

Einführung in die Komplexe Analysis  
[MAT.303UB]

gelesen von: Harald Fripertringer, Univ.-Doz. BA Mag.art. Mag.rer.nat. Dr.rer.nat.  
am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen  
Karl-Franzens Universität Graz

verfasst von: Laura Philomena Mossböck  
11820925

Wintersemester 2023/24



## Inhaltsverzeichnis

1 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$	1
-------------------------------------	---

# 1 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Bekanntermaßen gibt es Polynome in  $\mathbb{R}[x]$ , die in  $\mathbb{R}$  keine Nullstellen haben, wie etwa  $x^2 + 1$ . Wir wollen einen Körper konstruieren, der  $\mathbb{R}$  enthält und in dem alle polynomialen Gleichungen lösbar sind. Der Körper  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  hat bekanntermaßen die neutralen Elemente 0 und 1 bezüglich der Addition bzw. Multiplikation. Ferner hat jedes  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ein reziprokes Element  $x^{-1} = \frac{1}{x}$  mit  $xx^{-1} = 1$ . Ferner gibt es natürlich negative Elemente  $-x$ , welche  $x - x = 0$  erfüllen. Über einem Körper  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  gilt für die Einheitengruppe  $(\mathbb{K}^\times, \cdot)$ , dass

$$\mathbb{K}^\times = \{x \in \mathbb{K} : \exists y \in \mathbb{K} : xy = 1\} = \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Um die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  zu konstruieren betrachten wir zuerst die Menge

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Satz 1.1.**  $(C, +, \cdot)$  mit der üblichen Matrixoperationen ist ein Körper mit Nullelement  $0_{2 \times 2}$ , Einselement  $I$ , negativen und reziproken Elementen

$$-x = \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

für  $x \neq 0$ . Ferner ist die Abbildung  $\iota: \mathbb{R} \rightarrow C$  mit

$$\iota(a) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

ein injektiver Homomorphismus.

*Beweis.* Der Beweis folgt unmittelbar durch Nachrechnen der Körperaxiome. Dass  $\iota \in \text{Hom}(\mathbb{R}, C)$  lässt sich ebenfalls leicht prüfen, da

$$\begin{aligned} \iota(a+b) &= \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \iota(a) + \iota(b) \\ \iota(ab) &= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \iota(a)\iota(b). \end{aligned}$$

Ferner ist  $\iota$  injektiv, da  $\iota(a) = \iota(b) \iff a = b$  nach der Gleichheit von Matrizen.  $\square$

Wir können auf  $C$  auch eine Vektorraumstruktur finden. Für  $x \in C$  gilt offenbar

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=i}.$$

Damit ist  $\{1, i\}$  eine Basis von  $C$ , womit  $C$  ein zweidimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist. Sei  $(V, +, \cdot)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Definieren wir eine Multiplikation  $\odot: V \times V \rightarrow V$ , sodass  $(V, +, \odot)$  ein unitärer Ring ist, in dem außerdem

$$\forall v, w \in V, k \in \mathbb{K} : k(v \odot w) = (kv) \odot w = v \odot (kw)$$

gilt, so nennen wir  $(V, +, \cdot, \odot)$  eine  $\mathbb{K}$ -Algebra. Folglich ist  $(C, +, \cdot, \odot)$  eine  $\mathbb{R}$ -Algebra. Betrachten wir das Element  $i$  aus unserer Basis von  $C$ , so gilt offenbar

$$i^2 = -1.$$

Wir nennen  $i$  die imaginäre Einheit und schreiben  $1x = x$ , dann ergibt sich die Darstellung

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

für die Menge der komplexen Zahlen. Mit den bereits untersuchten Rechenoperationen auf  $C$  ist  $\mathbb{C}$  somit ein Oberkörper von  $\mathbb{R}$ . Zusätzlich gilt

$$\mathbb{R}(i) = \mathbb{R}[i] = \left\{ \sum_{n=0}^N a_n i^n \mid N \in \mathbb{N}_0, a_n \in \mathbb{R} \right\} = \{a_0 + a_1 i \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{C}.$$

Hierbei handelt es sich um eine algebraische Körpererweiterung vom Grad 2, da  $i$  eine Nullstelle des über  $\mathbb{R}$  irreduziblen Polynoms  $x^2 + 1$  ist. Interessanterweise ist  $(\{1, i, i^2, i^3\}, \cdot)$  eine zyklische Gruppe, da

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1.$$

Für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z = x + iy$  nennen wir  $x = \Re(z)$  den Realteil von  $z$  und  $y = \Im(z)$  den Imaginärteil von  $z$ . Für den Fall  $z = \Re(z)$  gilt offenbar  $\Im(z) = 0$ , dann nennen wir  $z$  reell und identifizieren  $z$  mit der reellen Zahl  $\Re(z)$ . Im Fall  $z = i\Im(z)$  nennen wir  $z$  rein imaginär.

**Satz 1.2** (Komplexe Konjugation). Auf  $\mathbb{C}$  definieren wir den selbstinversen Automorphismus der komplexen Konjugation  $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z)$ . Wir nennen  $\bar{z}$  die zu  $z$  komplexe konjugierte Zahl. Ferner hat  $\bar{\cdot}$  die Fixpunktmenge  $\mathbb{R}$ .

*Beweis.* Das  $\bar{\cdot}$  bijektiv ist, ist offensichtlich klar. Ferner gilt für  $z_j = x_j + iy_j$

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)} = x_1 x_2 - y_1 y_2 - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Somit ist die komplexe Konjugation ein bijektiver Homomorphismus von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  und somit ein Automorphismus. Ferner gilt natürlich  $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$ , womit  $\bar{\cdot}$  selbstinvers ist. Zusätzlich gilt ebenfalls für  $x \in \mathbb{R}$ , dass  $\bar{x} = \Re(x) - i\Im(x) = x - i0 = x$ , womit alle reellen Zahlen Fixpunkte von  $\bar{\cdot}$  sind.  $\square$

**Bemerkung 1.3.** Über  $\mathbb{C}$  kann die komplexe Konjugation mittels der Adjunkten Matrix definiert werden, da hier offenbar  $\bar{x} = \text{Adj}(x)$  gilt.