Übungsblatt № 9

Aufgabe 9.1

Zu a:

Sei f stetig und g eine Regelfunktion, dann ist $f \circ g$ eine Regelfunktion.

z.Z. $\forall x \in [a, b] \colon \exists c_+ = \lim_{\xi \to x_+} f(g(\xi))$ und $\exists c_- = \lim_{\xi \to x^-} f(g(\xi))$

Da g eine Regelfunktion auf $[a, b]$ ist, gilt für alle $x \in (a, b]$, dass $\exists y_+ = \lim_{\xi \to x^+} g(\xi)$. Da f stetig ist, gilt weiter:

$$\lim_{\xi \to x^+} f(g(\xi)) = f(\lim_{\xi \to x^+} g(\xi)) = f(y_+) = c_+$$

Wir gehen analog für c_- vor. $\exists y_- = \lim_{\xi \to x_-} g(\xi)$. Mit der Stetigkeit von f folgt weiters: $\lim_{\xi \to x_-} f(g(\xi)) = f(\lim_{\xi \to x_-} g(\xi)) f(y_-) = c_-$. Somit ist $f \circ g$ eine Regelfunktion.

Zu b:

Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$, dann gilt $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$. Sei $g = \max(f, 0)$.

Sei $f(x) > 0$, dann gilt $g = f \in \mathcal{R}[a, b]$. Sei $f(x) \leq 0$, dann ist $g = 0$ und $\lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$ sowie $\lim_{x \to 0^+} = 0$, somit ist g eine Regelfunktion auf $[a, b]$.

Zu c:

Sei $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Es gilt $\|f\|_\infty = \sup\{x \in [a, b] \colon |f(x)|\}$, womit $|f| \leq \|f\|_\infty$:

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b \|f\|_\infty \, \mathrm{d}x = \|f\|_\infty \int_a^b 1 \, \mathrm{d}x = \|f\|_\infty \cdot (b - a) \leq \|f\|_\infty \cdot |a - b|$$

Aufgabe 9.2

Zeigen Sie, dass eine monotone Funktion auf einem kompakten Intervall eine Regelfunktion ist.

Sei oBdA f eine monoton wachsende Funktion, also $\forall x, y \in [a, b] \colon x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Da f auf einer kompakten (reellen) Menge definiert ist, verwenden wir das beschränkte, abgeschlossene Intervall $[a, b]$. Da f monoton wachsend ist und $[a, b]$ kompakt, gilt $\forall x \in [a, b] \colon a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. f ist also beschränkt auf $[a, b]$. Wir müssen noch zeigen, dass $\forall x \in (a, b] \colon \exists c_+ = \lim_{\xi_n \to x^+} f(\xi_n)$ und $\forall x \in [a, b) \colon \exists c_- = \lim_{\xi_n \to x^-} f(\xi_n)$.

Sei $x \in (a, b]$ und sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in [a, b]$ und $\xi_n < x$ eine monotone konvergente Folge mit Grenzwert x. Da f beschränkt ist, ist auch $f(\xi_n)$ beschränkt.

Da ξ_n eine monoton wachsende Folge ist, gilt weiters $f(\xi_n) \leq f(x)$, womit $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq 0 \Rightarrow |f(\xi_n) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = f(x)$.

Sei $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\forall n \in \mathbb{N} \colon y_m \in [a, b] \wedge y_m < x$ mit $\lim_{m \to \infty} y_n = x$. Setze $\tilde{\varepsilon} = |\xi_n - x|$, dann gilt $\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon m \geq \tilde{N} \Rightarrow |y_m - x| < \tilde{\varepsilon} = |\xi_n - x|$ woraus folgt $\xi_n \leq y_m < x$ und $f(\xi_n) \leq f(y_m) \leq f(x)$, hernach $|f(y_m) - x| \leq |f(x_n) - x| < \varepsilon$

Somit $\forall x \in (a, b] \colon \exists (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \colon \lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = x$

