

Übungsblatt № 11

Aufgabe 122

Beweisen Sie die beiden folgenden Hilfsaussage, die in der Herleitung von Quasi-Newton Formeln in der Vorlesung verwendet werden.

- a) $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{w}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} |\mathbf{w}^\top \mathbf{x}|$
- b) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{v}\mathbf{w}^\top\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$

Zu a): Für $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Sei daher oBdA $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Mit Cauchy-Schwarz erhalten wir

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} |\mathbf{w}^\top \mathbf{x}| \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} (\|\mathbf{w}\| \cdot \|\mathbf{x}\|) = \|\mathbf{w}\|$$

Für $\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w}$ gilt andererseits

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} |\mathbf{w}^\top \mathbf{x}| \geq |\mathbf{w}^\top \bar{\mathbf{x}}| = \|\mathbf{w}\|$$

Damit haben wir unsere Behauptung gezeigt.

Zu b): Mit a) erhalten wir direkt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\mathbf{w}^\top\| &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|(\mathbf{v}\mathbf{w}^\top)\mathbf{x}\| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{v}(\mathbf{w}^\top \mathbf{x})\| \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} (|\mathbf{w}^\top \mathbf{x}| \cdot \|\mathbf{v}\|) = \|\mathbf{v}\| \cdot \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} |\mathbf{w}^\top \mathbf{x}| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \end{aligned}$$