# Übungsblatt № 4

## Aufgabe 16: Gleichschenkeliges Dreieck

In einem gleichschenkeligen Dreieck sei der von den Seiten gleicher Länge aufgespannte Winkel eine in $(0, \pi)$ stetig gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion und Dichte des Umfangs eines solcherart bestimmten zufälligen Dreiecks.

Betrachten wir eine Graphik um Notation einzuführen:

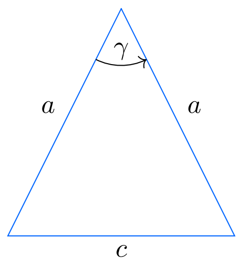


Abbildung 1: Ein gleichschenkeliges Dreieck

Wir wollen zuerst den Umfang ausgehend von $a$ und $\gamma$ bestimmen:

$$\frac{c}{2a} = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \iff c = 2a\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$U = 2a + c = 2a + 2a\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2a\left(1 + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right)$$

Es sei im Weiteren $a > 0$. Wir wollen nun zuerst die Verteilungsfunktion $F_U(x) = \mathbb{P}(U \leq x)$ bestimmen:

$$\mathbb{P}(U \leq x) = \mathbb{P}\left(2a\left(1 + \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq \frac{x}{2a} - 1\right)$$

Wir müssen hier etwas aufpassen. Der Arkus Sinus ist definiert als Funktion $\arcsin\colon [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, also muss $\frac{x}{2a} - 1 \in [-1, 1]$ gelten:

$$-1 \leq \frac{x}{2a} - 1 \leq 1 \iff 0 \leq \frac{x}{2a} \leq 2 \iff 0 \leq x \leq 4a$$

Der Fall $x = 0$ würde bedeuten, dass $\gamma = 0$, also das Dreieck zu einer Strecke degeneriert ist. Interessant ist natürlich, dass $U \leq 4a$, da $2a\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \leq 2a$. Damit ist die Einschränkung von $x$ auf $[0, 4a]$ sinnvoll. Des weiteren ist arcsin für $x \in [0, 4a]$ definiert. Allerdings gilt für $x \leq 2a$, dass $\frac{x}{2a} - 1 < 0$, womit unsere Verteilungsfunktion negative Werte annehmen würde. Daher schränken wir $x$ auf $[2a, 4a]$ ein. Diese Einschränkung macht insofern Sinn, da $2a \leq U \leq 4a$.

$$F_U(x) = \mathbb{P}\left(\gamma \leq 2\arcsin\left(\frac{x}{2a} - 1\right)\right)$$

Die Verteilungsfunktion von $\gamma$ ist natürlich $\frac{1}{\pi}\int_0^x \,\mathrm{d}u$, womit

$$F_U(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\arcsin\left(\frac{x}{2a}-1\right)} \mathrm{d}u = \frac{2\arcsin\left(\frac{x}{2a} - 1\right)}{\pi}$$

Mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ erhalten wir damit die folgende Dichte:

$$f_U(x) = \frac{1}{a\pi\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2a} - 1\right)^2}} = \frac{1}{a\pi\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2} + \frac{x}{a} - 1}} = \frac{2a}{a\pi\sqrt{x(4a - x)}}$$

## Aufgabe 17: Positiv Definite Matrix

Die Auswahl einer zufälligen Matrix

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y \\ Y & X_2 \end{bmatrix} \qquad X_1, X_2, Y \in (-1, 1)$$

entspricht einem in $(-1,1)^3$ stetig gleichverteilten Zufallsvektor $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & Y \end{bmatrix}$. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Matrix positiv definit ist.

Wir erinnern uns, dass eine Matrix positiv definit ist, wenn ihre Hauptminoren positiv sind. In diesem Fall muss also gelten $X_1 > 0$ und $X_1X_2 - Y^2 > 0 \iff X_1X_2 > Y^2$. Daraus können wir direkt $X_2 > 0$ folgern. Davon ausgehend erhalten wir $-\sqrt{X_1X_2} \leq Y \leq \sqrt{X_1X_2}$ als Schranken für $Y$. Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass die Matrix positiv definit ist, müssen wir über den folgenden Normalbereich integrieren:

$$\mathcal{N} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x, y < 1, -\sqrt{xy} < z < \sqrt{xy}\}$$

Allgemein ergibt sich als Wahrscheinlichkeit also:

$$P = \frac{1}{\lambda^3([-1,1]^3)} \iiint_{\mathcal{N}} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$$

Damit ergibt sich:

$$P = \frac{1}{8} \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\sqrt{X_1X_2}}^{\sqrt{X_1X_2}} \mathrm{d}Y\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2$$

Offensichtlich ist das innerste Integral symmetrisch und hat den Wert $2\sqrt{X_1X_2}$:

$$P = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{X_1X_2}\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2 = \frac{1}{6} \int_0^1 \sqrt{X_2}\ \mathrm{d}X_2 = \frac{1}{9}$$

## Aufgabe 18: Dichte von Eigenwerten

Wir haben in Beispiel 17 die Wahrscheinlichkeit bestimmt, dass die zufällig ausgewählte Matrix

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y \\ Y & X_2 \end{bmatrix}$$

mit $X_1, X_2, Y \sim \mathcal{U}(-1,1)$ positiv definit ist. Wir wollen nun die Dichte des größeren Eigenwertes $\lambda_2$ bestimmen, für den Fall $x \leq 1$.

