Aufgabe 1: Binomischer Lehrsatz

Bestimmen Sie den Koeffizienten von $wx^5y^3z^2$ in $(w+x+y+z)^{11}$.

$$(w+x+y+z)^{11} = \sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}w^{n-k}(x+y+z)^k = \sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}w^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^{k-l}(y+z)^l$$
$$= \sum_{k=0}^{11}\binom{11}{k}w^{n-k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^{k-l}\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}y^{l-j}z^j$$

Es gilt also $k=10$, womit $l=5$ und $j=2$:

$$w\binom{11}{10}x^5\binom{10}{5}y^3z^2\binom{5}{2} = 27720wx^5y^3z^2$$

Aufgabe 2: König am Schachbrett

Auf wieviele Arten kann ein König auf einem 8×8 Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen, wenn er dabei entweder ein Feld nach rechts, ein Feld nach oben, oder ein Feld nach rechts-oben ziehen darf?

$p_{0,7}$	$p_{1,7}$	$p_{2,7}$	$p_{3,7}$	$p_{4,7}$	$p_{5,7}$	$p_{6,7}$	$p_{7,7}$
$p_{0,6}$	$p_{1,6}$	$p_{2,6}$	$p_{3,6}$	$p_{4,6}$	$p_{5,6}$	$p_{6,6}$	$p_{7,6}$
$p_{0,5}$	$p_{1,5}$	$p_{2,5}$	$p_{3,5}$	$p_{4,5}$	$p_{5,5}$	$p_{6,5}$	$p_{7,5}$
$p_{0,4}$	$p_{1,4}$	$p_{2,4}$	$p_{3,4}$	$p_{4,4}$	$p_{5,4}$	$p_{6,4}$	$p_{7,4}$
$p_{0,3}$	$p_{1,3}$	$p_{2,3}$	$p_{3,3}$	$p_{4,3}$	$p_{5,3}$	$p_{6,3}$	$p_{7,3}$
$p_{0,2}$	$p_{1,2}$	$p_{2,2}$	$p_{3,2}$	$p_{4,2}$	$p_{5,2}$	$p_{6,2}$	$p_{7,2}$
$p_{0,1}$	$p_{1,1}$	$p_{2,1}$	$p_{3,1}$	$p_{4,1}$	$p_{5,1}$	$p_{6,1}$	$p_{7,1}$
$p_{0,0}$	$p_{1,0}$	$p_{2,0}$	$p_{3,0}$	$p_{4,0}$	$p_{5,0}$	$p_{6,0}$	$p_{7,0}$

Abbildung 1: Vereinfachtes Schachbrett

Wir setzen $P = \{p_{i,j} | i,j = 0,\dots,7\}$. Wir definieren die folgenden Funktionen

$$r\colon P\to P \qquad p_{ij}\mapsto\begin{cases}p_{i+1,j} & i<7\\ p_{i,j} & i=7\end{cases} \qquad u\colon P\to P \qquad p_{ij}\mapsto\begin{cases}p_{i,j+1} & j<7\\ p_{i,j} & j=7\end{cases}$$
$$d\colon P\to P \qquad p_{i,j}\mapsto\begin{cases}p_{i+1,j+1} & i,j<7\\ p_{i,j} & i=j=7\end{cases}$$

Sei nun $\mathcal{F} = \{f\colon P\to P\colon f(p_{0,0}) = p_{7,7}\}$. Dabei sind Funktionen $f\in\mathcal{F}$ von der Form

$$f = u^{7-m}\circ r^{7-m}\circ d^m$$

da $\circ$ auf $F = \{r,d,u\}$ kommutativ ist. Für ein beliebiges m haben wir also $14-m$ Züge des Königs. Davon ausgehend, dass bestimmte Permutationen den Weg nicht verändern, verwenden wir den Multinomialkoeffizienten, welcher bestimmt, wie viele Arten es gibt n Elemente in l Partitionen unterscheidbar anzuordnen. Gesamt haben wir also

$$\sum_{m=0}^{7}\binom{14-m}{7-m,7-m,m} = \sum_{m=0}^{7}\frac{(14-m)!}{(7-m)!(7-m)!m!} = 48639$$

Aufgabe 4: Anzahl der Funktionen

Seien A und B zwei Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = n + 2$. Bestimmen Sie die Anzahl
a) der Funktionen von A nach B
b) der injektiven Funktionen von A nach B
c) der surjektiven Funktionen von B nach A

Zu a). Wir schreiben $\mathcal{F}(A, B) = \{f : A \to B\}$, daher suchen wir $|\mathcal{F}(A, B)|$. Da A und B endlich sind, können wir eine Aufzählung der beiden Mengen finden, also

