Übungsblatt № 3

Aufgabe 20: Stirlingzahlen zweiter Art

Zeigen Sie die folgende Identitätsgleichung über die Stirlingzahlen zweiter Art:

$$S_{n,n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq 2$$

Wir wollen die Anzahl der Partitionen von $[n]$ in $n-2$ Mengen bestimmen. Wir machen eine Fallunterscheidung. Haben die ersten $n-3$ genau ein Element, so gibt es eine Menge mit 3 Elementen, also insgesamt $\binom{n}{3}$ Möglichkeiten, da durch die Auswahl von 3 Elementen die übrigen $n-3$ Mengen eindeutig bestimmt sind.

Haben nun nur $n-4$ genau ein Element, so gibt es zwei Mengen mit je 2 Elementen. Für die erste Menge mit zwei Elemente gibt es genau $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten. Davon ausgehend gibt es $\binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten für die zweite Teilmenge. Die übrigen Mengen sind wieder eindeutig durch die Auswahl dieser vier Elemente bestimmt. Wir müssen jedoch darauf achten, dass die Reihenfolge keinen Einfluss ausübt, insgesamt gibt es also $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten.

Gesamt ergibt das

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = \frac{n!}{6(n-3)!} + \frac{n!(n-2)!}{8(n-2)!(n-4)!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{8(n-4)!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\big(4+3(n-3)\big)}{24} = \frac{n(n-1)(n-2)(4+3n-9)}{24} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}
\end{aligned}$$

Aufgabe 21: Bell-Zahlen

Zeigen Sie, dass die Bellzahlen für $n \geq 0$ die folgende Rekursionsgleichung erfüllen

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Wir erinnern uns, dass die Bellzahlen die Anzahl der Partitionen einer n elementigen Teilmenge beschreiben. Wir können nun Partitionen in zwei „Teile“ Zerlegen. Wir wählen dazu $M \subseteq [n]$. Die Menge $M \cup \{n+1\}$ bildet nun eine Menge der Partitionierung von $[n+1]$. Die übrigen $n - |M|$ Elemente aus $[n] \setminus M$ können beliebig partitioniert werden. Pro $|M| = k \in [n]$ gibt es also genau B_{n-k} Partitionen. Da es pro $k \in [n]$ genau $\binom{n}{n-k}$ mögliche M gibt, folgt

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Die letzte Gleichung folgt natürlich daraus, dass der Binomialkoeffizient symmetrisch ist. Wir summieren also lediglich in umgekehrter Reihenfolge.

Aufgabe 22: Permutationen I

Seien $f, g \in \mathfrak{S}_9$ mit

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie f in Zykelschreibweise dar
b) Stellen Sie g in Standardschreibweise dar
c) Berechnen Sie f^{-1}, g^2, g^3, g^{-1} und g^{999}
d) Geben sie einen möglichst einfachen Ausdruck für die Stirlingzahl erster Art $s_{n,1}$ an

Zu a): Wir bestimmen die Bilder $f(i)$ und $f(f(i))$ für $i \in [9]$

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 & f(3) &= 2 & f(2) &= 9 \\ f(9) &= 5 & f(5) &= 7 & f(7) &= 6 \\ f(6) &= 8 & f(8) &= 1 & f(4) &= 4 \end{aligned}$$

Daraus folgt $f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Das Produkt mit $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ schreiben wir nicht explizit an.

Zu b):

$$\begin{aligned} g(1) &= 2 & g(2) &= 6 & g(3) &= 9 \\ g(4) &= 5 & g(5) &= 8 & g(6) &= 1 \\ g(7) &= 7 & g(8) &= 4 & g(9) &= 3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Zu c):

$$ff^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \implies f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 3 & 1 & 4 & 9 & 7 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$gg^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \implies g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 9 & 8 & 4 & 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Inversen kann man natürlich auch einfach dadurch bestimmen, indem man die Zeilen der Standardschreibweise vertauscht und dann einfach die Spalten anhand der neuen oberen Zeile aufsteigend sortiert.

