Übungsblatt № 8

Aufgabe 8.1

a Sei $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

definiert. Ist d eine Metrik auf $\mathbb{R}$? Ist sie gegebenenfalls durch eine Norm induziert?

b Es sei X der Raum aller Folgen $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $\|x\|_0 = |\{i \in \mathbb{N}\colon x_i \neq 0\}|$. Ist $(X, \|\cdot\|_0)$ ein normierter Raum?

Eine Funktion $d\colon X^2 \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf X, falls:

- $\forall x, y \in X\colon d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x, y \in X\colon d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in X\colon d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Eine Funktion $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ ist eine Norm auf V, falls:

- $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\forall \mathbf{x} \in V \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K}\colon \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$
- $\|\cdot\|$ erfüllt die Dreiecksungleichung auf V

Zu a:

Per Definition gilt bereits $d(x,y) = 0$, falls $x = y$, weiterhin:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases} = d(y,x)$$

Wir prüfen noch die Dreiecksungleichung. Hierzu machen wir eine Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + 1 && x \neq y \neq z \\
d(x,y) &= 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 0 + 1 && x = z \neq y \\
d(x,y) &= 1 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + 0 && x \neq y = z \\
d(x,y) &= 0 \leq d(x,z) + d(z,y) = 1 + 1 && x = y \neq z \\
d(x,y) &= 0 \leq d(x,z) + d(z,y) = 0 + 0 && x = y = z
\end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung ist somit erfüllt, womit $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum ist.

Zu b:

Nein. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann ist $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\alpha x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Da $\alpha \cdot 0 = 0$ gilt somit $\|y\|_0 = |\{i \in \mathbb{N}\colon \alpha x_i \neq 0\}| = \|x\|_0$.

Aufgabe 8.2

Es sei X der Raum aller Folgen $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} < \infty$$

Weiters sei der folgende Operator gegeben:

$$T\colon X \to X \qquad (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} x_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

a Zeigen Sie: $\|\cdot\|\colon X \to [0\infty)$ ist eine Norm und T ist wohldefiniert und linear

b Berechnen Sie die Operatornorm $\|T\|$

Zu a:

Sei $x = 0$, dann gilt:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} 0} = \sqrt{0} = 0 < \infty$$

Sei weiters $\|x\| = 0$:

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \|x\| = \sqrt{0} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} 0} = \|0\|$$

Sei $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^2 x_i^2} = \sqrt{\alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} = |\alpha| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} = |\alpha| \cdot \|x\|$$

Seien $x = (x_i)_{i=1}^n$ und $y = (y_i)_{i=1}^n$, dann gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\|x+y\|^2 = \|x\| + \langle x, y\rangle + \|y\|$$
$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Da x und y Nullfolgen sind, ist auch $(x_i y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert 0. Weiters wissen wir von der Cauchy-Schwarzen Ungleichung, dass folgendes gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon 0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Hernach bilden die Partialsummen von $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für $n \to \infty$ eine nach oben beschränkte Folge. Da aber $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ und $\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2$ konvergent sind, muss auch $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ konvergent sein. Wir können also die Cauchy-Schwarz Ungleichung verwenden:

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$
$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 = \|x\| + \|y\| + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$
$$\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Damit bildet $\|\cdot\|$ eine Norm auf X.

Wenn T linear ist, muss $\forall x, y \in X$ und $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$:

$$T(\lambda x + \mu y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}}(\lambda x_i + \mu y_i)\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\lambda \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} x_i + \mu \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} y_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$$
$$= \left(\lambda \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} x_i\right)_{i\in\mathbb{N}} + \left(\mu \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} y_i\right)_{i\in\mathbb{N}} = \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} x_i\right)_{i\in\mathbb{N}} + \mu \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}} y_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$$
$$= \lambda T(x) + \mu T(y)$$

Seien $x, y \in X$ und $T(x) = T(y)$:

$$0 = T(x) - T(y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{i}}(x_i - y_i)\right)_{i\in\mathbb{N}} \Rightarrow \forall i \in \mathbb{N}\colon x_i = y_i \Leftrightarrow x = y$$

Zu b:

Die Operatornorm ist gegeben als:

$$\|T\| = \inf\{m \geq 0 \colon \|T(x)\| \leq m\|x\|\}$$

$$\|T(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i} x_i^2} = \sqrt{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{i}} \leq m\|x\|$$
$$\Rightarrow 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i^2}{i} \leq m^2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \left(m^2 - \frac{2}{i}\right)$$

Da $2/i \to 0$ betrachten wir $m^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 2$, da wir fordern $m \geq 0$ folgt also $m \geq \sqrt{2}$, womit $\|T\| = \sqrt{2}$.

Aufgabe 8.3

Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständige normierter Räume und $T \in \mathrm{Hom}(X,Y)$. Wir definieren $\|\cdot\|_T \colon X \to [0,\infty)$ durch:

$$\|x\|_T = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$$

Wir nennen zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X äquivalent, falls es Konstanten $C \geq c > 0$ gibt, sodass:

$$\forall x \in X \colon c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$$

a Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_T$ auch eine Norm auf X ist
b Beweisen Sie: Wenn $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_T$ äquivalent sind, dann ist T beschränkt

Zu a:

Sei $x \in X$:

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|_Y = 0 \Leftrightarrow \|x\|_X = -\|Tx\|_Y \Leftrightarrow \|x\|_X = \|Tx\|_Y = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_X + \|T\lambda x\|_Y = |\lambda| \cdot \|x\| + |\lambda| \cdot \|Tx\|_Y = |\lambda| \cdot \|x\|_T$$

Seien $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_T &= \|x+y\|_X + \|T(x+y)\|_Y \leq \|x\|_X + \|y\|_X + \|Tx + Ty\|_Y \\ &\leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y + \|y\|_X + \|Ty\|_Y = \|x\|_T + \|y\|_T\end{aligned}$$

Somit ist $\|\cdot\|_T$ eine Norm auf X.

Zu b:

Angenommen $\forall x \in X \colon c\|x\|_X \leq \|x\|_T \leq C\|x\|_X$, das ist äquivalent zu $\forall x \in X \colon c\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$, womit folgt $\|Tx\| \leq C\|x\|_X - \|x\| = (C-1)\|x\|_X \leq C\|x\|_X$ womit T beschränkt sein muss.

Aufgabe 8.5

Es sei $x_1 = \sqrt{2}$ und $x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Lösung der Gleichung $x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$, die zwischen $\sqrt{3}$ und 2 liegt, konvergiert.

Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und nach oben beschränkt ist.

Wir beginnen mit der Monotonie über Induktion. Für $n = 1$ gilt $x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{\sqrt{2}}} = x_2$:

$$x_{n+2} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n + 1}} = \sqrt{2 + \sqrt{\sqrt{2 + \sqrt{x_n}}}} > x_n$$

Es verbleibt die Beschränktheit. Wir führen wieder einen Induktionsbeweis. Für $n = 1$ gilt $x_1 = \sqrt{2} < 2$:

$$x_n < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_n} < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{x_n} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2 + \sqrt{x_n}} < \sqrt{4} = 2$$

Somit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x < 2$.
Wir wissen:

$$x = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{x_n}} = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$$

Wir lösen also nach x auf:

$$\begin{aligned} &x = \sqrt{2 + \sqrt{x}} \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = x \\ &\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Somit ist x eine Lösung der Gleichung $x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$. Wir zeigen noch $x > \sqrt{2}$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend ist, suchen wir ein $n \in \mathbb{N}$, für das gilt $x_n > \sqrt{3}$. Wir betrachten x_2:

$$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{\sqrt{2}}} > \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$