Blatt № 5

Aufgabe 13: Verbesserung der Oberfunktion

Für das Anfangswertproblem $y'(x) = x^2 + y^2(x)$ mit $y(0) = 1$ haben wir in der Vorlesung die Ober- und Unterfunktionen

$$\overline{y} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \underline{y}(x) = \frac{1}{1-x} \qquad x \in (0,1)$$

gefunden. Für ein geeignetes $a > 1$ betrachte man den Ansatz

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{1-ax}$$

zur Herleitung einer besseren Oberfunktion.

$$\overline{y}'(x) = \frac{a}{(1-ax)^2}$$

Damit $\overline{y}$ eine Oberfunktion ist, muss gelten $\forall x \in (0,1)\colon \overline{y}'(x) > f(x,\overline{y})$. Zuerst sehen wir, dass $\overline{y}$ einen Pol bei $x = \frac{1}{a} < 1$ hat:

$$\begin{aligned} f(x,\overline{y}) = x^2 + \frac{1}{(1-ax)^2} &< \frac{a}{(1-ax)^2} \\ \Leftrightarrow x^2(1-ax)^2 + 1 &< a \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Hilfsfunktion $g\colon \left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2(1-ax)^2$. Wir suchen ein globales Maximum von g auf $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, damit wir den „schlechtesten" Fall der Ungleichung $g < \alpha - 1$ Lösen können:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2x(1-ax)^2 - 2ax^2(1-ax) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x(1-ax)^2 = 2ax^2(1-ax) \\ &\Rightarrow 1 - ax = ax \Leftrightarrow 1 = 2ax \Leftrightarrow x = \frac{1}{2a} \in \left(0, \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

Wir prüfen noch, ob die gefundene Stelle ein Maximum ist:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 2(1-ax)^2 - 4ax(1-ax) - 4ax(1-ax) + 2a^2x^2 = 2(1-ax)^2 - 8ax(1-ax) + 2a^2x^2 \\ g''\left(\frac{1}{2a}\right) &= 2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -1 < 0 \end{aligned}$$

Somit hat g bei $x = \frac{1}{2a}$ ein globales Maximum. Wir Lösen nun $g(\frac{1}{2a}) < a - 1$:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{4a^2}\left(1 - \frac{a}{2a}\right)^2 = \frac{1}{16a^2} &< a - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16} &< a^3 - a = a(a^2-1) = a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

Es muss also gelten $a - 1 \geq \frac{1}{16}$, da $a > 1$ womit auch $a + 1 > 1$. Wir wählen somit $a = \frac{17}{16}$, womit

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{1 - \frac{17}{16}x} = \frac{16}{16 - 17x}$$

eine Oberfunktion ist, für $x \in \left(0, \frac{16}{17}\right)$.

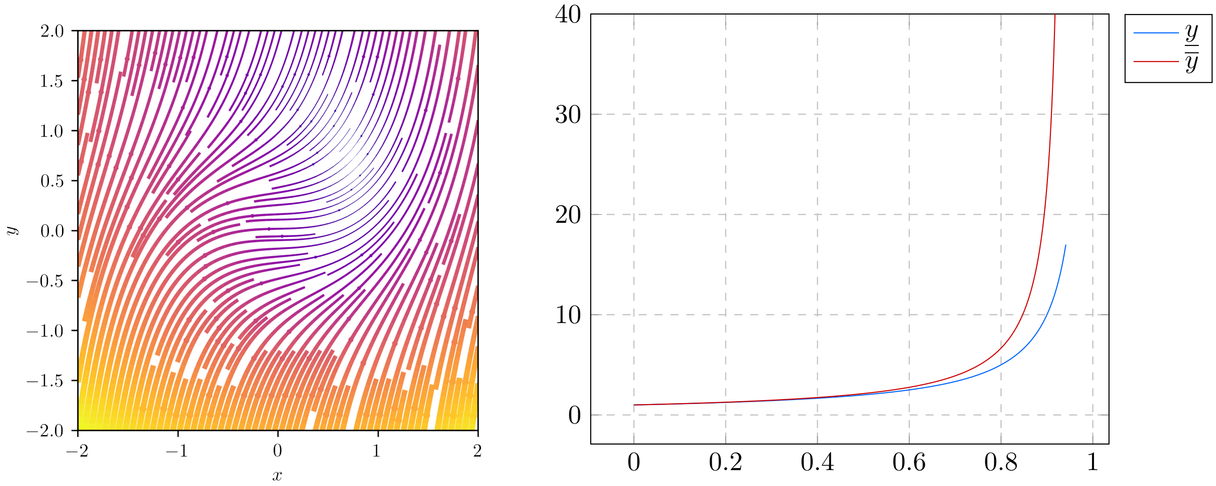

Abbildung 1: Richtungsfeld der Gleichung (links) und Graph von $\overline{y}$ und $\underline{y}$ (rechts)

