Übungsblatt №1

Beispiel 1 (Randwertproblem)**.** *Für $\varepsilon > 0$, $x \in (0,1)$, $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$ bestimme man die Lösung des Randwertproblems*

$$-\varepsilon^2 u''(x) + u(x) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist $-\varepsilon^2\lambda^2 + 1 = 0$ mit den Lösungen $\lambda = \pm\nu = \pm\frac{1}{\varepsilon}$. Die allgemeine Lösung ist also

$$u(x) = c_1 \mathrm{e}^{\nu x} + c_2 \mathrm{e}^{-\nu x}.$$

Mit den Randwerten folgt $u(0) = c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0$, daher also $c_1 = -c_2$ und somit $u(x) = c\sinh(\nu x)$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Mittels $u(1) = 1$ folgt indessen, dass $c = \frac{1}{\sinh(\nu)}$.

Beispiel 2. *Man betrachte das System von partiellen Differentialgleichungen der linearen Elastostatik*

$$-\mu\triangle\boldsymbol{u}(x) - (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{u}(x)) = \boldsymbol{f}(x).$$

Für den Ansatz $\boldsymbol{u} = \triangle\boldsymbol{v} + \alpha\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})$ bestimme man α so, dass $\boldsymbol{u}$ eine Lösung ist und erhalte daraus eine partielle Differentialgleichung in $\boldsymbol{v}$.

Wir setzen $\triangle(\triangle\boldsymbol{v}) = \triangle^2\boldsymbol{v}$. Es folgt also

$$\triangle\boldsymbol{u} = \triangle^2\boldsymbol{v} + \alpha\triangle\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})$$

und

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\triangle\boldsymbol{v} + \alpha\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})) = \operatorname{div}(\triangle\boldsymbol{v}) + \alpha\operatorname{div}(\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})).$$

Ferner

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i \implies \nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \partial_1 \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \\ \vdots \\ \partial_n \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \end{bmatrix}$$
$$\implies \operatorname{div}(\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \sum_{j=1}^n \partial_j v_j = \triangle(\operatorname{div}\boldsymbol{v}).$$

Zusätzlich folgt

$$\triangle\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \triangle v_1 \\ \vdots \\ \triangle v_n \end{bmatrix} \implies \operatorname{div}(\triangle\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^n \partial_i \triangle v_i = \sum_{i=1}^n \partial_i \sum_{j=1}^n \partial_j^2 v_i = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \partial_i\partial_j^2 v_i = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 \sum_{i=1}^n \partial_i v_i = \triangle(\operatorname{div}\boldsymbol{v})$$

nach dem Satz von Schwarz. Es folgt damit also

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\triangle\boldsymbol{v}) + \alpha\operatorname{div}(\nabla\operatorname{div}(\boldsymbol{v})) = (1+\alpha)\triangle(\operatorname{div}\boldsymbol{v}).$$

Außerdem folgt

$$\triangle\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \partial_i^2\partial_1 \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \partial_i^2\partial_n \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \\ \vdots \\ \partial_n \sum_{i=1}^n \partial_i^2 \sum_{j=1}^n \partial_j v_j \end{bmatrix} = \nabla\triangle(\operatorname{div}\boldsymbol{v})$$

erneut aus dem Satz von Schwarz. Unsere Gleichung hat also insgesamt die Form

$$\begin{aligned} &-\mu\triangle^2\boldsymbol{v} - \mu\alpha\triangle(\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})) - (\lambda+\mu)(1+\alpha)\triangle(\nabla(\operatorname{div}\boldsymbol{v})) \\ &= -\mu\triangle^2\boldsymbol{v} - \triangle(\nabla(\operatorname{div}(\boldsymbol{v})))(\mu\alpha + (\lambda+\mu)(1+\alpha)) = \boldsymbol{f} \end{aligned}$$

Da wir den Parameter α frei wählen können, liegt es nahe

$$\mu\alpha + (\lambda + \mu)(1 + \alpha) = 0$$

zu bestimmen. Wir erhalten also für $\alpha = -\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}$ die Bilaplace-Gleichung

$$-\mu\triangle^2 \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}.$$

Beispiel 3. *Man bestimme die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung*

$$x\partial_x u + y\partial_y u = 1 \qquad u(1, y) = y.$$

Die charakteristischen Gleichungen sind

$$X' = X \qquad Y' = Y \qquad U' = 1$$

mit Lösungen $X(s) = x_0\mathrm{e}^s$, $Y(s) = y_0\mathrm{e}^s$ und $U(s) = u_0 + s$. Aus $u(1, y) = y$ erhalten wir $X(0) = 1$, $Y(0) = y_0$ und $U(0) = y_0$. Insgesamt also $X(s) = \mathrm{e}^s$, $Y(s) = y_0\mathrm{e}^s$ und $U(s) = y_0 + s$. Ferner

$$\begin{aligned} &x = \mathrm{e}^s \implies s = \ln(x) \rightsquigarrow y = y_0\mathrm{e}^{\ln x} = y_0 x \qquad y = y_0 x \implies y_0 = \frac{y}{x} \\ &\implies u(x, y) = U(s) = \frac{y}{x} + \ln(x). \end{aligned}$$

