Übungsblatt 3

Beispiel 3.1. Gegeben sei ein Menge $X \neq \emptyset$ und $X \neq \{\emptyset\}$. Von welchen der folgenden Mengen ist X bzw. $\{X\}$ ein Element oder eine Teilmenge:

$$\begin{aligned} A &= \{\{X\}, X\} \\ B &= X \\ C &= \emptyset \cap X \\ D &= \{X\} \setminus \{\{X\}\} \\ E &= \{X\} \cup X \\ F &= \{X\} \cup \emptyset \end{aligned}$$

M	$X \in M$	$X \subseteq M$	$\{X\} \in M$	$\{X\} \subseteq M$
A	w	f	w	w
B	f	w	f	f
C	f	f	f	f
D	w	f	f	w
E	w	w	f	w
F	w	f	f	w

Beispiel 3.2. Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, 4, 5, 6\}$, $C = \emptyset$ und $D = \{\{\}, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Es sollen einige Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt überprüft werden:

Ausdruck	ist	Begründung
$A \in D$	w	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ist ein Element von D
$\lvert D \rvert = 7$	f	in D sind nur 2 Elemente
$A \cap D = A$	f	kein Element aus A ist in D
$\lvert A \rvert = \lvert B \rvert$	w	A und B haben gleich viele Elemente
$A \subseteq B$	f	nicht alle Elemente aus A sind in B
$C \subseteq D$	w	die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge
$C \in D$	w	$\{\} = \emptyset$ und ist in D enthalten
$A \subseteq D$	f	kein Element in A ist in D
$\lvert \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \rvert$	w	A und B haben gleich viele Elemente
$\lvert \mathcal{P}(A \cup D) \rvert = 2^8$	w	$A \cup D$ hat 8 Elemente
$\lvert \mathcal{P}(A \cap D) \rvert = 2^6$	f	A und D sind disjunkt

Beispiel 3.3. Gegeben sind die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid xy \leq x + y + 1\} \\ R_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid |x - y| \leq 2\} \\ R_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (x = y = 0) \vee (xy > 0)\} \end{aligned}$$

Wir sollen prüfen, ob diese Relationen reflexiv, transitiv, symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Zur Erinnerung:

- Eine Relation $R \subseteq A^2$ heißt symmetrisch, wenn $\forall (x, y) \in A^2 \colon xRy \Rightarrow yRx$ gilt
- Eine Relation $R \subseteq A^2$ heißt antisymmetrisch, wenn $\forall (x, y) \in A^2 \colon (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$ gilt
- Eine Relation $R \subseteq A^2$ heißt reflexiv, wenn $\forall x \in A \colon xRX$ gilt

- Eine Relation $R \subseteq A^2$ heißt transitiv, wenn $\forall x, y, z \in A \colon (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

Wir beginnen mit R_1:

$$\begin{aligned}
\text{Symmetrie}: &\quad xR_1y \Leftrightarrow (xy \leq x+y+1) \Leftrightarrow (yx \leq y+x+1) \Leftrightarrow yR_1x \\
\text{Reflexivität}: &\quad xR_1x \Leftrightarrow x \in x^2 \leq 2x+1 \\
\text{Transitivität}: &\quad (xR_1y \wedge yR_1z) \Leftrightarrow ((xy \leq x+y+1) \wedge (yz \leq y+z+1) \Rightarrow xRz)
\end{aligned}$$

Die Symmetrie von R_1 folgt direkt aus der Rechnung. Daraus folgt ebenfalls, dass R_1 nicht antisymmetrisch ist. Allerdings ist R_1 nicht reflexiv, da $3^2 > 2 \cdot 3 + 1$.
Weiter mit R_2. Da $xR_2y \Leftrightarrow |x-y| \leq 2$ und $yR_2x \Leftrightarrow |y-x| \leq 2$ sind, ist R_2 symmetrisch. R_2 ist reflexiv, da $xRx \Leftrightarrow |x-x| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2$, was eine wahre Aussage ist. Allerdings ist R_2 nicht transitiv, da für $x=4$, $y=2$ und $z=1$ gilt:

$$\begin{aligned}
|x-y| &= 2 \leq 2 \\
|y-z| &= 1 \leq 2 \\
|x-z| &= 3 \nleq 2
\end{aligned}$$

