Übungsblatt 1

Beispiel 1.1. Es seien A, B und C Aussagen. Die folgenden Aussagen sollen durch Wahrheitstabellen bewiesen werden:

$$\neg(A \lor B) \Leftrightarrow (\neg A \land \neg B) \tag{a}$$
$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \lor B) \Leftrightarrow A \land \neg B \tag{b}$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \lor B$	$\neg A \land \neg B$	$\neg A \lor B$	$A \land \neg B$	$\neg(A \lor B)$	$\neg(\neg A \lor B)$
f	f	w	w	f	w	w	f	w	f
f	w	w	f	w	f	w	f	f	f
w	f	f	w	w	f	f	w	f	w
w	w	f	f	w	f	w	f	f	f

$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$	$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A \lor B)) \Leftrightarrow (A \land \neg B)$
w	f	w
w	f	w
f	w	w
w	f	w

Beispiel 1.2. Es seien p und q Aussagen und $P(x)$ und $Q(x)$ Aussageformen. Die folgenden Sätze sollen formal mit logischen Operatoren dargestellt werden:

a) Wenn p gilt, dann folgt daraus q, und wenn p nicht gilt, dann folgt daraus ebenfalls q

b) Es gibt ein x, sodass weder $P(x)$ noch $Q(x)$ zutreffen

c) Wenn für alle x gilt, dass zugleich $P(x)$ und $Q(x)$ zutreffen, dann gilt auch die Aussage q.

$$(a):$$
$$((p \Rightarrow q) \land (\neg p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow q \quad \text{Negation:} \quad \neg q$$
$$\exists x : \neg P(x) \land \neg Q(x) \quad \text{Negation:} \quad \forall x : P(x) \lor Q(x) \tag{b}$$
$$\forall x : P(x) \land Q(x) \Rightarrow q \quad \text{Negation:} \quad \exists x : \neg P(x) \lor \neg Q(x) \Rightarrow q \tag{c}$$

Beispiel 1.3. Es sei n eine natürliche Zahl. Zu zeigen ist, dass auch n^2 eine ungerade Zahl ist.
Es sei k eine natürliche Zahl. Wir nennen $n = 2k$ gerade, da n durch 2 teilbar ist. Sei $n = 2k+1$, so ist n ungerade, da wir $2k+1$ nicht durch 2 teilen können.

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1$$
$$l \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 = 2l + 1$$

Wir sehen, dass n^2 von der Form $2l+1$ ist, was wieder eine ungerade Zahl ist. In umgekehrter Richtung verwenden wir eine Kontraposition. Wenn n nicht ungerade ist, dann folgt daraus, dass n^2 nicht ungerade ist. In anderen Worten, wenn n gerade ist, ist n^2 gerade. Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

Es gibt also eine natürliche Zahl l mit $n^2 = 2l$, somit ist n^2 gerade. Daraus folgt durch die Kontraposition, wenn n^2 ungerade ist, ist auch n ungerade.

Beispiel 1.4. Gegeben sind Gleichungen und Ungleichungen über $\mathbb{R}$:

$$|x-1| + |x+1| = 4 \tag{a}$$
$$\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} + 2 = 3 \tag{b}$$
$$x^3 - 2x^2 - 5x > -6 \tag{c}$$

$$
\begin{aligned}
&(a):\\
&\quad x > 1 \Rightarrow x - 1 + x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2\\
&\quad -1 < x < 1 \Rightarrow -(x-1) + x + 1 = 4 \rightsquigarrow \text{falsche Aussage}\\
&\quad x < -1 \Rightarrow -(x-1) - (x+1) = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 \Leftrightarrow x = -2\\
&\quad L = \{-2, 2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(b):\\
&\quad \sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} + 2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x-1}\\
&\quad \rightsquigarrow 2x - 4 = x + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x - 4 = 2\sqrt{x-1}\\
&\quad \rightsquigarrow x^2 - 8x + 16 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0\\
&\quad x_{1,2} = 6 \pm 4
\end{aligned}
$$

Da wir durch quadrieren der Gleichung die Lösungsmenge verändert haben, müssen wir noch prüfen, welcher Wert von x die Gleichung erfüllt:

$$
\begin{aligned}
&x = 2 \Rightarrow \sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} + 2 = 1 \neq 3\\
&\Rightarrow L = \{10\}
\end{aligned}
$$

Für c nehmen wir erst eine Linearfaktorzerlegung vor:

$$
\begin{aligned}
&x^3 - 2x^2 - 5x = 6 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0\\
&x_1 = 1\\
&(x^3 - 2x^2 - 5x - 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6\\
&\Rightarrow x_{2,3} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -2\\
&\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow p(x) = (x-1)(x-3)(x+2) > 0
\end{aligned}
$$

Wir müssen nun nur noch prüfen, zwischen welchen Nullstellen das Polynom positiv ist. Für $x < -2$ ist $p(x)$ negativ. Daraus folgt, dass für $-2 < x < 1$ p positiv ist, für $1 < x < 3$ ist p damit wieder negativ und zuletzt für $x > 3$ p positiv ist. Unsere Lösungsmenge ist also:

$$L = (-2, 1) \cup (3, \infty)$$

Beispiel 1.5. Gegeben sind einige Aussagen welche durch einen Beweis durch Widerspruch gezeigt werden sollen:

a) Es gibt kein ebenes Dreieck mit zwei oder mehr stumpfen Winkeln.

