11 Übungsblatt

Beispiel 11.2. *Zu zeigen ist:*

a) $\kappa_n = \frac{1}{n^2} + 1 \xrightarrow{1\to}$ *und monoton fallend*

b) $\lambda_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{1\to}$ *und ist monoton wachsend*

c) $a_n = \frac{n}{n+n^3+n^2+1} \xrightarrow{0\to}$

Für a) weisen wir erst die Monotonie nach:

$$\kappa_n \geq \kappa_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} + 1 \geq \frac{1}{(n+1)^2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\Leftrightarrow n^2 < n^2 + 1$$

Somit ist κ_n monoton fallend. Nach den Rechenregeln für Folgen können wir $\kappa_n = \kappa_{n,1}^2 + \kappa_{n,2}$ aufspalten, wobei $\kappa_{n,2} = 1$ und $\kappa_{n,1} = \frac{1}{n^2}$. Da $\kappa_{n,1} \xrightarrow{0\to}$ gilt auch $\kappa_{n,1}^2 \xrightarrow{0\to}$ und allgemein:

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n = \lim_{n\to\infty} (\kappa_{n,1}^2 + \kappa_{n,2}) = 0 + 1 = 1$$

Für b) weisen wir zuerst die Monotonie nach:

$$\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow n(n+2) \leq (n+1)^2$$
$$\Leftrightarrow n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1$$

Somit ist λ_n monoton wachsend. Wir betrachten λ_n genauer:

$$\lambda_n = \frac{n(1)}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte ist die Nennerfolge konvergent gegen $1 \neq 0$, damit folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1} = 1$$

Zuletzt betrachten wir c) und gehen ähnlich wie bei b) vor:

$$a_n = \frac{n}{n^3+n^2+n+1} = \frac{n^3(\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$