Aufgabe 1.1: Halbring aus Intervallen

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{H}$ bestehend aus allen Intervallen in $\mathbb{R}$ ein Halbring ist.

Wir zeigen zuerst $\emptyset \in \mathcal{H}$. Dazu sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist (x, x) ein offenes Intervall, hernach $(x, x) \in \mathcal{H}$ und $(x, x) = \emptyset$, womit $\emptyset \in \mathcal{H}$. Wir fahren mit der Durchschnittsstabilität fort. Seien dazu $A, B \in \mathcal{H}$ beschränkt. Wenn $A \cap B = \emptyset$, folgt $(A \cap B) \in \mathcal{H}$. Falls $A \subsetneq B$, gilt $A \cap B = A \in \mathcal{H}$. Andernfalls setzen wir oBdA $A = [a, b]$ und $B = [c, d]$, dann ist $A \cap B = [\max(a, c), \min(b, d)]$. Betrachten wir den Spezialfall $a < b = c < d$, erhalten wir genau $A \cap B = [b, b]$. Analog gehen wir für offene Intervalle $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ vor, wobei für $a < b = c < d$ folgt $A \cap B = \emptyset$. Auch für halb-offene Intervalle gehen wir analog vor. Wir prüfen noch unbeschränkte Intervalle. Falls $A = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$, dann gilt $\forall B \in \mathcal{H}\colon A \cap B = B \in \mathcal{H}$. Falls $A = (-\infty, a]$, dann folgt für $B = [c, d]$:

$$A \cap B = \begin{cases} \emptyset & c > a \\ [a, a] & c = a \\ [c, a] & c < a \end{cases}$$

Gleich gehen wir für $A = [a, \infty)$ vor, also gilt $\forall A, B \in \mathcal{H}\colon (A \cap B) \in \mathcal{H}$.

Wir zeigen noch die letzte Eigenschaft eines Halbringes, dass wir die Mengendifferenz als disjunkte Vereinigung von $C_j \in \mathcal{H}$ darstellen können. Seien dazu $A, B \in \mathcal{H}$. Falls $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $A \setminus B = A \in \mathcal{H}$. Seien oBdA $A = [a, b]$ und $B = [c, d]$. Falls $A \subseteq B$, dann gilt $A \setminus B = \emptyset$. Falls $B \subseteq A$ gilt $A \setminus B = [a, c) \uplus (d, b]$. Analog gehen wir für offene und halb-offene Intervalle vor.

Für unbeschränkte Intervalle gilt bei $A = (-\infty, \infty)$ für $B = [c, d]$

$$A \setminus B = (-\infty, c) \uplus (d, \infty)$$

Für $A = (-\infty, a]$ gilt

$$A \setminus B = \begin{cases} A & c > a \\ (-\infty, a) & c = a \\ (-\infty, c) & c < a \end{cases}$$

Es gilt also $\forall A, B \in \mathcal{H}\colon \exists C_1, C_2 \in \mathcal{H}\colon A \setminus B = C_1 \uplus C_2$. Damit ist $\mathcal{H}$ ein Halbring.

Aufgabe 1.2: Durchschnitte von Halbringen

Ist jeder Durchschnitt von Halbringen auf einer Menge X wieder ein Halbring? Beweis oder Gegenbeispiel.

Sei $X = \{a, b, c, d\}$ mit $\mathcal{H}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{d\}, X\}$ und $\mathcal{H}_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, X\}$, dann

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{\emptyset, \{d\}, X\} \Rightarrow X \setminus \{d\} \neq \biguplus_{i=1}^{\infty} C_i \qquad C_i \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$$

Aufgabe 1.3: σ-Subadditivität

Sei $\mathcal{H}$ ein Halbring auf einer Menge X und $\mu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie direkt (ohne den Fortsetzungssatz zu verwenden) die σ-Subadditivität für $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{H}$ gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Sei $A \in \mathcal{H}$ und $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mit $A_i \in \mathcal{H}$. Wir können auf Halbringen eine abzählbare Vereinigung disjunkt machen, indem wir $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \biguplus_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i$ verwenden. Da die $\tilde{A}_i$ nicht notwendigerweise im Halbring enthalten sein müssen, bilden wir sie als disjunkte Vereinigung von Mengen $C_{i,j} \in \mathcal{H}$ und erhalten damit:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \biguplus_{i=1}^{\infty} \tilde{A}_i = \biguplus_{i=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{m_i} C_{i,j}$$

