

Übungsblatt 7

Beispiel 7.1. Folgendes ist für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Wir führen einen Induktionsbeweis und wählen für die Induktionsbasis $n = 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k(k+1) &= 1(1+1) = 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 1(1+1)(1+2) &= 2\end{aligned}$$

Damit können wir die Induktionsvoraussetzung annehmen:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Und die Induktionsvoraussetzung aufstellen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Zuletzt führen wir den Induktionsschritt durch:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= (n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^n k(k+1) = (n+1)(n+2) + \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2) \left(\frac{1}{3}n + 1 \right) = (n+1)(n+2) \frac{1}{3}(n+3) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)\end{aligned}$$

Beispiel 7.2. Zu zeigen ist, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $6 \mid n^3 - n$. Wir beginnen für unsere Induktionsbasis mit $n = 1$:

$$1^3 - 1 = 0$$

6 teilt 0, somit können wir unsere Induktionsvoraussetzung annehmen:

$$n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$$

Und die Induktionsbehauptung aufstellen:

$$(n+1)^3 - n - 1 \equiv 0 \pmod{6}$$

Zuletzt führen wir den Induktionsschritt aus:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $n^3 - n$ durch 6 teilbar ist. Wir untersuchen nun noch $3n(n+1)$. Wenn n gerade ist, dann können wir $3n$ in $2 \cdot 3 \frac{n}{2}$ aufteilen. Da $2 \cdot 3 = 6$ ist $3n(n+1)$ für gerade n durch 6 teilbar. Ist n ungerade, so ist $n+1$ gerade, und wir können $3(n+1)$ in $2 \cdot 3 \frac{n+1}{2}$ aufteilen. Somit ist $3n(n+1)$ durch 6 teilbar. Zuletzt prüfen wir, ob $(n^3 - n) + 3n(n+1)$ durch 6 teilbar ist. Wir wissen, dass beide Summanden $a = n^3 - n$ und $b = 3n(n+1)$ durch 6 teilbar sind. Damit gilt:

$$a + b = 6 \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{6} \right)$$

Somit ist $(n^3 + n) + 3n(n+1) = (n+1)^3 - n - 1$ durch 6 teilbar.

Beispiel 7.3. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv definiert:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

Zu zeigen ist, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ explizit durch $a_n = \frac{n+1}{n}$ dargestellt wird. Wir beginnen mit der Induktionsbasis für $n = 1$:

$$a_1 = 2$$

$$\frac{1+1}{1} = 2$$

Damit können wir unsere Induktionsvoraussetzung annehmen:

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

Und unsere Induktionsbehauptung aufstellen:

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

Zuletzt führen wir den Induktionsschritt aus:

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

Somit ist die Aussage $a_n = \frac{n+1}{n}$ bewiesen.

Beispiel 7.4. Wir betrachten die Erweiterung $R = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Wir sollen zeigen, dass für $r, s \in R$ gilt: $r + s \in R$ und $r \cdot s \in R$.

$$r = a_r + \sqrt{2}b_r \quad s = a_s + \sqrt{2}b_s$$

$$r + s = a_r + a_s + \sqrt{2}b_r + \sqrt{2}b_s = \underbrace{(a_r + a_s)}_{=a_t} + \sqrt{2} \underbrace{(b_r + b_s)}_{=b_t} = a_t + \sqrt{2}b_t$$

Da die Addition auf \mathbb{Q} abgeschlossen ist, gilt $t = a_t + \sqrt{2}b_t \in R$. Somit ist $+$ auf R abgeschlossen.

$$r \cdot s = (a_r + \sqrt{2}b_r)(a_s + \sqrt{2}b_s) = a_r a_s + \sqrt{2}a_r b_s + \sqrt{2}a_s b_r + \sqrt{2}^2 b_r b_s = a_r a_s + 2b_r b_s + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r)$$

Da die Multiplikation auf \mathbb{Q} abgeschlossen ist, gilt $(a_r a_s + 2b_r b_s) + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r) \in R$, womit \cdot auf R abgeschlossen ist.

Weiters prüfen wir, ob $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. Wir beginnen damit, ob $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Seien $r, s, t \in R$:

$$\text{Assoziativität : } (r + s) + t = (a_r + a_s + \sqrt{2}(b_r + b_s)) + a_t + \sqrt{2}b_t = a_r + a_s + a_t + \sqrt{2}(b_r + b_s + b_t)$$

$$= a_r + \sqrt{2}b_r + (a_s + a_t + \sqrt{2}(b_s + b_t)) = r + (s + t)$$

$$\text{Kommutativität : } r + s = a_r + \sqrt{2}b_r + a_s + \sqrt{2}b_s = a_s + \sqrt{2}b_s + a_r + \sqrt{2}b_r = s + r$$

$$\text{neutrales Element : w\"ahle } 0_R = 0 + \sqrt{2} \cdot 0$$

$$\Rightarrow r + 0_R = a_r + \sqrt{2}b_r + 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = a_r + 0 + \sqrt{2}b_r + \sqrt{2} \cdot 0 = a_r + \sqrt{2}b_r = r$$

$$\text{inverses Element : w\"ahle } -r = -a_r - \sqrt{2}b_r$$

$$\Rightarrow r + (-r) = a_r - a_r + \sqrt{2}b_r - \sqrt{2}b_r = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0_R$$

