Moritz Mossböck, 11820925
Andreas Archer, 11816749

Übungsblatt № 5

Eine kleine Anmerkung: Um etwaige Verwirrung zu verhindern schreiben wir in diesem Übungsblatt die Mengendifferenz als $G - N = \{g \in G \colon g \notin N\}$ an.

Aufgabe 5.3: Struktur von (kleinen) p-Gruppen

G bezeichne eine endliche Gruppe, p sei eine Primzahl und n sei eine natürliche Zahl. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Hat G Ordnung p^n, so hat G ein nicht-triviales Zentrum $Z(G) \supset \{1_G\}$
b) Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist G abelsch
c) Ist $N \leq G$ mit $[G : N] = 2$, so ist $N \trianglelefteq G$
d) Hat G Ordnung p^2, so ist G abelsch und es gilt $G \simeq C_{p^2}$ oder $G \simeq C_p \times C_p$

Wir erinnern uns an die Definition des Zentrums:

$$Z(G) = \bigcap_{m \in G} Cs_G(m) = \{a \in G \colon \forall m \in G \colon am = ma\} = \{a \in G \colon i_a = \mathrm{id}_G\} = \ker i$$

Wobei $i \colon G \to \mathrm{Sym}(G)$ mit $i(a) = x \mapsto axa^{-1}$

Zu a): Wir verwenden die Klassengleichung

$$|G| = |Z(G)| + \sum_K |K|$$

wobei K alle nicht-einelementigen Konjugiertenklassen sind. Nach der Bahnformel gilt $|K| | |G$ insbesondere gilt also $p | |K|$ für alle K. Sei $\mathfrak{K} = \sum_K |K|$, dann gilt $p | \mathfrak{K}$ bzw. $p | |Z(G)| + \mathfrak{K}$. Damit muss $|Z(G)|$ aber auch ein Vielfaches von p sein, sprich $|Z(G)| \geq p$.

Zu b): Da $Z(G)$ zyklisch ist, gibt es ein $x \in G$, sodass $\langle xZ(G) \rangle = G/Z(G)$. Seien weiters $a, b \in G$ und $z, w \in Z(G)$, dann gibt es $k, l \in \mathbb{N}$ sodass

$$a = x^k z \qquad b = x^l w$$

Daraus folgt aber:

$$ab = x^k z x^l w = x^{k+l} zw = x^{k+l} wz = x^l w x^k z = ba$$

Zu c): Wir stellen zuerst fest, dass nach dem Satz von Lagrange gilt, dass $|G| = 2|N|$, da G/N zwei disjunkte Elemente enthält und

$$G = N \uplus gN$$

wobei $g \in G$ ein geeigneter Repräsentant ist, sodass $gN \cap N = \emptyset$. Wir können oBdA annehmen, dass $N \in G/N$, da $\forall n \in N \colon nN = N$, da N eine Untergruppe ist. Insbesondere gilt also $1N = N$. Somit gilt $g \in G - N$. Wir prüfen nun, ob G/N eine Gruppe ist[1]. Das neutrale Element ist offensichtlich N:

$$N * gN = 1gN = gN = g1N = gN * N$$

Da $N * N = N$ muss also gelten $gN * gN = N$. Da $N \leq G$ gilt also auch $g^{-1} \in G - N$. Es gilt sogar $g^{-1} \in gN = G - N$. Daher folgt $g^{-1}N = gN$ womit

$$gN * gN = gN * g^{-1}N = gg^{-1}N = 1N = N$$

Somit ist G/N eine Gruppe. Betrachten wir nun den Homomorphismus $\varphi \colon G \to G/N$ mit $\varphi(g) = gN$:

$$\varphi(gh) = (gh)N = gN * hN = \varphi(g) * \varphi(h)$$

Interessant ist, dass $\forall n \in \mathbb{N} \colon \varphi(n) = N$ bzw. $\forall g \in G - N \colon \varphi(n) \notin N$. Wir haben aber bereits festgestellt, dass G/N eine Gruppe mit neutralem Element N ist. Somit ist N der Kern von φ und per Definition damit ein Normalteiler von G.

[1] Als innere Verknüpfung verwenden wir $* \colon (G/N)^2 \to (G/N)$ mit $(aN, bN) \mapsto (ab)N$.

