

Übungsblatt №1

Aufgabe 1.1. Gegeben sei die folgende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$$

An welchen Stellen x ist die Funktion stetig?

Betrachten wir $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$. Da $f_1(x) = \text{id}(x)$ und $f_2(x) = 3$ beide stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ sind, ist auch $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Sei nun $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 3$ mit $\xi_n \neq 3$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n + 3) = 6 \\ f(3) &= 7 \neq 6 \end{aligned}$$

Somit ist f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Aufgabe 1.2. Sei $c \in \mathbb{R}$ und die folgende Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben:

$$g(x) = \begin{cases} 10-x & x \geq 2 \\ cx^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$$

Für welche Werte von c ist g (überall) stetig?

Da $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \geq 2 \\ f_2(x) & x < 2 \end{cases}$ und f_1 und f_2 jeweils stetig auf \mathbb{R} sind, müssen wir nur den Punkt $x = 2$ betrachten, um zu entscheiden ob g stetig auf \mathbb{R} oder stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ist. Angenommen $f(x)$ ist in 2 nicht stetig, dann gilt:

$$\exists (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}: \xi_n \in \mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 2 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n) \neq g(2)$$

Sei also $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge mit Grenzwert 2, sprich $\forall n \in \mathbb{N}: \xi_n < 2$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c\xi_n^2 + 1 = 4c + 1 \neq g(2) = 8$$

Damit g also unstetig in 2 ist, darf $4c + 1 = 8$ nicht erfüllt sein. Wir suchen also $C \subseteq \mathbb{R}: c \in C \implies 4c + 1 = 8$, dann ist g für $c \in \mathbb{R} \setminus C$ unstetig in 2. Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir $c = \frac{7}{4}$, womit $C = \{\frac{7}{4}\}$. Damit ist g für $c \neq \frac{7}{4}$ unstetig in 2, bzw. für $c = \frac{7}{4}$ ist g stetig in 2.

Wir betrachten weiterhin die folgende Funktion f :

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{|x^2 + x - 6|} = \frac{f_1(x)}{|f_2(x)|}$$

Aufgabe 1.4. a Bestimme den maximalen Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{R}$

b Bestimme die inneren Punkte von $D(f)$

c Bestimme die Randpunkte von $D(f)$

d Bestimme die isolierten Punkt von $D(f)$

Zu a). Da $f_1(x)$ auf ganz \mathbb{R} definiert ist, suchen wir jene $x \in \mathbb{R}$ mit $|f_2(x)| = 0$, da hier $f(x)$ nicht definiert ist (Division mit 0). Wir lösen also die Gleichung $f_2(x) = 0$, da $|0| = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Da $f_1(2) = 0$ haben f_1 und f_2 einen gemeinsamen Linearfaktor $(x - 2)$:

$$(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) : (x - 2) = x^2 - 5x + 6 = f_{11}(x)$$

Es gilt weiterhin $f_{11}(2) = 0$, also können wir einen weiteren Linearfaktor $(x - 2)$ abspalten:

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = (x - 3) \implies f_1(x) = (x - 3)(x - 2)^2$$

Somit:

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x - 2)^2}{|(x + 3)(x - 2)|} = \frac{(x - 3)(x - 2)^2}{|(x + 3)| \cdot |(x - 2)|}$$

Da $(x - 2)^2 > 0$ gilt $(x - 2)^2 = |(x - 2)|^2$, womit:

$$f(x) = \frac{(x - 3)|x - 2|}{|x + 3|}$$

Der Definitionsbereich von f ist also gegeben durch $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$.

Zu b). Ein innerer Punkt $x_0 \in D(f)$ zeichnet sich dadurch aus, dass $\exists r \in \mathbb{R} : \mathcal{B}_r(x_0) \subseteq D(f)$. Schreiben wir $D(f)$ in Intervalle um erhalten wir:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = \underbrace{(-\infty, -3)}_{=I_1} \cup \underbrace{(-3, \infty)}_{=I_2}$$

Sei $x_0 \in I_2$ und $\rho_1 \in (-3, x_0)$ und $\rho_2 \in (x_0, 2)$, wir wählen $r = \min(|x_0 - \rho_1|, |x_0 - \rho_2|)$, dann gilt:

$$\mathcal{B}_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (\rho_1, \rho_2) \subset I_2$$

Sei $x_0 \in I_2$, dann $\exists \rho \in (-3, x_0)$. Sei $r = |x_0 - \rho|$ so gilt $\mathcal{B}_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$, wobei $x_0 - r = x_0 - x_0 + \rho = \rho > -3$, womit $\mathcal{B}_r(x_0) \subseteq I_2$.

Zu c). Die Randpunkte von $D(f)$ sind Berührungspunkte von $D(f)$ und $\mathbb{R} \setminus D(f) = \{-3\} = R$. Da R nur aus isolierten Punkten besteht¹ gilt $\forall x \in R : \forall r > 0 : \mathcal{B}_r(x) \cap R \neq \emptyset$, da $\forall x \in R : \forall r > 0 : \{x\} = \mathcal{B}_r(x) \cap R$, also alle Punkte von R sind isoliert und Berührungspunkte. Weiterhin ist -3 ein Berührungspunkt von $D(f)$, da $\forall r > 0 : \mathcal{B}_r(-3) \cap D(f) = (-3 - r, -3 + r) \setminus \{-3\}$. Somit ist -3 ein Berührungspunkt von $D(f)$ und von R , womit ein -3 Randpunkt von $D(f)$ ist.

Zu d). $\forall x \in D(f) : \forall r > 0 : \mathcal{B}_r(x) \cap D(f) = (x - r, x + r) \setminus \{-3\} \neq \{x\}$, also ist kein Punkt $x \in D(f)$ ein isolierter Punkt.

¹etwa für $r = \frac{1}{100} : \mathcal{B}_r(-3) \cap R = \{-3\}$