Übungsblatt №1

Aufgabe 1. *Bestimme die Inverse der folgenden Matrix über $\mathbb{Z}_5$:*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die Einheitsmatrix I_4 an:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2\cdot I} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{II+I, III+I, IV+I} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{4\cdot II} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III+II, IV+II} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2\cdot IV} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+3IV, II+4IV, III+IV} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II+III} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 4 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+II} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{4\cdot I} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Probe:

$$\mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0+3+4+4 & 0 & 0+3+4\cdot 2+4 & 0+3\cdot 2+4+0 \\ 3\cdot 2+3+1+0 & 3\cdot 2+0 & 0+3+2+0 & 3+3\cdot 2+1+0 \\ 0+2+1+2 & 0 & 0+2+2+2 & 0+2\cdot 2+1+0 \\ 0+3+0+2 & 0 & 0+3+0+2 & 0+3\cdot 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 15 & 10 \\ 10 & 6 & 5 & 10 \\ 5 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}_4 \in \mathbb{Z}_5^{4\times 4}$$

Aufgabe 2. *Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Gesucht ist der Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von λ:*

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{II-2I, III-I} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2+2\lambda}II,\frac{1}{10-\lambda}III}\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} & -\frac{1}{2(\lambda+1)}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{10-\lambda} & -\frac{1}{10-\lambda}\end{bmatrix}\xrightarrow{III-II}\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)} & -\frac{1}{2(\lambda+1)}\\ 0 & 0 & \frac{\lambda+2}{2(\lambda+1)}-\frac{5}{10-\lambda} & \frac{1}{2(\lambda+1)}-\frac{1}{10-\lambda}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1+\frac{\lambda}{2}}{\lambda+1} & -\frac{1}{2(\lambda+1)}\\ 0 & 0 & \frac{(\lambda+2)(10-\lambda)-10(\lambda+1)}{2(\lambda+1)(10-\lambda)} & \frac{8-3\lambda}{2(\lambda+1)(10-\lambda)}\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & 1 & -\frac{1+\frac{\lambda}{2}}{\lambda+1} & -\frac{1}{2(\lambda+1)}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{8-3\lambda}{(\lambda+2)(10-\lambda)-10(\lambda+1)}\end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \chi_1(\lambda)\\ 0 & 1 & 0 & \chi_2(\lambda)\\ 0 & 0 & 1 & \chi_3(\lambda)\end{bmatrix}$$

χ_i sind rationale Funktionen in λ über $\mathbb{R}$ mit $\chi_i(\lambda)=\frac{\mu_i(\lambda)}{\nu_i(\lambda)}$. Sei $\mathcal{N}_i=\{\lambda\in\mathbb{R}\colon \nu_i(\lambda)=0\}$, dann ist $\mathrm{rg}(\mathrm{A})=3$ für $\lambda\in\mathbb{R}\setminus(\mathcal{N}_1\cup\mathcal{N}_2\cup\mathcal{N}_3)$. Andernfalls ist $\mathbf{s}_4(\mathrm{A})$ nicht definiert und wir können keine Aussage treffen.

Aufgabe 3. *Gegeben ist die folgende Matrix* A*:*

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12\\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1\\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

a Bringe A *in möglichst wenigen Schritten auf die Form* $\mathrm{I}_{4,5}^{(r)}$ *und bestimme Matrizen* P *und* Q*, sodass* $\mathrm{PAQ}=\mathrm{I}_{3,4}^{(r)}$

b Bestimme jeweils eine Basis für Spalten- und Zeilenraum

Zu a:

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12\\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1\\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot\mathbf{z}_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12\\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1\\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{s}_3-\frac{1}{3}\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_4+\frac{1}{3}\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_5-\frac{4}{3}\mathbf{s}_1]{\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_3+\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_4-4\mathbf{z}_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & \frac{20}{3} & \frac{28}{3} & \frac{32}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot\mathbf{z}_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & -1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathbf{s}_3+\frac{5}{3}\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_4+\frac{7}{3}\mathbf{s}_2,\mathbf{s}_5+\frac{8}{3}\mathbf{s}_2]{\mathbf{z}_3-\mathbf{z}_2,\mathbf{z}_4+\mathbf{z}_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot\mathbf{z}_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{s}_4-2\mathbf{s}_3,\mathbf{s}_5-\mathbf{s}_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\mathrm{I}_{4,5}^{(3)}$$

