Blatt № 6

Aufgabe 19: System erster Ordnung

Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems:

$$y_1'(x) = (3x-1)y_1(x) - (1-x)y_2(x)$$
$$y_2'(x) = -(x+2)y_1(x) + (x-2)y_2(x)$$

Wir wählen den Ansatz $y_1 = -y_2$, womit wir erhalten $y_1' = 2xy_1$ und $y_2' = 2xy_2$. Unter der Annahme, dass $y_1 \neq 0$ erhalten wir:

$$\int^x \frac{y_1'(s)}{y_1(s)}\,\mathrm{d}s = \int^x 2s\,\mathrm{d}s \Rightarrow y_{11} = c\mathrm{e}^{x^2}$$

Für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach unserer Annahme gilt $y_{21} = -c\mathrm{e}^{x^2}$. Für $c = 1$ erhalten wir eine Lösung des Systems:

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{x^2} \\ -\mathrm{e}^{x^2} \end{bmatrix}$$

Mit dem Reduktionsverfahren von D'Alembert können wir eine weitere Lösung finden. Dazu sei:

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \begin{bmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{bmatrix} = \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}(x) = \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ z_2(x) \end{bmatrix}$$

Differenzieren bringt uns:

$$\boldsymbol{y}_2'(x) = \phi_2'(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1'(x) + \boldsymbol{z}'(x)$$

Sei nun $\boldsymbol{y}_1'(x) = \mathrm{A}(x)\boldsymbol{y}_1(x)$, dann können wir die Gleichung umschreiben:

$$\mathrm{A}(x)\boldsymbol{y}_2(x) = \phi_2'(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \phi_2(x)\mathrm{A}(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}'(x)$$

Setzen wir die Definition von $\boldsymbol{y}_2(x)$ oben ein, erhalten wir ein reduziertes System:

$$\phi_2'(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}'(x) = \mathrm{A}(x)\boldsymbol{z}(x)$$

Das liefert uns:

$$\begin{bmatrix} \phi_2'(x)y_{11}(x) \\ \phi_2'(x)y_{21}(x) + z_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}(x)z_2(x) \\ a_{22}(x)z_2(x) \end{bmatrix}$$
$$\phi_2'(x) = \frac{a_{12}(x)}{y_{11}(x)}z_2(x) \Rightarrow a_{12}(x)\frac{y_{21}(x)}{y_{11}(x)}z_2(x) + z_2'(x) = a_{22}(x)z_2(x)$$
$$\Leftrightarrow z_2'(x) = \left((x-2) - (x-1)\frac{-\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}}\right)z_2(x) = (2x-3)z_2(x)$$

Diese lineare DGL hat die Lösung $z_2(x) = c_z\mathrm{e}^{x^2-3x}$ für ein $c_z \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wählen wir $c_z = 1$ um ϕ_2 zu bestimmen:

$$\phi_2'(x) = \frac{a_{12}(x)}{y_{11}(x)}z_2(x) = \frac{x-1}{\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{e}^{x^2-3x} = (x-1)\mathrm{e}^{-3x}$$
$$\Rightarrow \phi_2(x) = \int^x (s-1)\mathrm{e}^{-3s}\,\mathrm{d}s = \frac{(2-3x)\mathrm{e}^{-3x}}{9} + \hat{c}$$

Wir können $\hat{c}$ beliebig wählen, also $\hat{c} = 0$. Das liefert uns:

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}(x) = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{x^2-3x}\begin{bmatrix} -3x+2 \\ 3x+7 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist nun eine Linearkombination von $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x)$$

Aufgabe 20: Lineares System mit konstanten Koeffizienten

Man bestimme die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\boldsymbol{y}'(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathrm{A}} \boldsymbol{y}(x)$$

Wir wollen die Eigenvektoren von A bestimmen. Dazu sei

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Ein Eigenwert ist $\lambda_1 = -1$, dann folgt: $\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$, also ist -1 ein Eigenwert mit Vielfachheit 2. Daraus folgt, dass der letzte Eigenwert 2 ist. Für die Eigenvektoren zu λ_1:

$$\mathrm{A} - \lambda_1\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Der Eigenvektor zu λ_2:

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow \boldsymbol{u}_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist nun:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\mathrm{e}^{-x}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\mathrm{e}^{-x}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\mathrm{e}^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$