Übungsblatt 2

Beispiel 2.1. Seien $A = \{0\} \cup \{n \in N : n \text{ gerade } \wedge (1 \leq n \leq 8)\}$ und $B = \{n \in : n+1 \text{ gerade } \wedge (1 \leq n \leq 8)\}$ und die Grundmenge $X = \{0\} \cup \{n \in N : n < 9\}$.

$$\begin{aligned} A &= \{0, 2, 4, 6, 8\} \\ B &= \{1, 3, 5, 7\} \\ X &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \end{aligned}$$

Ausdruck	Ergebnis	Ausdruck	Ergebnis
A^c	$\{1, 3, 5, 7\}$	B^c	$\{0, 2, 4, 6, 8\}$
$(A \cup B)^c$	$\emptyset$	$A^c \cup B^c$	X
$A \cap B$	$\emptyset$	$A^c \cap B$	B
$A \triangle B$	X	$X \triangle B$	A

Beispiel 2.2. Gegeben sei eine Grundmenge X und drei Teilmengen A, B, C. Die folgenden Aussagen sind zu beweisen:

a) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C)$

b) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$

c) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$

Wir beginnen mit a):

$$\begin{aligned} &A \backslash B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\} \Rightarrow (A \backslash B) \backslash C = \{x \in X : x \in A \backslash B \wedge x \notin C\} \\ &= \{x \in X : (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C\} = \{x \in X : x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)\} \\ &= \{x \in X : x \in A \wedge (x \in B^c \wedge x \in C^c)\} = \{x \in X : x \in A \wedge x \in (B \cup C)^c\} \\ &= \{x \in X : x \in A \wedge x \notin (B \cup C)\} = A \backslash (B \cup C) \end{aligned}$$

Für b):

$$(A \backslash B) \backslash C = \{x \in X : (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C\} = \{x \in X : (x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin C\} = (A \backslash C) \backslash B$$

Zuletzt c):

$$\begin{aligned} &B \backslash C = \tilde{B} \\ &(A \backslash C) \backslash \tilde{B} = A \backslash (\tilde{B} \cup C) \\ &\tilde{B} \cup C = \{x \in X : x \in (B \backslash C) \vee x \in C\} = \{x \in X : (x \in B \wedge x \notin C) \vee x \in C\} \\ &= \{x \in X : (x \in B \vee x \in C) \wedge (x \notin C \vee x \in C)\} = \{x \in X : (x \in B \vee x \in C)\} = B \cup C \\ &\Rightarrow A \backslash (\tilde{B} \cup C) = A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C \end{aligned}$$

Beispiel 2.3. Sei A die Menge aller Punkte $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ für die $2x = y + 1$ gilt. Sei weiter B die Menge aller Punkte $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ für die $x^2 \geq y + 4$ gilt, wobei y nicht-negativ ist. Gesucht sind nun zuerst Darstellungen für A und B in Prädikatform:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x = y + 1 \right\} \\ B &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x^2 \geq y + 4) \wedge (y \geq 0) \right\} \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir noch $A \cap B$ in einfachstmöglicher Prädikatform darstellen:

$$A \cap B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (2x = y + 1) \wedge (x^2 \geq y + 4) \wedge (y \geq 0) \right\}$$

Wir wollen zunächst das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{aligned} 2x &= y + 1 \\ x^2 &= y + 4 \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &y = 2x - 1 \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \\ &\Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

Da $y \geq 0$ gelten muss, wissen wir, dass $x \geq -\frac{1}{2}$ gelten muss. Da $x^2 - 2x - 3$ aber erst ab 3 wieder positiv ist, wissen wir:

$$A \cap B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon (2x = y + 1) \wedge (x \geq 3) \right\}$$

Beispiel 2.4. Die folgenden Distributivgesetze sind zu beweisen:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Wir können diese Gesetze auf die Distributivgesetze der Logik zurückführen:

$$\begin{aligned} &(A \cup B) \cap C = \{x \colon (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in C)\} \\ &= \{x \colon (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C)\} = (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(A \cap B) \cup C = \{x \colon (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in C)\} \\ &= \{x \colon (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C)\} = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Beispiel 2.5. Die folgenden De Morganschen Regeln sind zu beweisen:

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \end{aligned}$$

Auch hier können wir auf die De Morganschen Regeln der Logik zurückgreifen:

$$\begin{aligned} &(A \cap B)^c = \{x \colon \neg(x \in A \wedge x \in B)\} = \{x \colon \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} \\ &= \{x \colon x \notin A \vee x \notin B\} = A^c \cup B^c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(A \cup B)^c = \{x \colon \neg(x \in A \vee x \in B)\} = \{x \colon \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\} \\ &= \{x \colon x \notin A \wedge x \notin B\} = A^c \cap B^c \end{aligned}$$