Aufgabe 14: Konstruktion von Ober- und Unterfunktion

Man konstruiere Ober- und Unterfunktion für das Anfangswertproblem

$$y' = x + \sqrt{1+y^2} \qquad x > 0 \qquad y(0) = 1$$

Wir beginnen mit der Oberfunktion. Wir sehen, dass y streng monoton steigend ist, da $y' > 0 \forall x > 0$. Daraus folgt, dass $y(x) > 1$ für $x > 0$:

$$y'(x) = x + \sqrt{1+y^2} < x + \sqrt{1+2y+y^2} = x\sqrt{(1+y)^2} = x + y + 1$$

Wir lösen nun die lineare Differentialgleichung $\overline{y}' = x + \overline{y} + 1$. Für $\overline{y} \neq 0$ hat die homogene Gleichung $\overline{y}' - \overline{y} = 0$ die Lösung $\ln(\overline{y}) = x + \ln(c)$ bzw. $\overline{y} = c\mathrm{e}^x$, da $\overline{y} > 1$ gelten muss, damit $\overline{y}$ eine Oberfunktion ist. Als Ansatz für die partikuläre Lösung verwenden wir $\overline{y} = ax + b$, womit $\overline{y}' = a$ und:

$$a - b - ax \stackrel{!}{=} x + 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow -1 - b = 1 \Leftrightarrow b = -2$$

Somit haben wir die folgende allgemeine Lösung:

$$\overline{y}(x) = c\mathrm{e}^x - x - 2$$

Mit der Anfangsbedingung erhalten wir $1 = c - 2 \Leftrightarrow c = 3$, damit ist $\overline{y} = 3\mathrm{e}^x - x - 2$ eine Oberfunktion.

Für die Unterfunktion gehen wir analog vor, indem wir eine Abschätzung für f machen:

$$y' = x + \sqrt{1+y^2} > x + \sqrt{y^2} = x + y$$

Wir lösen nun $\underline{y}' = x + \underline{y}$. Die homogene Lösung ist wieder $\underline{y}(x) = c\mathrm{e}^x$. Für die partikuläre Lösung wählen wir denselben Ansatz $\underline{y}(x) = ax + b$ und erhalten damit durch die Gleichung $a - b - ax = x$ die Koeffizienten $a = -1$ und $b = -1$, was die partikuläre Lösung $\underline{y}(x) = -x - 1$ ergibt. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\underline{y}(x) = c\mathrm{e}^x - x - 1$$

Anhand der Anfangsbedingung können wir c bestimmen. $1 \stackrel{!}{=} c - 1 \Rightarrow c = 2$. Damit ist $\underline{y}(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 1$ eine Unterfunktion.

