Übungsblatt №2

Aufgabe 2.1. *Zeige mit dem $\varepsilon - \delta$-Kriterium, dass die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig auf dem Definitionsbereich sind:*

a $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *mit* $f(x) = 3x + 5$

b $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \sqrt{x} + 1$

Wir erinnern uns an die gleichmäßige Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x_1, x_2 \in D\colon |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Zu a:

Sei $\delta > 0$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$, dann gilt:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |3x_1 + 5 - 3x_2 - 5| = |3(x_1 - x_2)| = 3|x_1 - x_2| \overset{!}{<} \varepsilon$$
$$3|x_1 - x_2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

Zu b: Sei $\delta > 0$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |\sqrt{x_1} + 1 - \sqrt{x_2} - 1| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|$$
$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}|^2 = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}||\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \cdot |\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|$$
$$= |(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})| = |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon^2$$