Übung № 3

Aufgabe 13: Messbarkeit unter Vervollständigung

Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_1, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit Vervollständigungen $(X_1, \widetilde{\mathcal{A}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ und $(X_2, \widetilde{\mathcal{A}}_2, \widetilde{\mu}_2)$. Sei $f\colon (X_1, \mathcal{A}_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2)$ eine messbare Funktion und gelte $\mu_1(f^{-1}(N)) = 0$ für jede μ_2-Nullmenge $N \in \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie, dass die Funktion auch $\widetilde{\mathcal{A}}_1 - \widetilde{\mathcal{A}}_2$-messbar ist.

Wir erinnern uns, dass eine Funktion $f\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-messbar ist, falls $\forall B \in \mathcal{B}\colon f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Weiters ist die Vervollständigung $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu(\mathcal{A}))$ eines Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gegeben als $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \cup B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{N}\}$, wobei $\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{P}(X)\colon \exists N \in \mathcal{A}\colon B \subseteq N \wedge \mu(N) = 0\}$, mit $\widetilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A)$, wobei $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{N}$.

Damit f also $\widetilde{\mathcal{A}}_1 - \widetilde{\mathcal{A}}_2$-messbar ist, muss gelten $\forall C \in \widetilde{\mathcal{A}}_2\colon f^{-1}(C) \in \widetilde{\mathcal{A}_1}$.

Sei $\mathcal{N}_2 = \{B \in \mathcal{P}(X)\colon \exists N \in \mathcal{A}_2\colon B \subseteq N \wedge \mu_2(N) = 0\}$. Sei nun $C = A \cup B$ mit $A \in \mathcal{A}_2$ und $B \in \mathcal{N}$. Falls $f^{-1}(C) \in \widetilde{\mathcal{A}}_1$, dann ist f messbar:

$$f^{-1}(A \cup B) = \underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{A}_1} \cup f^{-1}(B)$$

Damit $f^{-1}(C) \in \widetilde{\mathcal{A}}_1$, muss $f^{-1}(B) \in \mathcal{N}_1 = \{B \in \mathcal{P}(X)\colon \exists N \in \mathcal{A}_1\colon B \subseteq N \wedge \mu_1(N) = 0\}$ gelten. Das bedeutet aber, dass $\operatorname{im} f|_{\mathcal{N}_1} = \mathcal{N}_2$ gilt.