

Übungsblatt № 6

Aufgabe 41

- a) Finden Sie alle Graphen mit höchstens 6 Knoten, in denen jeder Knoten Grad 2 hat
b) Finden Sie alle paarweise nicht isomorphen Bäume mit 5 Knoten

Zu a): Da wir keine Mehrfachkanten zulassen, brauchen wir mindestens 3 Knoten. Wir wissen

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \implies |E| = 2n$$

Es muss also für alle $v \in V$ gelten, dass $\exists u, w \in V \setminus \{v\}$, sodass $\{v, u\}, \{v, w\} \in E$. Sei oBdA $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Wir nummerieren die v_i derart, sodass $\forall i = 1, \dots, n-1$ gilt $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$. Somit gilt $\forall i = 2, \dots, n-2$, dass $\deg(v_i) = 2$. Fügen wir nun eine Kante $\{v_1, v_i\}$ hinzu mit $i = 2, \dots, n-2$, so folgt $\deg(v_i) = 3$, was unserer Bedingung widerspricht. Die einzigen Knoten mit Grad ungleich 2 sind v_1 und v_n . Fügen wir daher die Kante $\{v_1, v_n\}$ hinzu, so ist unsere Bedingung erfüllt. Damit ist $G = (V, E)$ aber einfach C_n .

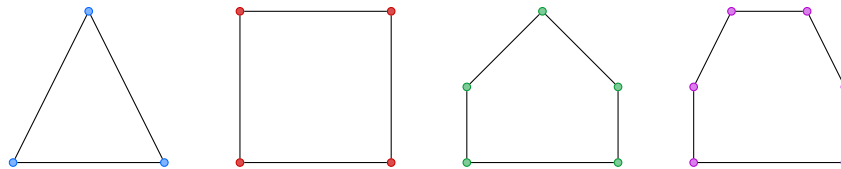


Abbildung 1: Alle Graphen mit höchstens 6 Knoten, sodass alle Knoten Grad 2 haben

Zu b):

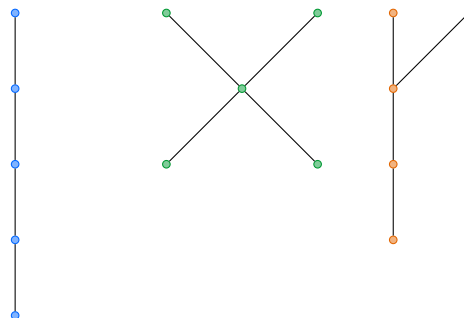


Abbildung 2: Alle paarweise nicht isomorphen Bäume mit 5 Knoten

Aufgabe 42: Komplement von Graphen

- a) Zeigen: Wenn zwei Graphen isomorph sind, sind auch ihre Komplemente isomorph
b) Wie viele Kanten hat ein Graph mit n Knoten, der zu seinem Komplement isomorph ist? Kann ein Graph mit 10 Knoten zu seinem Komplement isomorph sein?

Zu a): Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ sind isomorph, wenn es eine Bijektion $f: V_1 \rightarrow V_2$ gibt, sodass $\forall v, w \in V_1$ mit $\{v, w\} \in E_1$ gilt, dass $\{f(v), f(w)\} \in E_2$. Dann gilt aber $\forall v, w \in V_1: \{v, w\} \notin E_1$, dass $\{f(v), f(w)\} \notin E_2$. Daraus erhalten wir direkt $\forall v, w \in V_1: \{v, w\} \in E'_1: \{f(v), f(w)\} \in E'_2$, wobei E'_1 und E'_2 jene Kanten sind, die nicht in E_1 bzw. E_2 enthalten sind.

Zu b): Da zwei isomorphe Graphen gleich viele Knoten haben müssen und damit auch gleich viele Kanten, muss der Graph genau $\frac{1}{2} \binom{n}{2}$ Kanten haben.

$$\frac{1}{2} \binom{n}{2} = \frac{1}{2} \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{4} \stackrel{!}{=} k \in \mathbb{N}$$

$$\iff n(n-1) = 4k$$

Somit muss n oder $n - 1$ durch 4 teilbar sein. Somit kann ein Graph mit 10 Knoten nicht isomorph zu seinem Komplement sein, da weder 10 noch 9 durch 4 teilbar ist.