Zuletzt betrachten wir R_3. Diese Relation ist symmetrisch, da $xy \Leftrightarrow yx$ aufgrund der Kommutativität der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$. Wenn also xRy, dann folgt daraus, dass auch yRx. Das schließt die Antisymmetrie aus. R_3 ist reflexiv, da $\forall x \in \mathbb{Z} \colon x^2 > 0 \vee x^2 = 0$ gilt. R_3 ist ebenfalls transitiv:

$$\begin{aligned}
&xRy \wedge yRz \Rightarrow (x>0 \wedge y>0 \wedge z>0) \dot{\vee} (x<0 \wedge y<0 \wedge z<0) \\
&(x>0 \wedge z>0) \vee (x<0 \wedge z<0) \Rightarrow xy > 0
\end{aligned}$$

Beispiel 3.4. Sei $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ eine Relation mit:

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \colon (\mu a = \lambda c) \wedge (\mu b = \lambda d)$$

Da $\wedge$ kommutativ ist, ist R symmetrisch. Damit ist Antisymmetrie ausgeschlossen. Zu $(a,b)R(a,b)$ können wir immer ein $\lambda \in \mathbb{Z}$ finden, sodass $\mu a = \lambda a$ bzw. $\mu b = \lambda b$, nämlich $\lambda = \mu$. Die Relation ist also auch reflexiv. Zuletzt zur Transitivität:

$$\begin{aligned}
&\mu a = \lambda c \qquad \beta c = \alpha e \\
&\mu\beta a = \lambda\beta c \qquad \lambda\beta c = \alpha\lambda e \\
&\Rightarrow \beta\mu a = \alpha\lambda e \\
\\
&\mu b = \lambda d \qquad \beta d = \alpha f \\
&\beta\mu b = \beta\lambda d \qquad \beta\lambda d = \alpha\lambda f \\
&\Rightarrow \beta\mu b = \alpha\lambda f \\
\\
&\Rightarrow (a,b)R(e,f)
\end{aligned}$$

Die Transitivität gilt, weil $\beta\mu$ und $\alpha\lambda$ nie 0 sind, weil $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und die Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ abgeschlossen ist.

Beispiel 3.5. Sei $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $R\{(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon \exists \lambda \in \mathbb{R} \colon (x,y) = \lambda(u,v)\}$. Zu zeigen ist, dass R keine Äquivalenzrelation ist. Es sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u,v) = (0,0)$. Die Relation $(0,0)R(x,y)$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt. Allerdings ist R nicht symmetrisch, da $\forall \lambda \in \mathbb{R} \colon 0 \cdot \lambda = 0$. Wir können also kein λ finden, sodass $\lambda(0,0) \neq (0,0)$ gilt.
Arbeiten wir stattdessen mit $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, so ist $(x,y)R(u,v)$ symmetrisch:

$$(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow (x,y) = \lambda(u,v) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow (u,v)R(x,y)$$

Wir dürfen diese Umformung machen, da $(0,0)$ nicht behandelt ist, wir müssen also nie $\lambda = 0$ wählen.
R ist reflexiv da wir für $(x,y)R(x,y)$ einfach $\lambda = 1$ wählen.

Zuletzt die Transitivität:

$$
\begin{aligned}
&(x,y)R(u,v) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}\colon (x,y) = \lambda(u,v)\\
&(u,v)R(r,s) \Leftrightarrow \exists\mu \in \mathbb{R}\colon (u,v) = \mu(r,s)\\
&(x,y)R(r,s) \Leftrightarrow \exists\nu \in \mathbb{R}\colon (x,y) = \nu(r,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(x,y)R(u,v) \Rightarrow (u,v)R(r,s) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}(x,y) = \mu(r,s)\\
&\Leftrightarrow (x,y) = \lambda\mu(r,s) \Leftrightarrow (x,y)R(r,s)
\end{aligned}
$$

Die Äquivalenzklassen $[(x,y)]_R$ sind Geraden im $\mathbb{R}^2$, welche durch den Ursprung gehen, in aber nicht enthalten.