

Blatt № 3

Aufgabe 7: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 3y(x) = \sin(x) - \cos(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

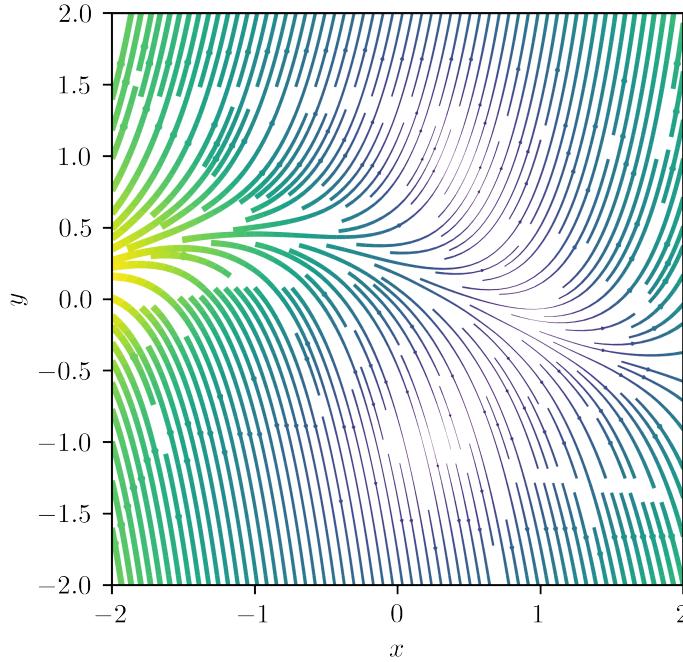


Figure 1: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Es handelt sich hierbei um eine lineare Differentialgleichung mit $g(x) = 3$, also $G(x) = 3x - x_0$. Damit erhalten wir direkt die folgende homogene Lösung y_h :

$$y_h(x) = e^{-3x+x_0}$$

Die partikuläre Lösung erhalten wir durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = \int^x f(s)e^{3(s-x)} \, ds$$

Dabei gilt $f(s) = \sin(s) - \cos(s)$:

$$\begin{aligned} \int \sin(s)e^{\alpha s} \, ds &= \int \frac{1}{2i}(e^{s(\alpha+i)} - e^{s(\alpha-i)}) \, ds \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\alpha+i} e^{s(\alpha+i)} - \frac{1}{\alpha-i} e^{s(\alpha-i)} \right) = \frac{e^{\alpha s}}{2i} \left(\frac{\alpha e^{is} - ie^{is} - \alpha e^{-is} - ie^{-is}}{\alpha^2 + 1} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha s}}{2i(\alpha^2 + 1)} (2\alpha i \sin(s) - 2i \cos(s)) = \frac{e^{3s}}{\alpha^2 + 1} (\alpha \sin(s) - \cos(s)) \\ \int \cos(s)e^{\alpha s} \, ds &= \int \frac{1}{2}(e^{s(\alpha+i)} + e^{s(\alpha-i)}) \, ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha+i} e^{s(\alpha+i)} + \frac{1}{\alpha-i} e^{s(\alpha-i)} \right) = \frac{e^{\alpha s}}{2} \left(\frac{\alpha e^{is} - ie^{is} + \alpha e^{-is} + ie^{-is}}{\alpha^2 + 1} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha s}}{2(\alpha^2 + 1)} (2\alpha \cos(s) + 2 \sin(s)) = \frac{e^{\alpha s}}{\alpha^2 + 1} (\alpha \cos(s) + \sin(s)) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}y_p(x) &= e^{-3x} \int^x \sin(s)e^{3s} - \cos(s)e^{3s} \, ds \\&= \frac{1}{10}(3\sin(x) - \cos(x)) - \frac{1}{10}(3\cos(x) + \sin(x)) = \frac{\sin(x) - 2\cos(x)}{5}\end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung also:

$$y(x) = ce^{-3x-x_0} + \frac{\sin(x) - 2\cos(x)}{5}$$

Aufgabe 8: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2 + \sin(x+y) + \sin(x+y)y' = 0$$

