Übungsblatt № 6

Aufgabe 24: Summe unabhängiger poissonverteilter Zufallsvariablen

Für unabhängige poissonverteilte $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$ und $X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ zeige man mit $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$:

i) $X_1 + X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$

ii)

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad 0 \leq k \leq n$$

Wir wissen $\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{\lambda_i^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda_i} = f_{X_i}(k)$.

Zu i):

Da X_1 und X_2 unabhängig sind gilt $f_{X_1+X_2} = f_{X_1} * f_{X_2}$, mit $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$:

$$(f_{X_1} * f_{X_2})(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(j) f_{X_2}(k-j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_1^j}{j!} \mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

Somit gilt $X_1 + X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Zu ii): Mit dem Satz von Bayes erhalten wir:

$$\mathbb{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n) = \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n | X_1 = k) \mathbb{P}(X_1 = k)}{\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)}$$

Wir müssen also insbesondere $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n | X_1 = k)$ bestimmen. Sei B das Ereignis, dass $X_1 = k$ und A das Ereignis, dass $X_1 + X_2 = n$. Dann gilt $\mathbb{P}(B) = \frac{\lambda_1^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda_1}$. Der Schnitt $A \cap B$ enthält nur $X_1 = k$. Damit $X_1 + X_2 = n$ gilt muss daher $X_2 = n - k$ gelten. Aufgrund der Unabhängigkeit von X_1 und X_2 folgt somit:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n-k)}{\mathbb{P}(X_1 = k)} = \mathbb{P}(X_2 = n-k) = \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

Damit erhalten wir:

$$\mathbb{P}(X_1 = k, X_1 + X_2 = n) = \frac{\lambda_2^{n-k} \lambda_1^k}{k!(n-k)!} \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{n!}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \mathrm{e}^{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$= \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^n} = \binom{n}{k} \frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n-k}} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Aufgabe 26: Erwartungswert

Ein Punkt (X_1, X_2) wird stetig gleichverteilt im Dreieck D mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ ausgewählt. Bestimmen Sie $(\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2))$ und $\varrho(X, Y)$.

Wir bestimmen die Randverteilungen:

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\lambda^2(D)} \int_{\mathbb{R}} I_D(x, x_2) \, \mathrm{d}x_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^x \, \mathrm{d}x_2 \, \mathrm{d}x = 2x$$
$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{\lambda^2(D)} \int_{\mathbb{R}} I_D(x_1, x) \, \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_x^1 \, \mathrm{d}x_1 = 2(1 - x)$$

$$\mathbb{E}(X_1) = \int_0^1 x f_{X_1}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 2x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$
$$\mathbb{E}(X_2) = \int_0^1 x f_{X_2}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 2x(1 - x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Für die Varianzen:

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_0^1 2x^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \implies \mathrm{var}(X_1) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$
$$\mathbb{E}(X_2^2) = \int_0^1 2x^2(1 - x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \implies \mathrm{var}(X_2) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

Für die Kovarianzen brauchen wir $f_{X_1 X_2}(x)$. Dazu bestimmen wir $\mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x)$. Betrachten wir anhand einer Graphik, über welchen Bereich wir integrieren müssen:

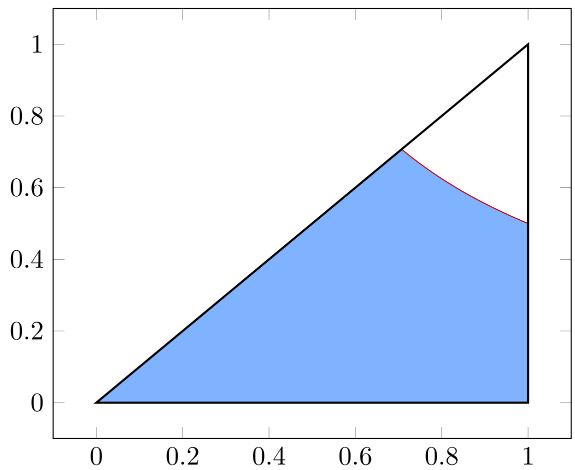

Abbildung 1: Der zu integrierende Bereich

Auf der Gerade (t, t) ist der Schnittpunkt mit D bei $\sqrt{x}$, ergibt sich:

$$\mathbb{P}(X_1 X_2 \leq x) = \frac{x}{2} + \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{x}{2} - x \ln(\sqrt{x}) = \frac{x(1 - \ln(x))}{2}$$

