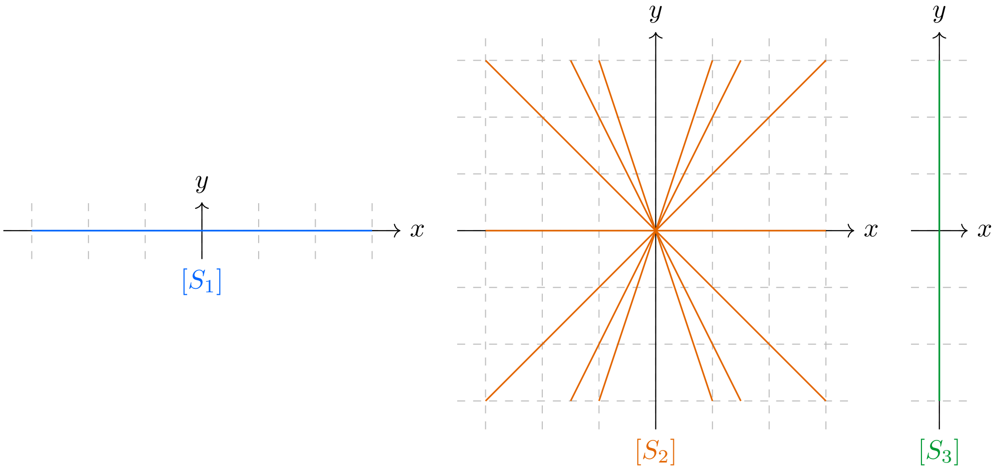
Aufgabe 39. *Gegeben sind drei Mengen $S_1 = \{(1,0)\}$, $S_2 = \{(1,y)|y \in \mathbb{Z}\}$ und $S_3 = \{(0,y)|y \in \mathbb{Z}\}$. Es sollen die linearen Hüllen über $\mathbb{R}^2$ bestimmt werden.*



Aufgabe 41. *Sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der durch die folgenden Vektoren aufgespannt wird:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Gesucht ist eine Basis von U

(b) Die gefundene Basis soll auf eine Basis des $\mathbb{R}^4$ erweitert werden.

Da die gegebene Menge 5 Vektoren enthält und der $\mathbb{R}^4$ 4-dimensional ist, können wir davon ausgehen, dass zumindest einer der gegebenen Vektoren linear abhängig ist:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{IV+I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{III+II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{IV-III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}I, -\frac{1}{3}II, -\frac{1}{4}III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Eine Basis von U wäre also:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Für (b) sollen wir $\mathcal{B}_U$ auf eine Basis des $\mathbb{R}^4$ erweitern:

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ mit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$. Wenn $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist, dann muss das folgende Gleichungssytem eindeutig lösbar sein:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_4 \end{array}\right] \xrightarrow{I=I+III-\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 - \frac{1}{2}v_2 + v_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_4 \end{array}\right]$$

Mit der gegebenen Menge können wir also eine eindutige Linearkombinaiton für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ finden, somit ist $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 42. *Sei t ein freier Paramater. Gegeben ist die folgende Familie:*

$$\left(\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \right)$$

Zu prüfen ist, für welche (a) $t \in \mathbb{Q}$ bzw. (b) $t \in \mathbb{Z}_5$ die Familie in $\mathbb{K}^3$ linear unabhängig ist.

(a) Wir machen eine Fallunterscheidung, ob $t = 0$. Zuerst sei $t = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir sehen, dass für $\alpha \in \mathbb{Q}$ der Nullvektor folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für $t \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} t & 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 2t & 0 \\ 2 & 1 & t & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-\frac{2}{t}I} \left[\begin{array}{ccc|c} t & 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 2t & 0 \\ 0 & 1 & t-\frac{4}{t} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-\frac{1}{t}II} \left[\begin{array}{ccc|c} t & 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 2t & 0 \\ 0 & 0 & t-\frac{4}{t}-2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Für $t \neq 0$ kann also nur die folgende Linearkombinaiton den Nullvektor ergeben:

$$0 \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$$

Somit ist die Familie für $t \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ linear unabhängig.

(b)

Für $t \equiv 0 \mod 5$ ist die Familie über $\mathbb{Z}_5$ wieder linear abhängig. Für $t \equiv 1 \mod 5$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{III-II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Für $t \equiv 2 \mod 5$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2III} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3I,4II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{I-II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Für $t \equiv 3 \mod 5$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{2I,2II,3III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{2III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
$$\overset{II-III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{2II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{I-4II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Für $t \equiv 4 \mod 5$ ergibt sich:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{4I,4II,3III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{III-I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{III-3II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$
$$\overset{2III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{I-3III,II-2III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Da nur für $t \equiv 1 \mod 5$ und $t \equiv 0 \mod 5$ keine eindeutig Linearkombinaiton für den Nullvektor existiert ist die Familie für $t \in \mathbb{Z}_5 \backslash \{[0]_5, [1]_5\}$ linear unabhängig.

Aufgabe 44. *Gesucht sind alle linear abhängigen Familien der folgenden Vektoren:*

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da $\mathbf{v}_1$ der Nullvektor ist, ist jede Familie (v_1, v_i) mit $i \in \{2,3,4,5\}$ bzw. jede Familie der Form $(v_1, v_i, \ldots, v_{i+k})$ für $i \in \{2,3,4,5\}$ und $k \in \{1, \ldots, 5-i\}$ linear abhängig. Weiters ist $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5)$ l.a. da $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_5$. Damit ist auch $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$ linear abhängig.