Übungsblatt №3

Aufgabe 10. *Gesucht ist die Matrixdarstellung* $\Phi_C^B(f_\text{A})$ *der linearen Abbildung* $f\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ *mit:*

$$p(x) \mapsto x \cdot p(x)$$

bezüglich der Basen $B = \{1, x, x^2 - 1\}$ *und* $C = \{1, x, x^2 - 1, x^3 - 2x\}$.

Wir suchen zuerst eine Matrix A um f_A in der Standardbasis $\{1, x, \dots, x^n\}$ darzustellen:

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \to \mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$f(p(x)) = a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x + 0 \to f(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit den Ergebnissen aus dem letzten Übungsblatt können wir $\Phi_C^B(f_\text{A})$ schnell als Matrix-Produkt bestimmen:

$$\text{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_C^B(f_\text{A}) = \text{C}^{-1}\text{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 11. *Gegeben sei die Permutation* π*:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- *a Bestimme* π^{-1} *und* π^k *für* $k \in \mathbb{N}$
- *b Bestimme alle Fehlstände von* π *und berechne* $\operatorname{sign}(\pi)$
- *c Zerlege* π *in ein Produkt von Transpositionen*

Zu a:

Bestimmen wir zuerst π^k und sehen, dass wir π als ein Produkt von zwei Zyklen π_1 und π_2 schreiben können:

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad \pi_1^3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \pi_1^4 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_1^5 = \pi_1$$

$$\pi_1^k = \begin{cases} \pi_1^{k \mod 5} & k \not\equiv 0 \mod 5 \\ \pi_1 & k \equiv 0 \mod 5 \end{cases}$$

$$\pi_2^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \pi_2^3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_2^4 = \pi_2$$

$$\pi_2^k = \begin{cases} \pi_2^{k \mod 4} & k \not\equiv 0 \mod 4 \\ \pi_2 & k \equiv 0 \mod 4 \end{cases}$$

Aus Aufgabe 12 wissen wir, dass disjunkte Zyklen kommutieren, es gilt also:

$$\pi^2 = (\pi_1\pi_2)(\pi_1\pi_2) = (\pi_1\pi_1)(\pi_2\pi_2) = \pi_1^2\pi_2^2 \Rightarrow \pi^k = \pi_1^k\pi_2^k$$

Weiters wollen wir π^{-1} bestimmen. Dazu bestimmen wir jeweils π_1^{-1} und π_2^{-1}:

$$\pi_1 \circ \pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\pi_2 \circ \pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\pi^{-1} = \pi_1^{-1}\pi_2^{-1}$$

Zu b:

Zur Erinnerung, ein Fehlstand ist ein Paar (i,j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$. Wir finden die folgenden Fehlstände:

$$(1,2)\colon \pi(2) = 1 < \pi(1) = 3$$
$$(3,7)\colon \pi(7) = 2 < \pi(3) = 7$$
$$(4,5)\colon \pi(5) = 4 < \pi(4) = 6$$
$$\Rightarrow \operatorname{sign}(\pi) = (-1)^3 = -1$$

Zu c:

Wir stellen π_1 und π_2 als Produkte von Transpositionen dar:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \pi_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12. *Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt **zyklisch**, wenn es ein $k \geq 1$ und eine Folge $i_1, i_2, \dots, i_k$ gibt, sodass $\pi(i_j) = i_{j+1}$ f+r $1 \leq j \leq k-1$ mit $\pi(i_k) = i_1$ und $\pi(i) = i$ für $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, sprich:*

$$i_1 \mapsto i_2 \mapsto \cdots \mapsto i_k \mapsto i_1$$

Üblicherweise schreiben wir $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$.

- *a Zeige, dass zwei zyklische Permutationen $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \end{pmatrix}$ und $\varrho = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_l \end{pmatrix}$ kommutieren, wenn gilt $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$*
- *b Zerlege den Zyklus in ein Produkt von Transpositionen und zeige, dass für eine zyklische Permutation gilt* $\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{k-1}$

Zu a:

Seien $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \emptyset$. Sei $i \in \{i_1, \dots, i_k\} = I$ und $j \in \{j_1, \dots, j_l\} = J$:

$$\forall i \in I\colon \pi(i) \in I \wedge \varrho(i) = i \qquad \forall j \in J\colon \varrho(j) \in J \wedge \pi(j) = j$$
$$\Rightarrow \pi(\varrho(i)) = \pi(i) \qquad \pi(\varrho(j)) = \varrho(j) \qquad \varrho(\pi(j)) = \varrho(j) \qquad \varrho(\pi(i)) = \pi(i)$$
$$\Rightarrow (\pi \circ \varrho)(i) = \pi(i) = (\varrho \circ \pi)(i) \qquad (\pi \circ \varrho)(j) = \varrho(j) = (\varrho \circ \pi)(j)$$

Zu b:

Eine Transposition τ_{ij} ist ein 2-Zyklus $\tau = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$ bzw. für $i_j \mapsto i_{j+1}$ schreiben wir $\tau_j = \begin{pmatrix} i_j & i_{j+1} \end{pmatrix}$. Somit können wir π folgendermaßen darstellen:

$$\pi = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{k-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_2 & i_3 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} i_{k-1} & i_k \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \pi(i_j) = \left(\left(\bigcirc_{l=1}^{j-1} \tau_{j-l}\right) \circ \tau_j\right)(i_j) = i_{j+1} | j < k$$