Da $X_1, X_2 \in [0, 1]$ folgt also $\mathbb{P}(X_1 X_2 \leq 1) = 1$, womit wir eine Normierung von 2 brauchen, daher:

$$F_{X_1 X_2}(x) = x(1 - \ln(x)) \implies f_{X_1 X_2}(x) = -\ln(x) \tag{1}$$

Damit:

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \int_0^1 -x \ln(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

Wir erhalten $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$ und

$$\varrho(X_1, X_2) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 27: Varianz-Kovarianz Matrix

X, Y und Z seien unabhängig und stetig gleichverteilt in $(-1, 1)$. Berechnen Sie die Varianz-Kovarianz Matrix des Vektors

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} X+Y \\ Y+Z \\ XZ \end{bmatrix}$$

Wir kennen die allgemeine Form von $\mathrm{var}(\boldsymbol{V})$:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(X+Y) & \mathrm{cov}(X+Y, Y+Z) & \mathrm{cov}(X+Y, XZ) \\ \mathrm{cov}(X+Y, Y+Z) & \mathrm{var}(Y+Z) & \mathrm{cov}(Y+Z, XZ) \\ \mathrm{cov}(X+Y, XZ) & \mathrm{cov}(Y+Z, XZ) & \mathrm{var}(XZ) \end{bmatrix}$$

Bevor wir einige Integrale ausrechnen, wollen wir zuerst die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen und die Rechenregeln der Kovarianz ausnutzen:

$$\mathrm{cov}(X+Y, Y+Z) = \mathrm{cov}(X, Y+Z) + \mathrm{cov}(Y, Y+Z) = \mathrm{cov}(X,Y) + \mathrm{cov}(X,Z) + \mathrm{cov}(Y,Y) + \mathrm{cov}(Y,Z)$$

Nach dem Multiplikationssatz folgt nun:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0 \\ \mathrm{cov}(X,Z) &= \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = 0 \\ \mathrm{cov}(Y,Z) &= \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = 0 \end{aligned}$$

Es verbleiben also $\mathrm{cov}(Y,Y)$ und $\mathrm{cov}(X, XZ)$ bzw. $\mathrm{cov}(Y, XZ)$ und $\mathrm{cov}(Z, XZ)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(Y,Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathrm{var}(Y) \\ \mathrm{cov}(X, XZ) &= \mathbb{E}(X^2 Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Z) = \mathrm{var}(X)\mathbb{E}(Z) \\ \mathrm{cov}(Y, XZ) &= \mathbb{E}(XYZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = 0 \\ \mathrm{cov}(Z, XZ) &= \mathbb{E}(XZ^2) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{E}(X)\mathrm{var}(Z) \end{aligned}$$

Weiter mit $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(Z)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(1-1) = 0 \\ \mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Somit folgt $\mathrm{var}(X) = \frac{1}{3}$. Aus $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = 0$ folgt außerdem $\mathrm{cov}(X, XZ) = \mathrm{cov}(Z, XZ) = 0$. Wir brauchen von $\mathrm{var}(Y+Z)$ und $\mathrm{var}(XZ)$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(Y+Z) = \mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Z) = 0 \\ &\mathbb{E}((Y+Z)^2) = \mathbb{E}(Y^2 + 2YZ + Z^2) = \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) + \mathbb{E}(Z^2) = \frac{2}{3} \\ &\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = 0 \qquad \mathbb{E}(X^2Z^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Damit haben wir:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$