Es gilt also $\mathrm{rg}(\mathrm{A})=3$. Wir suchen nun zwei Matrizen P und Q, sodass $\mathrm{PAQ}=\mathrm{I}_{3,4}^{(3)}$. Wir können P als Produkt aller Zeilenumformungen L_i und Q als Produkt aller Spaltenumformungen R_j darstellen:

$$\mathrm{L}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathrm{L}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\mathrm{L}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{L}_4 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \mathrm{L}_5 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \mathrm{R}_1 = \begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{4}{5}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}_2 = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&\frac{5}{3}&\frac{7}{3}&\frac{8}{3}\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix} \mathrm{R}_3 = \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&-2&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Somit können wir $\mathrm{I}_{4,5}^{(3)}$ durch ein Matrixprodukt aus A erzeugen:

$$\mathrm{L}_5\mathrm{L}_4\mathrm{L}_3\mathrm{L}_2\mathrm{L}_1\mathrm{A}\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3 = \mathrm{I}_{4,5}^{(3)}$$

Wir benötigen nur noch zwei Matrizen L_6 und R_4, sodass $\mathrm{L}_6\mathrm{I}_{4,5}^{(3)}\mathrm{R}_4 = \mathrm{I}_{3,4}^{(3)}$:

$$\mathrm{L}_6 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{R}_4 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Somit haben wir $\mathrm{P} = \prod_{k=0}^{5} \mathrm{L}_{6-k}$ und $\mathrm{Q} = \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3\mathrm{R}_4$ bestimmt, mit $\mathrm{PAQ} = \mathrm{I}_{3,4}^{(3)}$.
Zu b: Eine Basis für den Spaltenraum ist:

$$B_{\mathbf{s}} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$$

Und für den Zeilenraum:

$$B_{\mathbf{z}} = \left\{ \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&1&0&0\end{bmatrix} \right\}$$

Aufgabe 4. *Ein* Kettenkomplex C *ist eine Folge von linearen Abbildungen:*

$$0 = V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

Mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{im}(f_{k+1}) \subseteq \ker(f_k)$ *für alle* $0 \leq k \leq n-1$*, sprich* $f_k \circ f_{k+1} = 0$*. Der Quotientenraum* $H_k(C) = \ker(f_k)/\mathrm{im}(f_{k+1})$ *heißt k-te Homologie des Komplexes. Zu zeigen die folgende Formel für endlichdimensionale Kettenkomplexe gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \dim(V_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \dim(H_k(C))$$

Da $f_k \in \mathrm{Hom}(V_k, V_{k-1})$ ist $\tilde{f}_k\colon V_k/\ker(f_k) \to \mathrm{im}(f_k)$ mit $[\mathbf{v}] \mapsto f(\mathbf{v})$ ein Isomorphismus, womit $V_k/\ker(f_k) \simeq \mathrm{im}(f_k)$ (siehe Homomorphiesatz). Damit gilt aber $\dim(\mathrm{im}(f_k)) = \dim(V_k) - \dim(\ker(f_k))$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \dim(V_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \dim(H_k(C)) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \big(\dim(V_k) - \dim(\ker(f_k)) + \mathrm{rg}(f_{k+1})\big) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\big(\dim(V_k)-\dim(\ker(f_k))+\operatorname{rg}(f_{k+1})\big)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\big(\operatorname{rg}(f_k)+\operatorname{rg}(f_{k+1})\big)$$
$$=\operatorname{rg}(f_0)+\operatorname{rg}(f_1)-\operatorname{rg}(f_1)-\operatorname{rg}(f_2)+\cdots+(-1)^{n-2}\operatorname{rg}(f_{n-1})+(-1)^{n-1}\operatorname{rg}(f_{n-1})+(-1)^{n-1}\operatorname{rg}(f_n)$$
$$=\operatorname{rg}(f_0)+(-1)^{n-1}\operatorname{rg}(f_n)$$

