12 Übungsblatt

Beispiel 12.1. *Gegeben sind die folgenden Folgen:*

a) $a_n = 1 + 2(-1)^n$ *für* $n \in \mathbb{N}$

b) $b_n = 2 - \frac{(-1)^n}{n}$ *für* $n \in \mathbb{N}$

Gesucht sind alle Häufungspunkte der Folgen.

Zu a)

Wir wissen bereits, dass $(-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen $(-1)^{2n}$ und $(-2)^{2n+1}$ hat. Diese konvergieren, $(-1)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ und $(-1)^{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} -1$. Damit konvergieren nach den Rechenregeln für Folgen die Teilfolgen a_{2n} und a_{2n+1}. Die Häufungspunkte von a_n sind dann 3 und -1.

Zu b)

Wir betrachten erneut die beiden Teilfolgen b_{2n} und b_{2n+1}:

$$\begin{aligned} b_{2n} &= 2 - \frac{(-1)^{2n}}{2n} = 2 - \frac{1}{2n} \\ b_{2n+1} &= 2 - \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 2 + \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $b_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 2$. Für $\frac{1}{2n+1}$ machen wir eine Abschätzung nach oben durch $\frac{1}{n}$. Da $\forall n \in \mathbb{N}\colon 2n+1 > n$ ist $\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{n}$ und da $\forall n \in \mathbb{N}\colon 2n+1 > 0$ ist auch $\forall n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{2n+1} \geq 0$. Somit gilt nach dem Einzwicksatz $\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Damit gilt ebenfalls $b_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 2$. Da $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 2$ gilt $b_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$.

Beispiel 12.2. *Gesucht sind alle Häufungspunkte der gegeben Folge:*

$$a_n = 3\mathrm{i}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Da $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{n \mod 4}$. Wir betrachten also 4 Teilfolgen a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} und a_{n_4}, wobei $n_i \equiv i \mod 4$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_{n_1} &= 3\mathrm{i}\left(1 + \frac{1}{n_1}\right) \\ a_{n_2} &= -3\left(1 + \frac{1}{n_2}\right) \\ a_{n_3} &= -3\mathrm{i}\left(1 + \frac{1}{n_3}\right) \\ a_{n_4} &= 3\left(1 + \frac{1}{n_4}\right) \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_{n_1} &\xrightarrow{n_1\to\infty} 3\mathrm{i} \qquad & a_{n_2} &\xrightarrow{n_2\to\infty} -3 \\ a_{n_3} &\xrightarrow{n_3\to\infty} -3\mathrm{i} \qquad & a_{n_4} &\xrightarrow{n_4\to\infty} 3 \end{aligned}$$

Die Folge a_n hat also die Häufungspunkte $3\mathrm{i}, -3, -3\mathrm{i}$ und 3.

Beispiel 12.3. *Gegeben sei die folgende Folge:*

$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{3n}}{2n^4} + \frac{3n^2 + 2n}{n^3}$$

Es soll die Konvergenz von a_n nachgewiesen werden.

Wir formen a_n etwas um:

$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{3n}}{2n^4} + \frac{n^3(3\frac{1}{n} + 2\frac{1}{n^2})}{n^3} = \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^{3n}}{2n^4} + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}$$

Da $|(-1)^n| = |(-1)^{3n}| = 1$ gilt:

$$b_n = \frac{2}{3} - \frac{3}{n} - \frac{3}{n^2} - \frac{1}{2n^4} \leq a_n \leq \frac{2}{3} + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{2n^4} = c_n$$

Da b_n und c_n nach den Rechenregeln für Folgen beide konvergent sind, und weiters $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ ist auch a_n konvergent.