Es gilt nun:

$$A = A \cap \biguplus_{i=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{m_i} C_{i,j} = \biguplus_{i=1}^{\infty} \biguplus_{j=1}^{m_i} (A \cap C_{i,j})$$

Da nun $\forall i \in \mathbb{N}$: $\biguplus_{j=1}^{m_i}(A \cap C_{i,j}) \subseteq \tilde{A}_i \subseteq A_i$ folgt aus der Monotonie:

$$\mu\left(\biguplus_{j=1}^{m_i}(A \cap C_{i,j})\right) \leq \mu(A_i)$$

Und hernach:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i} \mu(A \cap C_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Aufgabe 1.4: Äußeres Maß verschiedener Mengen

Bestimmen Sie das äußere Lebesgue-Maß λ^{p*} der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^p$:

a) $\{\boldsymbol{x}\}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$
b) $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ für $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^p$
c) $\mathbb{Q}^p = \{(q_1, \dots, q_n) | q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\}$

Zu a:

Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$. Wir konstruieren eine Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $D_n \in \mathcal{D}^p$, dabei ist D_n eine dyadische Elementarzelle der Stufe $n-1$. Wir beginnen mit

$$D_1 = \bigtimes_{i=1}^{p} \left(\frac{2a_i}{2}, \frac{2(a_i+1)}{2}\right] = \bigtimes_{i=1}^{p} (a_i, a_i+1]$$

Dabei setzen wir

$$a_i = \begin{cases} \lfloor\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}\rangle\rfloor & \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}\rangle \notin \mathbb{Z} \\ \lfloor\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}\rangle\rfloor - 1 & \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{x}\rangle \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Es folgt $\boldsymbol{x} \in D_1$. Seien nun $D_1, \dots, D_k$ konstruiert mit $\forall i = 1, \dots, k$: $\boldsymbol{x} \in D_i$. Wir konstruieren D_{k+1}, sodass $\boldsymbol{x} \in D_{k+1}$. Dazu teilen wir D_k in 2^p Zellen der Stufe k. Da es sich dabei nur um endlich viele Zellen handelt, können wir immer genau eine Zelle $D_{k+1} \subseteq D_k$ finden, sodass $\boldsymbol{x} \in D_{k+1}$, da die $\tilde{D}_{k,i}$ disjunkt sind, und

$$\biguplus_{j=1}^{2^p} \tilde{D}_{k,j} = D_k$$

Es gilt also $\forall n \in \mathbb{N}$: $\boldsymbol{x} \in D_n$ und es gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \{\boldsymbol{x}\} \subseteq D_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\colon \lambda^{p*}(\{\boldsymbol{x}\}) \leq \lambda^{*p}(D_n)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$: $n \geq N \Rightarrow \lambda^{p*}(D_n) < \varepsilon$. Es gilt also $\forall \varepsilon > 0$: $\lambda^{*p}(\{\boldsymbol{x}\}) < \varepsilon \Rightarrow \lambda^{*p}(\{\boldsymbol{x}\}) = 0$.

Zu b: Sei $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subset \mathbb{R}^p$, dann gibt es $\boldsymbol{x}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{x}_{k_m}$ mit $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} = \{\boldsymbol{x}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{x}_{k_m}\}$ wobei $i \neq j \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_{k_i} \neq \boldsymbol{x}_{k_j}$, und es folgt:

$$\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} = \biguplus_{i=1}^{m} \{\boldsymbol{x}_{k_i}\} \Rightarrow \lambda^{p*}(\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda^{p*}(\{\boldsymbol{x}_{k_i}\}) = 0$$

Alternativ kann man einfach die σ-Subadditivität von λ^{p*} ausnutzen und erhält damit:

$$\lambda^{p*}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{x}_i\}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda^{p*}(\{\boldsymbol{x}_i\}) = 0$$

