

## Blatt № 4

### Aufgabe 10: Integrierender Faktor

Gegeben sei die nicht exakte Differentialgleichung

$$(x + 3y)dx + xdy = 0$$

Man bestimmen einen integrierenden Faktor  $M(x, y)$  und bestimme alle Lösungen dieser Differentialgleichung. Man bestimme jene Lösung, welche die Anfangsbedingung  $y(1) = 1$  erfüllt.

Wir prüfen zuerst, ob  $M$  als Funktion in  $x$  beschrieben werden kann, dazu muss folgendes gelten:

$$\frac{\partial_y g - \partial_y h}{h} = f(x)$$

$$\partial_y g = 3 \quad \partial_x h = 1 \Rightarrow \frac{\partial_y h - \partial_x g}{h} = \frac{2}{x}$$

Damit erhalten wir die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für  $M$ :

$$\frac{M'}{M} = \frac{2}{x} \Rightarrow \int^x \frac{M'(s)}{2M(s)} ds = \ln(x)$$

$$u = M(s) \Rightarrow \int^x \frac{M'(s)}{M(s)} ds = \int^M \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \ln(M(x))$$

$$\Rightarrow \ln(M(x)) = 2 \ln(x) \Leftrightarrow M(x) = x^2$$

Wir prüfen nun, ob die Differentialgleichung  $Mgdx + Mhdy = 0$  exakt ist:

$$\begin{aligned} \partial_y x^3 + 3x^2 y &= 3x^2 \\ \partial_x x^3 &= 3x^2 \end{aligned}$$

Hernach gilt also  $\partial_y Mg = \partial_x Mh$ , somit ist die Differentialgleichung exakt. Es kann also eine Stammfunktion  $F$  gefunden werden, sodass  $\partial_x F = Mg$  und  $\partial_y F = Mh$ .

$$\begin{aligned} \partial_x F &= Mg \Rightarrow F(x, y) = \int M(x)g(x, y)dx + \varphi(y) = \int x^3 + 3x^2 y dx + \varphi(y) \\ &= \frac{x^4}{4} + x^3 y + \varphi(y) \\ \varphi(y) &= \int M(x)h(x, y) - \partial_y \int M(x)g(x, y) dx dy \\ &= \int x^3 - x^3 dy = 0 \\ F(x, y) &= \frac{x^4}{4} + x^3 y \\ \partial_x F &= x^3 + 3x^2 y = x^2(x + 3y) = Mg \\ \partial_y F &= x^3 = x^2 x = Mh \end{aligned}$$

Wir haben somit bereits eine implizite Lösung für  $y$  gefunden, und können diese (lokal) mittels des Hauptsatzes über implizite Funktionen nach  $y$  auflösen. Sei  $x \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{4} + x^3 y &= \alpha \Leftrightarrow y = \frac{\alpha}{x^3} - \frac{x}{4} \\ 1 &= \alpha - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{4} \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{5 - x^4}{4x^3} \end{aligned}$$