b) Seien n und m natürliche Zahlen mit $n > m$. Dann gibt es genau $n - m$ natürliche Zahlen, die größer gleiche m und kleiner gleich n sind.

c) Die Funktion $f(x) = x^2 + 4$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

d) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Die Winkelsumme in einem regelmäßigen n-Eck beträgt immer 360°.

e) Zu je drei paarweise verschiedenen Punkten P_1, $P2$ und P_3 lässt sich immer eine eindeutige Kreislinie κ finden, sodass die Punkte auf der Kreislinie liegen.

f) Das Produkt von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

Unterbeispiel a

Wir nehmen an, es gibt ein ebenes Dreieck mit zwei stumpfen Winkeln α und β. Wir bezeichnen einen Winkel γ als stumpf, wenn $\gamma > 90°$ gilt. Für Ebene Dreiecke gilt, dass ihre Winkelsumme immer 180°. Wenn nun zwei Winkel α und β in einem Dreieck stumpf sind, so gilt:

$$\alpha > 90° \quad \beta > 90° \Rightarrow \alpha + \beta > 180°$$

Wenn also zwei stumpfe Winkel in einem ebenen Dreieck sind, so wäre die Winkelsumme größer als 180°, was für ebene Dreiecke nicht möglich ist. Wollen wir unsere Aussage formal aufschreiben. Es seien α, β und γ die Winkel eines ebenen Dreiecks $\Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \subset \mathbb{R}^2$.

$$\nexists \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \subset \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta + \gamma > 180°$$

Und die Verneinung:

$$\exists \Delta_{\alpha,\beta,\gamma} \subset \mathbb{R}^2 : \alpha + \beta + \gamma > 180°$$

Unterbeispiel b

Die Aussage in formaler Notation:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \colon n > m \colon \exists K \subset \mathbb{N} \colon K = \{x \in \mathbb{N} | m \leq x \leq n\} \colon |K| = n - m$$

Und die Verneinung:

$$\exists n, m \in \mathbb{N} \colon n > m \colon \exists K \subset \mathbb{N} \colon K = \{x \in \mathbb{N} | m \leq x \leq n\} \colon |K| \neq n - m$$

Unterbeispiel c

Angenommen, es existieren zwei reelle Nullstellen x_1 und x_2, sodass $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 4$ gilt:

$$\begin{gathered}
(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \overset{!}{=} x^2 + 4 \\
\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 x_2 = x_1(-x_1) = -x_1^2 \\
\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0 \Rightarrow \nexists x_1 \in \mathbb{R} : -x_1^2 = 4
\end{gathered}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch, wenn wir annehmen, dass reelle Nullstellen für dieses Polynom existieren, daher kann es keine reellen Nullstellen geben. In logischer Schreibweise:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (x - x_1)(x - x_2) \neq x^2 + 4$$

Und die Negation:

$$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + 4$$

Unterbeispiel d

Es sei ein regelmäßiges n-Eck gegeben und α_k seien die zugehörigen Winkel.

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq 4 \colon \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 360°$$

Die Verneinung:

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq 4 \colon \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \neq 360°$$

Unterbeispiel e

In formaler Schreibweise:

$$\forall P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2 \colon \overrightarrow{P_1 P_2} \neq \alpha \overrightarrow{P_1 P_3}, \alpha \in \mathbb{R} \colon \exists \kappa \subset \mathbb{R}^2 : \{P_1, P_2, P_3\} \subset \kappa$$

Und die Negation:

$$\exists P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{P_1 P_2} \neq \alpha \overrightarrow{P_1 P_3}, \alpha \in \mathbb{R} \colon \forall \kappa \subset \mathbb{R}^2 : \{P_1, P_2, P_3\} \not\subset \kappa$$

Die Aussage ist war. Da drei paarweise verschiedene Punkte in der Ebene ein Dreieck aufspannen, können wir den Umkreismittelpunkt als den Schnittpunkt der Seitensymmetralen konstruieren. Der Umkreis berührt alle Eckpunkte eines Dreiecks.

Unterbeispiel f

In formaler Schreibweise:

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2) \mod 6 = 0) \Leftrightarrow \forall \left(\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N} \right)$$

Und die Negation:

$$(\exists n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2) \mod 6 \neq 0) \Leftrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N} : \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \notin \mathbb{N} \right)$$

Die Aussage ist ebenfalls wahr. Da $6 = 2 \cdot 3$ ist, müssen wir nur prüfen, dass $n(n+1)(n+2)$ durch 2 und 3 teilbar ist. Wenn n gerade ist, dann ist es durch 2 teilbar. Wenn n ungerade ist, dann ist $n+1$ durch 2 teilbar. Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, ist entweder $n+1$ oder $n+2$ durch 3 teilbar, weil bei der Division mit Rest durch 3 immer nur 1 oder 2 übrig bleibt.