Zu d): Nach dem Satz von Lagrange kommen für $|Z(G)|$ nur $1, p$ und p^2 in Frage. Gilt $|Z(G)| = p^2$, so folgt, dass $|Z(G)| = |G|$ und in diesem Kontext, da $Z(G) \subseteq G$, dass $Z(G) = G$. Was bedeutet es aber, dass $a \in Z(G)$? Das a mit allen Elementen in G kommutiert. Es gilt daher:

$$\forall a, m \in G \colon am = ma$$

was genau die Definition der Kommutativität ist. Wir wollen $|Z(g)| = 1$ und $|Z(G)| = p$ noch ausschließen. Aus a) wissen wir, dass das Zentrum nicht trivial ist, also $|Z(G)| > 1$ gelten muss. Das Zentrum von G ist eine Untergruppe, daher gilt nach dem Satz von Lagrange $|G/Z(G)| = p$, womit $G/Z(G)$ zyklisch ist, da p eine Primzahl ist. Nach b) gilt also $Z(G) = G$, da $\forall a, b \in G \colon ab = ba$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $|G| = p^2$.

Für die Isomorphie greifen wir etwas heraus und verwenden Satz 5.3:

> Jede endliche abelsche Gruppe ist isomorph zu einer Gruppe
>
> $$C_{q_1} \times C_{q_2} \times \cdots \times C_{q_t}$$
>
> mit $t \in \mathbb{N}_0$ und Primzahlpotenzen $p_1, \ldots, p_t > 1$.

G ist endlich und abelsch. Wir brauchen also direkte Produkte mit Kardinalität p^2. Da p eine Primzahl ist, brauchen wir nur $|C_{p^2}| = p^2$ oder $|C_p \times C_p| = p^2$.

Aufgabe 5.4: Der Bascetta-Stern und seine Symmetrie

Wir untersuchen jene Gruppe G an Drehungen des $\mathbb{R}^3$, welche den Bascetta-Stern $\mathscr{B}$ invariant lassen.

a) Falten Sie einen Bascetta-Stern.
b) Zeigen Sie, dass G treu auf $\mathscr{B}$ operiert und endlich ist
c) Bestimmen Sie die Ordnung von G.

Zu b): Drehungen, die $\mathscr{B}$ invariant lassen sind offensichtlich eine Teilmenge der Permutationen der Ecken. Bezeichnet $\mathscr{B}$ die 20 „Sternspitzen" des Bascetta-Sterns, so ist $G \subseteq \mathrm{Sym}(\mathscr{B})$ und damit gilt $|G| \leq 20!$.

Damit G treu ist, muss

$$\varphi \colon G \to \mathrm{Sym}(\mathscr{B}) \qquad g \mapsto \begin{cases} M \to M \\ m \mapsto g \triangleright m \end{cases}$$

injektiv sein. Wir wollen uns überlegen, wie der Kern von φ aussieht. Damit $g \in \ker \varphi$ ist, muss gelten $\varphi(g) = \mathrm{id}$, sprich $\forall m \in M \colon g \triangleright m = m$ bzw. $M^g = M$. Offensichtlich gilt $1 \in \ker \varphi$, da $\forall m \in M \colon 1 \triangleright m = m$ nach unserer Voraussetzung, dass $\triangleright$ eine Operation ist. Betrachten wir aber nun eine invariante Drehung von $\mathscr{B}$, welche nicht die identische Abbildung ist, so sehen wir schnell, dass nie alle Punkte auch Fixpunkte sind. Damit gilt also $\ker \varphi = \{1\}$, hernach ist φ injektiv und damit operiert G treu auf $\mathscr{B}$.

Zu c): Wir verwenden die Bahnformel:

$$|G(m)| = \frac{|G|}{|G_m|}$$

Wobei $G(m)$ die Bahn von m unter G ist und G_m der Stabilisator von m. Es gilt natürlich $|G(m)| = 20$, da invariante Drehungen beliebig hintereinander ausgeführt werden können um einen Punkt zu einem anderen Punkt „zu bewegen". Offensichtlich gilt $1 \in G_m$. Betrachten wir nun eine invariante Drehung des Bascetta-Sterns, deren Drehachse nicht durch m läuft, so wird m zu einer anderen Ecke gedreht. Somit betrachten wir also nur Drehungen, deren Drehachse durch m und die gegenüberliegende Spitze läuft. Betrachten wir den Stern genau, so gibt es drei benachbarte Spitzen von m. Diese bezeichnen wir mit n_1, n_2 und n_3. Neben der identischen Abbildung gibt also noch jene Drehung mit $(n_1, n_2, n_3) \mapsto (n_2, n_3, n_1)$ und $(n_1, n_2, n_3) \mapsto (n_3, n_1, n_2)$. Somit gilt $|G_m| = 3$ und nach der Bahnformel also $|G| = 60$.