Übungsblatt № 11

Aufgabe 11.2

Es sei die Funktion $g(x) = x^3$ gegeben.

a Geben sie die Taylorpolynome $T_g^n(x; x_0)$ aller Stufen $n \in \mathbb{N}$ an um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ an. vereinfachen Sie das Ergebnis für jedes $T_g^n(x; x_0)$ so weit wie möglich.

b Berechnen Sie die Reste $R_g^2(x; x_0)$, $R_g^3(x; x_0)$ und $R_g^4(x; x_0)$.

Zu a:

Das Taylorpolynom n-ter Ordnung ist definiert als:

$$T_g^n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Da $g''' = 6$, gilt für $k > 3$, dass $g^{(k)} = 0$. Somit gilt für $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}
T_g^n(x; x_0) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\
&= \frac{g^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{g'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{g'''(1)}{3!}(3!)(x-1)^3 \\
&= 1 + 3(x-1) + \frac{6}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3 \\
&= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 = 1 + (x-1)\left(3 + 3(x-1) + (x-1)^2\right) \\
&= 1 + (x-1)\left(3 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1\right) = 1 + (x-1)(1 + x + x^2) \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 - 1 - x - x^2 = x^3
\end{aligned}$$

Wir gehen analog für $n = 1$ und $n = 2$ vor:

$$\begin{aligned}
T_g^1(x; x_0) &= \frac{g^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{g'(1)}{1!}(x-1)^1 \\
&= 1 + 3(x-1) = 1 + 3x - 3 = 3x - 2 \\
T_g^2(x; x_0) &= \frac{g^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{g'(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{g''(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= 1 + 3x - 3 + 3x^2 - 6x + 3 = 3x^2 - 3x + 1
\end{aligned}$$

Zu b:

Das Restglied ist gegeben als:

$$\begin{aligned}
R_g^{n+1}(x; x_0) &= g(x) - T_g^n(x; x_0) \\
R_g^2(x; x_0) &= g(x) - T_g^1(x; x_0) = x^3 - 3x + 2 \\
R_g^3(x; x_0) &= g(x) - T_g^2(x; x_0) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
R_g^4(x; x_0) &= g(x) - T_g^3(x; x_0) = x^3 - x^3 = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_f^n(x; x_0)$ von $f(x) = \frac{1}{x}$ um x_0, sodass gilt:

$$\forall x \in \left[1, \frac{11}{10}\right] : R_f^n(x; x_0) \leq 10^{-3}$$

Wir verwenden die Lagrange Form des Restgliedes:

$$R_f^{n+1}(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dazu benötigen wir zuerst $f^{(n)}(x)$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Wir vermuten also $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$. Wir führen einen Induktionsbeweis. Unsere Behauptung ist also $f^{(n+1)} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \left((-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\right)' = (-1)^n n! \left(x^{-n-1}\right)' \\ &= (-1)^n n!(-n-1)x^{-n-2} = (-1)^n n!(-1)(n+1)\frac{1}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1}\frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

Somit können wir $R_f^{n+1}(x;x_0)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} &R_f^{n+1}(x;x_0) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{\xi^{n+2}}(x-x_0)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x-x_0)^{n+1} \\ &\xi \in (x_0, x) \Rightarrow \xi \in \left(1, \frac{11}{10}\right) \qquad x \in \left(1, \frac{11}{10}\right) \Rightarrow 0 \leq x - x_0 \leq \frac{1}{10} \\ &\Rightarrow R_f^{n+1}(x;x_0) \leq \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+1}}\frac{1}{10^{n+1}} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{1^{n+1}10^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{10^{n+1}} \end{aligned}$$

Sei oBdA $n \equiv 1 \mod 2$, dann gilt:

$$R_f^{n+1}(x;x_0) \leq \frac{1}{10^{n+1}} = 10^{-n-1} \leq 10^{-3} \Rightarrow -n-1 < -3 \Leftrightarrow n+1 \geq 3 \Rightarrow n \geq 2$$

Somit können wir $T_f^2(x;x_0)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} T_f^2(x;x_0) &= \frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 - x + 1 + (x-1)^2 = 1 - x + 1 + x^2 - 2x + 1 = x^2 - 3x + 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.4

Zeigen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung, dass

$$S(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

erfüllt ist.

Wir vermuten, dass $S(\pi) = T_{\sin}(\pi;0)$, wir entwickeln also $T_{\sin}^n(x;0)$:

$$k \equiv 0 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k} = \sin \qquad k \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k} = \cos$$
$$k \equiv 2 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k} = -\sin \qquad k \equiv 3 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k} = -\cos$$

Und insbesondere:

$$k \equiv 0 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k}(0) = \sin(0) = 0 \qquad k \equiv 1 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k}(0) = \cos(0) = 1$$
$$k \equiv 2 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k}(0) = -\sin(0) = 0 \qquad k \equiv 3 \mod 4 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^k \sin}{\mathrm{d}x^k}(0) = -\cos(0) = -1$$

Wir erhalten somit:

$$
\begin{aligned}
T^n_{\sin}(x;0) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k = \\
&= 0 + \frac{x^1}{1!} - 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&\Rightarrow T_{\sin}(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Wir sehen also, dass $S(x) = T_{\sin}(x;0)$. Wir bestimmen das Restglied:

$$
\begin{aligned}
&n \equiv 1 \bmod 2 \Rightarrow R^{n+1}_{\sin}(\pi;0) = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} \pi^n (-1)^{n+1 \bmod 4} \sin(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi^n(-1)^{n+1 \bmod 4}}{n!}(-\cos(\pi) + \cos(0)) \\
&= \frac{2\pi^n(-1)^{\ \bmod 4}}{n!} \\
&n \equiv 0 \bmod 2 \Rightarrow R^{n+1}_{\sin}(\pi;0) = \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} \pi^n (-1)^{n+1 \bmod 4} \cos(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \frac{\pi^n(-1)^{n+1 \bmod 4}}{n!}(\sin(\pi) - \sin(0)) = 0 \\
&\mathbb{R}^{n+1}_{\sin}(\pi;0) = \begin{cases} \frac{2\pi^n(-1)^{n+1 \bmod 4}}{n!} & n \equiv 1 \bmod 2 \\ 0 & n \equiv 0 \bmod 2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R^{n+1}_{\sin}(\pi;0) = 0 = \sin(\pi) - T_{\sin}(\pi;0) \Rightarrow \sin(\pi) = T_{\sin}(\pi;0) \\
&\sin(\pi) = 0 \Rightarrow T_{\sin}(\pi;0) = 0 = S(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11.5

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$
f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}
$$

eine Taylorentwicklung $T_f(x;x_0)$ um $x_0 = 0$ hat, aber dass sie auf $(0,\infty)$ nicht mit dieser Taylorentwicklung übereinstimmt.

Wir zeigen zuerst, dass für $x_0 = 0$ gilt, dass $f^{(k)}(x_0) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \\
&f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x}}_{\geq 0} \leq \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\
&\Rightarrow f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow f'(0) = 0 \\
&f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 \\
&f^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0
\end{aligned}
$$

Für $x_0 = 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&T^n_f(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0 \\
&x > 0 \Rightarrow R^{n+1}_f(x;0) = f(x) - T^n_f(x;0) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}
$$