Beispiel 4. *Man bestimme die Lösung der partiellen Differentialgleichung*

$$y\partial_x u - x\partial_y u = 0 \qquad u(x, 0) = x.$$

Die charakteristischen Gleichungen sind

$$X' = Y \qquad Y' = -X \qquad U' = 0.$$

Wir erhalten für X und Y also das folgende gekoppelte System erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Für dieses ergibt sich die Lösung

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \cos(s) \\ -\sin(s) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(s) \\ \cos(s) \end{bmatrix}.$$

Die Anfangsbedingungen $X(0) = x_0$ und $Y(0) = 0$ liefern $c_2 = 0$ und $c_1 = x_0$. Die Lösung für U ist offenbar $U(s) = u_0$, womit aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = x$ folgt, dass $U(s) = x_0$. Wir führen eine Transformation zu Polarkoordinaten durch. Es gilt also

$$x = r\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad y = r\sin(\varphi).$$

Damit erhalten wir aus $X(0) = x_0\cos(s)$, dass $s = \varphi$ und $r = x_0$. In Polarkoordinaten ergibt sich somit die Lösung

$$\tilde{u}(r, \varphi) = r.$$

Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$, dann folgt für $\Psi\colon \mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi) \to \Omega$ mit $\Psi(r, \varphi) = (x, y)$, dass Ψ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ist. Es gibt also eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung Φ für die gilt

$$\mathrm{d}\Phi = (\mathrm{d}\Psi)^{-1}.$$

Ferner erhalten wir

$$\mathrm{d}\Psi(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{bmatrix} \implies \mathrm{d}\Phi = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Mit der Kettenregel folgt also, da $\tilde{u} = u \circ \Psi$, dass $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\tilde{u}\mathrm{d}\Phi$, sprich mit $\mathrm{d}\tilde{u}(r, \varphi) = (1, 0)$ folgt

$$\begin{bmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Insgesamt also

$$y\partial_x u - x\partial_y u = r\cos(\varphi)\sin(\varphi) - r\cos(\varphi)\sin(\varphi) = 0.$$

Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ erhalten wir $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Beispiel 5. *Man bestimme die Lösung der quasi-linearen partiellen Differentialgleichung*

$$u\partial_x u + \partial_y u = 2 \qquad u(y, y) = 1 + y.$$

Als charakteristische Gleichungen ergeben sich

$$X' = U \qquad Y' = 1 \qquad U' = 2.$$

Wir erhalten $Y(s) = y_0 + s$ und $U(s) = u_0 + 2s$. Damit ergibt sich ebenfalls $X(s) = x_0 + su_0 + s^2$. Mit $X(0) = y_0$ folgt $x_0 = y_0$. Ferner gilt $U(0) = 1 + y_0$, sprich $u_0 = 1 + y_0$. Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned} &s = y - y_0 \qquad \text{und} \qquad x = y_0 + s(1 + y_0) + s^2 \rightsquigarrow x = y_0 + (y - y_0)(1 + y_0) + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 \\ &= y_0 + y + yy_0 - y_0 - y_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = y - yy_0 + y^2 = x \\ &\iff x - y - y^2 = -yy_0 \implies y_0 = \frac{y^2 + y - x}{y}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$u(x, y) = U(s) = u_0 + 2s = 1 + y_0 + 2(y - y_0) = 1 + 2y - y_0 = 1 + 2y + \frac{x - y - y^2}{y} = \frac{x + y^2}{y}$$

Beispiel 6. *Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \qquad u(0, x) = x.$$

Die charakteristischen Gleichungen sind

$$T' = 1 \qquad X' = U \qquad U' = 0.$$

Es ergibt sich also $T(s) = s + t_0$, $U(s) = u_0$ und daher $X(s) = u_0 s + x_0$. Aus $u(0, x) = x$ folgt $T(0) = 0 = t_0$ und $u_0 = x_0$. Also haben wir $T(s) = s$, $U(s) = x_0$ und $X(s) = x_0(s + 1)$. Da $t = s$ folgt direkt $x_0 = \frac{x}{t+1}$ und daher

$$u(t, x) = U(s) = \frac{x}{t + 1}.$$