Moritz Mossböck, 11820925
Andreas Archer, 11816749

Übungsblatt № 4

Aufgabe 4.3: Auf der Jagd nach einem Beweis

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Gruppen und Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "i'"] \arrow[d] & E' \\
0 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Es ist bekannt, dass jeweils alle Zeilen und Spalten exakt sind. Zeigen Sie, dass γ ein Isomorphismus ist.

Sei $c \in \ker \gamma$. Wir zeigen dazu, dass $h(c) = 1_D$. Da $c \in \ker \gamma$ folgt $\gamma(c) = 1_{C'}$, womit auch $(h' \circ \gamma)(c) = 1_{D'}$. Da δ nach der Exaktheit injektiv ist, gilt $(\delta \circ h)(c) = 1_{D'}$, womit auch $h(c) = 1_D$. Es gilt also $\exists b \in B\colon g(b) = c$ nach der Exaktheit der Zeilen. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms muss aber auch gelten $(g' \circ \beta)(b) = 1_{C'}$, hernach folgt $\beta(b) \in \ker(g')$, weswegen aus der Exaktheit folgt $\exists a' \in A'\colon f'(a') = \beta(b)$. Da α surjektiv ist, folgt daher $\exists a \in A\colon \alpha(a) = a'$. Nach der Kommutativität folgt aber $(\beta \circ f)(a) = (f' \circ \alpha)(a)$, hernach muss gelten $f(a) = b$. Aufgrund der Exaktheit gilt nun aber $g(f(a)) = 1_C = c$. Somit ist γ injektiv.

Zur Surjektivität: Wir wollen zeigen, dass $\forall c' \in C'\colon \exists c \in C\colon \gamma(c) = c'$. Sei $c' \in C'$. Nach der Exaktheit ist δ surjektiv, womit $\exists d \in D\colon \delta(d) = h'(c')$. Nach der Kommutativität gilt $(\varepsilon \circ i)(d) = (i' \circ \delta)(d)$. Nach der Exaktheit gilt nun $(i' \circ h')(c') = 1_{E'}$, womit aber insbesondere gilt $i(d) = 1_E$ nach der Injektivität von ε. Somit ist $d \in \ker(i) = \mathrm{im} h$. Somit $\exists c \in C\colon h(c) = d$, daher gilt $(h' \circ \gamma)(c) = (\delta \circ h)(c) = h'(c')$.

Aufgabe 4.4: Größter gemeinsamer Teiler und Kleinstes Gemeinsames Vielfaches

Es seien $a, b, n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $a|b$ und $a \neq 0$. Das kleinste gemeinsame Vielfache $\text{kgV}(m,n)$ von m und n ist $\text{kgV}(m,n) = \min(m\mathbb{N} \cap n\mathbb{N})$, sofern der Schnitt nicht leer ist. Falls $m\mathbb{N} \cap n\mathbb{N} = \emptyset$ setzten wir $\text{kgV}(m,n) = 0$.

a) Zeigen Sie $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \text{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z}$
b) Zeigen Sie $|a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}| = \frac{b}{a}$
c) Zeigen Sie $\text{ggT}(m,n)\text{kgV}(m,n) = mn$

Zu a): Wir wissen $m = \widetilde{m}\text{ggT}(m,n)$ und $n = \widetilde{n}\text{ggT}(m,n)$, womit

$$
\begin{aligned}
&m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \{mz_1 + nz_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} = \{\widetilde{m}\text{ggT}(m,n)z_1 + \widetilde{n}\text{ggT}(m,n)z_2 | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{\text{ggT}(m,n)(\widetilde{m}z_1 + \widetilde{n}z_2) | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} \subseteq \text{ggT}(m,n)\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Sei $z \in \text{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$, dann gilt $\exists z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, sodass $z|mz_1$ und $z|nz_2$, wobei z_1 bzw. z_2 gegebenenfalls 0 sind. Somit gilt $\text{ggT}(m,n) \subseteq m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$.

Es gilt $m|\text{kgV}(m,n)$ und $n|\text{kgV}(m,n)$:

$$
\begin{aligned}
&m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} \colon m|z \wedge n|z\} \Rightarrow z \in \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z} \Rightarrow m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \subseteq \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z} \\
&\text{kgV}(m,n)\mathbb{Z} = \{\text{kgV}(m,n)z | z \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow z \in \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z} \colon m|z \wedge n|z \Rightarrow \text{kgV}(m,n)\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Zu b):

Wir verwenden den dritten Isomorphiesatz: Sei G eine Gruppe und $N, K \trianglelefteq G$ mit $K \subseteq N$, dann gilt:

$$(G/K)/(N/K) \simeq G/N$$

Sei nun $G = \mathbb{Z}$, $N = a\mathbb{Z}$ und $K = b\mathbb{Z}$, dann gilt:

$$
\begin{gathered}
|G/K| = b \qquad |N/K| = |a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}| \qquad |G/N| = a \\
\Rightarrow \frac{b}{|a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}|} = a \Leftrightarrow |a\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}| = \frac{b}{a}
\end{gathered}
$$

Zu c): Wir verwenden den zweiten Isomorphiesatz: Sei G eine Gruppe, $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$, dann ist $UN \leq G$, $U \cap N \trianglelefteq G$ und $UN/N \simeq U/(U \cap N)$. Da $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe ist, sind alle Untergruppen automatisch Normalteiler. Sei nun $U = m\mathbb{Z}$ und $N = n\mathbb{Z}$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z})/n\mathbb{Z} \simeq m\mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \text{ggT}(m,n)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq m\mathbb{Z}/\text{kgV}(m,n)\mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \frac{\text{ggT}(m,n)}{n} = \frac{m}{\text{kgV}(m,n)} \Leftrightarrow \text{ggT}(m,n)\text{kgV}(m,n) = mn
\end{aligned}
$$