Aufgabe 60. *Zeige, dass die unteren Dreiecksmatrizen eine Teilalgebra der $n \times n$ Matrizen bilde, also Produkte und Linearkombinationen wieder untere Dreiecksmatrizen ergeben.*

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n} \qquad \mathbf{B} = [b_{ij}]_{n \times n}$$

Wobei $\forall i > j\colon a_{ij} = b_{ij} = 0$. Betrachten wir $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\mathbf{C} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\mathbf{C} = \lambda[a_{ij}]_{n \times n} + \mu[b_{ij}]_{n \times n} = [\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}]_{n \times n} = [c_{ij}]_{n \times n}$$

Da $\forall i > j\colon a_{ij} = b_{ij} = 0$ gilt $\forall i > j\colon c_{ij} = 0$, womit $\mathbf{C}$ eine untere Dreiecksmatrix ist. Betrachten wir nun $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$:

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Da $a_{ik} = 0$ für $k > i$ können wir die Summe etwas vereinfachen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_{kj}$$

Das bedeutet aber insbesondere, dass wir $\mathbf{C}$ folgendermaßen anschreiben können:

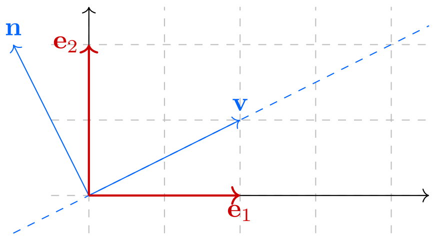
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{1} a_{1k} b_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{k=1}^{2} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{2} a_{2k} b_{k2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{k2} & \dots & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk} b_{kn} \end{bmatrix}$$

Somit ist $\mathbf{C}$ eine untere Dreiecksmatrix und somit bilden die unteren Dreiecksmatrizen eine Teilalgebra der $n \times n$ Matrizen.

Aufgabe 61. *Bestimme die Matrix $\mathbf{S}_\alpha$ der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der folgenden Geraden spiegelt:*

$$G = \left\{ t \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

Berechne $\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.



Wir sehen schon, dass die kanonischen Einheitsvektoren mit einer Drehung um α $\mathbf{n}$ und $\mathbf{v}$ bilden. Die Spiegelung entlang von G geschieht nun, indem wir $-\mathbf{n}$ als Basisvektor verwenden. Eine Rotationsmatrix ist gegeben durch:

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

Bestimmen wir nun $\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen der Winkelfunktionen erhalten wir:

$$\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\alpha+\beta}$$

Wie wir schon bei der Symmetrischen Gruppe des Quadrats gesehen haben, entsprechen zwei Spiegelungen an unterschiedlichen Achsen einer Drehung, wie wir es auch hier erkennen können.