Hier liegt es nahe die Transformation $u(x) = y + x$ einzuführen, womit $u' = y' + 1$:

$$y' = -\frac{2}{\sin(u)} - 1 \Rightarrow u' = -\frac{2}{\sin(u)}$$

Sei $u \neq k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Trennung der Veränderlichen führt auf:

$$\begin{aligned}u' \sin(u) &= -2 \Rightarrow \int^x u'(s) \sin(u(s)) \, ds = -\int^x 2 \, ds = -2x - 2c \\&\Rightarrow \int^u \sin(z) \, dz = -2x - 2c \Leftrightarrow -\cos(u(x)) = -2x - 2c \Leftrightarrow \cos(u(x)) = 2x + 2c \\&\Rightarrow u(x) = \arccos(2x + 2c)\end{aligned}$$

Da der Arkus-Cosinus nur auf $[-1, 1]$ definiert ist, muss $-1 \leq 2x + 2c \leq 1$ gelten, sprich $-\frac{1}{2} - c \leq x \leq \frac{1}{2} - c$.

Da $y(x) = u(x) - x$ erhalten wir:

$$y(x) = \arccos(2x + 2c) - x$$

Für $u = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist die Differentialgleichung nicht erfüllt.

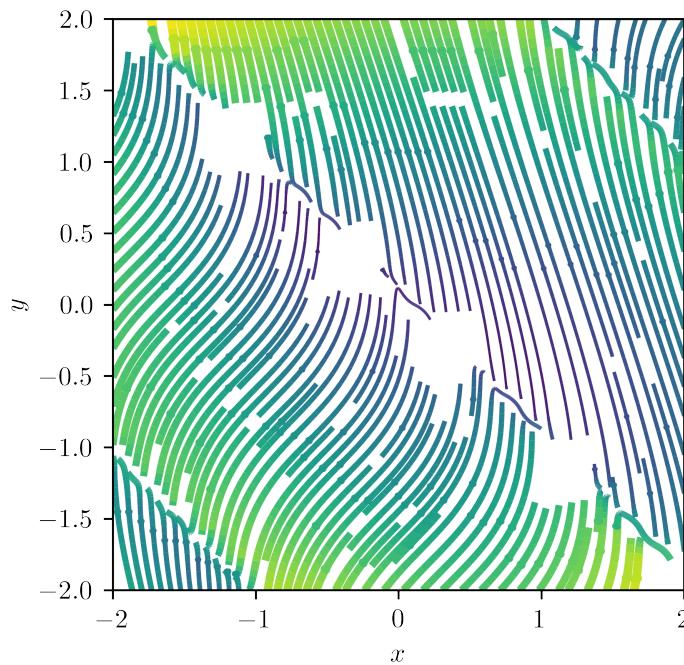


Figure 2: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Aufgabe 9: Exakte Differentialgleichung

Man bestimme alle Funktionen $f(x)$, sodass die Differentialgleichung

$$y^2 \cos(x) + y f y' = 0$$

exakt ist. Für diese Funktionen bestimme man die implizit gegebene Lösung der Differentialgleichung.

Wir sehen, dass $g(x, y) = y^2 \cos(x)$ und $h(x, y) = y f$. Unter der Annahme, dass $y(x)$ stetig differenzierbar ist und $y \neq 0$ bestimmen wir:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y \cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{\partial h}{\partial x} = f' y$$

Das führt uns auf die folgende lineare Differentialgleichung in f :

$$f' y = 2y \cos(x) \Leftrightarrow f'(x) = 2 \cos(x) \Rightarrow f(x) = 2 \sin(x) + 2c$$

Damit folgt $\frac{\partial h}{\partial x} = 2y \cos(x) = \frac{\partial g}{\partial y}$, somit erhalten wir die folgende exakte Differentialgleichung:

$$y^2 \cos(x) + y(2 \sin(x) + 2c)y' = 0$$

Wir beginnen mit der Bestimmung eines Skalarfeldes $F(x, y)$:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int g(x, y) \, dx + \varphi(y) = y^2 \sin(x) + \varphi(y) \\ \varphi(y) &= \int h(x, y) - \left(\frac{\partial}{\partial y} \int g(x, y) \, dx \right) \, dy = \int 2y \sin(x) + 2yc - 2y \sin(x) \, dx = cy^2 + d \\ \Rightarrow F(x, y) &= y^2(\sin(x) + c) + d \end{aligned}$$

Prüfen wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2 \cos(x) = g(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2y(\sin(x) + c) = h(x, y) \end{aligned}$$

Wir haben also die folgende implizite Lösungskurve für y :

$$y^2(\sin(x) + c) = \alpha \in \mathbb{R}$$