# 3. Übungsblatt

**Aufgabe 12.** Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das folgende Gleichungssystem keine, eine oder unendliche viele Lösungen:

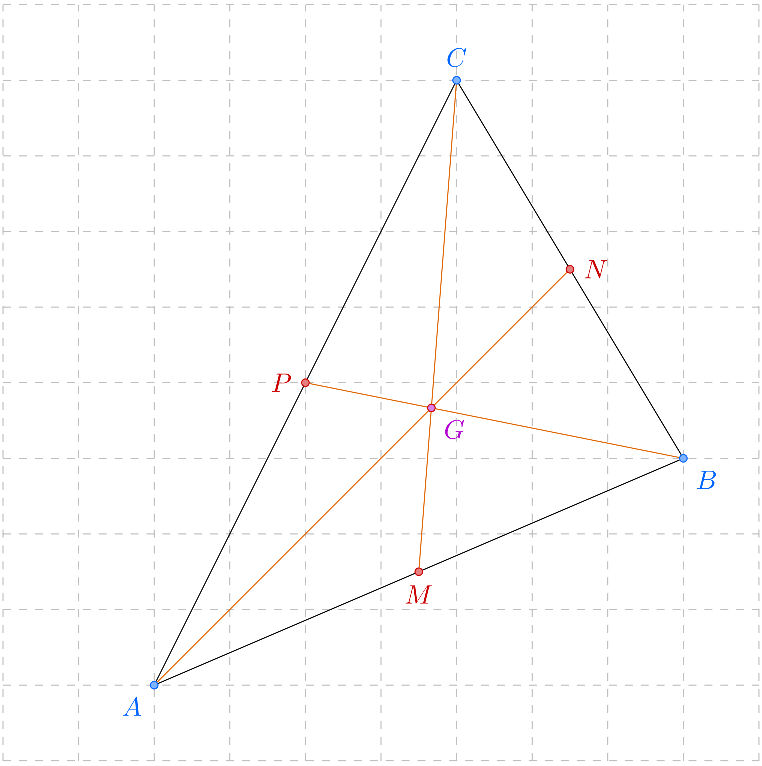
$$\begin{aligned} x_2 - \quad x_1 &= 1 \\ x_3 - \quad x_2 &= 1 \\ &\vdots \\ x_n - x_{n-1} &= 1 \\ \alpha x_n + \quad x_1 &= \beta \end{aligned}$$

Addieren wir die ersten $n-1$ Gleichungen, erhalten wir:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & n-1 \\ \alpha & 1 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{II-\alpha I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & n-1 \\ 0 & \alpha+1 & \beta-\alpha(n-1) \end{array}\right]$$

Wir sehen, dass für $\alpha = -1$ unendlich viele Lösungen existieren, wenn $\beta + n - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 - n$. Es existiert keine Lösung, wenn $\alpha = -1$ und $\beta \neq 1 - n$. Zuletzt erhalten wir eine eindeutige Lösung, wenn $\alpha \neq 1$ gilt.

**Aufgabe 13.** Zu zeigen ist, dass sich die Schwerlinien eines Dreiecks (auch Seitenhalbierende) einander in einem Punkt schneiden. Es seien $A$, $B$ und $C$ drei Punkte in $\mathbb{R}^2$.




Wir bezeichnen $\mathbf{a}$ als $\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}$ als $\overrightarrow{OB}$ und $\mathbf{c}$ als $\overrightarrow{OC}$. Die Strecken des Dreiecks $ABC$ sind gegeben durch:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \qquad \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a} \qquad \overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$$

Die Mittelpunkte dieser Strecken können folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \\ \overrightarrow{CN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \end{aligned}$$

