Übung № 5

Aufgabe 21: Zusammenhang Uneiegentliche Integrale und Lebesgue-Integral

Seien $-\infty \leq a < b < \infty \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $f|_{(a,b]}$ eine Regelfunktion auf $(a, b]$ ist. Zeigen Sie: wenn das uneiegentliche Cauchy-Integral $\int_a^b |f| \, dx$ existiert, dann ist f über $(a, b]$ Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\int_{(a,b]} f \, d\beta^1 = \int_a^b f \, dx$$

Wir machen eine Fallunterscheidung. Für $-\infty < a$ folgt

Aufgabe 22

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ seine Vervollständigung:

a Sei $f : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass f dann auch $\widetilde{\mathcal{A}}$-messbar ist und

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\widetilde{\mu}$$

b Sei $f : X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-messbar. Zeigen Sie dass

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$$

und, dass in diesem Fall

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f \, d\widetilde{\mu}$$

Sei $\mathcal{N} = \{B \in \mathcal{P}(x) : B \subseteq N : N \in \mathcal{A} \wedge \mu(N) = 0\}$