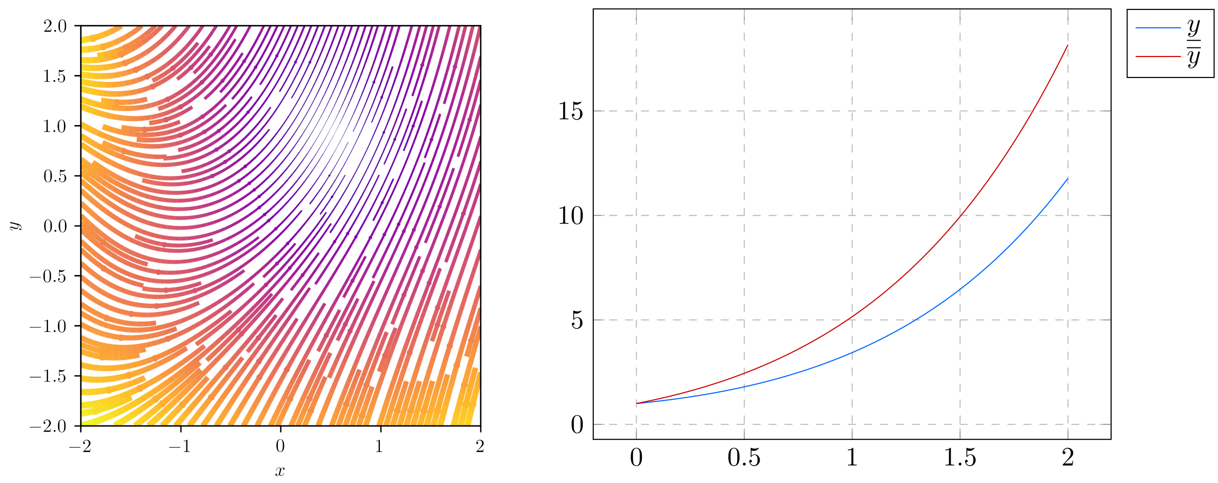

Abbildung 2: Richtungsfeld der Differentialgleichung (links) und Graph von $\overline{y}$ und $\underline{y}$ (rechts)

Aufgabe 15: Konstruktion von Ober- und Unterfunktion

Man konstruiere Ober- und Unterfunktion für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x^3 + y^3 \qquad x > 0 \qquad y(0) = 1$$

Wir beginnen mit der Unterfunktion.

$$y'(x) = x^3 + y^3 > y^3$$

Wir lösen dafür $\underline{y}' = \underline{y}^3$. Unter der Annahme, dass $\underline{y} \neq 0$ erhalten wir:

$$\int \frac{\underline{y}'(s)}{\underline{y}^3(s)}\,\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}z}{z^3} = -\frac{1}{2\underline{y}(x)} + c \overset{!}{=} x$$
$$x \neq c \Rightarrow \underline{y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(c-x)}}$$
$$\underline{y}(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{2c}} \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Somit ist $\underline{y}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ eine Unterfunktion. Für die Oberfunktion wählen wir nun, ähnlich zu Aufgabe 13 den folgenden Ansatz für $a > 1$ und $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-ax}}$$

Für $x < 1$ folgt $x^3 + \overline{y} < 2\overline{y}$. Wir lösen also die Differentialgleichung $\overline{y}' = 2\overline{y}^3$. Analog zur Unterfunktion erhalten wir für $x \neq \frac{c}{2}$:

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{\sqrt{2(c-2x)}}$$
$$1 = \frac{1}{\sqrt{2c}} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Somit ist $\overline{y}(x) = \frac{1}{1-4x}$ eine Oberfunktion für $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$.

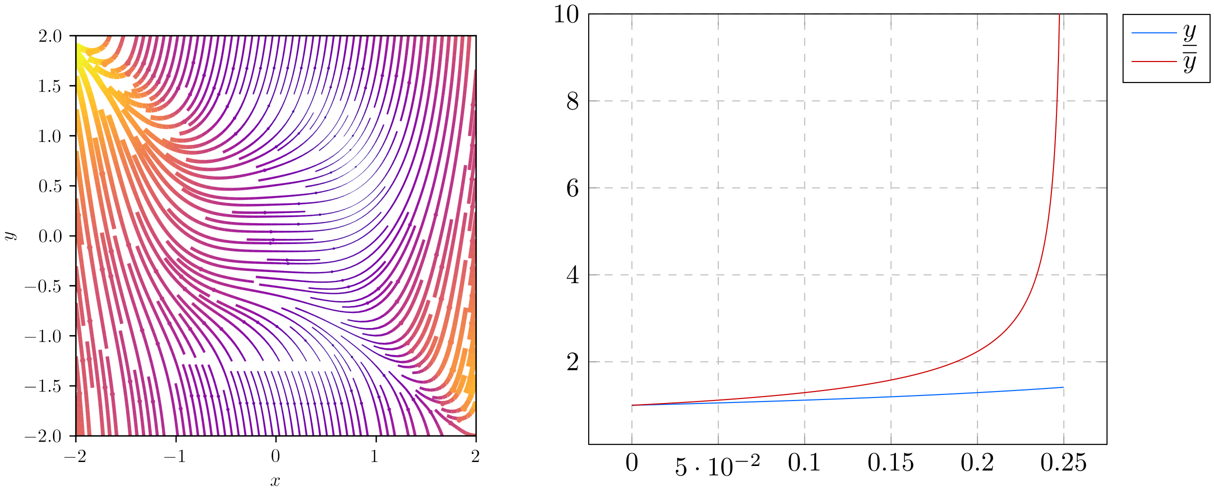

Abbildung 3: Richtungsfeld der Differentialgleichung (links) und Graph von $\overline{y}$ und $\underline{y}$ (rechts)