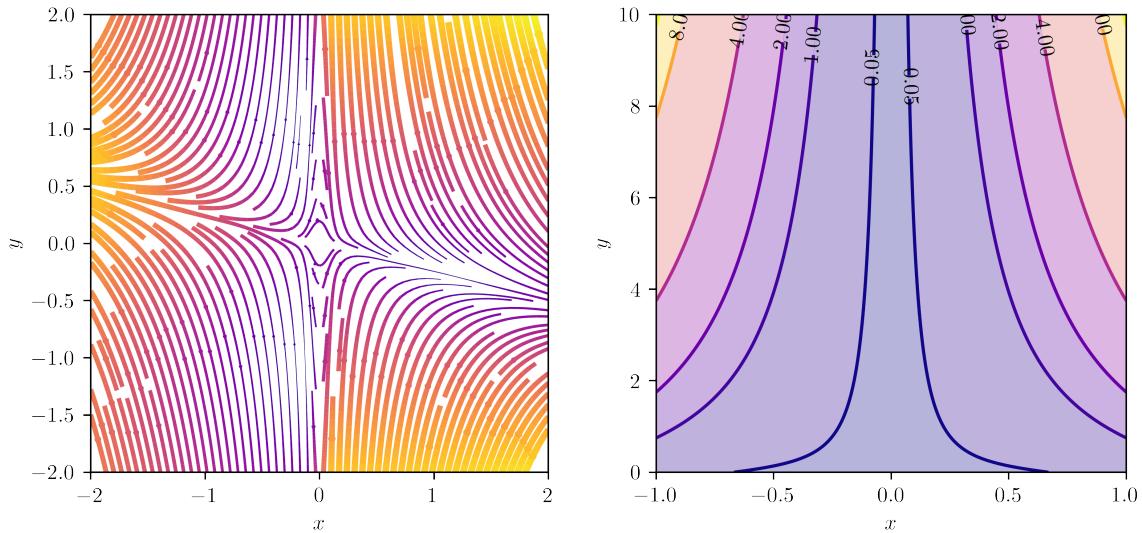


Abbildung 1: Richtungsfeld der Gleichung (links) und Konturlinien von  $F$  (rechts)

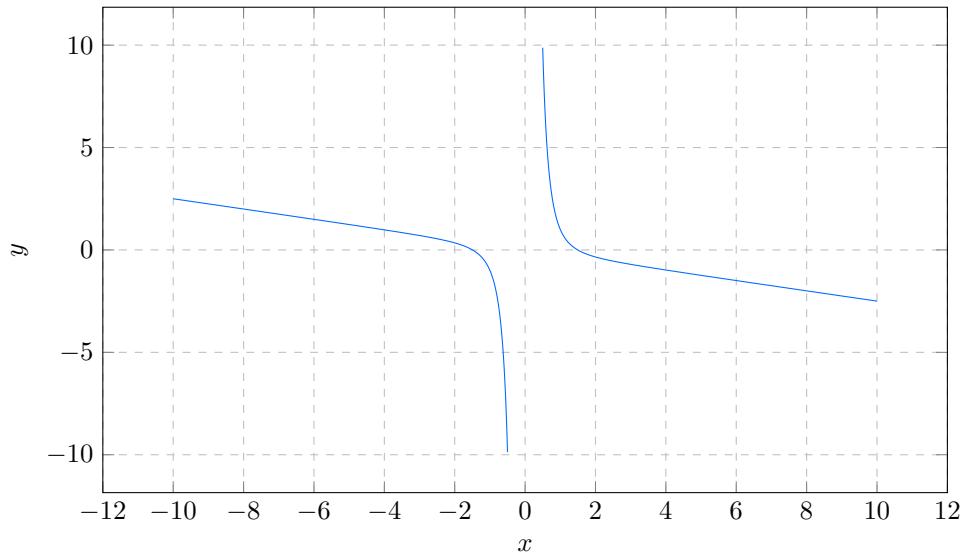


Abbildung 2: Graph von  $y(x)$

**Aufgabe 11: Vergleich mit exakten Differentialgleichungen**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = xy(y - 2) \quad x \in \mathbb{R} \quad y(0) = 1$$

- a) Man bestimme die Lösung  $y$
- b) Man gebe die Lösung  $y$  implizit als Lösung einer Gleichung  $F = 0$  mit geeignet gewähltem  $F$  an
- c) Kann die unter Punkt a) erhaltene Lösung als Lösung einer exakten Differentialgleichung angegeben werden? Gibt es einen Zusammenhang mit der ursprünglichen Differentialgleichung?

Punkt a): Wir wenden die Trennung der Veränderlichen an:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y(y-2)} &= x \Rightarrow \int \frac{y'(s)}{y(s)(y(s)-2)} ds = \frac{x^2 + \ln(c)}{2} \\ z = y(s) &\Rightarrow dz = y'(s)ds \Rightarrow \int \frac{y'}{y(y-2)} ds = \int \frac{dz}{z(z-2)} \end{aligned}$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-2)} &= \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} \\ A &= \left. \frac{1}{z-2} \right|_{z=0} = -\frac{1}{2} \\ B &= \left. \frac{1}{z} \right|_{z=2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$I = \int \frac{dz}{z(z-2)} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} dz$$

*Anmerkung:* Die folgende Fallunterscheidung ist eigentlich nicht erforderlich für dieses Beispiel, da wir durch die Anfangsbedingung wissen  $0 < y < 2$ . Allerdings habe ich das erst bemerkt, als ich schon fertig war.

