Aufgabe 45. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der Basis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ und seien weiters $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ Vektoren mit eindeutigen Darstellungen $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{b}_j$. Zu zeigen ist, $(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig, wenn die Familie der Koordinatenvektoren linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist:*

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \vdots \\ \lambda_{1n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \lambda_{n1} \\ \lambda_{n2} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{bmatrix}$$

Wir wissen, dass eine Familie $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ aus einem Vektorraum über $\mathbb{K}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn es eine eindeutige Linearkombination $\sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ gibt, wobei $\forall k \in [n]\colon \alpha_k = 0$. Damit also die Familie der Koordinatenvektoren über $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig ist, muss gelten:

$$\sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \lambda_{k1} \\ \lambda_{k2} \\ \vdots \\ \lambda_{kn} \end{bmatrix} \alpha_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{kl} \mathbf{b}_l \alpha_k = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k \alpha_k = \mathbf{0}$$

Wir sehen, dass die Summe über die Koordinatenvektoren gleich der Summe über die zugehörigen Vektoren ist. Damit gilt aber, dass die Familie der Koordinatenvektoren linear unabhängig über $\mathbb{K}^n$ ist, wenn die Familie der zugehörigen Vektoren linear unabhängig über $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 46. *Sei $M = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraumes V. Zu zeigen ist das M genau dann eine Basis von V ist, wenn mindestens ein Vektor $\mathbf{v} \in V$ eine eindeutige Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ist.*

Wenn M eine Basis von V ist, so muss M minimal groß sein, sprich alle Vektoren in M sind linear unabhängig. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Sei $\mathbf{v} \in V$ ein Vektor, der folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{v}_k = \sum_{k=1}^n \beta_k \mathbf{v}_k$$

Sei $l \in [n]\colon \alpha_l \neq \beta_l$ und sonst $\forall k \in [n] \setminus \{l\}\colon \alpha_k = \beta_k$. Sei weiters $\mathbf{v}' = \sum_{k \in [n]\setminus\{l\}} \mathbf{v}_k \alpha_k = \sum_{k \in [n]\setminus\{l\}} \beta_k \mathbf{v}_k$:

$$\mathbf{v}' + \alpha_l \mathbf{v}_l = \mathbf{v}' + \beta_l \mathbf{v}_l \Leftrightarrow \alpha_l \mathbf{v}_l - \beta_l \mathbf{v}_l = 0$$