Übungsblatt № 9

Aufgabe 37

a Zeige, dass durch

$$\langle f, q \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) \text{ dt}$$

ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$ definiert wird.

b Orthogonalisiere die kanonische Basis $(1, x, x^2)$ des Unterraums $\mathbb{R}_2[x]$ bezüglich dieses Skalarprodukts

Zu a:

Homogenität:

$$\langle \lambda f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2)(\lambda f(t)) g(t) \text{ dt} = \int_{-1}^{1} (1-t^2) \lambda f(t) g(t) \text{ dt} = \lambda \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) \text{ dt} = \lambda \langle f, g \rangle$$
$$\langle f, \lambda g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(g)(\lambda g(t)) \text{ dt} = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) \lambda g(t) \text{ dt} = \lambda \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) \text{ dt} = \lambda \langle f, g \rangle$$

Additivität:

$$\begin{aligned}
&\langle f+h, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2)(f(t)+h(t)) g(t) \text{ dt} = \int_{-1}^{1} (1-t^2)(f(t)g(t)+h(t)g(t)) \text{ dt} \\
&= \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) + (1-t^2) h(t) g(t) \text{ dt} = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t) \text{ dt} + \int_{-1}^{1} (1-t^2) h(t) g(t) \text{ dt} \\
&= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle
\end{aligned}$$

Somit ist $\langle f, g \rangle$ biliniear. Wir müssen noch zeigen, dass $\forall f \in \mathbb{R}[x] \colon \langle f, f \rangle > 0$:

$$\begin{aligned}
&f(t)^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R} \wedge \forall t \in [-1,1] \colon 1 \geq 1-t^2 \geq 0 \Rightarrow \forall t \in [-1,1] \colon (1-t^2) f(t)^2 \geq 0 \\
&(1-t^2) f(t)^2 \text{ ist stetig} \\
&\Rightarrow \langle f, f \rangle > 0, f \not\equiv 0 \\
&f \equiv 0 \Rightarrow \langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) 0 \text{ dt} = \int_{-1}^{1} 0 \text{ dt} = 0
\end{aligned}$$

Zu b:

$$\begin{aligned}
&w_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle 1, 1 \rangle}} \quad \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) \text{ dt} = t - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&u_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 \qquad \left\langle t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) \frac{\sqrt{3} t}{2} \text{ dt} = 0 \\
&\Rightarrow w_2 = \frac{t}{\sqrt{\langle t, t \rangle}} = \frac{t}{\frac{2}{\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{15} t}{2} \\
&u_3 = v_3 \Rightarrow w_3 = \frac{1}{\sqrt{\langle t^2, t^2 \rangle}} t^2 = \frac{t^2}{\frac{2}{\sqrt{35}}} = \frac{\sqrt{35} t^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{4}(f(x_i)-y_i)^2 = \sum -i = 1^4(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i)^2 = \|a_0\mathbf{e} + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 - \mathbf{y}\|^2$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Gram}(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} = \mathrm{G} \Rightarrow \mathrm{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{17}{18} & 0 & \frac{-5}{18} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, gesucht adjungierte Abbildung zu $f(x,y) = (2x - y, x + y)$

$$\begin{aligned}
&\forall (x,y),(a,b)\colon\ \langle f(x,y),(a,b)\rangle = \langle (x,y), f^*(a,b)\rangle \\
&\Rightarrow \langle (2x-y, x+y),(a,b)\rangle = (2x-y,x+y)\mathrm{A}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} (x,y)\mathrm{A}f^*(a,b) \\
&\Leftrightarrow (5x-3y, 3x+2y)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (2x+y, x+y)\mathrm{M}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow (x,y)\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (x,y)\mathrm{AM}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{AM} \Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{A}^{-1}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow f^*(x,y) = (8x + y, -11x + 1)
\end{aligned}$$