Blatt № 5

Aufgabe 16: Differentialgleichung von Clairaut

Für die Differentialgleichung

$$y(x) = xy'(x) + y'(x)^2$$

bestimme man alle Lösungen in expliziter Form und stelle diese graphisch dar.

Mit $F(x, y, y') = y - xy' - y'^2$ handelt es sich hierbei um eine Differentialgleichung von Clairaut mit $g(y') = y'^2$. Unter der Annahme, dass $y' = c \in \mathbb{R}$ ergibt sich die folgende Geradenschar

$$y(x) = cx + c^2$$

Für die Envelope setzen wir $g(c) = c^2$ und $X(c) = -g'(c) = -2c$. Somit erhalten wir $Y(c) = g(c) - cg'(c) = -c^2$:

$$x = -2c \Leftrightarrow c = -\frac{x}{2} \Rightarrow y(x) = -\frac{x^2}{4}$$

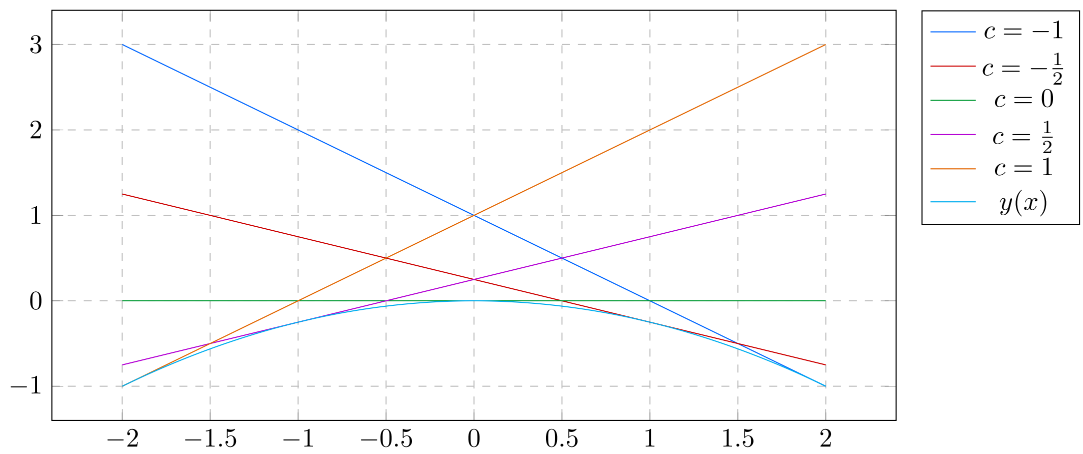

Abbildung 1: Geradenschar und Envelope

Aufgabe 17: Differentialgleichung von Clairaut

Für die Differentialgleichung

$$y(x) = xy'(x) - \sqrt{y'(x) - 1}$$

bestimme man alle Lösungen in expliziter Form und stelle diese graphisch dar.

Es handelt sich hierbei erneut um eine Differentialgleichung von Clairaut mit $g(c) = -\sqrt{c-1}$. Unter der Annahme, das $y' = c$ mit $c \geq 1$ ergibt sich die folgende Geradenschar:

$$y(x) = cx + \sqrt{c-1}$$

Wir setzen nun $X(c) = -g'(c) = -\frac{1}{2\sqrt{c-1}}$ und $Y(c) = g(c) - cg'(c) = \sqrt{c-1} - \frac{c}{2\sqrt{c-1}}$:

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{c-1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{2x} = \sqrt{c-1} \Rightarrow \frac{1}{4x^2} = c - 1 \Rightarrow c = \frac{4x^2+1}{4x^2}$$

$$y = \sqrt{c-1} - \frac{c}{2\sqrt{c-1}} = -\frac{1}{2x} + \frac{2cx}{2} = -\frac{1}{2x} + \frac{4x^2+1}{4x} = \frac{4x^2-1}{4x}$$

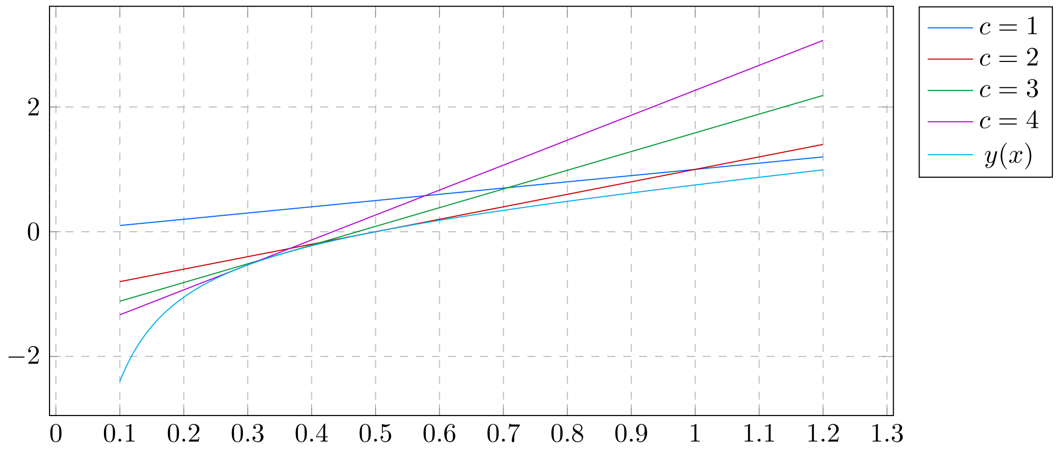

Abbildung 2: Geradenschar und Envelope