Übungsblatt №2

Aufgabe 6. *Zwei $n \times n$ Matrizen* A *und* B *kommutieren miteinander, wenn* AB = BA.

a Zeige, dass die Menge $\{\mathrm{A}\}'$ *aller Matrizen, die mit einer gegebenen $n \times n$ Matrix* A *kommutieren einen Unterraum von* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *bildet. Zeige, dass dieser Unterraum auch bezüglich der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.*

b Bestimme die Menge aller Matrizen, die mit der folgenden Matrix A *kommutieren:*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zu a:

Wir prüfen zuerst ob, die Matrizenmultiplikation abgeschlossen in $\{\mathrm{A}\}'$ ist. Seien $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \{\mathrm{A}\}'$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{BC} \in \{\mathrm{A}\}' \Leftrightarrow \mathrm{BCA} = \mathrm{ABC} \\ &\mathrm{BCA} = \mathrm{B(CA)} = \mathrm{B(AC)} = \mathrm{(BA)C} = \mathrm{ABC} \end{aligned}$$

Wir verwenden weiterhin das Unterraumkriterium. Da $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^2$ ist $\{\mathrm{A}\}' \neq \emptyset$. Es gilt $0_n\mathrm{A} = \mathrm{A}0_n$ (wobei $0_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$). Seien $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \{\mathrm{A}\}'$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$(\lambda\mathrm{B} + \mu\mathrm{C})\mathrm{A} = \lambda\mathrm{BA} + \mu\mathrm{CA} = \mathrm{A}\lambda\mathrm{B} + \mathrm{A}\mu\mathrm{C} = \mathrm{A}(\lambda\mathrm{B} + \mu\mathrm{C})$$

Zu b:

Gesucht ist eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sodass AX = XA:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{AX} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{XA} = \begin{bmatrix} x_{11} & -x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & -x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & -x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \\
&\mathrm{AX} = \mathrm{XA} \Leftrightarrow \mathrm{AX} - \mathrm{XA} = 0_3 \\
&\mathrm{AX} - \mathrm{XA} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_{12} & 0 \\ -2x_{21} & 0 & -2x_{23} \\ 0 & 2x_{32} & 0 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0_3 \\
&\Rightarrow x_{12} = x_{21} = x_{23} = x_{32} = 0 \\
&\{\mathrm{A}\}' = \{A^k | k \in \mathbb{N}_0\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & 0 \\ x_4 & 0 & x_5 \end{bmatrix} | x_i \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. *Sei* $\mathrm{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *eine nilpotente Matrix, d.h.* $\exists k \in \mathbb{N}\colon \mathrm{A}^k = 0_n$.

a Zeige, dass $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ *invertierbar ist mit* $(\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^i$

b Verwende a) um die Inverse der folgenden Matrix zu finden:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zu a:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I} - \mathrm{A})^{-1} = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) \left(\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^i \right) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^i - \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{A}^{i+1} \\
&= \mathrm{I}_n - \mathrm{A} + \mathrm{A} - \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}^2 + \cdots - \mathrm{A}^{n-1} + \mathrm{A}^{n-1} - \mathrm{A}^k \\
&= \mathrm{I}_n - \mathrm{A}^k = \mathrm{I}_n
\end{aligned}$$

Zu b:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}_4 - \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{A}' \\
&\Rightarrow \mathrm{A}^{-1} = (\mathrm{I}_4 - \mathrm{A}')^{-1} \\
&\mathrm{A}'^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}'^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{A}'^4 = 0_4 \\
&\Rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_4 + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}'^3 = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 - b & -a^3 + 2ab - c \\ 0 & 1 & -a & a^2 - b \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8. *a Sei* A *eine reguläre* $n \times n$ *Matrix über einem Körper* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ *Spaltenvektoren, sodass gilt* $\sigma = 1 + \mathbf{v}^T \mathrm{A}^{-1} \mathbf{u} \neq 0$. *Zeige dass* $(\mathrm{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)$ *regulär ist und:*

