\mathbb{C}$, falls f für alle $z \in \mathbb{C}$ differenzierbar ist. Betrachten wir die partiellen Ableitungen von f in Bezug auf x bzw. y, so ergeben sich die Cauchy-Riemann-Gleichungen[1] als Bedingung für Holomorphie von $f = u + \mathrm{i}v$

$$\partial_x u = \partial_y v \qquad \partial_y u = \partial_x v.$$

Im folgenden werden wir $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet nennen, falls D ein Gebiet und einfach zusammenhängend ist, also informell „keine Löcher“ hat. Ist D ein Elementargebiet und $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $D \setminus \{z_0\}$, so nennen wir z_0 eine Singularität von f. Lässt sich f in z_0 stetig fortsetzen, so wird z_0 als hebbare Singularität bezeichnet. Es gibt noch zwei weitere Typen von Singularitäten, Pole und wesentliche Singularitäten. Für den Residuenkalkül interessieren wir uns für Pole. Pole treten unter anderem in Funktionen der folgenden Form auf. Sind p, q teilerfremde Polynome und z_0 eine m-fache Nullstelle von q, dann hat $f = \frac{p}{q}$ einen Pol m-ter Ordnung in z_0.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $A \subseteq D$ habe keine Häufungspunkte in D und $f : D \setminus A \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Hat f in A höchstens Pole (also keine wesentlichen Singularitäten), so nennen wir f meromorph auf D. Ist $f : D \to \mathbb{C}$ meromorph und von der Form $f = \frac{p}{q}$, und hat den Pol $z_0 \in D$ erster Ordnung, wobei $p(z_0) \neq 0$, so nennen wir

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

das Residuum von f in z_0.

Satz 1 (Residuensatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ meromorph mit Polen $z_1, \ldots, z_n$ und $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve in D, dann gilt:*

$$\oint_\gamma f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_\gamma(z_k) \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

wobei $\operatorname{Ind}_\gamma(z_k)$ die Umlaufzahl von γ von z_k ist.

Der Residuensatz lässt sich nun auf die Fouriertransformation anwenden. Seien p und q teilerfremde Polynome mit $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$ und $R = \frac{p}{q}$. Sind $z_1, \ldots, z_n$ die Pole von R:

$$t \geq 0 \implies \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} R(x)\, \mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathfrak{Im}(z_k)>0}}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}$$

$$t < 0 \implies \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} R(x)\, \mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathfrak{Im}(z_k)<0}}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}$$

[1] Hieran sieht besonders schön, dass die komplexe Differenzierbarkeit tatsächlich eine stärkere Bedingung ist, als Differenzierbarkeit über $\mathbb{R}^2$, da wir fordern, dass $\mathrm{J}f$ eine Drehstreckung ist, was mit der Multiplikation komplexer Zahlen übereinstimmt. Das hat insbesondere die schöne Eigenschaft zur Folge, dass f winkeltreu ist.

Die Standard-Cauchy-Verteilung hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

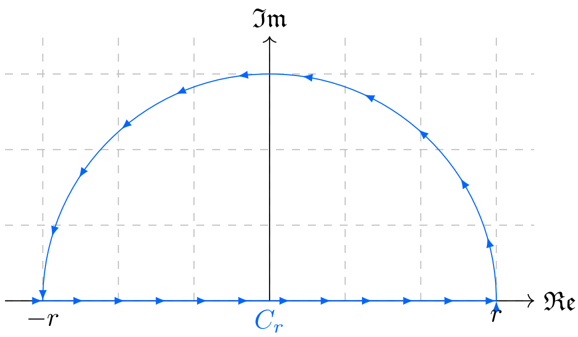
Offensichtlich hat f die Pole erster Ordnung i und $-\mathrm{i}$. Damit lassen sich die entsprechenden Residuen einfach berechnen:

$$\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{\pi(1+z^2)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{2\pi z}\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2\pi\mathrm{i}}$$
$$\operatorname*{Res}_{z=-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{\pi(1+z^2)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{2\pi z}\Big|_{z=-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{t}}{-2\pi\mathrm{i}}$$

Damit ergibt sich:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{2\pi\mathrm{i}}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-t} & t \geq 0 \\ -\frac{2\pi\mathrm{i}}{-2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{t} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} & t \geq 0 \\ e^{t} & t < 0 \end{cases} = e^{-|t|}$$

Addendum: Eine kleine Herleitung für die Berechnung der Fouriertransformation mittels des Residuensatzes. Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und bezeichne C_r den oberen Halbkreis in $\mathbb{C}$ mit Radius r:



Offensichtlich gilt nun:

$$\oint_{C_r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} R(x)\, \mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{k=1 \\ \mathfrak{Im}(z_k)>0 \\ |z_k| \leq r}}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}$$

Durch einen informellen Grenzübergang folgt somit die gewünschte Darstellung, da natürlich für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{Im}(z) > 0$ und $|z| \leq r$ gilt, dass $\mathrm{Ind}_{C_r}(z) = 1$. Für $t < 0$ integrieren wir über $-C_r$ und erhalten das negative Vorzeichen durch eine Substitution $u = -t$.

Aufgabe 46

Seien X und Y unabhängige identische verteilte Zufallsvariablen mit charakteristischer Funktion φ. Drücken Sie die charakteristische Funktion von $-X$ und $X - Y$ durch φ aus.

Sei $Z = X + \mathrm{i}Y$, wobei X und Y endliche Erwartung haben. Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt:

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathrm{i}\mathbb{E}(Y) \implies \mathbb{E}(\overline{Z}) = \mathbb{E}(X - \mathrm{i}Y) = \mathbb{E}(X) - \mathrm{i}\mathbb{E}(Y) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$$

Damit erhalten wir nun

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) \implies \varphi_{-X}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tX}) = \mathbb{E}(\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}}) = \overline{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})} = \overline{\varphi}(t)$$
$$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_{X+(-Y)}(t) = \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = \varphi(t)\overline{\varphi}(t) = |\varphi(t)|^2$$

Aufgabe 48

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen die $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt sind, $\overline{X}_n$ das Stichprobenmittel und S_n^2 die empirische Varianz. Man zeige $\operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j - \overline{X}_n) = 0$ und folgere daraus, dass $\overline{X}_n$ und S_n^2 unabhängig sind.

Bekanntermaßen

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

Womit

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j - \overline{X}_n) &= \operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j) - \operatorname{cov}(\overline{X}_n, \overline{X}_n) = \operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j) - \operatorname{var}(\overline{X}_n) \\
\operatorname{var}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{var}(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \\
\operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j) &= \operatorname{cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, X_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Zusätzlich:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(\overline{X}_n, (X_j - \overline{X}_n)^2) &= \operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j^2 - 2X_j\overline{X}_n + \overline{X}_n^2) \\
&= \operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j^2) - 2\operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j\overline{X}_n) + \operatorname{cov}(\overline{X}_n, \overline{X}_n^2)
\end{aligned}$$

Da die X_j und $\overline{X}_n$ normalverteilt sind und $\operatorname{cov}(\overline{X}_n, X_j - \overline{X}_n) = 0$ gilt, sind $\overline{X}_n, X_1 - \overline{X}_n, \dots, X_n - \overline{X}_n$ unabhängig. Wir betrachten den normalverteilten Zufallsvektor

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_1 - \overline{X}_n & \cdots & X_n - \overline{X}_n \end{bmatrix}$$

womit $S_n^2 = \frac{1}{n+1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{X}$ eine stetige Funktion ist, daher auch messbar und somit sind die $(X_j - \overline{X}_n)^2$ ebenfalls unabhängig.