Aufgabe 55. *Gegeben sind die folgenden linearen Abbildungen:*

$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 \qquad\qquad g(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1$$
$$f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \qquad\qquad g(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2$$

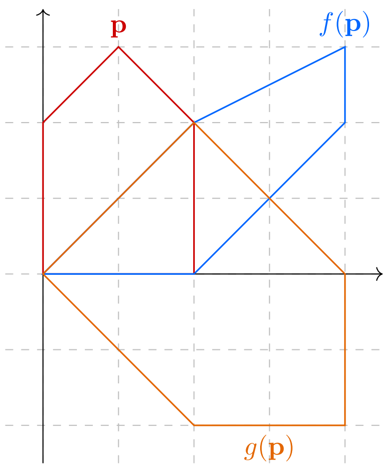
Warum sind die folgenden linearen Abbildungen eindeutig festgelegt? Skizziere das Bild des geschlossenen Polygonzuges $(0,0) - (2,0) - (2,2) - (1,3) - (0,2) - (0,0)$ *unter* f *und* g*.*

$$g(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 = g(\mathbf{e}_1) + g(\mathbf{e}_2)$$
$$g(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = g(\mathbf{e}_1) - g(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\mathbf{e}_1 \\ 1 & -1 & 2\mathbf{e}_2 \end{array}\right] \xrightarrow{II-I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\mathbf{e}_1 \\ 0 & -2 & 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\mathbf{e}_1 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \end{array}\right] \xrightarrow{I-II} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \end{array}\right]$$
$$g(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \qquad g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$$
$$g(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = g(\mathbf{e}_1) + g(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$$
$$g(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_2$$

Unter der Annahme, dass $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ linear unabhängig ist. Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, dann gilt $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$f(\mathbf{v}) = f(\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{e}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_2\mathbf{e}_2$$
$$g(\mathbf{v}) = g(\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_2$$

Wir können zu einem beliebigen Vektor in $\mathbb{R}^2$ das Bilde bestimmen. Da die kanonischen Basisvektoren linear unabhängig sind, sind die Funktionswerte eindeutig bestimmt.



Der Flächeninhalt von $\mathbf{p}$ ist 5, von $f(\mathbf{p})$ ist er ebenfalls 5, aber von $g(\mathbf{p})$ ist der Flächeninhalt 10.

Aufgabe 56. *Zeige. dass die folgenden Abbildungen linear sind. Bestimme weiterhin Basen von Kern und Bild für* f*,* g *und* $g \circ f$*.*

Zu f:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x - y \\ -x + y \end{bmatrix}$$
$$f\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda(x_1 - y_1) + \mu(x_2 - y_2) \\ \lambda(y_1 - x_1) + \mu(y_2 - x_2) \end{bmatrix}$$
$$= \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 - y_1 \\ y_1 - x_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 - y_2 \\ y_2 - x_2 \end{bmatrix} = \lambda f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

Zu g:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-y+z \\ -x+y+z \\ -z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) &= g\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda y_1 - \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2 \\ -\lambda x_1 - \mu x_2 + \lambda y_1 + \mu y_2 + \lambda z_1 + \mu z_2 \\ -\lambda z_1 - \mu z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda(x_1 - y_1 + z_1) + \mu(x_2 - y_2 + z_2) \\ \lambda(y_1 - x_1 + z_1) + \mu(y_2 - x_2 + z_2) \\ -\lambda z_1 - \mu z_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 - y_1 + z_1 \\ y_1 - x_1 + z_1 \\ -z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 - y_2 + z_2 \\ y_2 - x_2 + z_2 \\ -z_2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + \mu g\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Wir bestimmen den Kern von f:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-I,\ III+I} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II+III} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Somit $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$. Weiterhin bestimmen wir den Kern von g:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II+I,\ -1III} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2III,\ I-III} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Als Lösung des Gleichungssystems erhalten wir also die folgende Gerade:

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Damit ist der Kern von g eindimensional und eine Basis ist:

$$B_{\ker(g)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Zuletzt bestimmen wir den Kern von $g \circ f$:

$$(g \circ f)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} x \\ x-y \\ y-x \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-x+y+y-x \\ x-y-x+y-x \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y-x \\ -x \\ x-y \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-I,\ III+I, -1I} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{I-2III} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Damit ist $\ker(g \circ f) = \{\mathbf{0}\}$ und hat die gleiche Basis wie $\ker(f)$.

Aufgabe 58. *Von einer linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei bekannt:*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Zu a):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 \qquad \Rightarrow f(\mathbf{v}_1) = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 \qquad \Rightarrow f(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da wir für $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_3$ bereits Funktionswerte gefunden haben und $\mathbf{v}_2$ aus keiner Linearkombination von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_3$ hervorgeht, sind die Kombinationen $f(\mathbf{v}_1) = (0, 0, 12)$ und $f(\mathbf{v}_3) = (0, 0, 0)$ möglich.

Zu b):

Da wir nicht den ganzen $\mathbb{R}^4$ auf $\mathbf{0}$ abbilden,gilt $\dim(\ker(f)) \leq 3$.

Aufgabe 59. *Gegeben sind die folgenden Matrizen:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gesucht sind alle möglichen Matrixprodukte.

$$\mathbf{AD} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{BD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{CC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{DD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$