Übungsblatt № 5

Aufgabe 20: Grenzfunktion von Verteilungen

Sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit Dichte

$$f_{X_i}(x) = ax^{-a-1}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) \qquad a > 0$$

Sei $X_{(n)} = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ und $Z_n = n^{-\frac{1}{a}}X_{(n)}$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X_{(n)}$ und die Grenzfunktion $G(z) = \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z)$. Ist G eine Verteilungsfunktion?

Analog zu Aufgabe 19 gilt $X_{(n)} \leq x$, wenn für $j = 1, \dots, n$ gilt $X_j \leq x$. Da die X_j unabhängig sind, erhalten wir:

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x)$$

Wir müssen also $F_{X_i}(x)$ bestimmen:

$$F_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_i}(u)\,\mathrm{d}u = a\int_{1}^{x} u^{-a-1}\,\mathrm{d}u = 1 - x^{-a}$$

Daraus erhalten wir

$$F_{X_{(n)}} = (1 - x^{-a})^n$$

Weiter bestimmen wir $F_{Z_n}(x)$:

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathbb{P}(n^{-\frac{1}{a}}X_{(n)} \leq x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq xn^{\frac{1}{a}}) = (1 - (xn^{\frac{1}{a}})^{-a})^n\mathbb{1}_{(n^{-\frac{1}{a}},\infty)} \\
&= (1 - n^{-1}x^{-a})^n\mathbb{1}_{(n^{-\frac{1}{a}},\infty)} = \left(1 - \frac{x^{-a}}{n}\right)^n \mathbb{1}_{(n^{-\frac{1}{a}},\infty)}
\end{aligned}$$

Die Grenzfunktion ist also

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \exp\bigl(-z^{-a}\bigr)\mathbb{1}_{(0,\infty)}$$

Offensichtlich ist G stetig, da $\lim_{z\to 0} G(z) = 0$. Es gilt $G'(z) = az^{-a-1}\exp(-z^{-a})$, womit für $z > 0$ folgt, dass $G'(z) > 0$, ergo G ist monoton wachsend. Nach den Eigenschaften der Exponentialfunktion gilt indes auch $\lim_{z\to\infty} G(z) = 0$ und $\lim_{z\to-\infty} G(z) = 0$. Nach dem Korrespondenzsatz ist G damit eine Verteilungsfunktion.

Aufgabe 21: Randdichten

Der Zufallsvektor (X, Y) besitze die Dichte der Form

$$f_{(X,Y)}(x, y) = cxyI_D(x, y)$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichnet und c konstant. Man bestimme c und berechne die Randdichten f_X und f_Y.

Wir erinnern uns an die folgende Eigenschaft von Verteilungsfunktionen eines Zufallsvektor $\boldsymbol{X}$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Dichte $f_{\boldsymbol{X}}(x)$:

$$\int_\Omega f_{\boldsymbol{X}} \,\mathrm{d}\lambda^n = 1$$

Für unseren Zufallsvektor muss also gelten:

$$\int_D cxy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 1$$

Wäre $f_{(X,Y)}$ konstant so wäre die Bestimmung von C trivial. In unserem Fall beschreiben wir D als Normalbereich. Betrachten wir dazu eine Graphik:

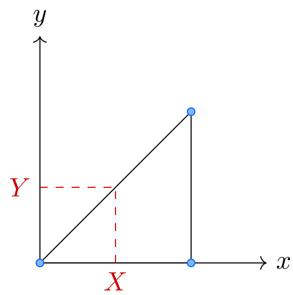

Abbildung 1: Darstellung der Fläche über die wir integrieren

Offensichtlich ist der gültige Integrationsbereich von X bzw. Y abhängig. Wir werden in diesem Fall X als die freie Variable wählen. Der zu integrierende Bereich für Y ist dann also $[0, X]$. Damit erhalten wir:

$$\int_0^1 \int_0^x xyc \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = c \int_0^1 x \int_0^x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{c}{2} \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{c}{8} \implies c = 8$$

Betrachte wir den Unterschied zur konstanten Dichte. Offensichtlich gilt $\lambda^2(D) = \frac{1}{2}$, womit $c = 2$ gälte.

