# 7. Übungsblatt

**Aufgabe 31.** Es seien $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $z_1 = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1$ und $z_2 = \alpha_2 + \mathrm{i}\beta_2$ mit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned}
&z \cdot \overline{z} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg\{z\}} \cdot |z|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\arg\{z\}} = |z|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg\{z\}-\arg\{z\})} = |z|^2 \\
&z + \overline{z} = \alpha + \mathrm{i}\beta + \alpha - \mathrm{i}\beta = 2\alpha = 2\Re\{z\} \\
&z - \overline{z} = \alpha + \mathrm{i}\beta - \alpha + \mathrm{i}\beta = 2\mathrm{i}\beta = 2\mathrm{i}\Im\{z\} \\
&\overline{z_1 + z_2} = \alpha_1 + \alpha_2 - \mathrm{i}(\beta_1 + \beta_2) = \alpha_1 - \mathrm{i}\beta_1 + \alpha_2 - \mathrm{i}\beta_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
&z_1 \cdot z_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 + \mathrm{i}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \\
&\overline{z_1 \cdot z_2} = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \mathrm{i}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \\
&\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 - \mathrm{i}(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)
\end{aligned}$$

Es verbleibt noch $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$:

$$\begin{aligned}
&|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \\
&= \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 + \beta_1^2\beta_2^2} \\
&|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2} = \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1^2} \\
&= \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2}
\end{aligned}$$

Für die letze Gleichung benötigen wir ein Lemma

**Lemma 1**
Sei $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ eine komplexe Zahl mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\alpha \leq |z|$$

*Beweis.* Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re\{z\} = \alpha$ und $\Im\{z\} = \beta$:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq \sqrt{\alpha^2} \geq \alpha$$

□

Und die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Dazu zeigen wir $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$:

$$\begin{aligned}
&(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_1 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re\{\overline{z_1}z_2\} \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\overline{z_1}z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|\overline{z_1}||z_2| = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2
\end{aligned}$$

**Aufgabe 32.** Ein Integritätsbereich ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins.

a) Zeige, dass ein endlicher Integritätsbereich ein Körper ist

b) finde einen unendlichen Integritätsbereich, der kein Körper ist

Wir wissen bereits, dass für endliche Gruppen $(G, \circ)$ $\forall x \in G\colon \exists n \in \mathbb{N}\colon x^n = e$, wobei $e$ das neutrale Element in $G$ ist. Da auf einem Integritätsbereich die Multiplikation abelsch ist und ein neutrales Element der Multiplikation vorhanden ist, da ein Integritätsbereich ein Ring mit 1 ist, ist somit gezeigt, dass $(R\backslash\{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. Daraus folgt, dass ein endlicher Integritätsbereich ein Körper ist, da $(R, +)$ schon für den Ring eine abelsche Gruppe sein muss, und ein Ring beide Distributivgesetze erfüllt.

Ein Gegenbeispiel ist der Integritätsbereich aller $n \times n$ Matrizen.