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$
$$B = \{b_1, \ldots, b_{n+2}\}$$

Wir können pro $a_i \in A$ ein beliebiges $b_j \in B$ auswählen, haben also pro a_i genau $n + 2$ mögliche Werte. Daher folgt:

$$|\mathcal{F}(A, B)| = \prod_{i=1}^{n} (n + 2) = (n + 2)^n$$

Zu b). Sei $\mathcal{I}(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(A, B) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_2)\}$. Wir suchen $|\mathcal{I}(A, B)|$. Für $x = a_1$ haben wir $n + 2$ mögliche b_j zur Auswahl. Für $x = a_2$ nur noch $n + 1$ usw. es folgt:

$$|\mathcal{I}(A, B)| = \prod_{i=0}^{n-1} (n + 2 - i)$$

Zu c). Sei $\mathcal{S}(B, A) = \{f \in \mathcal{F}(B, A) : f[B] = A\}$, dann suchen wir $|\mathcal{S}(B, A)|$. Damit $f \in \mathcal{F}(B, A)$ surjektiv ist, muss gelten:

$$\forall a_i \in A : \exists b_j \in B : f(b_j) = a_i$$

Daher müssen n verschiedene b_j auf zugehörige a_i abgebildet werden. Die beiden verbleibenden b_j können beliebig abgebildet werden. Wir wollen B also in n Partitionen zerlegen. Es folgt

$$|\mathcal{S}(B, A)| = \left\{ \begin{matrix} n + 2 \\ n \end{matrix} \right\} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^{n+2}$$

Aufgabe 5: Wörter der Länge k

Wie viele Wörter der Länge 10 und wie viele der Länge 11 kann man aus den Buchstaben des Wortes ABRAKADABRA bilden?

Unser Alphabet ist gegeben durch $\mathcal{A} = \{A, B, D, K, R\}$. Ein Wort $\omega \in \mathcal{A}^n$ ist ein geordnetes Tupel $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$, welches wir fortan als $b_n \cdots b_2 b_1$ schreiben. Damit folgt aber direkt, dass die Anzahl der Wörter der Länge n gegeben ist als:

$$|\mathcal{A}^n| = |\mathcal{A}|^n = 5^n$$

Es gibt also $5^{10} = 9,765,625$ Wörter der Länge 10 und $5^{11} = 48,828,125$ Wörter der Länge 11.

Alternativ kann man die Aufgabe auch so verstehen, dass wir die Buchstaben aus ABRAKADABRA anders anordnen. Wir haben 5 mal A, 2 mal B, 1 mal D, 1 mal K und 2 mal R. Wir können die Anzahl der unterscheidbaren Anordnungen mittels des Multinomialkoeffizienten ermitteln:

$$\binom{11}{5, 2, 1, 1, 2} = 83160$$

Hierbei müssen wir darauf aufpassen, dass wir für ein Wort aus 10 Buchstaben, einen Buchstaben entfernen müssen. Es folgt:

$$\binom{10}{4, 2, 1, 1, 2} + \binom{10}{5, 1, 1, 1, 2} + \binom{10}{5, 2, 1, 2} + \binom{10}{5, 2, 1, 2} + \binom{10}{5, 2, 1, 1, 1} = 83160$$

Aufgabe 6: Induktionsbeweis mit Binomialkoeffizienten

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

Wir führen einen Induktionsbeweis für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{m+k}{k} = \binom{m}{0} = 1$$
$$\binom{m+0+1}{0} = 1$$

Nach der Definition des Binomialkoeffizienten. Für $n-1 \to n$ folgt nun:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n}{n} + \binom{m+n-1+1}{n-1}$$
$$= \binom{m+n}{n} + \binom{m+n}{n-1} = \frac{(m+n)!}{n!m!} + \frac{(m+n)!}{(n-1)!(m+1)!}$$
$$= \frac{(m+n)!(m+1) + (m+n)!n}{n!(m+1)!} = \frac{(m+n)!(m+n+1)}{n!(m+1)!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)!} = \binom{m+n+1}{n}$$

Aufgabe 8: Team-Aufstellung

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 (unterscheidbare) Frauen und sieben (unterscheidbare) Männer so in einer Reihe aufzustellen, dass keine zwei Frauen nebeneinander stehen?

