Übungsblatt № 5

Aufgabe 21

Seien $\mathrm{A} \in \mathbb{K}^{m\times m}$, $\mathrm{B} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\mathrm{D} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ Matrizen. Wir bestimmen $\mathcal{A}$ als:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Zeige das $\det(\mathcal{A}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{D})$.

Sei D oder A singulär, dann sind mindestens zwei Spaltenvektoren oder Zeilenvektoren von $\mathcal{A}$ linear abhängig, womit $\det(\mathcal{A}) = 0 = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{D})$, da auch $\det(\mathrm{D}) = 0$ und/oder $\det(\mathrm{A}) = 0$.

Seien D und A regulär, dann existiert $\mathrm{D}^{-1} \in \mathbb{K}^{m\times m}$. Wir vereinfachen unsere Matrix $\mathcal{A}$:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_m & -\mathrm{BD}^{-1} \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} = \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I}\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} \end{bmatrix} = \mathcal{B}$$
$$\det(\mathcal{I}) = 1$$

Da $\mathcal{I}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist, ist ihre Determinante gegeben als das Produkt der Diagonalelemente. Da diese alle 1 sind, ist die Determinante ebenfalls 1. Wir haben also folgenden Gleichung:

$$\det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{D} \end{vmatrix}$$

Da A und D in diesem Fall regulär sind, können wir sie in die Form von oberen Dreiecksmatrizen bringen, womit auch $\mathcal{B}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Seien a_{ii} die Diagonalelemente von A und d_{jj} die Diagonalelemente von D nachdem alle Zeilenumformungen vorgenommen wurden, dann gilt:

$$\det(\mathcal{B}) = \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{m} a_{ii}\right)}_{=\det(\mathrm{A})} \cdot \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} d_{jj}\right)}_{\det(\mathrm{D})} = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{A})$$

Da $\det(\mathcal{I}) = 1$, folgt somit:

$$\det(\mathcal{A}) = \det(\mathcal{B}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{D})$$

Aufgabe 23

Seien $P_i = (x_i, y_i)$ zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$.

a Zeige, dass die eindeutig bestimmte Gerade g, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft, durch folgende Gleichung beschrieben wird:

$$g = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

b Zeige, dass der eindeutig bestimmte Kreis k, der durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 verläuft, durch die folgende Gleichung beschrieben wird:

$$k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

c Bestimme den Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $(-4, 1)$, $(-2, -3)$ und $(4, 5)$.

Zu a:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$
$$= x_2y - xy_2 - x_1y + xy_1 + x_1y_2 - x_2y_1 = x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + x_1y_2 - x_2y_1 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow y(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1) + x_2y_1 - x_1y_2 \Leftrightarrow y = x\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}$$

Wir haben nun ein Polynom ersten Grades in x erhalten.

Wir wollen nun ebenfalls ein Polynom ersten Grades für g aus P_1 und P_2 bestimmen. Dazu wählen wir einen allgemeinen Ansatz $y(x) = kx + d$ und bestimmen k und d. Wir wissen, dass $y(x_1) = y_1$ gelten muss. Weiters muss $y(x_2) = y_2$ gelten. Wir erhalten also die folgenden Gleichungen:

$$y_1 = kx_1 + d$$
$$y_2 = kx_2 + d$$
$$\Rightarrow y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2) \Leftrightarrow k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Wir suchen noch d:

$$y_1 = \frac{x_1y_1 - x_1y_2}{x_1 - x_2} + d \Leftrightarrow \frac{x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_1 + x_1y_2}{x_1 - x_2} = d$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2} = d$$
$$\Rightarrow y = x\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$$

Zu b:

Wir beginnen zuerst damit, die gegebene Determinante zu berechnen. Dazu entwickeln wir nach der 4. Zeile. Zu Beginne sehen wir aber schon, dass alle Punkte $P_i \in g$, da wir in der Determinante eine doppelte Zeile erhalten, wenn wir $x = x_i$ und $y = y_i$ setzen. Seien $\delta_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1, \dots, 4\}$, dann sind diese konstant, also von x und y unabhängig:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ x_3 & y_3 & x_3^3 + y_3^3 \end{vmatrix} = \delta_1$$
$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = \delta_2$$
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = \delta_3$$
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \delta_4^2$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = -\delta_1 + \delta_2 x - \delta_3 y + \delta_4^2 x^2 + \delta_4^2 y^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow (\delta_4^2 x^2 + \delta_2 x) + (\delta_4^2 y^2 - \delta_3 y) = \delta_1$$
$$\Leftrightarrow \left(\delta_4^2 x^2 + \delta_2 x + \frac{\delta_2^2}{4\delta_4^2}\right) + \left(\delta_4^2 y^2 - \delta_3 y + \frac{\delta_3^2}{4\delta_4^2}\right) = \delta_1 + \frac{\delta_2^2 + \delta_3^2}{4\delta_4^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\delta_4 x + \frac{\delta_2}{2\delta_4}\right)^2 + \left(\delta_4 y - \frac{\delta_3}{2\delta_4}\right)^2 = \frac{\delta_2^2 + \delta_3^2}{4\delta_4^2} + \delta_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\delta_4\left(x+\frac{\delta_2}{2\delta_4^2}\right)\right)^2+\left(\delta_4\left(y-\frac{\delta_3}{2\delta_4^2}\right)\right)^2=\frac{\delta_2^2+\delta_3^2}{4\delta_4^2}+\delta_1$$
$$\Leftrightarrow \delta_4^2\left(x+\frac{\delta_2}{2\delta_4^2}\right)+\delta_4^2\left(y-\frac{\delta_3}{2\delta_4^2}\right)=\frac{\delta_2^2+\delta_3^2}{4\delta_4^2}+\delta_1$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\delta_2}{2\delta_4^2}\right)^2+\left(y-\frac{\delta_3}{2\delta_4^2}\right)^2=\frac{\delta_2^2+\delta_3^2}{4\delta_4^4}+\frac{\delta_1}{\delta_4^2}=\frac{\delta_2^2+\delta_3^2+4\delta_4^2\delta_1}{4\delta_4^4}=r^2$$

Wir haben die Gleichung in die Standardform einer Kreisgleichung gebracht und können so den Mittelpunkt ablesen:

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}\frac{-\delta_2}{2\delta_4^2}\\ \frac{\delta_3}{2\delta_4^2}\end{bmatrix}$$

Wir haben also eine Kreisgleichung erhalten, deren "Graph" alle drei Punkte P_i enthält. Wir müssen nur noch prüfen, ob $\delta_4 \neq 0$ gilt, um Divisionen durch 0 zu vermeiden. Wir wollen prüfen, wann $\delta_4 = 0$. Wir wissen, dass die Determinante einer $n \times n$ Matrix genau dann 0 ist, wenn ihr Rang ungleich n ist, also Spalten bzw. Zeilen vorhanden sind, die linear abhängig ist. Das ist der Fall wenn gilt $P_i = P_j$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und $i \neq j$. Wenn also zwei Punkte ident sind, ist $\delta_4 = 0$. Da wir jedoch voraussetzen, dass die P_i paarweise verschieden sind, tritt dieser Fall nicht ein.

Wenn alle Punkte auf einer Geraden liegen, wird der Radius unendlich groß.

Zu c: Gegeben sind die Punkte $(-4, 1)$, $(-2, -3)$ und $(4, 5)$. Wir wollen den Mittelpunkt des Kreises durch diese Punkte bestimmen. Dazu bestimmen wir $\delta_2, \delta_3, \delta_4$:

$$\delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & (-4)^2+1^2\\ 1 & -3 & (-2)^2+(-3)^2\\ 1 & 5 & 4^2+5^2\end{vmatrix}=-80$$
$$\delta_3=\begin{vmatrix}1 & -4 & (-4)^2+1^2\\ 1 & -2 & (-2)^2+(-3)^2\\ 1 & 4 & 4^2+5^2\end{vmatrix}=80$$
$$\delta_4^2=\begin{vmatrix}1 & -4 & 1\\ 1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix}=40$$

Somit gilt:

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}-\frac{-80}{80}\\ \frac{80}{80}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Wir können noch prüfen, indem wir $\|\mathbf{m}-P_i\|^2$ bestimmen:

$$\|\mathbf{m}-P_1\|^2=(1-(-4))^2+(1-1)^2=5^2=25$$
$$\|\mathbf{m}-P_2\|^2=(1-(-2))^2+(1-(-3))^2=3^2+4^2=25$$
$$\|\mathbf{m}-P_3\|^2=(1-4)^2+(1-5)^2=(-3)^2+(-4)^2=25$$

Da alle Abstände gleich sind, ist $\mathbf{m}$ der Mittelpunkt des Kreises.