Übungsblatt № 12

Aufgabe 49: Das Momentproblem I

Legen allen Momente $\mathbb{E}(X^k)$ mit $k \geq 1$ die Verteilung von X fest? Das folgende Beispiel zeigt, dass das im Allgemeinen nicht richtig ist.

i) Ist $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ standard-normalverteilt, dann heißt $X = \mathrm{e}^Y$ log-normal verteilt. Berechnen Sie die Dichte f von X und alle Momente.

ii) Für $|\varepsilon| \leq 1$ setze

$$f_\varepsilon(x) = f(x)(1 + \varepsilon \sin(2\pi \ln(x)))$$

Dann ist f_ε eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit den selben Momenten wie f.

Da Y reellwertig ist, gilt $\mathbb{P}(X < 0) = 0$. Wir können daher oBdA annehmen, dass $X \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\mathrm{e}^Y \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq \ln(x)) = F_Y(\ln(x)) = F_X(x) \implies f_X(x) = \frac{1}{x} f_Y(x)$$
$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \implies f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} I_{(0,\infty)}$$

Für die Momente:

$$\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{kY}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ky}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y$$

Wir betrachten dazu

$$ky - \frac{y^2}{2} = \frac{2ky - y^2}{2} = \frac{-k^2 + 2ky - y^2 + k^2}{2} = \frac{k^2 - (y-k)^2}{2}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-k)^2}{2}}\, \mathrm{d}y}_{=\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{\frac{k^2}{2}}$$

Zu ii):

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} (1 + \varepsilon \sin(2\pi \ln(x)))\, I_{(0,\infty)}\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} I_{(0,\infty)}\, \mathrm{d}x + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} \sin(2\pi\ln(x)) I_{(0,\infty)}\, \mathrm{d}x \right)$$

Wir betrachten die Integrale separat und beginnen mit dem ersten. Dazu sei $v(x) = \ln(x)$, womit

$$I_1 = \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \int v'(x)\mathrm{e}^{-\frac{v(x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \ln(x)\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} - \int \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x)\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\right) - \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} + \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} - \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\, \mathrm{d}x$$
$$u = \ln(x) \implies \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \implies I_1 = \int \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u$$

Für das zweite Integral sei wieder $v(x) = \ln(x)$

$$I_2 = \int v'(x)\mathrm{e}^{-\frac{v^2(x)}{2}} \sin(2\pi v(x))\, \mathrm{d}x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}} \sin(2\pi\ln(x)) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}}{x} (2\pi\cos(2\pi\ln(x)) - \ln(x)\sin(2\pi\ln(x)))$$

$$
\begin{aligned}
&\implies I_2 = \ln(x)\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x)) - \int \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\left(2\pi\cos(2\pi\ln(x)) - \ln(x)\sin(2\pi\ln(x))\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(x)\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))\right) - \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x)) + \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))\right) - \ln(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))\,\mathrm{d}x u = \ln(x) \implies \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \implies I_2 = \int \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Da $\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$ gerade und $\sin(2\pi u)$ ungerade ist, folgt damit

$$
\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = \int_{-R}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{R}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u \\
&v = -u \implies \mathrm{d}v = -\mathrm{d}u \\
&\implies \int_{-R}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = -\int_{R}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{-v^2}{2}}\sin(-2\pi v)\,\mathrm{d}v = \int_{0}^{R}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(-2\pi u)\,\mathrm{d}u \\
&\implies \int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = 0
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir allerdings

$$
\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u + \varepsilon\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1
$$

Da $|\varepsilon| \leq 1$ folgt somit sofort, dass $f_\varepsilon \geq 0$, womit f_ε eine Dichte ist. Für die Momente betrachten wir

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} x^k f_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{x^k}{x}\mathrm{e}^{-\frac{\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))I_{(0,\infty)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{2\ln(x)-\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))I_{(0,\infty)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{2k\ln(x)-\ln(x)^2}{2}}\sin(2\pi\ln(x))I_{(0,\infty)}\,\mathrm{d}x \\
&u = \ln(x) \implies \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \implies \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\frac{2ku-u^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u \\
&= \varepsilon\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\frac{(u-k)^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R\to\infty}\int_{k-R}^{k+R}\mathrm{e}^{-\frac{(u-k)^2}{2}}\sin(2\pi u)\,\mathrm{d}u = 0
\end{aligned}
$$

Damit haben f_ε und f die gleichen Momente.

Aufgabe 56: Unerwartetes Auftreten von e

Man wähle so lange unabhängig zufällige Zahlen aus $(0,1)$ bis ihre Summe 1 übersteigt. Der Erwartungswert der dazu benötigten Zahlen ist die Eulersche Zahl.

Es sei $N(x)$ die kleinste Anzahl der gezogenen Zahlen $X_1, \ldots, X_{N(x)}$, sodass

$$
\sum_{k=1}^{N(x)} X_k > x
$$

Wir setzen nun $m_x = \mathbb{E}(N_x)$. Für $X_1 = z$ brauchen wir für $z < x$ genau $1 + N'$ Züge, wobei N' die gleiche Verteilung wie N_{x-u} hat. Daraus folgt aber

$$
m_x = 1 + \int_0^x m_{x-u}\,\mathrm{d}u = 1 + \int_0^x m_u\,\mathrm{d}u
$$

Ableiten liefer die Differentialgleichung $m_x' = m_x$ mit der allgemeinen Lösung $C\mathrm{e}^x$. Da $m_0 = 1$ folgt somit $m_x = \mathrm{e}^x$, daher auch $m_1 = \mathrm{e}$.