Sei $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ und $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7\}$. Wir unterscheiden zwischen 2 verschiedenen Grundtypen an Aufstellungen A und B, sowie 4 Spezialtypen. Wir stellen alle als Zykel dar

$$\begin{aligned}
A &= (m_{i_1} \quad f_{j_1} \quad m_{i_2} \quad f_{j_2} \quad m_{i_3} \quad f_{j_3} \quad m_{i_4} \quad f_{j_4} \quad m_{i_5} \quad f_{j_5} \quad m_{i_6} \quad m_{i_7}) \\
B &= (m_{i_1} \quad f_{j_1} \quad m_{i_2} \quad f_{j_2} \quad m_{i_3} \quad f_{j_3} \quad m_{i_4} \quad f_{j_4} \quad m_{i_5} \quad m_{i_6} \quad f_{j_5} \quad m_{i_7}) \\
C &= (f_{j_1} \quad m_{i_1} \quad m_{i_2} \quad m_{i_3} \quad m_{i_4} \quad f_{j_2} \quad m_{i_5} \quad f_{j_3} \quad m_{i_6} \quad f_{j_4} \quad m_{i_7} \quad f_{j_5}) \\
D &= (f_{j_1} \quad m_{i_1} \quad f_{j_2} \quad m_{i_2} \quad m_{i_3} \quad m_{i_4} \quad m_{i_5} \quad f_{j_3} \quad m_{i_6} \quad f_{j_4} \quad m_{i_7} \quad f_{j_5}) \\
E &= (f_{j_1} \quad m_{i_1} \quad f_{j_2} \quad m_{i_2} \quad f_{j_3} \quad m_{i_3} \quad m_{i_4} \quad m_{i_5} \quad m_{i_6} \quad f_{j_4} \quad m_{i_7} \quad f_{j_5}) \\
F &= (f_{j_1} \quad m_{i_1} \quad f_{j_2} \quad m_{i_2} \quad f_{j_3} \quad m_{i_3} \quad f_{j_4} \quad m_{i_4} \quad m_{i_5} \quad m_{i_6} \quad m_{i_7} \quad f_{j_5})
\end{aligned}$$

Wir definieren uns einen Shift-Zykel σ:

$$\sigma = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12)$$

Wir wollen nun zuerst bestimmen, wie viele verschiedene A und B es gibt. Dabei gibt es von beiden Grundtypen die gleiche Anzahl. Wir können die Männer unabhängig von den Frauen permutieren, haben also pro Indizierung $J = (j_1, \dots, j_5)$ genau 7! mögliche Permutationen der Männer. Es gibt 5! Permutationen der Frauen, also gesamt

$$5! \cdot 7! = 604800$$

pro Grundtyp, also gesamt $2 \cdot 5! \cdot 7! = 1,209,600$ verschiedene Grundtypen. Da $\sigma^{12} = \mathrm{id}$ gilt, können wir σ 11 mal anwenden, bevor wir wieder am Anfangszustand sind. Wir haben pro Shift also $5! \cdot 7!$ verschiedene Permutationen pro Grundtyp, insgesamt also $12 \cdot 5! \cdot 7!$ mögliche Aufstellungen vom Typ A und Typ B, gesamt also:

$$24 \cdot 5! \cdot 7! = 14,515,200$$

Zusätzlich gibt es für C, D, E, F je $5! \cdot 7!$ Permutationen, also gibt es insgesamt

$$28 \cdot 5! \cdot 7! = 16,934,400$$

Aufgabe 10: Wörter mit ungerade vielen Buchstaben

Wie viele Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ können über dem Alphabet $\{a, b\}$ gebildet werden, die ungerade viele a enthalten?

Sei n gerade, dann gibt es $\frac{n}{2}$ viele ungerade Zahlen der Form $i_k = 2k-1$ in $[n]$. Wir können jeweils $j_k = n-i_k$ viele b im Wort enthalten. Wir brauchen also die Anzahl der unterscheidbaren Permutationen ununterschiedbarer Objekte, ergo den Multinomialkoeffizienten:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2k-1, n-2k+1} = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{(2k-1)! \cdot (n-2k+1)!}$$

Ist n ungerade, so gibt es $\frac{n+1}{2}$ ungerade Zahlen $i_k = 2k-1$ in $[n]$:

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n}{(2k-1)! \cdot (n-2k+1)!} = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!}{(2k-1)! \cdot (n-2k+1)!}$$

Aufgabe 11

Beweisen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$$

Wir wissen:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m \Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} = \frac{2^m}{m!}$$

Damit erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-m+k)!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!} \frac{1}{(m-k)!(n-m)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} = \frac{n!}{(n-m)!} 2^m \frac{1}{m!} = 2^m \frac{n!}{m!(n-m)!} = 2^m \binom{n}{m}$$