Zu c:

Da $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ folgt $|\mathbb{Q}^p| = \aleph_0$, es gilt daher $\mathbb{Q}^p = \{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots\}$, hernach gilt:

$$\mathbb{Q}^p = \biguplus_{i=1}^{\infty}\{\boldsymbol{q}_i\} \Rightarrow \lambda^{p*}(\mathbb{Q}^p) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{p*}(\{\boldsymbol{q}_i\}) = 0$$

Aufgabe 1.5: Äußere Maße

Welche der folgenden $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ äußere Maße?

a) $X = \mathbb{N}$ mit $\mu(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A \cap \{1,\dots,n\}|$

b) X beliebig mit $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A = \emptyset \\ 1 & A \neq \emptyset \end{cases}$

c) $|X| > \aleph_0$ mit $\mu(A) = \begin{cases} 0 & |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & |A| > \aleph_0 \end{cases}$

Zu a: Wir finden ein Gegenbeispiel zur σ-Subadditivität. Falls $|A_i| < \aleph_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\exists N_i \in \mathbb{N}\colon n \geq N_i \Rightarrow A \subseteq \{1,\dots,n\} \Rightarrow \exists K_i \in \mathbb{N}\colon |A \cap \{1,\dots,N_i\}| = K_i \\ &\Rightarrow \mu(A) = \limsup_{n\to\infty}\frac{K_i}{n} = 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $A_i = \{i\}$ für $i \in \mathbb{N}$. Es folgt damit:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$$

Da $\forall n \in \mathbb{N}\colon \mathbb{N} \cap \{1,\dots,n\} = \{1,\dots,n\}$ und $|\{1,\dots,n\}| = n$ folgt:

$$\mu(\mathbb{N}) = \limsup_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 1$$

Allerdings:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$$

Da $1 \leq 0$ ein Widerspruch ist, ist μ kein äußeres Maß, weil die σ-Subadditivität nicht erfüllt ist.

Zu b:

Sei $A = \emptyset$, dann gilt per Definition von μ, dass $\mu(\emptyset) = 0$.

Sei oBdA $B \neq \emptyset$ und $A \subseteq B$, dann machen wir eine Fallunterscheidung ob $A = \emptyset$ oder $A \neq \emptyset$:

$$\begin{aligned} A = \emptyset &\Rightarrow \mu(A) = 0 < 1 = \mu(B) \\ A \neq \emptyset &\Rightarrow \mu(A) = 1 \leq 1 = \mu(B) \end{aligned}$$

Falls $B = \emptyset$, dann kann nur $A = \emptyset$ gelten, womit $\mu(A) = \mu(B)$.

Zur σ-Subadditivität. Wir betrachten

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}\colon A_i = \emptyset$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Sei $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset \Rightarrow \exists I \subseteq \mathbb{N} \colon \forall i \in I \colon A_i \neq \emptyset$:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i \in I} 1 = |I|$$

Zu c:

$\emptyset \subset \mathbb{N} \Rightarrow |\emptyset| < \aleph_0$ womit $\mu(\emptyset) = 0$. Sei $|B| \leq \aleph_0$, dann gilt $\forall A \in \mathcal{P}(B) \colon |A| \leq \aleph_0$, hernach gilt $\mu(A) = 0 \leq 0 = \mu(B)$. Sei $|B| > \aleph_0$, dann gilt für $A \subseteq B$ entweder $|A| \leq \aleph_0$, womit $\mu(A) = 0 \leq 1 = \mu(B)$ oder aber $|A| > \aleph_0$, dann $\mu(A) = 1 \leq 1 = \mu(B)$. Zuletzt die σ-Subadditivität. Sei $\forall i \in \mathbb{N} \colon |A_i| \leq \aleph_0$, dann folgt

$$\left|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right| \leq \aleph_0 \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$$

Falls $\exists I \subseteq \mathbb{N} \colon \forall i \in I \colon |A_i| > \aleph_0$, wobei $|I| \geq 1$, dann folgt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i) = |I|$$