Eine kleine Anmerkung: Für allgemeine Gruppen schreiben wir ab statt $a \circ b$.

Aufgabe 1.1: Fingerübungen I

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt $\forall a \in G\colon a^2 = 1$, so ist $(G, \circ)$ abelsch.
b) Ist $M = \{a \in G\colon a^3 = 1\}$ endlich, so ist $\#M$ ungerade.

Zu a: Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen $(G, \circ)$ ist nicht abelsch, dann $\exists a, b \in G\colon ab \neq ba$. Gilt $a = b$, dann ist das ein Widerspruch dazu, dass $\forall a \in G\colon a^2 = 1$, da $ab = a^2 = 1 = a^2 = ba$ gelten muss. Sind a, b also verschieden, dann folgt aus der Assoziativität von $\circ$ auf G

$$a^2 b = aba \Leftrightarrow b = aba.$$

Daraus folgt allerdings

$$a(aba) = b(aba) \Leftrightarrow ba = baba = (ba)^2 = 1.$$

Da inverse Elemente in Gruppen eindeutig sind, muss daher wieder gelten $a = b$, womit wir wieder einen Widerspruch erzeugt haben. Damit ist $(G, \circ)$ abelsch.

Zu b: Wir wollen zuerst überlegen, wie die inversen Elemente für $a \in M$ aussehen. Aufgrund der Assoziativität von $\circ$ auf G folgt:

$$a^3 = aa^2 = a^2 a = 1$$

Somit ist das zu a inverse Element a^2. Daraus erhalten wir aber $M = \{a \in G\colon a^{-1} = a^2\}$. Es gilt natürlich $a^4 = a$ für $a \in M$, womit folgt $a^2 \in M$, ergo treten in M immer die Paare (a, a^2) auf. Sofern $a \neq a^2 = 1$, folgt für endliche M, dass $|M|$ ungerade ist, da $1 \in M$.

Aufgabe 1.2: Schwache Gruppenaxiome

Es sei G eine Menge, $\circ\colon G^2 \to G$ eine zweistellige innere Verknüpfung und $1 \in G$ ein festes Element. Ferner mögen die folgenden Eigenschaften gelten:

$$\forall a, b, c \in G\colon (ab)c = a(bc) \tag{1}$$
$$\forall a \in G\colon a1 = a \tag{2}$$
$$\forall a \in G\colon \exists b \in G\colon ab = 1 \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist
b) Zeigen Sie, dass die Aussauge aus Teil a) im Allgemeinen nicht gültig bleibt, wenn man 3 durch die folgende Eigenschaft 3' ersetzt:

$$\forall a \in G\colon \exists b \in G\colon ba = 1 \tag{3'}$$

Zu a: Wir erinnern uns an die Gruppenaxiome:

$$\forall a, b, c \in G\colon (ab)c = a(bc) \tag{G1}$$
$$\exists 1 \in G\colon \forall a \in G\colon 1a = a1 = a \tag{G2}$$
$$\forall a \in G\colon \exists b \in G\colon ab = ba = 1 \tag{G3}$$

Wir sehen anhand der Angabe, dass G1 bereits erfüllt ist. Sei $a \in G$, dann folgt aus 3, dass es ein $b \in G$ gibt, sodass $ab = 1$. Des weiteren gibt es ein $c \in G$, sodass $bc = 1$. Es folgt damit:

$$ba = ba1 = (ba)(bc) = (bab)c = b1c = bc = 1$$

Somit gilt $ba = 1 = ab$, sprich G3 ist erfüllt. Für G2 betrachten wir

$$1a = (ab)a = a(ba) = a1 = a$$

Somit ist auch G3 erfüllt.

Zu b:

Angenommen es gelte 3' statt 3. Dann gibt es zu $a \in G$ ein $b \in G$, sodass $ba = 1$ und ein $c \in G$, sodass $cb = 1$, womit

$$ab = 1ab = (cb)(ab) = cbab$$

Wir können diese Verknüpfung nicht weiter auflösen, ohne zu wissen, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 1.3: Ordnung von Elementen

Es ei $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die Menge der reellen, regulären 2×2-Matrizen, die zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Betrachten Sie

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie $\#\{\mathrm{X}^n | n \in \mathbb{N}\}$ für $\mathrm{A} \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{AB}\}$

Wir führen einige kurze Rechnungen aus

$$\mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}^4 = \mathrm{I}_2$$
$$\mathrm{B}^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{B}^3 = \mathrm{I}_2$$

Das $\mathrm{A}^4 = \mathrm{I}_n$ können wir auch auf andere Weise sehen. Sei R_θ die Rotationsmatrix um den Ursprung, die jeden Vektor um θ dreht. Wir wissen $\mathrm{R}_\theta \mathrm{R}_\varphi = \mathrm{R}_{\theta+\varphi}$. Durch „scharfes Hinsehen" erkennen wir, dass $\mathrm{A} = \mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$, womit folgt $\mathrm{R}^4_{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{R}_{2\pi} = \mathrm{I}$.

Sei $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$:

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{C}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{C}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wir können mittels Induktion zeigen, dass

$$\mathrm{C}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Damit wissen wir:

$$|\{\mathrm{A}^n | n \in \mathbb{N}\}| = 4$$
$$|\{\mathrm{B}^n | n \in \mathbb{N}\}| = 3$$
$$|\{(\mathrm{AB})^n | n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$$

Aufgabe 1.4: Fingerübungen II

Es sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe. Es bezeichne

$$\pi = \prod_{g \in G} g$$

das Produkt aller Elemente von G. Zeigen Sie $\pi^2 = 1$.

Da G endlich ist, gibt es eine Aufzählung der Elemente von G, sprich $G = \{1, g_1, \ldots, g_n\}$. Wir wollen ausnutzen, dass $(G, \circ)$ abelsch ist. Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation, dann gilt aufgrund der Kommutativität von $\circ$ auf G:

$$g_1 g_2 \cdots g_n = g_{\sigma(1)} g_{\sigma(2)} \cdots g_{\sigma(n)}$$

Wir können die einzelnen Elemente also beliebig vertauschen. Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Angenommen n ist gerade, dann folgt

$$\pi = 1 g_1 g_2 g_3 \cdots g_n$$

Sei nun $m = \frac{n}{2}$, dann sei für g_k das inverse Elemente g_{n-k+1} womit

$$\pi = 1 \prod_{k=1}^{m} g_k g_{n-m+1} = 1 \prod_{k=1}^{m} 1 = 1 \Rightarrow \pi^2 = 1$$

Sei nun $\widetilde{n}$ ungerade und $G = \{1, g_1, \ldots, g_{\widetilde{n}}\}$, dann re-indizieren wir $G = \{1, g_0, g_1 \ldots, g_n\}$, womit $n = \widetilde{n} - 1$ gerade ist. Dabei gilt wieder $g_k^{-1} = g_{n-k+1}$ für $k = 1, \ldots, m = \frac{n}{2}$:

$$\pi_n = \prod_{k=1}^{m} g_k g_{n-k+1} = 1$$

Damit hat π die folgende Form:

$$\pi = 1 g_0 \pi_n = g_0$$

Da 1 selbst-invers ist und alle anderen Elemente nicht zu g_0 invers sind, kann g_0 ebenfalls nur selbst-invers sein. Es folgt damit

$$\pi^2 = g_0^2 = 1$$