

Übungsblatt № 6

Aufgabe 6.1

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge von Abbildungen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Abbildung, sodass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f auf D konvergiert. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a Wenn f_n gleichmäßig stetig für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist f gleichmäßig stetig
- b Wenn es eine $L > 0$ gibt, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ f_n Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante L ist, dann ist L Lipschitz-stetig

Zu a.

Wir erinnern uns an die gleichmäßige Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in D$$

f ist gleichmäßig stetig wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x_1, x_2 \in D: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f auf D konvergiert, können wir ein $N \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Weiterhin sind die f_n gleichmäßig stetig, wir können also ein δ wählen, sodass $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| < \delta &\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f_n(x_1) + f_n(x_1) - f_n(x_2) + f_n(x_2) - f(x_2)| \\ &\leq \underbrace{|f(x_1) - f_n(x_1)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x_1) - f_n(x_2)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x_2) - f(x_2)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist $f(x)$ gleichmäßig stetig.

Zu b.

Eine Funktion f heißt Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L wenn gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in D: |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Wir gehen ähnlich vor wie in a. Wir wählen N so groß, dass gilt $n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < |x_1 - x_2|$:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - f_n(x_1) + f_n(x_1) - f(x_2) + f_n(x_2) - f(x_2)| \\ &\leq \underbrace{|f(x_1) - f_n(x_1)|}_{< |x_1 - x_2|} + \underbrace{|f_n(x_1) - f_n(x_2)|}_{\leq L|x_1 - x_2|} + \underbrace{|f_n(x_2) - f(x_2)|}_{< |x_1 - x_2|} \\ &< 2|x_1 - x_2| + L|x_1 - x_2| = \tilde{L}|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

Somit ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $\tilde{L} = L + 2$.

Aufgabe 6.3

Wir sagen, dass eine differenzierbare Abbildung $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ den Mittelwertsatz erfüllt, wenn es für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein $c \in (a, b)$ gibt, sodass $h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$. Es seien $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ und es seien die Abbildungen f und g gegeben:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} & f(x) &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} & g(x) &= e^{ix} \end{aligned}$$

- a Zeigen Sie, dass f den Mittelwertsatz erfüllt
- b Zeigen Sie, dass g den Mittelwertsatz nicht erfüllt

Zu a: Wir bestimmen zuerst $f'(x) = 2a_2 x + a_1$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{a_2(b^2 - a^2) + a_1(b - a)}{b - a} = \frac{a_2(b - a)(b + a) + a_1(b - a)}{b - a}$$

$$= a_2(b+a) + a_1 \stackrel{!}{=} 2a_2c + a_1$$

$$\Leftrightarrow a_2(b+a) = 2a_2c \Leftrightarrow c = \frac{b+a}{2}$$

Wir können also zu beliebigen f auf beliebigen Intervallen (a, b) immer ein $c = \frac{b+a}{2}$ finden, sodass f den Mittelwertsatz erfüllt.

Zu b:

Wir finden ein Gegenbeispiel. Wir wählen $a = 0$ und $b = 2\pi$, dann gilt $g(a) = g(b)$, womit $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0$, allerdings gilt $\forall x \in \mathbb{R}: g'(x) \neq 0$, somit erfüllt g den Mittelwertsatz nicht.

Aufgabe 6.4

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte nur mit Wissen aus der Vorlesung:

- a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$
- b $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) - x}{\sin(2x) - x}$
- c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - xe^x}{\cos(x) - 1}$

Zu a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\cos^2(x) - 1) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^2(x) - 2}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = -2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

Zu b:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) - x}{\sin(2x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{\sin(4x)}{x} - 1 \right)}{x \left(\frac{\sin(2x)}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \frac{\sin(4x)}{4x} - 1}{2 \frac{\sin(2x)}{2x} - 1}$$

$$= \frac{4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} - 1}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

Zu c:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - xe^x}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - e^x)}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 - e^x)}{x(\cos(x) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{(1 - e^x)}{x} \cdot \frac{x^2}{\cos(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\frac{x^2}{2}}{\sin^2(\frac{x}{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{2 \frac{x^2}{4}}{\sin^2(\frac{x}{2})} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$= 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}} \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{2}}} \right) = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

Aufgabe 6.5: S

i $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $M \subseteq V$. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a Die Menge der Randpunkte von M ist abgeschlossen
- b Die Menge der isolierten Punkte von M ist abgeschlossen

Zu a:

$\mathbf{x} \in V$ heißt Berührungspunkt von M falls $\forall r > 0: \mathcal{B}_r(\mathbf{x}) \cap M \neq \emptyset$ gilt. Eine Menge $A \subseteq V$ heißt abgeschlossen in V , falls jeder Berührungspunkt von A auch in A liegt.

Sei $A = \{\mathbf{x} \in M | \mathbf{x} \text{ ist Randpunkt von } M\} = R(M)$ die Menge der Randpunkte von M . Wenn A^C offen ist, dann muss A abgeschlossen sein.

$$A^C = (M \cup M^C) \setminus A = (M \setminus A) \cup (M^C \setminus A) = \overset{\circ}{M} \cup (M^C \setminus R(M^C)) = \overset{\circ}{M} \cup \overset{\circ}{M^C}$$

Da die Vereinigung offener Mengen offen ist, ist A^C offen.

Zu b:

Sei $A = \{\mathbf{x} \in M \mid \mathbf{x} \text{ isolierter Punkt}\}$ die Menge der isolierten Punkte von M .

Sprich $\forall \mathbf{x} \in A: \exists r > 0: \mathcal{B}_r(\mathbf{x}) \cap M = \{\mathbf{x}\}$. Daraus folgt $\forall \mathbf{x} \in A: \mathcal{B}_r(\mathbf{x}) \cap A = \{\mathbf{x}\}$. Damit ist \mathbf{x} ein Berührungspunkt von A und von $V \setminus A$, da $\forall r > 0: \mathcal{B}_r(\mathbf{x}) \cap V \setminus A \neq \emptyset$, somit ist A abgeschlossen.