Da $G$ sowohl auf $\overrightarrow{AN}$, als auch auf $\overrightarrow{BP}$ und $\overrightarrow{CM}$ liegen muss, gilt:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AN} \qquad \overrightarrow{BG} = \mu\overrightarrow{BP} \qquad \overrightarrow{CG} = \nu\overrightarrow{CM}\\ &\lambda = \mu = \nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \lambda\overrightarrow{AN} = \lambda(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}) = \lambda\left(\mathbf{c} - \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c})\right) = \lambda\left(\frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}\right)\\ \overrightarrow{BG} &= \mu\overrightarrow{BP} = \mu(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}) = \mu\left(\mathbf{c} - \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c})\right) = \mu\left(\frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right)\\ \overrightarrow{CG} &= \nu\overrightarrow{CM} = \nu(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}) = \nu\left(\mathbf{a} - \mathbf{c} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\right) = \nu\left(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{c}\right)\end{aligned}$$

Zusätzlich:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mu\left(\frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right)\\ &= \mathbf{a}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) + \mathbf{b}(1-\mu) + \frac{\mu}{2}\mathbf{c}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&-\lambda\mathbf{a} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{b} + \frac{\lambda}{2}\mathbf{c} = \mathbf{a}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) + \mathbf{b}(1-\mu) + \frac{\mu}{2}\mathbf{c}\\ &\Rightarrow -\lambda = \frac{\mu}{2} - 1 \qquad \frac{\lambda}{2} = 1 - \mu\\ &\Rightarrow \mu = 2 - 2\lambda \qquad \mu = 1 - \frac{\lambda}{2}\\ &\mu \stackrel{!}{=} \mu \Leftrightarrow 2 - 2\lambda = 1 - \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \frac{3\lambda}{2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}\\ &\Rightarrow \mu = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \qquad \mu = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Wir haben also bereits $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$ verifiziert. Wir müssen nun nur noch $\lambda = \mu = \nu$ nachweisen:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG} = \mathbf{b} - \mathbf{c} + \mu\left(\frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right)\\ &= \frac{\mu}{2}\mathbf{a} + (1-\mu)\mathbf{b} + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\mathbf{c}\end{aligned}$$

Wir erhalten also die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{2}\mathbf{a} + \frac{\nu}{2}\mathbf{b} - \nu\mathbf{c} = \frac{\mu}{2}\mathbf{a} + (1-\mu)\mathbf{b} + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right)\mathbf{c}\\ &\Rightarrow -\nu = \frac{\mu}{2} - 1 \qquad \frac{\nu}{2} = 1 - \mu\\ &\Rightarrow \mu = 2 - 2\nu \qquad \mu = 1 - \frac{\nu}{2}\\ &\mu \stackrel{!}{=} \mu \Leftrightarrow 2 - 2\nu = 1 - \frac{\nu}{2} \Leftrightarrow \frac{3\nu}{2} = 1 \Leftrightarrow \nu = \frac{2}{3}\\ &\Rightarrow \mu = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \qquad \mu = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Wir sehen, dass auch $\mu = \nu = \frac{2}{3}$ gilt. Die Geraden $\lambda\overrightarrow{AN}$, $\mu\overrightarrow{BP}$ und $\nu\overrightarrow{CM}$ schneiden sich also in einem Punkt für den Parameter $\lambda = \mu = \nu = \frac{2}{3}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OG} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AG} = \mathbf{a} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}\right) = \mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}\\ &= \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}\end{aligned}$$

**Aufgabe 14.** Gegeben sind einige Strukturen $(X, \circ)$. Wir sollen prüfen, ob es sich dabei um Halbgruppen, Monoide oder um Gruppen handelt. Zur Erinnerung:

- Eine assoziative algebraische Struktur heißt Halbgruppe
- Existiert in einer Halbgruppe ein neutrales Element, so heißt die Struktur Monoid
- Sind alle Elemente in einem Monoid invertierbar, so heißt die Struktur Gruppe

**Unterbeispiel a** Wir betrachten $(\mathbb{R}, \circ)$ mit $x \circ y = \max(x, y)$.

$$\max(x,y) = \begin{cases} x & x > y \\ y & y > x \end{cases}$$
$$(x \circ y) \circ z = \max(\max(x,y), z)$$
$$x \circ (y \circ z) = \max(x, \max(y,z))$$

| | $x > y > z$ | $x > z > y$ | $y > x > z$ | $y > z > x$ | $z > x > y$ | $z > y > x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x \circ y) \circ z$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $z$ | $z$ |
| $x \circ (y \circ z)$ | $x$ | $x$ | $y$ | $y$ | $z$ | $z$ |

Wir sehen, dass unsere Verknüpfung assoziativ ist, daher handelt es sich um eine Halbgruppe. Allerdings existiert keine reelle Zahl $\lambda$, sodass $\max(x, \lambda) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Das wäre nur möglich, wenn man $-\infty$ formal mit $\max(x, -\infty) = x$ definiert. Da das für $\mathbb{R}$ nicht der Fall ist, existiert kein neutrales Element.
Zuletzt prüfen wir auf Kommutativität.

| | $x > y$ | $y > x$ |
|---|---|---|
| $x \circ y$ | $x$ | $y$ |
| $y \circ x$ | $x$ | $y$ |

Wir haben somit gezeigt, dass es sich um eine abelsche Halbgruppe handelt.

**Unterbeispiel b** Wir betrachten $X = \{a, b, c\}$ mit der folgenden Verknüpfungstabelle:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |

Wir sehen, dass $(a \circ b) \circ c = b \circ c = c$ und $a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$ gleich sind, es handelt sich also zumindest um eine Halbgruppe. Zusätzlich sehen wir in Zeile 1 der Verknüpfungstabelle, dass $a \circ x = x$ mit $x \in X$ gilt, es handelt sich also um ein Monoid. Es gibt zu jedem Element ein linksinverses Element, sodass gilt $x \circ y = a$ mit $x, y \in X$. Zusätzlich gibt es auch immer ein rechtsinverses, somit sind alle Elemente invertierbar und es handelt sich um eine Gruppe.
Da die Verknüpfungstabelle nicht symmetrisch ist, ist die Verknüpfung nicht kommutativ.

**Unterbeispiel c** Wir betrachten $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ mit $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$:

$$((a,b) \circ (c,d)) \circ (e,f) = (a + bc, bd) \circ (e,f) = (a + bc + bde, bdf)$$
$$(a,b) \circ ((c,d) \circ (e,f)) = (a,b) \circ (c + de, df) = (a + bc + bde, bdf)$$

Die Verknüpfung ist assoziativ, daher handelt es sich um eine Halbgruppe. Es existiert ebenfalls ein rechtsneutrales Element $(0,1)$:

$$(a,b)\circ(0,1)=(a+b\cdot 0,b\cdot 1)=(a,b)$$

$$(c,d)\circ(a,b)=(c+da,db)$$

Wir sehen, dass $(0,1)$ ebenfalls ein linksneutrales Element ist:

$$(0,1)\circ(a,b)=(0+1\cdot a,1\cdot b)=(a,b)$$

Es handelt sich also um ein Monoid.

$$\begin{aligned}
&(a,b)\circ(c,d)=(a+bc,bd)\\
&a+bc=0 \qquad bd=1\Leftrightarrow b=\frac{1}{d}\\
&\Rightarrow a+\frac{c}{d}=0\Leftrightarrow a=-\frac{c}{d}\\
&(c,d)\circ\left(-\frac{c}{d},\frac{1}{d}\right)=\left(c+d\left(-\frac{c}{d}\right),\frac{d}{d}\right)=(c-c,1)=(0,1)\\
&\left(-\frac{c}{d},\frac{1}{d}\right)\circ(c,d)=\left(-\frac{c}{d}+\frac{c}{d},\frac{d}{d}\right)=(0,1)
\end{aligned}$$

Es existiert also auch zu jedem Element $(a,b)\in X$ das inverse Element $\left(-\frac{a}{b},\frac{1}{b}\right)$. Somit handelt es sich um eine Gruppe. Zuletzt prüfen wir auf Kommutativität:

$$\begin{aligned}
&(a,b)\circ(c,d)=(a+bc,bd)\\
&(c,d)\circ(a,b)=(c+ad,bd)\neq(a+bc,bd)=(a,b)\circ(c,d)
\end{aligned}$$

Die Verknüpfung ist also nicht kommutativ.

**Unterbeispiel d** Sei $M$ eine beliebige Menge. Wir betrachten $X=\mathcal{P}(M)$ mit $A,B\in X$ und $A\circ B=A\triangle B$.

$$(A\circ B)\circ C=(A\triangle B)\triangle C \qquad A\circ(B\circ C)=A\triangle(B\triangle C)$$

**Lemma 1.** *Seien $A,B$ Teilmengen von $M$, so gilt:*

$$x\notin(A\triangle B)\Leftrightarrow(x\notin A\wedge x\notin B)\vee(A\in B\wedge x\in B)$$

*Beweis für Lemma 1.*

$$\begin{aligned}
&(x\notin(A\triangle B))\Leftrightarrow(x\notin((A\setminus B)\cup(B\setminus A)))\Leftrightarrow((x\notin(A\setminus B))\wedge(x\notin(B\setminus A)))\\
\Leftrightarrow&((x\notin A)\vee(x\in B))\wedge((x\notin B)\vee(x\in A))\\
\Leftrightarrow&((x\notin A)\wedge((x\notin B)\vee(x\in A)))\vee((x\in B)\wedge((x\notin B)\vee(x\in A)))\\
\Leftrightarrow&(((x\notin A)\wedge(x\notin B))\vee((x\notin A)\wedge(x\in A)))\vee(((x\in B)\wedge(x\notin B))\vee((x\in B)\wedge(x\notin A)))\\
\Leftrightarrow&((x\notin A)\wedge(x\notin B))\vee((x\in A)\wedge(x\in B))
\end{aligned}$$

□

Wir wollen die Gleichheit dieser Mengen zeigen, indem wir $((A\triangle B)\triangle C)\subseteq(A\triangle(B\triangle C))$ und $(A\triangle(B\triangle C))\subseteq((A\triangle B)\triangle C)$ zeigen. Beginnen wir mit der zweiten Inklusion:

$$\begin{aligned}
&x\in(A\triangle(B\triangle C))\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin(B\triangle C))\vee(x\notin A\wedge x\in(B\triangle C))\\
\Leftrightarrow&(x\in A\wedge(x\notin(B\setminus C)\cup(C\setminus B)))\vee(x\notin A\wedge(x\in((B\setminus C)\cup(C\setminus B))))
\end{aligned}$$

Mit Lemma 1:

$$
\begin{aligned}
&((x \in A) \wedge (((x \notin B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C)))) \\
&\wedge ((x \notin A) \wedge (((x \in B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin B) \wedge (x \in C))))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))) \\
\Leftrightarrow &((x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C))) \vee ((x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \in C))) \\
\Leftrightarrow &((x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((x \notin A) \wedge (((x \in B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin B) \wedge (x \in C)))) \\
\Leftrightarrow &((x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &((x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C)) \\
&\vee ((x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C))
\end{aligned}
$$

Diese Aussage besagt, dass $x$ entweder in $A$, $B$ oder $C$, oder in allen drei gleichzeitig ist, aber nie in zwei Mengen. Es verbleibt die erste Inklusion:

$$x \in ((A \triangle B) \triangle C) \Leftrightarrow ((x \in (A \triangle B)) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin (A \triangle B)) \wedge (x \in C))$$

Mit Lemma 1 erhalten wir wieder:

$$
\begin{aligned}
&((x \in (A \triangle B)) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow ((((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))) \wedge (x \notin C)) \\
\Leftrightarrow &((x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((x \notin (A \triangle B)) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow ((((x \notin A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B))) \wedge (x \in C)) \\
\Leftrightarrow &((x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &((x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)) \\
&\vee ((x \notin A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \in C))
\end{aligned}
$$

Wir sehen, dass $((A \triangle B) \triangle V) \subseteq (A \triangle (B \triangle B))$ und $(A \triangle (B \triangle C)) \subseteq ((A \triangle B) \triangle C)$ äquivalente Aussagen sind, daher sind die Mengen gleich. Wir bearbeiten also zumindest eine Halbgruppe. Zunächst prüfen wir auf Kommutativität:

$$A \circ B = A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (B \backslash A) \cup (A \backslash B) = B \triangle A = B \circ A$$

Es gibt ebenfalls ein neutrales Element:

$$
\begin{aligned}
&A \circ \emptyset = (A \triangle \emptyset) = (A \backslash \emptyset) \cup (\emptyset \backslash A)) \\
&A \backslash \emptyset = \{x \in M : x \in A \wedge x \notin \emptyset\} = A \\
&\emptyset \backslash A = \{x \in M : x \in \emptyset \wedge x \notin A\} = \emptyset \\
&\Rightarrow A \circ \emptyset = A \cup \emptyset = \{x \in M \colon x \in A \vee x \in \emptyset\} = \{x \in M \colon x \in A\} = A
\end{aligned}
$$

Es handelt sich also auch um ein abelsches Monoid. Zuletzt prüfen wir auf die Invertierbarkeit aller Elemente in $X$:

$$(A \backslash A = \emptyset) \Rightarrow A \circ A = A \triangle A = (A \backslash A) \cup (A \backslash A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Damit haben wir gezeigt, dass es sich um eine abelsche Gruppe handelt.

**Aufgabe 15.** Gegeben sei die Struktur $(X, \circ)$ mit $X = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ und $a \circ b := a + b + ab$. Zu zeigen ist, dass es sich hierbei um eine Gruppe handelt. Darauf aufbauend soll die folgende Gleichung gelöst werden:

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$

Beginnen wir mit der Assoziativität:

$$\begin{aligned}
&(a \circ b) \circ c = (a + b + ab) \circ c = a + b + ab + c + c(a + b + ab) \\
&= a + b + c + ab + ac + bc + abc \\
&a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c + bc) = a + b + c + bc + a(b + c + bc) \\
&= a + b + c + bc + ab + ac + abc
\end{aligned}$$

Es handelt sich also zumindest schon um eine Halbgruppe. Als nächstes benötigen wir ein neutrales Element:

$$\begin{aligned}
a \circ 0 = a + 0 + a \cdot 0 = a \\
0 \circ a = 0 + a + 0 \cdot a = a
\end{aligned}$$

Weiters haben wir gezeigt, dass es sich zumindest um ein Monoid handeln muss. Zuletzt benötigen wir ein inverses Element:

$$\begin{aligned}
&a \circ x = a + x + ax = 0 \Leftrightarrow x(a + 1) = -a \Leftrightarrow x = -\frac{a}{a+1} = \frac{-a}{1+a} \\
&a \circ \left(\frac{-a}{1+a}\right) = a - \frac{a}{1+a} - \frac{a^2}{1+a} = \frac{a + a^2 - a - a^2}{1+a} = 0 \\
&\left(\frac{-a}{1+a}\right) \circ a = -\frac{a}{1+a} + a - \frac{a^2}{1+a} = \frac{-a + a + a^2 - a^2}{1+a} = 0
\end{aligned}$$

Es gibt also zu jedem $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ein $b = -\frac{a}{1+a} \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ mit $a \circ b = 0$.

$$a \circ b = a + b + ab = b + a + ba = b \circ a$$

Es handelt sich also auch um eine abelsche Gruppe. Damit können wir unsere Gleichung lösen. Das Rechtsinverse zu 6 ist $-\frac{6}{7}$, und das Linksinverse zu 5 ist $-\frac{5}{6}$:

$$\begin{aligned}
&5 \circ x \circ 6 = 17 && \backslash \circ -\frac{6}{7} \\
\Leftrightarrow &5 \circ x \circ 6 \circ \left(-\frac{6}{7}\right) = 17 \circ \left(-\frac{6}{7}\right) \\
\Leftrightarrow &5 \circ x = \frac{11}{7} && \backslash -\frac{5}{6}\circ \\
\Leftrightarrow &\left(-\frac{5}{6}\right) \circ 5 \circ x = \left(-\frac{5}{6}\right) \circ \frac{11}{7} \\
\Leftrightarrow &x = -\frac{4}{7}
\end{aligned}$$