Zur Bestimmung der Randdichten:

$$f_X(u) = \int_\mathbb{R} 8uyI_D(u, y) \,\mathrm{d}y$$
$$f_Y(u) = \int_\mathbb{R} 8xuI_D(x, u) \,\mathrm{d}x$$

Offensichtlich gilt $I_D(x, y) = 0$ für $y > x$ bzw. $x < y$ mit $x, y \in [0, 1]$. Für $x, y \in [0, 1]^\mathrm{c}$ gilt sowieso $I_D(x, y) = 0$.

$$f_X(u) = 8u \int_0^u y \,\mathrm{d}y = 4u^3$$
$$f_Y(u) = 8u \int_u^1 x \,\mathrm{d}x = 4u\left(1 - u^2\right)$$

Aufgabe 22: Unabhängigkeit in Polarkoordinaten

Ein Punkt wird stetig gleichverteilt im Einheitskreis ausgewählt. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen R und Φ seiner Polarkoordinaten unabhängig sind.

Wir wählen $(X, Y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\} = K_1$. Wir wollen also zeigen, dass $\mathbb{P}(R \in [0, 1], \Phi \in [-\pi, \pi]) = \mathbb{P}(R \in [0, 1])\mathbb{P}(\Phi \in [-\pi, \pi])$ gilt. Analog können wir auch Satz 3.4 aus dem Skript verwenden, welcher besagt:

> Die reellen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn gilt:
>
> $$P_{(X_1,\ldots,X_n)} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$$
>
> also die gemeinsame Verteilung das Produkt der Randverteilungen ist.

Wir brauchen also $\mathbb{P}_{(R,\Phi)}$ sowie $\mathbb{P}_R$ und $\mathbb{P}_\Phi$. Wir bestimmen zuerst $\mathbb{P}(R \leq r)$. Sei $K_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leq r\}$, dann ist $\mathbb{P}(R \leq r) = \mathbb{P}((X, Y) \in K_r)$. Da $(X, Y) \sim \mathcal{U}(K_1)$ folgt direkt:

$$\mathbb{P}((X, Y) \in K_r) = \frac{\lambda^2(K_r \cap K_1)}{\lambda^2(K_1)} = \frac{\lambda^2(K_r)}{\lambda^2(K_1)} = \frac{\pi r^2}{\pi} = r^2 = F_R(r) \qquad r \in [0, 1]$$

$$r < 0 \implies K_r = \emptyset \implies \lambda^2(K_r) = 0 \implies F_R(r) = 0$$

$$r > 1 \implies \frac{\lambda^2(K_r \cap K_1)}{\lambda^2(K_1)} = \frac{\lambda^2(K_1)}{\lambda^2(K_1)} = 1 = F_R(r)$$

Somit ist F_R eine Verteilungsfunktion. Sei nun $S_\varphi = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta))|r \in [0, 1], \theta \in [0, \varphi]\}$ der Kreissektor von 0 bis φ. Dann ist $\mathbb{P}(\Phi \leq \varphi) = \mathbb{P}((X, Y) \in S_\varphi)$. Wir bestimmen daher:

$$\mathbb{P}((X, Y) \in S_\varphi) = \frac{\lambda^2(S_\varphi \cap K_1)}{\lambda^2(K_1)} = \frac{\lambda^2(S_\varphi)}{\pi}$$

Wir brauchen daher $\lambda^2(S_\varphi)$:

$$\lambda^2(S_\varphi) = \int_0^1 r \int_0^\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r = \frac{\varphi}{2}$$

Daraus erhalten wir $F_\Phi(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}$. Für $\varphi \geq 2\pi$ gilt natürlich $S_\varphi = K_1$ und damit $F_\Phi(\varphi) = 1$. Analog ist für $\varphi < 0$ $S_\varphi = \emptyset$ und damit $\lambda^2(S_\varphi) = 0$ bzw. $F_\Phi(\varphi) = 0$. Somit ist F_Φ tatsächlich eine Verteilungsfunktion.

