Übungsblatt № 7

Aufgabe 28: Innendurchmesser

Bei einem Rohr sind der Innendurchmesser D und die Wandstärke W produktionsbedingten Schwankungen unterlegen. Wir modellieren sie durch unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungen $\mu_D = 100$ mm, $\mu_W = 5$ mm und Streuungen $\sigma_D = 0{,}1$ mm, $\sigma_W = 0{,}05$ mm.

i) Wie ist der Außendurchmesser $D' = D + 2W$ verteilt?
ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Innendurchmesser größer als 100,2 mm ist
iii) Berechnen Sie den Erwartungswert der Innenrohr-Querschnittstfläche

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

in mm^2 auf mindestens drei Nachkommastellen genau.

Zu i): Wir erinnern uns an die Dichten einer Normalverteilung:

$$f_D(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_D^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right)$$
$$f_W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_W)^2}{2\sigma_W^2}\right)$$

Mittels der charakteristischen Funktionen erhalten wir:

$$\varphi_D(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2}t^2} \qquad \varphi_W(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mu_W - \frac{\sigma_W^2}{2}t^2} \implies \varphi_{2W}(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\varphi_W(2t) = \varphi_W(2t)$$

$$\varphi_{D'}(t) = \varphi_D(t)\varphi_{2W}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mu_D - \frac{\sigma_D^2}{2}t^2 + 2\mathrm{i}t\mu_W - 2\sigma_W^2 t^2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(\mu_D + 2\mu_W) - \frac{t^2}{2}(\sigma_D^2 + 4\sigma_W^2)}$$
$$\implies D' \sim \mathcal{N}(\mu_D + 2\mu_W, \sigma_D^2 + 4\sigma_W^2)$$

Zu ii): Durch eine einfache Substitution $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ erhalten wir

$$F_D(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_D}{\sigma_D}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu_D}{\sigma_D}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

Wir suchen $\mathbb{P}(D \geq 100.2) = 1 - \mathbb{P}(D \leq 100.2) = 1 - F_D(100.2) \approx 0.0227$, was 2.27% entspricht.

Zu iii): Für den Erwartungswert von A ergibt sich

$$\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}\left(\frac{\pi}{4}D^2\right) = \frac{\pi}{4}\mathbb{E}(D^2)$$

Wir nutzen nun $\operatorname{var}(D) = \mathbb{E}(D^2) - \mathbb{E}(D)^2$ aus. Wir wissen, dass $\operatorname{var}(D) = \sigma_D^2$ und $\mathbb{E}(D) = \mu_D$. Daraus folgt $\mathbb{E}(D^2) = \sigma_D^2 + \mu_D^2$ und damit $\mathbb{E}(A) = \frac{\pi}{4}(\sigma_D^2 + \mu_D^2) \approx 7853{,}9895$ mm^2.

Aufgabe 30: Verdoppelungsstrategie

Ein Spieler spielt ein Spiel bei dem er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewinnt. Gewinnt er, erhält er den doppelten Einsatz, andernfalls verliert er den Einsatz. Bei unabhängiger Wiederholung des Spiels verwendet der Spieler die folgende Verdoppelungsstrategie: Er setzt beim 1. Spiel eine Einheit, gewinnt er, macht er eine Einheit Gewinn. Verliert er, spielt er weiter und verdoppelt beim nächsten Spiel seinen Einsatz. Er spielt so lange, bis er gewinnt.

i) Wie groß ist sein Gewinn, wenn er beim n-ten Spiel gewinnt?
ii) Sei $T = n$, wenn er beim n-ten Spiel gewinnt. Man berechne $\mathbb{P}(T = n)$, zeige $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ und berechne $\mathbb{E}(T)$
iii) Man stelle das vom Spiele für die Durchführung der Verdoppelungsstrategie benötigte Kapital K als Funktion von T dar und zeige $\mathbb{E}(K) = \infty$

Zu i): Beim ersten Spiel setzen wir eine Einheit, beim zweiten 2, beim dritten 3 usw, also beim n-ten Spiel 2^{n-1} Einheiten gesetzt. Der Gewinn beim n-ten Spiel ist 2^n Einheiten. Wir brauchen noch die gesamten Verluste $V_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$:

$$V_n = 2^n - 1$$

Damit ergibt sich ein Gewinn von 1 beim n-ten Spiel.

Zu ii): Wir verwenden unabhängige Bernoulli-Variablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $p = \frac{1}{2}$, wobei $X_i = 1$ wenn das i-te Spiel gewonnen wurde. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathbb{P}(T = n)$ ergibt sich dann folglich daraus, dass die ersten $n-1$ Spiele erfolglos waren, also $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$. Sei $\zeta_{\mathbb{N}}$ das Zählmaß von $\mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(T < n) = \mathbb{P}(T \in [-\infty, n]) = \int_{[-\infty,n]} f_T \, \mathrm{d}\zeta_{\mathbb{N}} = \sum_{k\in[-\infty,n]\cap\mathbb{N}} f_T(k) = \sum_{k=1}^{n} f_T(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\implies \mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

Für $\mathbb{E}(T)$

$$\mathbb{E}(T) = \int T \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Wir prüfen auf Konvergenz:

$$\frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{2^k(k+1)}{2^{k+1}k} = \frac{k+1}{2k} = \frac{1+\frac{1}{k}}{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Somit konvergiert $\mathbb{E}(T)$. Wir vermuten, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2^{-n}(-n + 2^{n+1} - 2)$ und verwenden Induktion.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{n}{2^n} + \sum_{k=1}^{n-1} = n2^{-n} + 2^{-n+1}(-n + 1 + 2^n - 2) \\
&= n2^{-n} + 2 \cdot 2^{-n}(-n + 1 + 2^n - 2) = 2^{-n}(n - 2n + 2 + 2^{n+1} - 4) = 2^{-n}(-n + 2^{n+1} - 2) \\
&S_n = 2^{-n}n + 2^{-n}2^{n+1} - 2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n}n + 2 - 2^{-n+1} \\
&\lim_{n\to\infty} 2^{-n}n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\ln(2)n}n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} 2^{-n+1} = 0
\end{aligned}$$

Hernach gilt $\mathbb{E}(T) = 2$.

Zu iii): WIr haben bereits die Verluste beim n-ten Spiel als $2^n - 1$ ermittelt. Wenn der Spieler also T mal spielt, dann folgt $K = 2^T - 1$ und somit:

$$\mathbb{E}(K) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k - 1)k}{2^k} \qquad \frac{(2^k - 1)k}{2^k} = \frac{2^k(1 - 2^{-k})k}{2^k} = k - 2^{-k}k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Somit kann $\mathbb{E}(K)$ nicht konvergieren bzw. $\mathbb{E}(K) = \infty$.