

Übungsblatt № 7

Aufgabe 7.1

Es sei $A = ((0, 1) \cap \mathbb{Q}) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \{4\} \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Mengen A° , ∂A , $(\partial A)^\circ$, $\partial(A^\circ)$, $(\partial(A^\circ))^\circ$ und $\partial(\partial A^\circ)$ paarweise verschieden sind.

Sei $\varepsilon = \frac{1}{10} > 0$, dann ist $\mathcal{B}_\varepsilon(4) \cap A = \{4\}$, somit ist 4 ein isolierter Punkt von A und damit nicht im inneren Kern A° . Sei $x \in (0, 1)$, dann gilt $\forall \varepsilon > 0: \mathcal{B}_\varepsilon(x) \not\subseteq A$, somit $A^\circ = (1, 2) \cup (2, 3)$. Weiters sind 0, 1, 2, 3, 4 Randpunkte von A , womit $\partial A = [0, 3] \cup \{4\}$. 2, 3 sind Randpunkte von ∂A und 4 ist ein isolierter Punkt von ∂A , somit ist $(\partial A)^\circ = (0, 3)$, womit $\partial(A^\circ) = [1, 3]$ und $(\partial(A^\circ))^\circ = (1, 3)$. Zuletzt ist $\partial(\partial A^\circ) = [0, 3]$. Wir sehen also, dass alle Mengen paarweise verschieden sind.

Aufgabe 7.2

Es sei X die Menge aller beschränkten Folgen reeller Zahlen. Weiters sei die folgende Abbildung gegeben:

$$d: X^2 \rightarrow [0, \infty) \quad d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

Wir sollen zeigen, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

d ist genau dann eine Metrik, wenn gilt:

- i $\forall x, y \in X: d(x, y) = d(y, x)$
- ii $\forall x, y \in X: d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iii $\forall x, y \in X: d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Zu i:

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|y_n - x_n|, n \in \mathbb{N}\} = d((y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}})$$

Zu ii:

$$\begin{aligned} (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} &\Rightarrow d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \\ &= \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|x_n - x_n|, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|0|, n \in \mathbb{N}\} = 0 \\ \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} = 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow \\ \forall n \in \mathbb{N}: x_n - y_n = 0 &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: x_n = y_n \Leftrightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Zu iii:

$$\begin{aligned} d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) &= \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\underbrace{|x_n - z_n + z_n - y_n|}_{=S}, n \in \mathbb{N}\} \\ \forall s \in S: s &\leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \Rightarrow \sup(S) \leq \sup\{|x_n - z_n|, n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|z_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\} \\ &= d((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}) + d((z_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Somit ist d eine Metrik, womit (X, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 7.3

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass X kompakt ist, wenn X vollständig und total beschränkt ist.

In der Vorlesung haben wir bereits bewiesen, dass ein kompakter metrischer Raum (X, d) vollständig ist. Wir müssen also noch zeigen, dass ein kompakter metrischer Raum (X, d) totalbeschränkt ist.

Wenn (X, d) überdeckungskompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{i=1}^n O_i$ von offenen Mengen O_i . Nach Lemma 5 gilt $\exists x \in O_i: \mathcal{B}_r(x) \subseteq O_i$. Wir überdecken nun die Familie $(O_i)_{i=1}^n$ mit offenen Kugeln mit Radius r .

Sei (X, d) vollständig und total beschränkt, dann existiert eine endliche Überdeckung aus offenen Kugeln, die wiederum offene Mengen sind, somit ist (X, d) überdeckungskompakt und dadurch kompakt.

Aufgabe 7.4

Es sei $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ und d sei wie folgt gegeben:

$$d: X^2 \rightarrow [0, \infty) \quad d(x, y) = |x - y|$$

Zeigen Sie:

- a (X, d) ist ein kompakter metrischer Raum
- b Es gibt ein $x \in X$ und eine reelle Zahl $r > 0$, sodass die Menge der Berührungspunkte von $\{z \in X : d(x, z) < r\}$ eine echte Teilmenge von $\{z \in X : d(x, z) \leq r\}$ ist

Da $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbb{R} ist, ist (X, d) ein metrischer Raum. Wir müssen also noch zeigen, dass (X, d) kompakt ist. Da $\forall x \in X: x \leq 3$, ist X beschränkt. Hernach hat nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in X$ eine konvergente Teilfolge. Es verbleibt zu zeigen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in X$.

Angenommen $x \in (1, 2)$, sei $x = 1 + \delta$ für $0 < \delta < 1$, wir wählen $\varepsilon = \min(\delta, 1 - \delta)$, dann $\exists N_k \in \mathbb{N}: n_k \geq N_k \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \varepsilon$.

Angenommen $\forall k \in \mathbb{N}: x_{n_k} \in [0, 1]$, dann folgt $x_{n_k} \leq 1 \Rightarrow |x_{n_k} - x| \leq |1 - 1 - \delta| = \delta < \varepsilon$, das ist ein Widerspruch zu $\varepsilon = \min(\delta, 1 - \delta)$. Analog, angenommen $\forall k \in \mathbb{N}: x_{n_k} \in [2, 3]$, dann folgt $x_{n_k} \geq 2 \Rightarrow |x_{n_k} - x| \leq |2 - 1 - \delta| = 1 - \delta < \varepsilon$, das ist der selbe Widerspruch, somit muss x in X liegen, womit X kompakt ist.

Zu b:

Wir wählen $x = 1$ und $r = 1$, dann ist die Menge der Berührungspunkte von $\{z \in X : d(x, z) < r\}$ gleich $[0, 1]$ und von $\{z \in X : d(x, z) \leq r\}$ ist $[0, 1] \cup \{2\}$.