Wir brauchen noch $\mathbb{P}(R \leq r, \Phi \leq \varphi) = \mathbb{P}((X_1, X_2) \in K_r \cap S_\varphi)$:

$$\mathbb{P}((X, Y) \in K_r \cap S_\varphi) = \frac{\lambda^2(K_r \cap S_\varphi \cap K_1)}{\lambda^2(K_1)} = \frac{\lambda^2(T_{r,\varphi} \cap K_1)}{\pi}$$

Sei nun $T_{r,\varphi} = \{(l\cos(\theta), l\sin(\theta))|0 \leq l \leq r, 0 \leq \theta \leq \varphi\}$, dann erhalten wir

$$\lambda^2(T_{r,\varphi}) = \int_0^r l \int_0^\varphi \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}l = \varphi \int_0^r l \, \mathrm{d}l = \frac{\varphi}{2} r^2 \implies F_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{\varphi r^2}{2\pi}$$

Für $r < 0$ ist $T_{r,\varphi} = \emptyset$ und somit $F_{R,\Phi}(r, \varphi) = 0$. Für $r > 1$ ist $T_{r,\varphi} \cap K_1 = S_\varphi$. Für $\varphi < 0$ ist $T_{r,\varphi} = \emptyset$ und daher $F_{R,\Phi}(r, \varphi) = 0$. Für $\varphi > 2\pi$ ist $T_{r,\varphi} \cap K_1 = K_r$. Für $r > 1$ und $\varphi > 2\pi$ folgt somit $T_{r,\varphi} \cap K_1 = K_1$, womit $F_{R,\Phi}(r, \varphi) = 1$. Deswegen ist $F_{R,\Phi}(r, \varphi)$ eine Verteilungsfunktion.

Wir haben daher gezeigt, dass $\mathbb{P}(R \leq r, \Phi \leq \varphi) = \mathbb{P}(R \leq r)\mathbb{P}(\Phi \leq \varphi)$, weswegen R und Φ unabhängig sind.

Aufgabe 23: Unabhängigkeit der σ-Algebren

Sind A und B unabhängige Ereignisse, dann sind nach dem Unabhängigkeitskriterium auch $\sigma(A)$ und $\sigma(B)$ unabhängig. Zeigen Sie das direkt.

Wir erinnern uns, dass zwei Ereignisse A und B unabhängig sind, wenn $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ gilt. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ unser Wahrscheinlichkeitsraum.

Wir merken an, dass $\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^\mathsf{c}\}$ und $\sigma(B) = \{\emptyset, \Omega, B, B^\mathsf{c}\}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{P}(A_1 \cap B_1) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_1)$ für $A_1 \in \sigma(A)$ und $B_1 \in \sigma(B)$. Da für $A_1 = \Omega$ folgt $\mathbb{P}(\Omega \cap B_1) = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(B_1)$. Analog für $B_1 = \Omega$. Für $A_1 = \emptyset$ folgt natürlich $\mathbb{P}(\emptyset \cap B_1) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbb{P}(B_1)$ und analog für $B_1 = \emptyset$. Wir wollen also nur noch zeigen, dass A und B^c unabhängig sind, bzw. A^c und B, und A^c und B^c:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A^\mathsf{c} \cap B^\mathsf{c}) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A^\mathsf{c})\mathbb{P}(B^\mathsf{c})\end{aligned}$$

Für die Unabhängigkeit von A^c und B:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(A^\mathsf{c} \cap B) = \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &= \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A^\mathsf{c})\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

Analog für die Unabhängigkeit von B^c und A.