Übungsblatt № 10

Aufgabe 43: Dreiecksverteilung

Die Dreiecksverteilung hat die Dichte $f(x) = (1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)$. Bestimmen Sie ihre charakteristische Funktion und zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion einer geraden Dichte stets reellwertig ist.

Wir zeigen zuerst, dass gerade Dichten reellwertige charakteristische Funktionen haben. Ist X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X, dann:

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Offenbar gilt

$$\overline{\varphi_X(t)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit der Substitution $y = -x$ erhalten wir somit, sofern f_X gerade ist:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_X(t)} &= \lim_{R\to\infty} -\int_{R}^{-R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty} f_X(-y)\,\mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty} f(-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty} f_X(-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty} f_X(y)\,\mathrm{d}y = \varphi_X(t)
\end{aligned}$$

Da also $\overline{\varphi_X} \equiv \varphi_X$, folgt $\forall t \in \mathbb{R}\colon \varphi_X(t) \in \mathbb{R}$. Für die Dreiecksverteilung folgt nun:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1 - |x|)I_{(-1,1)}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1 - |x|)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1 + x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}(1 - x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Wir berechnen die einzelnen Integrale

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}t}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) \qquad \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1\right) \\
&\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \frac{2}{t}\sin(t) \\
&\int x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}t}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \frac{1}{\mathrm{i}t}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}t}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \\
&\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \\
&\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \frac{1}{t^2} \\
&\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2} + \frac{1}{\mathrm{i}t}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) - \frac{1}{t^2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) \\
&= \frac{2}{t^2} - \frac{2}{t}\sin(t) - \frac{2}{t^2}\cos(t) \implies \varphi(t) = \frac{2}{t^2}\left(1 - \cos(t)\right)
\end{aligned}$$