9 Übungsblatt

Beispiel 9.1. *Sofern existent, sollen Infimum, Supremum, Minimum und Maximum der folgenden Mengen bestimmt werden:*

a) $A = \left\{ \frac{x}{x+1}, x \in [0, \infty) \right\}$

b) $B = \left\{ 2x^2 - x^4 | x \in \mathbb{R} \right\}$

Das Minimum von A ist 0, da $\forall x \in A\colon x \geq 0$:

$$\frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Das ist für A nicht möglich, daher ist $\min(A) = 0$. Allerdings besitzt A kein Maximum, da A nicht abgeschlossen ist. Da $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\inf(A) = \min(A) = 0$. Weiters gilt $\sup(A) = 1$:

$$\frac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow x < x+1 \Leftrightarrow 0 < 1$$

B kann kein Minimum haben. Sei $x_m \in \mathbb{R}$:

$$2x^2 - x^4 > x_m \Leftrightarrow x^2(2 - x^2) > -x^4 > x_m$$

Da $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^4 > 0$, weil $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 > 0 \Rightarrow x^4 = (x^2)^2 > 0$, ist $-x^4$ immer negativ. Wenn x_m negativ ist, müssen wir $x > \sqrt[4]{-x_m}$ wählen und x_m ist kein Minimum mehr. Da wir keine größte untere Schranke finden können, hat B auch kein Infimum. Allerdings existiert ein Supremum, da:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon 2x^2 - x^4 \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 \leq x^4 \leq 1 + x^4 \Rightarrow 2x^2 \leq x^4 \Rightarrow 2 \leq x^2 \Rightarrow |x| \geq \sqrt{2}$$