Wir erinnern uns, dass $\lambda_2 = \frac{X_1+X_2}{2} + \sqrt{\frac{(X_1+X_2)^2}{4} - X_1X_2 + Y^2}$ gilt:

$$\sqrt{\frac{(X_1+X_2)^2}{4} - X_1X_2 + Y^2} = \sqrt{\frac{X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - 4X_1X_2}{4} + Y^2} = \sqrt{\frac{(X_1-X_2)^2}{4} + Y^2}$$

Aus $\lambda_2 \leq x$ erhalten wir:

$$\sqrt{\frac{(X_1-X_2)^2}{4} + Y^2} \leq x - \frac{X_1+X_2}{2}$$

Da $\sqrt{\cdot}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ muss $x - \frac{X_1+X_2}{2} \geq 0$ gelten, also $x \geq \frac{X_1+X_2}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{(X_1-X_2)^2}{4} + Y^2 \leq x^2 - x(X_1+X_2) + \frac{(X_1+X_2)^2}{4} \\
&\iff Y^2 \leq x^2 - x(X_1+X_2) + \frac{X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - X_1^2 + 2X_1X_2 - X_2^2}{4} \\
&\iff Y^2 \leq x^2 - x(X_1+X_2) + X_1X_2 \\
&\iff Y^2 \leq (x-X_1)(x-X_2)
\end{aligned}$$

Offensichtlich muss $(x-X_1)(x-X_2) \geq 0$ gelten.

Für den Fall $-1 \leq x \leq 0$ integrieren wir über den folgenden Normalbereich:

$$\mathcal{N} = \{(X_1, X_2, Y) \in [-1,1]^3 \colon X_1, X_2 \leq 0, Y^2 \leq (x-X_1)(x-X_2)\}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{N} \subseteq [-1,1]^3$. Weiters erinnern wir uns von Aufgabe 17, dass unser Normierungsfaktor $\frac{1}{8}$ ist. Zusätzlich ist $\mathcal{N}$ symmetrisch um $Y = 0$. Damit ergibt sich die folgende Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned}
F_{\lambda_2}(x) &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{x} \sqrt{(x-X_1)(x-X_2)}\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2 = \frac{1}{4}\int_{-1}^{x}\sqrt{x-X_2}\int_{-1}^{x}\sqrt{x-X_1}\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{x}\sqrt{x-z}\,\mathrm{d}z\right)^2
\end{aligned}$$

Durch Einführung der Substitution $x - z + u = 0 \iff u = z - x$ erhalten wir $\mathrm{d}u = \mathrm{d}z$ und die neuen Integrationsgrenzen $-x-1$ und $0$:

$$F_{\lambda_2}(x) = \frac{1}{4}\left(\int_0^{x+1}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u\right)^2 = \frac{(x+1)^3}{9} \implies f_{\lambda_2}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{\lambda_2}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{(x+1)^2}{3}$$

Für den Fall $0 \leq x \leq 1$ müssen wir beachten, wann $\sqrt{(x-X_1)(x-X_2)} < 1$ gilt:

$$(x-X_1)(x-X_2) < 1 \iff x - X_1 < \frac{1}{x-X_2} \iff X_1 > x - \frac{1}{x-X_2}$$

Es soll natürlich auch $x - \frac{1}{x-X_2} > -1$ gelten

$$x - \frac{1}{x-X_2} > -1 \iff \frac{1}{x-X_2} < x+1 \iff (x+1)(x-X_2) \iff X_2 < \frac{x^2+x-1}{x+1}$$

Damit ist $\sqrt{(x-X_1)(x-X_2)} < 1$ für $X_1 \in \left(x - \frac{1}{x-X_2}, x\right)$ und $X_2 \in \left(-1, \frac{x^2+x-1}{x+1}\right)$. Was ist allerdings mit der Region $X_2 \in (\frac{x^2+x-1}{x+1}, x)$, gibt es hier gültige Bereiche für $X_1$? Offensichtlich, denn

$$X_2 \in \left(\frac{x^2+x-1}{x+1}, x\right) \implies x - \frac{1}{x-X_2} \leq -1 \implies X_1 \in (-1, x)$$

