

## Übungsblatt № 2

### Aufgabe 12

Die Felder eines  $3 \times 7$  Schachbretts werden beliebig mit den Farben rot und blau gefärbt. Zeigen Sie, dass es immer ein Rechteck, mindestens  $2 \times 2$  Felder groß, gibt, dessen Eckfelder einheitlich gefärbt sind.

### Aufgabe 14

Wie viele natürliche Zahlen, welche kleiner oder gleich als  $10^6$  sind, die weder von der Form  $x^2$  noch  $x^3$ , noch  $x^5$  für  $x \in \mathbb{N}$  sind?

Wir arbeiten mit den Mengen  $A_k = \{x \in \mathbb{N} : x^k \leq 10^6\}$ . Wir wollen bestimmen, wie viele Zahlen in  $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5$  enthalten sind. Dazu bestimmen wir zunächst  $|A_k|$ . Wir wissen:

$$\left(10^{\frac{6}{k}}\right)^k = 10^6$$

Da aber  $10^{\frac{6}{k}}$  nicht zwingenderweise eine natürliche Zahl ist, nehmen wir

$$A_k = \left\{1^k, \dots, \left\lfloor 10^{\frac{6}{k}} \right\rfloor^k\right\}$$

Ergo folgt  $|A_k| = \left\lfloor 10^{\frac{6}{k}} \right\rfloor$ . Abschließend brauchen wir  $|A_2 \cap A_5|$ ,  $|A_3 \cap A_5|$ ,  $|A_2 \cap A_3|$  und  $|A_2 \cap A_3 \cap A_5|$ .

Wir suchen nun jene  $x \in A_2$ , sodass  $x^5 \leq 10^6$ :

$$x^5 = (y^2)^5 = y^{10} \leq 10^6$$