Übung № 4

Aufgabe 16: Messbarkeit monotoner Funktionen

Zeigen Sie: jede monotone Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar.

Sei $y \in \mathbb{R}$ fest und oBdA f monoton fallend. Wir betrachten $f^{-1}((y,\infty]) = \{x \in \mathbb{R}\colon f(x) \geq y\} = W$. Falls $W = \emptyset$, dann ist $f^{-1}((y,\infty)) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Falls $W \neq \emptyset$, dann setzen wir $c = \sup W$. Wenn $c = \infty$, dann folgt $\forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) \geq y$, da f monoton fallend ist, ergo ist $W = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Falls $c < \infty$, dann gilt entweder $W = (-\infty, c] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, falls $c \in W$, oder aber $W = (-\infty, c) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, falls $c \notin W$.

Aufgabe 17: Linearität bezüglich des Maßes

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ_1, μ_2 zwei Maße auf $(X, \mathcal{A})$ und $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Zeigen Sie

a) Die Funktion $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ mit $A \mapsto \alpha_1\mu_1(A) + \alpha_2\mu_2(A)$ ist ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$

b) Für jede messbare Funktion $f\colon X \to [0,\infty]$ gilt

$$\int_X f \, \mathrm{d}(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = \alpha_1 \int_X f \, \mathrm{d}\mu_1 + \alpha_2 \int_X f \, \mathrm{d}\mu_2$$

Unterpunkt a):

Sei $\eta = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$, dann gilt:

$$\eta(\emptyset) = \alpha_1\mu_1(\emptyset) + \alpha_2\mu_2(\emptyset) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$

Seien $A_n \in X$ paarweise disjunkt, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\eta\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \alpha_1\mu_1\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + \alpha_2\mu_2\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \alpha_1 \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_1(A_n) + \alpha_2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_1\mu_1(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_2\mu_2(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_1\mu_1(A_n) + \alpha_2\mu_2(A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n)
\end{aligned}$$

Somit ist η ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dass $\eta(A) \geq 0$ folgt daher, dass $\mu_1(A) \geq 0$, $\mu_2(A) \geq 0$ und $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$.

Unterpunkt b): Sei $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar, und $\mathcal{S}(X)$ die Menge der einfachen Funktionen auf X, sowie $\mathcal{B}_f(A) = \{g\colon X \to [0,\infty]\colon \forall x \in A\colon g(x) \leq f(x)\}$, mit $\mathcal{B}_f(X) = \mathcal{B}_f$.

$$\int_X f \, \mathrm{d}\eta = \sup\left\{\int_X s \, \mathrm{d}\eta, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\}$$

$$\int_X s \, \mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^n \beta_i \eta(A_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i(\alpha_1\mu_1(A_i) + \alpha_2\mu_2(A_i))$$

$$= \sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_1\mu_1(A_i) + \beta_i\alpha_2\mu_2(A_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_1\mu_1(A_i) + \sum_{i=1}^n \beta_i\alpha_2\mu_2(A_i)$$

$$= \alpha_1 \sum_{i=1}^n \beta_i\mu_1(A_i) + \alpha_2 \sum_{i=1}^n \beta_i\mu_2(A_i) = \alpha_1 \int_X s \, \mathrm{d}\mu_1 + \alpha_2 \int_X s \, \mathrm{d}\mu_2$$

Mit den Eigenschaften des Supremums folgt nun, unter der Voraussetzung, dass wir mit nicht-negativen Funktionen arbeiten:

$$\sup\left\{\int_X s \, \mathrm{d}\eta, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\} = \sup\left\{\alpha_1 \int_X s \, \mathrm{d}\mu_1 + \alpha_1 \int_X s \, \mathrm{d}\mu_2, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\left\{\alpha_1 \int_X s \, \mathrm{d}\mu_1, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\} + \sup\left\{\alpha_2 \int_X s \, \mathrm{d}\mu_2, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\} \\
&= \alpha_1 \sup\left\{\int_X s \, \mathrm{d}\mu_1, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\} + \alpha_2 \sup\left\{\int_X s \, \mathrm{d}\mu_2, s \in \mathcal{S}(X) \cap \mathcal{B}_f\right\} \\
&= \alpha_1 \int_X f \, \mathrm{d}\mu_1 + \alpha_2 \int_X f \, \mathrm{d}\mu_2
\end{aligned}
$$

Aufgabe 19: Grenzwert monotoner Integrale

Sei $f_n \colon X \to [0, \infty)$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_1 \in \mathcal{L}^1$ und $f_n \geq f_{n+1} \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage ohne die Voraussetzung $f_1 \in \mathcal{L}^1$ falsch wäre.

Sei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, welche existiert, da f_n punktweise monoton fallend und beschränkt ist. Sei $g_n = f_1 - f_n$, dann ist nach Voraussetzung $g_n \geq 0$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton wachsend, und $\lim_{n\to\infty} g_n = f_1 - f$. Aus dem Satz über monotone Konvergenz folgt dann:

$$
\begin{aligned}
&\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu - \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_1 - f \, \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, \mathrm{d}\mu \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f_1 - f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu - \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu\right) = \int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu
\end{aligned}
$$

Nach unserer Voraussetzung gilt $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu < \infty$, wir können also auf beiden Seiten subtrahieren und erhalten:

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_x f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Wir betrachten nun den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \beta^1)$ und definieren

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq n \\ 0 & x < n \end{cases}$$

Dann folgt direkt:

$$\int_{\mathbb{R}} f_1 \, \mathrm{d}\beta^1 = \infty$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, und $\forall n \in \mathbb{N}\colon \int_{\mathbb{R}} f_n \, \mathrm{d}\beta^1 = \infty$.