Da für $l > j$ gilt $\tau_l(i_j) = i_j$ reduziert sich das Produkt auf die ersten j Transpositionen. Da aber weiterhin gilt $\tau_j(i_j) = i_{j+1}$ folgt für $l < j$, dass $\tau_l(\tau_j(i_j)) = i_{j+1}$, womit $\pi(i_j) = i_{j+1}$ für $j < k$. Wir müssen also nur noch den Fall i_k klären. Betrachten wir die Verknüpfung etwas genauer:

$$\pi = \tau \circ \tau_{k-1} = \begin{pmatrix} \tau(i_1) & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc_{l=2}^{k-2} \tau_{k-l}(i_1) & i_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bigcirc_{l=3}^{k-3} \tau_{k-l}(i_1) & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_k \end{pmatrix} \Rightarrow i_k \mapsto i_1$$

Wir haben π also in $k-1$ Transpositionen zerlegt. Da für eine Transposition τ gilt $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ folgt damit:

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{k-1}$$

Aufgabe 13. *Sie $\pi \in \mathfrak{S}_n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$*

a *Zeige, dass die Folge $(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots)$ periodisch ist und das die erste Zahl, die doppelt auftaucht genau i ist*

b *Die Folge $(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$, wobei $\pi^k(i) = i$ heißt Zyklus von i. Zeige dass die Relation $i \sim j \Leftrightarrow j \in \{i, \pi(i), \dots, \pi^{k-1}(i)\}$ eine Äquivalenzrelation auf $\{1, \dots, n\}$ ist*

c *Zeige, dass jede Permutation als Produkt von kommutierenden Zyklen geschrieben werden kann*

d *Führe diese Zerlegung für die Permutation aus Aufgabe 11 durch*

Wir haben d bereits in Aufgabe 11 ausgeführt, um die Aufgabe zu lösen.

Zu a:

Da $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ eine Gruppe bildet, gilt $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n : \exists n \in \mathbb{N} \colon \sigma^n = \mathrm{id}$, sodass n minimal ist. Wir prüfen nun die einzigen $\pi^l(i)$ nacheinander. Wenn $\pi^1(i) = i$, dann gilt $k = 1$. Falls dem nicht so ist, gehen wir alle $l \in \{2, \dots, n\}$ durch. Dabei garantiert uns die Injektivität von π, dass kein Bild mehrfach vorkommt. Spätestens bei $l = n$ gilt dann aber $\pi^n = \mathrm{id}$ womit $\pi^n(i) = i$ und $k = n$.

Zu b:

Wir beginnen mit der Reflexivität. Da $i = \pi^0(i)$ gilt $i \sim i$. Weiter mit der Symmetrie. Da π zyklisch ist, gilt:

$$\begin{aligned} &\exists l \in \mathbb{Z}_k \colon \pi^l(i) = j \\ &i \sim j \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}_k \colon p^m(j) = i \end{aligned}$$

Aus der Bijektivität von π folgt, dass wir so ein m finden können. Zuletzt die Transitivität:

$$\begin{aligned} &(h \sim j \wedge j \sim i) \Rightarrow k \sim i \\ &\Leftrightarrow (\exists l_1 \in \mathbb{Z}_k \colon \pi^{l_1}(j) = h) \wedge (\exists l_2 \in \mathbb{Z}_k \colon \pi^{l_2}(i) = j) \end{aligned}$$

Wir wissen aus der Symmetrie, dass $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_k \colon \pi^{m_1}(h) = j \wedge p^{m_2}(j) = i$, daraus folgt aber:

$$(\pi^{m_2} \circ \pi^{m_1})(h) = i$$

Aus der Bijektivität von π folgt daher, $\exists m \in \mathbb{Z}_k \colon \pi^m(i) = h$. Somit ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Zu c:

Sei $I = \{1, \dots, n\}$. Seien weiters $[i] = \{j \in I | j \sim i\}$ und $\mathcal{I} = \{[i] | i \in I\}$. Sei $\mathbf{i} \in I/\mathcal{I}$, dann gilt $\forall j \in \mathbf{i} \colon j \sim i$ womit $\exists l \in \mathbb{Z}_k \colon \pi^l(i) = j$. Dann bestimmen wir $\tau_i = \begin{pmatrix} i & \pi(i) & \pi^2(i) & \dots & \pi^{k-1}(i) \end{pmatrix}$ mit $k = |[i]|$. Dann gilt aber $\forall j \in [i] \colon j \in \{i, \pi(i), \dots, \pi^{k-1}(i)\}$. Somit haben wir $p = |I/\mathcal{I}|$ verschiedene disjunkte Zyklen bestimmt, die somit auch kommutieren. Disjunkt sind die Zyklen deshalb, weil die Äquivalenzrelation $\sim$ $\{1, \dots, n\}$ in p verschiedene disjunkte Äquivalenzklassen partitioniert.