Übungsblatt № 7

Aufgabe 7.4: Untergruppen von $\mathfrak{S}_n$

Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass A_n die einzige Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ mit Index 2 ist.

Wir betrachten in diesem Beispiel $(C_2, \cdot) = (\{-1, 1\}, \cdot)$ mit der üblichen Multiplikation. Sei $U \leq \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe mit $[\mathfrak{S}_n : U] = 2$, dann ist U ein Normalteiler (siehe Aufgabe 5.3). Dann ist $\mathfrak{S}_n/U \simeq C_2$ unter $g\colon \mathfrak{S}_n/U \to C_2$. Wir konstruieren nun den surjektiven Homomorphismus $f\colon \mathfrak{S}_n \to C_2$ mit $f(\sigma) = g(\sigma U)$. Da[1] $g(U) = 1$ folgt somit $\forall u \in U\colon f(u) = 1$. Für $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus U$ folgt indes $f(\sigma) = -1$, da für $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus U$ gilt $\sigma U \neq U$, womit $g(\sigma U) = -1$. Daher ist $U = \ker f$. Da es aber nur einen nicht-trivialen Homomorphismus $\operatorname{sign}\colon \mathfrak{S}_n \to C_2$ gibt, folgt direkt $U = A_n$, da $A_n = \ker(\operatorname{sign})$.

[1] U ist das neutrale Element in $\mathfrak{S}_n/U$ und 1 das neutrale Element in $(C_2, \cdot)$