Für  $y > 2$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}(\ln(y-2) - \ln(y)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y-2}{y}\right) \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{y-2}{y}\right) &= x^2 + \ln(c) \Leftrightarrow \frac{y-2}{y} = ce^{x^2} \\ \Leftrightarrow y-2 &= yce^{x^2} \Leftrightarrow y(1-ce^{x^2}) = 2 \Leftrightarrow y(x) = \frac{2}{1-ce^{x^2}} \\ y > 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{1-ce^{x^2}} > 1 \Leftrightarrow 1-ce^{x^2} < 1 \Leftrightarrow ce^{x^2} > 0 \Rightarrow c > 0\end{aligned}$$

Für  $y < 0$  erhalten wir:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2-z} - \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2}(\ln(2-z) - \ln(-z)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2-z}{-z}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z-2}{z}\right) \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{2}{1-ce^{x^2}} \\ y < 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{1-ce^{x^2}} < 0 \Leftrightarrow 1-ce^{x^2} < 0 \Leftrightarrow ce^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \ln(c) + x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < -\ln(c) \\ \forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0 &\Rightarrow -\ln(c) > 0 \Leftrightarrow \ln(c) < 0 \Leftrightarrow c \in (0, 1)\end{aligned}$$

Somit ist  $y > 2$  auf  $\mathcal{B}_{-\ln(c)}(0)$  definiert. Da  $-\ln(c) \rightarrow \infty$  für  $c \rightarrow 0$ , können wir  $c$  beliebig klein wählen um einen hinreichend großen Definitionsbereich zu erhalten.

Für  $0 < y < 2$  erhalten wir zuletzt:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}(\ln(2-z) - \ln(z)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2-z}{z}\right) \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{2-y}{y}\right) &= x^2 + \ln(c) \Leftrightarrow \frac{2-y}{y} = ce^{x^2} \\ \Leftrightarrow 2-y &= yce^{x^2} \Leftrightarrow 2 = (1+ce^{x^2})y \Leftrightarrow y(x) = \frac{2}{1+ce^{x^2}} \\ 0 < \frac{2}{1+ce^{x^2}} &< 2 \Leftrightarrow 0 < 1 < 1+ce^{x^2} \\ \Rightarrow 0 < ce^{x^2} &\Rightarrow c > 0\end{aligned}$$

Wir haben somit eine allgemeine Lösung für  $y$  gefunden:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-ce^{x^2}} & \begin{cases} c > 0, x \in \mathbb{R} \\ c \in (0, 1), x \in \mathcal{B}_{-\ln(c)}(0) \end{cases} & y > 2 \\ \frac{2}{1+ce^{x^2}} & x \in \mathbb{R}, c > 0, 0 < y < 2 \end{cases}$$

Für die gegebenen Anfangsbedingung gilt  $0 < y < 2$ , womit:

$$1 = \frac{2}{1+c} \Leftrightarrow 1+c=2 \Rightarrow c=1$$

Damit ist die Lösung  $y(x)$  gegeben durch:

$$y(x) = \frac{2}{1 + e^{x^2}}$$

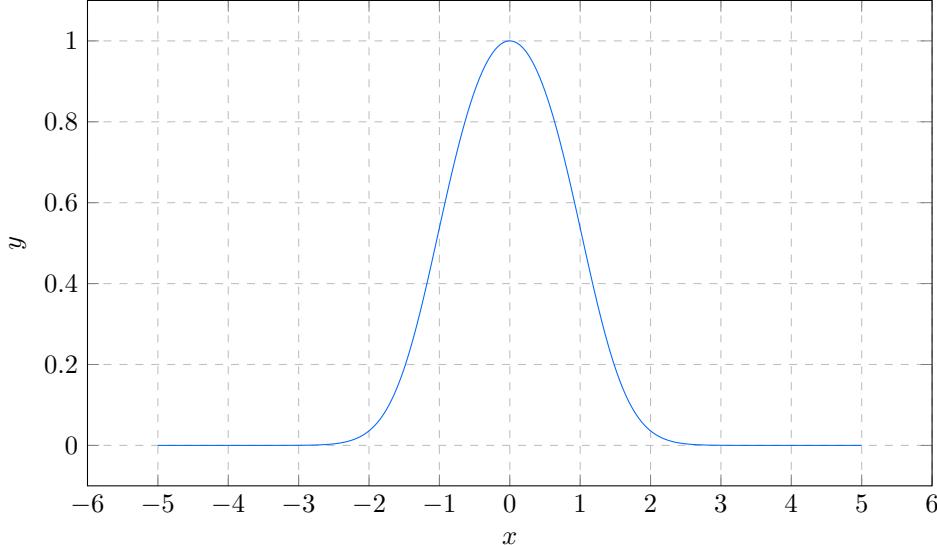


Abbildung 3: Graph von  $y(x)$

Punkt b): Wir suchen eine Funktion  $F(x, y)$ , sodass wir  $y$  als implizite Lösung von  $F = 0$  angeben können:

$$y = \frac{2}{1 + e^{x^2}} \Leftrightarrow y(1 + e^{x^2}) - 2 = 0 = F(x, y)$$

Punkt c): Wir haben  $F$  gefunden. Da  $F$  auf  $\mathbb{R}^2$  differenzierbar ist, folgt:

$$\begin{aligned} \partial_x F &= 2xye^{x^2} & \partial_y F &= 1 + e^{x^2} \\ 2xye^{x^2} dx + (1 + e^{x^2}) dy &= 0 \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist per Definition exakt. Weiters haben wir die Stammfunktion  $F$  bereits gefunden.

### Aufgabe 12: Lipschitz-Stetigkeit

Man untersuche die folgenden Funktion  $f(x)$  in ihrem jeweiligen Definitionsbereich  $D$  auf Lipschitz-Stetigkeit und bestimme gegebenenfalls die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante:

- a)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $D = [0, \pi]$
- b)  $f(x) = |x|$ ,  $D = \mathbb{R}$
- c)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $D = [2, \infty)$
- d)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $D = [0, 2]$

Erinnern wir uns zuerst an die Definition der Lipschitz-Stetigkeit auf einem metrischen Raum  $(X, d)$ . Sei  $D \subseteq X$  und  $f: D \rightarrow X$ , dann nennen wir  $f$  Lipschitz-stetig auf  $D$ , falls

$$\exists L \in \mathbb{R}^+: \forall x_1, x_2 \in D: d(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1, x_2)$$

Analog ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig auf  $D$ , falls

$$\forall L \in \mathbb{R}^+: \exists x_1, x_2 \in D: d(f(x_1), f(x_2)) > Ld(x_1, x_2)$$

Wir arbeiten nun mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und wählen daher  $d(x, y) = |x - y|$  als Metrik auf  $\mathbb{R}$ . Falls  $f$  differenzierbar auf  $D$  ist, dann ist  $f$  Lipschitz-stetig auf  $D$ , falls  $\sup_{x \in D} |f'(x)| < \infty$ . Dann gilt  $L = \sup_{x \in D} |f'(x)|$  ist die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante.

**Punkt a):**  $f'(x) = \sin(x)$ . Der Sinus wird durch 1 beschränkt, und nimmt diese Maxima bei  $\frac{(4k+1)\pi}{2}$  für  $k \in \mathbb{Z}$  an. Für  $k = 0$  gilt  $\frac{\pi}{2} \in D$ , damit folgt  $L = 1$ .

**Punkt b):** Folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$$

**Punkt c):**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wir sehen, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$  gilt. Weiters ist  $f'(2) > 0$  und  $f''(x) < 0$  für  $x \in \mathbb{R}$ , also ist  $f'$  streng monoton fallend, womit  $f'(x)$  durch  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  beschränkt ist. Somit ist  $f$  Lipschitz-stetig auf  $D$  und es gilt  $L = \sup_{x \in D} |f'(x)| = \frac{\sqrt{2}}{4}$  ist die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante.

**Punkt d):** Wir verwenden die Unbeschränktheit der Ableitung. Sei  $M \in \mathbb{R}^+$ , dann gilt:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \geq M \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq \frac{1}{M} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{1}{2M} \Rightarrow x \leq \frac{1}{4M^2}$$

Für  $x \leq \frac{1}{4M^2}$  folgt also  $f'(x) \geq M$ . Da wir für alle  $M \in \mathbb{R}^+$  ein solches  $x$  finden können, ist  $f'$  unbeschränkt, und damit ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig.