

Blatt № 2

Aufgabe 4: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1)(y-1) \quad x \in \mathbb{R}$$

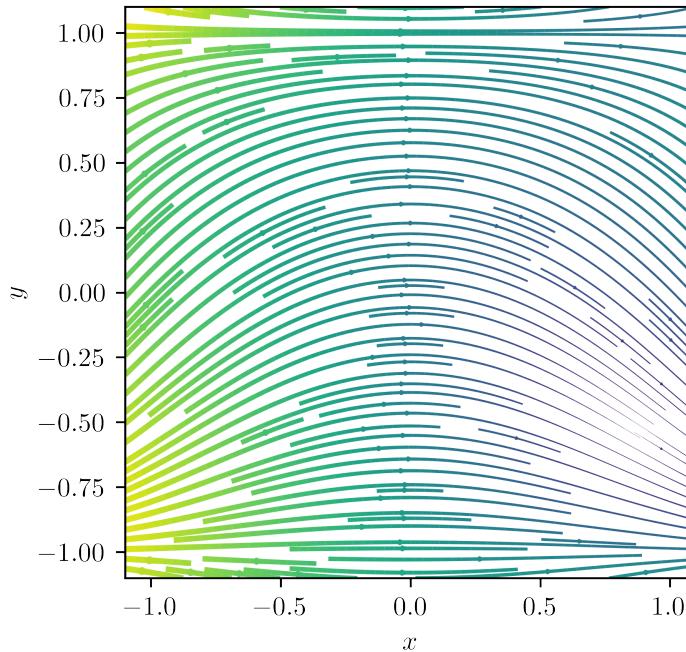


Figure 1: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Zuerst erkennen wir, dass $y = 1$ und $y = -1$ Lösungen der Differentialgleichung sind. Wir sehen weiters, dass $f(x, y) = g(x)h(y)$, könne also direkt die Trennung der Veränderlichen durchführen:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{(y+1)(y-1)} &= x \\ \Rightarrow \int \frac{y'(s) \, ds}{(y(s)+1)(y(s)-1)} &= \int s \, ds = \frac{x^2 + c}{2} \\ \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+1)(z-1)} &= \frac{x^2 + c}{2} \end{aligned}$$

Mittels Partialbruchzerlegung können wir die rationale Funktion z in eine einfache Summe zerlegen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)(z-1)} &= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \\ \Rightarrow A = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} &= -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow B = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \, dz$$

Hier machen wir nun eine Fallunterscheidung. Wir prüfen zuerst $y > 1$:

$$I = \frac{1}{2} (\ln(y-1) - \ln(y+1)) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y-1}{y+1} \right)$$

Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y-1}{y+1} \right) &= \frac{x^2 + c}{2} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{y-1}{y+1} \right) = x^2 + c \\ \Rightarrow \frac{y-1}{y+1} &= e^{x^2+c} \Leftrightarrow y-1 = e^{x^2+c} y + e^{x^2+c} \\ \Leftrightarrow y(1 - e^{x^2+c}) &= e^{x^2+c} + 1 \Leftrightarrow y(x) = \frac{1 + e^{x^2+c}}{1 - e^{x^2+c}} \\ y > 1 \Leftrightarrow \frac{1 + e^{x^2+c}}{1 - e^{x^2+c}} &> 1 \Leftrightarrow 1 - e^{x^2+c} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{x^2+c} \Rightarrow 0 > x^2 + c \Leftrightarrow -c > x^2 \end{aligned}$$

Hier ist anzumerken, dass $c < 0$ für $x \in \mathbb{R}$, daher ist die Lösung nur für $x \in \mathcal{B}_x(0)$ gültig. Weiters untersuchen wir den Fall $y < -1$, womit $\frac{1}{z-1} < 0$ und $\frac{1}{z+1} < 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} dz &= x^2 + c \\ \Rightarrow \int \frac{1}{z-1} dz - \int \frac{1}{z+1} dz &= \ln(1-y) - \ln(-1-y) = \ln \left(\frac{1-y}{-1-y} \right) = x^2 + c \\ \Leftrightarrow \frac{1-y}{-1-y} &= e^{x^2+c} \Leftrightarrow 1-y = -ye^{x^2+c} - e^{x^2+c} \Leftrightarrow y(e^{x^2+c} - 1) = -1 - e^{x^2+c} \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{1 + e^{x^2+c}}{1 - e^{x^2+c}} < -1 \Leftrightarrow 1 - e^{x^2+c} < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 + c \Leftrightarrow x^2 > -c \end{aligned}$$

Weiter prüfen wir $-1 < y < 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} dz &= x^2 + c \Leftrightarrow \ln(1-y) - \ln(y+1) = x^2 + c \Leftrightarrow \ln \left(\frac{1-y}{1+y} \right) = x^2 + c \\ \Leftrightarrow \frac{1-y}{1+y} &= e^{x^2+c} \Leftrightarrow 1-y = ye^{x^2+c} + e^{x^2+c} \\ \Leftrightarrow -ye^{x^2+c} - y &= e^{x^2+c} - 1 \Leftrightarrow y(-e^{x^2+c} - 1) = e^{x^2+c} - 1 \\ \Leftrightarrow y(x) &= \frac{1 - e^{x^2+c}}{1 + e^{x^2+c}} \end{aligned}$$

Für ermitteln noch den Wertebereich für c :

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{1 - e^{x^2+c}}{1 + e^{x^2+c}} < 1 \\ \Leftrightarrow -1 - e^{x^2+c} &< 1 - e^{x^2+c} < 1 + e^{x^2+c} \\ \Leftrightarrow -1 - 2e^{x^2+c} &< 1 - 2e^{x^2+c} < 1 \\ \Rightarrow 1 - 2e^{x^2+c} &< 1 \end{aligned}$$

Da $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ist diese Ungleichung für $c \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Wir erhalten also:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1 + e^{x^2+c}}{1 - e^{x^2+c}} & |y| > 1 \wedge \begin{cases} -c > x^2 & y > 1 \\ -c < x^2 & y < -1 \end{cases} \\ \frac{1 - e^{x^2+c}}{1 + e^{x^2+c}} & |y| < 1 \wedge c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aufgabe 5: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

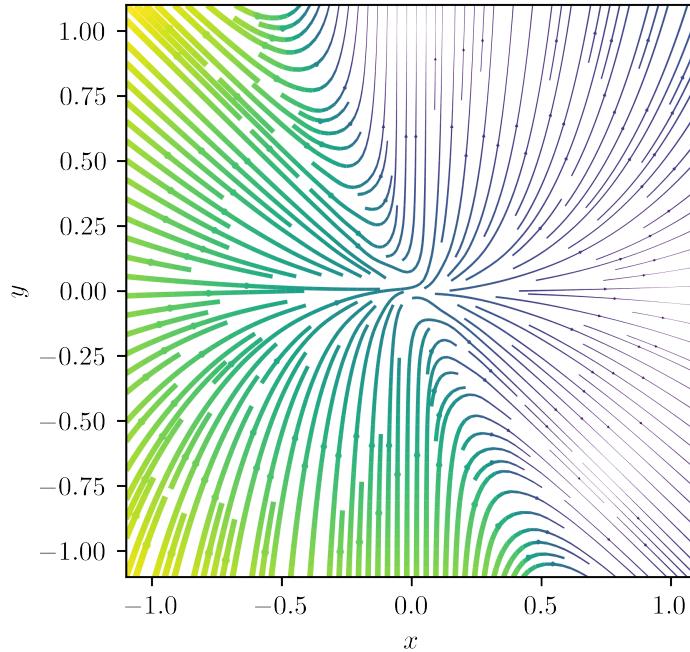


Figure 2: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Wir formen die Gleichung erst etwas um:

$$\frac{dy}{dx} + 1 = \frac{y^2 + 2xy + x^2}{x^2} = \frac{(y+x)^2}{x^2}$$

Wir führen nun die Substitution $u(x) = y(x) + x$ ein, wobei natürlich $u' = y' + 1$, und erhalten die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{x^2} &\Rightarrow \int \frac{u'(s)}{u(s)^2} ds = \int \frac{1}{x^2} ds = -\frac{1}{x} - c \\ \int \frac{u'(s)}{u(s)} ds &= \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} \\ \Rightarrow \frac{1}{u} &= \frac{1}{x} + c \Leftrightarrow u = \frac{1}{\frac{1}{x} + c} = \frac{1}{\frac{1+cx}{x}} = \frac{x}{1+cx} \\ \Rightarrow y + x &= \frac{x}{1+cx} \Leftrightarrow y(x) = \frac{x - x - cx^2}{1+cx} = -\frac{cx^2}{1+cx} = -\frac{x}{c-x} \end{aligned}$$

Hier ist anzumerken, dass wir für $x = -\frac{1}{c}$ eine Polstelle von y erhalten.

Aufgabe 6: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y' + y = 2 \sin x - \cos x$$

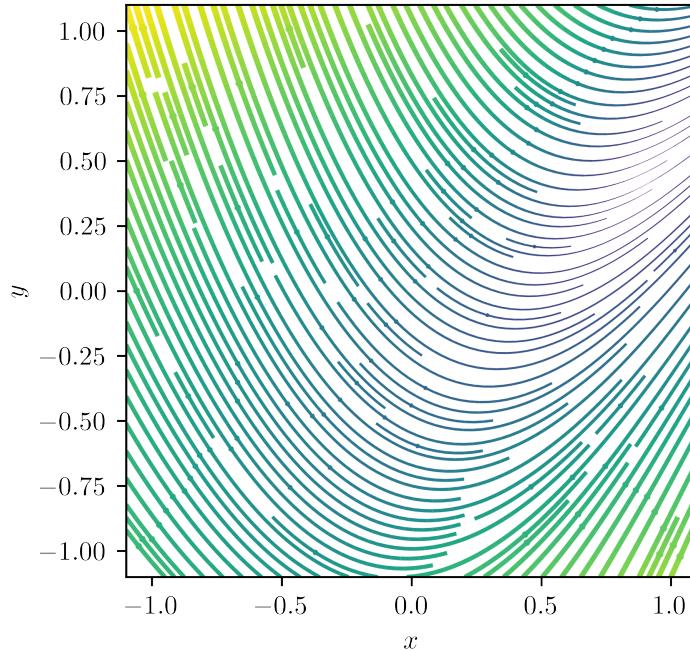


Figure 3: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Wir sehen, dass es sich dabei um eine lineare Differentialgleichung handelt. Wir lösen dazu also zuerst die homogene Gleichung $y' + y = 0$.

$$y_h(x) = \exp \left(- \int 1 \, dx \right) = e^{-x}$$

Für $y_p(x)$ wählen wir den Ansatz $y_p(x) = c(x)y_h(x)$. Sei $f(x) = 2 \sin(x) - \cos(x)$, dann finden wir einen Ausdruck für $c(x)$:

$$c(x) = \int f(x)e^x \, dx$$

Wir betrachten dazu zuerst $\int \sin(x)e^x \, dx$:

$$\begin{aligned} \sin(x)e^x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})e^x = \frac{1}{2i}(e^{x(1+i)} - e^{x(1-i)}) \\ \Rightarrow \int \sin(x)e^x \, dx &= \frac{1}{2i} \int e^{x(1+i)} - e^{x(1-i)} \, dx = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1+i}e^{x(1+i)} - \frac{1}{1-i}e^{x(1-i)} \right) \\ &= \frac{e^x}{2i} \left(\frac{e^{ix} - ie^{ix} - e^{-ix} - ie^{-ix}}{2} \right) = \frac{e^x}{4i}(2i \sin(x) - 2i \cos(x)) \\ &= \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) \end{aligned}$$

Wir gehen analog für $e^x \cos(x)$ vor:

$$\cos(x)e^x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})e^x = \frac{1}{2}(e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)})$$

$$\begin{aligned}\int \cos(x)e^x \, dx &= \frac{1}{2} \int e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)} \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i} e^{x(1+i)} + \frac{1}{1-i} e^{x(1-i)} \right) \\ &= \frac{e^x}{2} \left(\frac{e^{ix} - ie^{ix} + e^{-ix} + ie^{-ix}}{2} \right) = \frac{e^x}{4} (2\cos(x) + 2\sin(x)) = \frac{e^x}{2} (\cos(x) + \sin(x))\end{aligned}$$

Hernach erhalten wir für $c(x)$:

$$\begin{aligned}c(x) &= \int 2\sin(x)e^x - e^x \cos(x) \, dx = e^x(\sin(x) - \cos(x)) - \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) \\ &= \frac{e^x}{2}(\sin(x) - 3\cos(x))\end{aligned}$$

Wir erhalten damit die folgende Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - 3\cos(x)) + ce^{-x}$$