Aufgabe 9.3

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über das Cauchy-Integral

a

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x}{n}\,\mathrm{d}x = 0$$

b

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x = 1$$

c $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$ wobei $f_n\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \vee x = 0 \end{cases}$$

Zu a: $\frac{1}{n}$ ist ein konstanter Faktor, wir können also die Linearität des Cauchy-Integrals nutzen:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x}{n}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 0\cdot\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 0$$

Zu b:

Für $x\in[0,1]$ gilt $1 = \mathrm{e}^{\frac{0}{n}} \leq \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$. Wir nutzen erneut die Linearität des Integrals:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{0}{n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \,\mathrm{d}x = 1\\
&\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\\
&\Rightarrow 1 \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\\
&\Rightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}\,\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}$$

Für c:

Wir können Integral auch entlang eines Intervalls aufteilen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{n}} 1\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n} = 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.4

a Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\int_2^3 \mathrm{e}^{-nx^3}\,\mathrm{d}x = 0$$

b Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \int_0^x 4\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t$$

und die Ableitung f' Lipschitz stetig sind

Zu a: Betrachte $\mathrm{e}^{-27n} \le e^{-nx^3} \le \mathrm{e}^{-8n}$, somit:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-27n}\int_2^3 1\,\mathrm{d}x \le \int_2^3 \mathrm{e}^{-nx^3}\,\mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-8n}\int_2^3 1\,\mathrm{d}x\\
&\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-27} \le \int_2^3 \mathrm{e}^{-nx^3}\,\mathrm{d}x \le \mathrm{e}^{-8n}\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-27n} = 0 \le \lim_{n\to\infty}\int_2^3 \mathrm{e}^{-nx^3}\,\mathrm{d}x \le \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-8n} = 0\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_2^3 \mathrm{e}^{-nx^3}\,\mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

Zu b:

Seien oBdA $x_1 < x_2$, dann gilt:

Fall 1 $x_1, x_2 \ge 0$:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{x_2} 4\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_1} 4\cos\bigl(t^3-t\bigr)\right|\\
&= 4\left|\int_0^{x_1}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_1}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t\right|\\
&= 4\left|\int_{x_1}^{x_2}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 1 folgt daher:

$$|f(x_2)-f(x_1)| \le 4\|\cos\bigl(t^3-t\bigr)\|_\infty |x_2-x_1| \le 4|x_2-x_1|$$

Fall 2 $x_1, x_2 < 0$ geht analog zu Fall 1

Fall 3 $x_1 < 0$ und $x_2 \ge 0$:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{x_2} 4\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t - \int_0^{x_1} 4\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t\right|\\
&= 4\left|\int_0^{x_2}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{0}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t\right|\\
&= 4\left|\int_{x_1}^{x_2}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t - \int_{x_1}^{0}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{0}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\,\mathrm{d}t\right|\\
&= 4\left|\int_{x_1}^{x_2}\cos\bigl(t^3-t\bigr)\right| \le 4\|\cos\bigl(t^3-t\bigr)\|_\infty |x_2-x_1| \le 4|x_2-x_1|
\end{aligned}$$

Somit ist f Lipschitz-stetig mit $L = 4$. Betrachten wir f'. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt $f'(x) = \cos\bigl(x^3-x\bigr)$. Somit erhalten wir $f''(x) = 4\sin\bigl(x^3-x\bigr)(3x^2-1)$. Für $x_1 = x_2$ gilt $f'(x) = 0$. Für $x_1 \ne x_2$ verwenden wir den Mittelwertsatz:

$$|f'(x_1)-f'(x_2)| = \frac{|f'(x_1)-f(x_2)|}{|x_2-x_1|}|x_2-x_1| = |f''(x_0)|\cdot|x_2-x_1|$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\left|\sin\left(x_0^3 - x_0\right)\right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|3x_0^2 - 1|}_{\leq 2} \cdot |x_2 - x_1| \leq 8|x_2 - x_1|$$