$(R, +)$ ist also eine abelsche Gruppe. Damit $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist, müssen wir noch prüfen, ob (R, \cdot) zumindest eine abelsche Halbgruppe ist.

$$\text{Assoziativität : } (r \cdot s) \cdot t = (a_r a_s + 2b_r b_s + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r))(a_t + \sqrt{2}b_t)$$

$$= a_r a_s a_t + 2a_t b_r b_s + \sqrt{2}(a_r a_t b_s + a_s a_t b_r) + \sqrt{2}a_r a_s b_t + 2\sqrt{2}b_r b_s b_t + 2(a_r b_s b_t + a_s b_r b_t)$$

$$r \cdot (s \cdot t) = (a_r + \sqrt{2}b_r)(a_s a_t + 2b_s b_t + \sqrt{2}(a_s b_t + a_t b_s))$$

$$= a_r a_s a_t + 2a_r b_s b_t + \sqrt{2}(a_r a_s b_t + a_r a_t b_s) + \sqrt{2}a_s a_t b_r + 2\sqrt{2}b_r b_s b_t + 2(a_s b_r b_t + a_t b_r b_s)$$

$$= r \cdot (s \cdot t) \quad \text{Kommutativität : } r \cdot s = a_r a_s + 2b_r b_s$$

Damit ist \cdot assoziativ und kommutativ auf R , somit ist (R, \cdot) eine abelsche Halbgruppe. Zuletzt müssen wir prüfen, ob ein Distributivgesetz erfüllt ist (eines reicht, da wir gezeigt haben, dass \cdot abelsch ist). Es seien $r, s, t \in R$:

$$(r + s) \cdot t = (a_r + a_s + \sqrt{2}(b_r + b_s))(a_t + \sqrt{2}b_t) = a_t(a_r + a_s) + \sqrt{2}a_t(b_r + b_s) + \sqrt{2}b_t(a_r + a_s) + \sqrt{2}^2 b_t(b_r + b_s)$$

$$= a_r(a_t + \sqrt{2}b_t) + \sqrt{2}b_r(a_t + \sqrt{2}b_t) + a_s(a_t + \sqrt{2}b_t) + \sqrt{2}b_s(a_t + \sqrt{2}b_t) = r \cdot t + s \cdot t$$

Somit ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Damit $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist, muss $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe sein. Wir müssen also noch prüfen, ob es in $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$ ein neutrales Element 1 gibt und zu jedem $r \in R \setminus \{0\}$ ein inverses Element r^{-1} . Wir beginnen damit, zu zeigen das $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ immer noch abgeschlossen ist. Seien $r, s \in R$ mit $r \neq 0_R$:

$$\begin{aligned} r \cdot s &= a_r a_s + 2b_r b_s + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r) = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 \\ &\Rightarrow s = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0_R \end{aligned}$$

Da $r \cdot s$ also nur für $s = 0_R$ gleich 0_R ist, ist $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ also immer noch abgeschlossen und erbt die Eigenschaften von (R, \cdot) . Wir suchen zuerst ein neutrales Element:

$$\text{wähle } 1_R = 1 \Rightarrow r \cdot 1 = (a_r + \sqrt{2}b_r) \cdot 1 = a_r \cdot 1 + \sqrt{2}b_r \cdot 1 = a_r + \sqrt{2}b_r = r$$

Damit ist $(R, +, \cdot)$ also zumindest ein Ring mit 1. Als letztes prüfen wir, ob es inverse Elemente in $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ gibt. Sei $r \in R \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \text{wähle: } r^{-1} &= \frac{1}{a_r + \sqrt{2}b_r} = \frac{a_r - \sqrt{2}b_r}{(a_r + \sqrt{2}b_r)(a_r - \sqrt{2}b_r)} = \frac{a_r - \sqrt{2}b_r}{a_r^2 - 2b_r^2 + \sqrt{2}a_r b_r - \sqrt{2}a_r b_r} = \frac{a_r - \sqrt{2}b_r}{a_r^2 - 2b_r^2} \\ r \cdot r^{-1} &= \frac{a_r^2 - \sqrt{2}a_r b_r + \sqrt{2}a_r b_r - 2b_r^2}{a_r^2 - 2b_r^2} = \frac{a_r^2 - 2b_r^2}{a_r^2 - 2b_r^2} = 1_R \end{aligned}$$

Somit ist $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe, womit $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Beispiel 7.5. Zu zeigen ist, dass es keinen endlichen geordneten Körper gibt. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein endlicher geordneter Körper mit $1 > 0$. Wir wissen, dass für endliche Gruppen (G, \circ) gilt:

$$\forall x \in G: x^n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ mal}} = e$$

Wobei e das neutrale Element in G ist. Wir betrachten nun $(\mathbb{K}, +)$. Da $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist, handelt es sich hierbei um eine abelsche Gruppe mit neutralen Element 0 und es gilt: $0 < 1$. Wir wissen das $0, 1 \in \mathbb{K}$, da $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper ist. Da $(\mathbb{K}, +)$ eine endliche abelsche Gruppe ist, gilt nun $1^n = 0$. Das führt aber auf einen Widerspruch:

$$0 < 1 < 1^n = 0$$

Somit kann $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ kein endlicher Körper sein.