Übungsblatt № 8

Aufgabe 52

Ist der Petersen Graph planar bzw. hamiltonsch?

Für den Satz von Dirac muss gelten $\min_{v \in V} \deg(v) 3 \geq \frac{|V|}{2} = 5$. Offensichtlich stimmt das nicht, womit der Petersen Graph nicht hamiltonsch ist. Nach dem Satz von Kurwatoski ist der Petersen Graph nicht planar, da er K_5 als Minor enthält.

Aufgabe 54

Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n > 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dss $k(k-1)^{n-1}$ Möglichkeiten gibt, die Knoten von T mit k Farben zulässig zu färben.

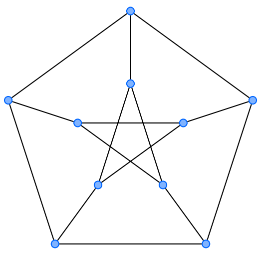
Wir führen einen Induktionsbeweis. Für den Induktionsanfang sei $n = 2$. Für gültige Färbungen kommt nur $k = 2$ in Frage.

Abbildung 1: Alle gültigen Färbungen von P_1

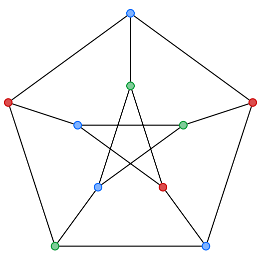
Im Induktionsschritt schließen wir nun $n \to n+1$. Damit folgt $k(k-1)^{(n+1)-1} = k(k-1)^{n-1}(k-1)$. Für den Baum mit n Knoten gibt es genau $k(k-1)^{n-1}$ Färbungen mit k Farben. Damit durch das Hinzufügen von v_{n+1} T weiterhin ein Baum ist, muss v_{n+1} ein Blatt sein. Es gibt somit $k-1$ mögliche Farben für v_{n+1}, da nur die Farbe des Nachbars von v_{n+1} nicht gültig ist.

Aufgabe 55

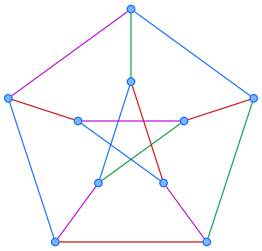
Eine zulässige Kantenfärbung mit k Farben, wobei $k \in \mathbb{N}$ in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f\colon E \to \{1, \ldots, k\}$ derart, dass für alle Paare von Kanten $e_1, e_2 \in E$ mit $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, $f(e_1) \neq f(e_2)$ gilt.
Der chromatische Index $\chi'(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl k, für die eine zulässige Kantenfärbung mit k Farben existiert.
Bestimmen Sie die chromatische Zahl und den chromatischen Index des Petersen Graphs.



Da jeder Knoten im Petersen Graphen 3 Nachbarn hat, folgt $\chi(G) \geq 3$.



Damit folgt für die chromatische Zahl $\chi(G) = 3$. Für den chromatischen Index verwenden wir den Satz von Vizing. Dieser besagt $\triangle(G) \leq \chi'(G) \leq \triangle(G) + 1$, wobei $\triangle(G)$ der maximale Knotengrad in G ist.



Da $\chi'(G) \in \mathbb{N}$ folgt somit nach dem Satz von Vizing, dass $\chi'(G) = 4$.