$$(\mathrm{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\sigma}\mathrm{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1}$$

b Wende die Formel an, um die Inverse der folgenden Matrix möglichst effizient zu bestimmen:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Zu a:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\left(\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\sigma}\mathrm{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1}\right) = \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\sigma}\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\sigma}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} \\
&= \mathrm{I}_n - \frac{1}{\sigma}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} - \frac{1}{\sigma}\mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1}\mathbf{u})\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} \\
&= \mathrm{I}_n - \frac{1}{\sigma}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} - \frac{\sigma - 1}{\sigma}\mathbf{u}\mathbf{v}\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{\sigma}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} + \frac{1}{\sigma}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathrm{A}^{-1} \\
&= \mathrm{I}_n
\end{aligned}
$$

Zu b:

Wir zerlegen $\mathrm{A} = \mathrm{A}' + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$:

$$\mathrm{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}}_{=\mathrm{A}'} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir bestimmen A'^{-1}:

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\xrightarrow{II - \frac{3}{5}\cdot I, IV - \frac{3}{2}\cdot III}
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{5\cdot II, 2\cdot IV}
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]
\xrightarrow{III - 3IV, I - 3II}
\left[\begin{array}{cccc|cccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 10 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]
$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}\cdot I,\frac{1}{2}\cdot III}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2&-3&0&0\\0&1&0&0&-3&5&0&0\\0&0&1&0&0&0&5&-3\\0&0&0&1&0&0&-3&2\end{array}\right]$$

Somit können wir σ bestimmen:

$$\begin{aligned}\sigma &= 1+\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\\ &= 1+\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\end{bmatrix}=1\neq 0\end{aligned}$$

Somit können wir A^{-1} bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathrm{A}^{-1} &= (\mathrm{A}'+\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2&-3&0&0\\-3&5&0&0\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&-6&4\\0&0&9&-6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-3&6&-4\\-3&5&-9&6\\0&0&5&-3\\0&0&-3&2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Aufgabe 9. *Gegeben ist die lineare Abbildung* $f_\mathrm{A}\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ *mit* $f_\mathrm{A}(\mathbf{x})=\mathrm{A}\mathbf{x}$ *mit:*

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}5&5&10\\10&0&20\end{bmatrix}$$

Gesucht ist die Matrixdarstellung in Bezug auf die Basen $B=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3)\subseteq\mathbb{R}^3$ *und* $C=(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2)\subseteq\mathbb{R}^2$*:*

$$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\mathbf{c}_1=\begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix},\mathbf{c}_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

a Bestimme Φ_C^B *direkt*

b Unter Verwendung der Basistransformationsmatrizen T_E^B *und* T_C^E

Zu a:

Aus der Vorlesung wissen wir:

$$\Phi_C^B=\begin{bmatrix}\Phi_C f(\mathbf{b}_1) & \Phi_C f(\mathbf{b}_2) & \Phi_C f(\mathbf{b}_3)\end{bmatrix}$$

Wir bestimmen also $f(\mathbf{b}_i)$:

$$f(\mathbf{b}_1)=\begin{bmatrix}15\\20\end{bmatrix},f(\mathbf{b}_2)=\begin{bmatrix}-5\\-10\end{bmatrix},f(\mathbf{b}_3)=\begin{bmatrix}20\\20\end{bmatrix}$$

Wir müssen $f(\mathbf{b}_i)$ nur noch in der Basis C darstellen:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{4}\cdot I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{II-6I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{-\frac{2}{5}\cdot II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] \overset{I-\frac{3}{4}II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}\right]$$

$$\mathrm{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi_C^B = \begin{bmatrix} \mathrm{C}^{-1} f(\mathbf{b}_1) & \mathrm{C}^{-1} f(\mathbf{b}_2) & \mathrm{C}^{-1} f(\mathrm{b}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Zu b:

$$\Phi_C^B = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & -5 & 20 \\ 20 & -10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$