Übungsblatt 4

Beispiel 4.1. Es seien $R_1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und $R_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit:

$$(x, y)R_1(a, b) \Leftrightarrow (x \leq a) \wedge (y \leq b)$$
$$(x, y)R_2(a, b) \Leftrightarrow (x < a) \vee ((x = a) \wedge (y \leq b))$$

Zu prüfen sind, welche der Relationen Total- oder Halbordnungen sind. Zu Erinnerung (A ist eine Menge):

- Eine Relation R auf A heißt Halbordnung wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist
- Eine Relation R auf A heißt Totalordnung, wenn sie eine totale Halbordnung ist
- Eine Relation R auf A heißt total, wenn $\forall x, y \in A\colon (xRy) \vee (yRx)$ gilt

Prüfen wir zuerst R_1:

$$\begin{aligned}
\text{Reflexivität} \quad & (x, y)R_1(x, y) \Leftrightarrow (x \leq x) \wedge (y \leq y) \quad \text{erfüllt} \\
\text{Anti-Symmetrie} \quad & ((x, y)R_1(a, b)) \wedge ((a, b)R(x, y)) \\
& \Leftrightarrow ((x \leq a) \wedge (y \leq b)) \wedge ((a \leq x) \wedge (b \leq y)) \Leftrightarrow ((x \leq a) \wedge (a \leq x)) \wedge ((y \leq b) \wedge (b \leq y)) \\
& \Rightarrow (x = a) \wedge (y = b) \quad \text{erfüllt} \\
\text{Transitivität} \quad & ((x, y)R_1(a, b)) \wedge ((a, b)R_1(c, d)) \Leftrightarrow ((x \leq a) \wedge (y \leq b)) \wedge ((a \leq c) \wedge (b \leq d)) \\
& \Rightarrow ((x \leq c) \wedge (y \leq d)) \Leftrightarrow (x, y)R(c, d) \quad \text{erfüllt}
\end{aligned}$$

R_1 ist nur eine Halbordnung, da für $x \leq a$ und $b \leq y$ weder $(x, y)R_1(a, b)$ noch $(a, b)R_1(x, y)$.
Weiter mit R_2:

$$\begin{aligned}
\text{Reflexivität} \quad & (x, y)R_2(x, y) \Leftrightarrow (x < x) \vee ((x = x) \wedge y \leq y)) \quad \text{erfüllt} \\
\text{Anti-Symmetrie} \quad & ((x, y)R_2(a, b)) \wedge ((a, b)R_2(x, y)) \\
& \Leftrightarrow ((x < a) \vee ((x = a) \wedge (y \leq b))) \wedge ((a < x) \vee ((a = x) \wedge (b \leq y))) \\
& \Leftrightarrow ((x < a) \wedge (a < x)) \vee ((x < a) \wedge (a = x) \wedge (b \leq y)) \vee ((a < x) \wedge (x = a) \wedge (y \leq b)) \\
& \vee ((x = a) \wedge (a = x) \wedge (y \leq b) \wedge (b \leq y)) \\
& \Leftrightarrow ((x = a) \wedge (a = x) \wedge (y \leq b) \wedge (b \leq y)) \Rightarrow ((x = a) \wedge (y = b)) \\
& \Leftrightarrow (x, y) = (a, b) \quad \text{erfüllt}
\end{aligned}$$

Zur Transitivität:

$$\begin{aligned}
& (x, y)R_2(a, b) \wedge (a, b)R_2(c, d) \\
\Leftrightarrow & ((x < a) \vee ((x = a) \wedge (y \leq b))) \wedge ((a < c) \vee ((a = c) \wedge (b \leq d))) \\
\Leftrightarrow & ((x < a) \wedge (a < c)) \vee ((x < a) \wedge (a = c) \wedge (b \leq d)) \\
& \vee ((a < c) \wedge (x = a) \wedge (y \leq b)) \vee ((a = c) \wedge (b \leq d) \wedge (x = a) \wedge (y \leq b)) \\
\Rightarrow & (x < c) \vee ((x = c) \wedge (y \leq d)) \Leftrightarrow (x, y)R_2(c, d)
\end{aligned}$$

Auch R_2 ist zumindest eine Halbordnung. Zuletzt machen wir uns zur Totalität von R_2 Gedanken:

$$\begin{aligned}
& (x, y)R_2(a, b) \vee (a, b)R_2(x, y) \\
& \Leftrightarrow (x < a) \vee ((x = a) \wedge (y \leq b)) \vee (a < x) \vee ((a = x) \wedge (b \leq y)) \\
x < a: \quad & \Rightarrow (x, y)R_2(a, b) \\
x > a: \quad & \Rightarrow (a, b)R_2(x, y) \\
x = a: \quad & \Rightarrow (a, b)R_2(x, y) \wedge (x, y)R_2(a, b)
\end{aligned}$$

Für den Fall $x = a$ verwenden wir, dass $\forall y, b \in \mathbb{R}\colon (y \leq b) \vee (b \leq y)$ gilt. Somit ist R_2 eine Totalordnung.