Wir müssen noch prüfen, für welche $X_1$ und $X_2$ gilt, dass $\sqrt{(x-X_1)(x-X_2)} \geq -1$. Das führt uns auf $X_1 \in (-1, x - \frac{1}{x-X_2})$ und $X_2 \in (-1, \frac{x^2+x-1}{x+1})$. Wir haben also drei Volumina zu bestimmen. Sei $s(x) = \sqrt{(x-X_1)(x-X_2)}$:

$$V_1 = \int_{-1}^{\frac{x^2+x-1}{x+1}} \int_{x-\frac{1}{x-X_2}}^{x} \int_{-s(x)}^{s(x)} \mathrm{d}Y\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2$$

$$V_2 = \int_{\frac{x^2+x-1}{x+1}}^{x} \int_{-1}^{x} \int_{-s(x)}^{s(x)} \mathrm{d}Y\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2$$

$$V_3 = \int_{-1}^{\frac{x^2+x-1}{x+1}} \int_{-1}^{x-\frac{1}{x-X_2}} \int_{-s(x)}^{s(x)} \mathrm{d}Y\ \mathrm{d}X_1\ \mathrm{d}X_2$$

Offensichtlich ist bei allen drei Volumina das innerste Integral symmetrisch und hat den Wert $2s(x)$. Wir beginnen nun mit $V_1$:

$$I = \int_{x-\frac{1}{x-X_2}}^{x} \sqrt{(x-X_1)(x-X_2)}\,\mathrm{d}X_1 = \sqrt{x-X_2} \int_{x-\frac{1}{x-X_2}}^{x} \sqrt{x-X_1}\,\mathrm{d}X_1$$

Mit der Substitution $u = x - X_1$ erhalten wir $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}X_1$ und damit

$$I = \sqrt{x-X_2} \int_{0}^{\frac{1}{x-X_2}} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{x-X_2}}{3\sqrt{x-X_2}^3} = \frac{2}{3(x-X_2)}$$

$$\implies V_1 = \int_{-1}^{\frac{x^2+x-1}{x+1}} \frac{4}{3(x-X_2)}\,\mathrm{d}X_2 \qquad u = x - X_2 \implies \mathrm{d}u = -\mathrm{d}X_2$$

$$\implies V_1 = \frac{4}{3}\int_{\frac{1}{x+1}}^{x+1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\left(\ln(x+1) - \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = \frac{4}{3}\ln\left(\frac{x+1}{\frac{1}{x+1}}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\ln\big((x+1)^2\big) = \frac{8}{3}\ln(x+1)$$

Weiter mit $V_2$:

$$I = \int_{-1}^{x} \sqrt{(x-X_1)(x-X_2)}\,\mathrm{d}X_1 = \sqrt{x-X_2}\int_{-1}^{x} \sqrt{x-X_1}\,\mathrm{d}X_1$$

$$= \sqrt{x-X_2}\int_{0}^{x+1} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{x-X_2}\sqrt{(x+1)^3}$$

$$\implies V_2 = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \int_{\frac{x^2+x-1}{x+1}}^{x} \sqrt{x-X_2}\,\mathrm{d}X_2 = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3}\int_{0}^{\frac{1}{x+1}} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{8\sqrt{(x+1)^3}}{9\sqrt{(x+1)^3}} = \frac{8}{9}$$

Zuletzt $V_3$:

$$I = \sqrt{x - X_2} \int_{-1}^{x-\frac{1}{x-X_2}} \sqrt{x - X_1}\,\mathrm{d}X_1 = \sqrt{x - X_2} \int_{\frac{1}{x-X_2}}^{x+1} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3(x-X_2)}$$

$$\implies V_3 = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \int_{-1}^{\frac{x^2+x-1}{x+1}} \frac{1}{(x-X_2)}\,\mathrm{d}X_2 = \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \int_{\frac{1}{x+1}}^{x+1} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{4\sqrt{(x+1)^3}}{3} \left(\ln(x+1) - \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = \frac{8\sqrt{(x+1)^3}\ln(x+1)}{3}$$

Gesamt ergibt das:

$$V = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{8} = \frac{\ln(x+1)(1+\sqrt{(x+1)^3})}{3} + \frac{1}{9}$$

**Aufgabe 19: Unabhängikeit**

Es werden $n$ Geräte mit den Lebensdauern $X_1, \ldots, X_n$ betrieben. Sind sie in Serie geschalten, so fällt das Gesamtsystem aus, wenn eines der Geräte ausfällt. Die Lebensdauer des Gesamtsystems ist also $X_{(i)} = \min_{1 \le j \le n} X_j$. Werden die Geräte parallel geschalten, so fällt das Gesamtsystem aus, wenn alle Geräte ausfallen. Die Lebensdauer des Gesamtsystems ist also $X_{(n)} \max_{1 \le j \le n} X_j$.

i) Zeigen Sie: Sind die $X_j$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda_j)$, dann ist $X_{(1)}$ wieder exponentialverteilt.

ii) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X_{(n)}$

Zu i): Betrachten wir $\mathbb{P}(X_{(1)} > x)$. Das ist der Fall, wenn alle $X_j > x$ gilt, hernach:

$$\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j > x) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_j x} = \mathrm{e}^{-x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

Somit folgt:

$$\mathbb{P}(X_{(1)} \le x) = 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} > x) = 1 - \mathrm{e}^{-x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j}$$

Zu ii): Offensichtlich gilt $X_{(n)} \le x$ genau wenn für alle $X_j \le x$ gilt, hernach:

$$F_{X_{(n)}}(x) = \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(x)$$