Aufgabe 43

Zeigen Sie, dass jeder Baum $T = (V, E)$ mit $\forall v \in V: \deg(v) \neq 2$ und $|V| \geq 3$ einen Knoten v_0 enthält, der zu mindestens zwei Blättern benachbart ist.

Ist T ein Stern ist die Behauptung offensichtlich. Ist T kein Stern, so hat T mindestens zwei innere Knoten. Entfernen wir aus dem Baum alle Blätter, so erhalten wir den Baum der inneren Knoten, der mindestens zwei Knoten hat. Da keiner dieser Knoten Grad 1 haben kann, muss mindestens einer 2 Blätter als Nachbarn besitzen, da er sonst Grad 2 hätte.

Aufgabe 44

Sei d_1, \dots, d_n eine endliche Folge natürlicher Zahlen. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Baum mit Knotenmengen $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\deg(v_i) = d_i$, für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, gibt, wenn $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

\Rightarrow Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit n Knoten, dann gilt $|E| = |V| - 1 = n - 1$ und somit

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2n - 2$$

\Leftarrow Wir führen einen Induktionsbeweis. Da wir nur endliche viele Folgenglieder haben, können wir sie absteigend sortieren, also können wir oBdA annehmen, dass $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$ gilt. Unter der Annahme, dass der entstehende Graph ein Baum sein soll, muss also mindestens ein Blatt existieren, womit $d_n = 1$ folgt. Gleichfalls muss $d_1 \geq 2$ gelten. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es zur Folge $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$ einen Baum. Zu diesem fügen wir den Knoten v_n und die Kante $\{v_1, v_n\}$ hinzu.

Aufgabe 45: Brücken

Eine Brücke in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kante $e \in E$, für die der Graph $G - e$ nicht mehr zusammenhängend ist. Beweisen oder widerlegen Sie: Ein Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben, enthält keine Brücke.

Angenommen G enthält eine Brücke, dann zerfällt $G - e$ in zwei zusammenhängende Teile H_1 und H_2 . Wir wissen

$$\sum_{v \in V(H_i)} \deg_{H_i}(v) = 2|E(H_i)|$$

Somit muss jeweils in H_i gelten, dass $\sum_{v \in V(H_i)} \deg_{H_i}(v_i)$ gerade ist. Allerdings haben beide Graphen einen Knoten mit ungeraden Grad, da wir die Brücke entfernt haben. Das ist ein Widerspruch, somit kann G eine Brücke enthalten.

Aufgabe 46

Ein dreiecksfreier Graph ist ein Graph, der keinen Kreis der Länge 3 enthält. Es sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph. Beweisen Sie:

- a) ist $|V| = 2n$, so gilt $|E| \leq n^2$
- b) ist $|V| = 2n$ und $|E| = n^2$, so ist G der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$.

Zu a): Für $n = 1$ folgt $|V| = 2$ und $|E| \leq 1$. Für $n \rightarrow n+1$ erhalten wir $|V| = 2(n+1) = 2n+2$ und wollen zeigen, dass $|E| \leq (n+1)^2$. Sei $G = (V, E)$ ein dreiecksfreier Graph mit $|E| = m$. Entfernt man 2 beliebige Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, zusammen mit allen Kanten zu den entfernten Knoten, so entsteht aufgrund der Dreiecksfreiheit ein Graph G' mit $m' \geq m - 1 - 2n$ Kanten, bzw. $m \leq m' + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Zu b): Für $n = 1$ folgt $|V| = 2$ und $|E| = 1$, was genau $K_{1,1}$ entspricht. Für $n \rightarrow n+1$ erhalten wir $|V| = 2n+2$ und $|E| = (n+1)^2$, was genau $K_{n+1,n+1}$ entspricht.