Für die verschiedene Potenzen g^k eignet sich die Zykeldarstellung besonders gut. Wir nutzen aus, dass disjunkte Zykel kommutieren und, ihrem Namen nach, zyklisch sind. So gilt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}^3 &= \mathrm{id} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}^3 &= \mathrm{id} \\ \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix}^2 &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass sich die k-ten Potenzen von Zyklen, zyklisch wiederholen, es gilt also:

$$g^k = g_1^k g_2^k g_3^k = g_1^{k \mod 3} g_2^{k \mod 3} g_3^{k \mod 2}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} g^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} \\ g^3 &= \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g^{999} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Zuletzt:

$$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 2 & 4 & 7 & 8 & 6 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Zu d): Wir suchen die Anzahl der Permutationen, die genau aus einem Zyklus bestehen. Das sind also jene Permutationen, die keinen Fixpunkt haben. Es gilt also $s_{n,1} = D_n$.

Aufgabe 23: Permutationen II

Sei $\varphi \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation. Wir nennen $\min_{n\in\mathbb{N}} \varphi^n = \mathrm{id}$ die Ordnung von φ.

a) Stellen Sie die folgende Permutation $f \in \mathfrak{S}_9$ in Zykelschreibweise dar:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Ordnung der Permutation f

c) Wie kann man die Ordnung einer Permutation aus ihrer Zykelschreibweise ablesen?

Zu a):

$$\begin{array}{lll} f(1) = 2 & f(2) = 3 & f(3) = 1 \\ f(4) = 5 & f(5) = 4 & \\ f(6) = 6 & & \\ f(7) = 8 & f(8) = 9 & f(9) = 7 \end{array}$$

Damit gilt $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Zu c): Davon ausgehend, dass wir f in l disjunkte Zykel g_j der Länge k_j für $j = 1, \ldots, l$ zerlegen können und $g_j^{k_j} = \mathrm{id}$ gilt, folgt dass $f^k = \mathrm{id}$ für $k | k_j \forall j \in [l]$. Damit gilt aber $k = \mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_l)$.

Zu b): f ist ein disjunktes Produkt von drei Zyklen, wobei zwei davon Länge 3 haben und einer Länge 2. Daraus ergibt sich die Ordnung 6 von f, da $6 = \mathrm{kgV}(2, 3)$.

Aufgabe 26: Permutationen III

a) Sei $\varphi \in \mathfrak{S}_9$ mit $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie die folgende Gleichung:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}$$

b) Stellen Sie die Permutation aus Beispiel 23 als Produkt von Transpositionen dar. Ist diese Darstellung von f eindeutig?

c) Sei $f \in \mathfrak{S}_n$. Wie würden Sie vorgehen, um eine Darstellung von f als Produkt von Transpositionen zu ermitteln?

Zu a):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Zu b):

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Nein. Es gilt auch

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Zu c): Wir können auf zweierlei Arten vorgehen. Zu Beginn stellen wir f als Produkt von Zyklen dar $f = g_1 \cdot g_k$ mit Längen k_j für $j \in [k]$. Es sei $T = \{g_j \colon k_j = 2 | j \in [k]\}$ und $Z = \{g_j \colon k_j > 2 | j \in [k]\}$. Da die Elemente von T bereits Transpositionen sind, müssen wir sie nicht weiter beachten. Seien nun oBdA $g_1, \ldots, g_l$ die Zykel mit $k_j > 2$. Es sei g_j jeweils von der Form

$$g_j = \begin{pmatrix} i_{j,1} & \cdots & i_{j,k_j} \end{pmatrix}$$

Wir können g_j nun folgendermaßen darstellen:

$$g_j = \bigcirc_{n=1}^{k_j - 1} \begin{pmatrix} i_{j,n} & i_{j,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{j,1} & i_{j,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{j,2} & i_{j,3} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_{j,k_j - 1} & i_{j,k_j} \end{pmatrix}$$
$$g_j = \bigcirc_{n=k_j}^{2} \begin{pmatrix} i_{j,1} & i_{j,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{j,1} & i_{j,k_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{j,1} & i_{j,k_k - 1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} i_{j,1} & i_{j,2} \end{pmatrix}$$