Da $\operatorname{im}(f_0)=0$ ist $\operatorname{rg}(f_0)=0$. Es verbleibt also $\operatorname{rg}(f_n)$. Da $V_n=0$ gilt $\forall\mathbf{v}\in V_n\colon f_n(\mathbf{v})=0\in\ker(f_{n-1})$. Da aber $\dim(0)=0$ muss auch $\operatorname{rg}(f_n)=0$ gelten. Somit gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\big(\operatorname{rg}(f_k)+\operatorname{rg}(f_{k+1})\big)=0\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\dim(V_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\dim(H_k(C))$$

Aufgabe 5. *Gegeben ist die folgende Matrix* A*:*

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2&1&4&1\\2&1&3&2\\4&3&9&3\\6&1&0&4\end{bmatrix}$$

Gesucht ist die LR *Zerlegung von* A*, sodass* A = PLR*. Damit soll dann das Gleichungssystem* $\mathrm{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ *gelöst werden, wobei:*

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}3\\0\\4\\-3\end{bmatrix}$$

Für die LR-Zerlegung von A bringen wir A in Dreiecksform und halten die Änderungen als Produkt von elementaren Zeilenumformungen fest:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&4&1&1&0&0&0\\2&1&3&2&0&1&0&0\\4&3&9&3&0&0&1&0\\6&1&0&4&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{II-I,III-2I,IV-3I}\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&4&1&1&0&0&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&1&-2&0&1&0\\0&-2&-12&1&-3&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\mathrm{L}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-2&0&1&0\\-3&0&0&1\end{bmatrix},\mathrm{P}_1=\mathrm{I}_4$$

$$\xrightarrow{II\leftrightarrow III}\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&4&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&-2&-12&1&-3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{IV+2II}\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&4&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&0&-10&3&-7&0&2&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\mathrm{L}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix},\mathrm{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-10III}\left[\begin{array}{cccc|cccc}2&1&4&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&-2&0&1&0\\0&0&-1&1&-1&1&0&0\\0&0&0&-7&3&-10&2&1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\mathrm{L}_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-10&1\end{bmatrix},\mathrm{P}_3=\mathrm{I}_4,\mathrm{R}=\begin{bmatrix}2&1&4&1\\0&1&1&1\\0&0&-1&1\\0&0&0&-7\end{bmatrix}$$

Wir haben also die Form $\mathrm{L}_3\mathrm{P}_3\mathrm{L}_2\mathrm{P}_2\mathrm{L}_1\mathrm{P}_1\mathrm{A}=\mathrm{R}$, wobei $\mathrm{L}_3\mathrm{P}_3=\mathrm{L}_3$ und $\mathrm{L}_1\mathrm{P}_1=\mathrm{L}_1$, sprich:

$$\mathrm{L}_3\mathrm{L}_2\mathrm{P}_2\mathrm{L}_1\mathrm{A}=\mathrm{R}$$

Wir bringen P_2L_1 noch auf die richtige Form sodass $L_1'P = PL_1$:

$$L_1' = PL_1P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} &L_3L_2L_1'PA = R \Leftrightarrow PA = L_1'^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}R \\ &L = L_1'^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} \end{aligned}$$

Damit können wir das gegebene Gleichungssystem lösen:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{u} \Leftrightarrow P^{-1}LR\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = R^{-1}L^{-1}P\mathbf{b}$$

Wir brauchen dazu nur noch R^{-1}:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{7}\cdot IV, -1\cdot III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\overset{III+IV, II-IV, I-IV}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \overset{II-III, I-4III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\overset{I-II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}\cdot I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Da $L = L_1'^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1}$ ist $L^{-1} = L_3L_2L_1'$:

$$L_3L_2L_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 9/14 & -1/14 & -9/14 & 3/14 \\ -15/7 & 11/7 & -13/7 & 2/7 \\ 4/7 & -2/7 & 3/7 & -1/7 \\ -3/7 & -2/7 & 10/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R^{-1}L^{-1}P = \begin{bmatrix} 9/14 & -9/14 & -1/14 & 3/14 \\ -15/7 & -13/7 & 11/7 & 2/7 \\ 4/7 & 3/7 & -2/7 & -1/7 \\ -3/7 & 10/7 & -2/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$