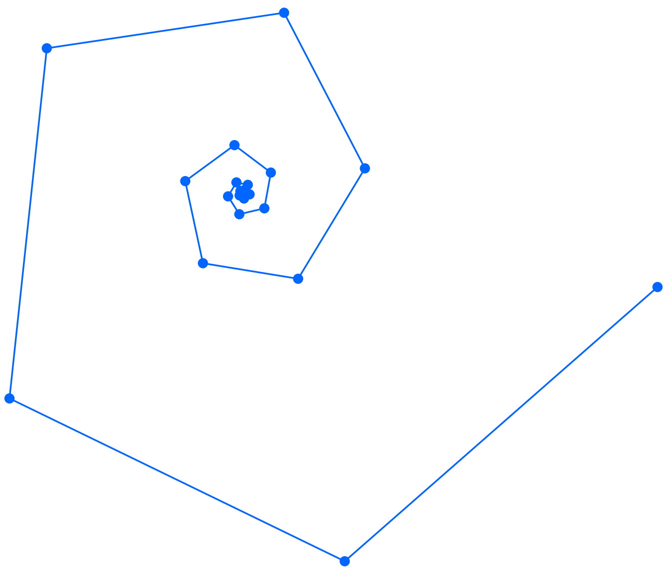
Analysis 1

[MAT.101UB]

gelesen von: Wolfgang Ring, Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn.
am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens Universität Graz

Verfasst von: Moritz Mossböck
11820925
moritz.mossboeck@gmail.com

Wintersemester 2021/22



NAWI Graz

Inhaltsverzeichnis

0 Ausblick

Bevor wir uns mit dem eigentlichen Stoff befassen, wollen wir einen kurzen Ausblick auf die Inhalte der Vorlesung wagen. Wir werden auf bereits aus der Schule bekannte Begriffe wie Zahlen, Funktionen und Differentialrechnung stoßen, aber auch viel Neues kennenlernen, wie etwa Abzählbarkeit oder Vollständigkeit. Besonders wird im Fokus stehen, Mathematik auf eine neue Art zu betreiben, nämlich durch Argumentationen und Beweise.

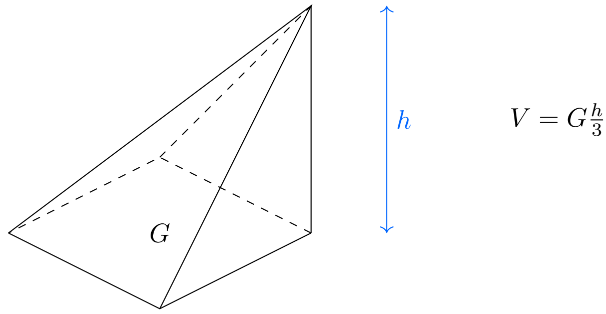


Abbildung 1: Volumen einer quadratischen Pyramide

Wir werden in der Vorlesung "relativ einfache"Resultate exemplarisch Herleiten. Seien etwa a, b reelle Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}\right)$$

Wir wollen diese Aussage beweisen. Dazu nutzen wir aus, dass $(a-b)$ ein gemeinsamer Faktor aller Summanden ist. Wir können also die Summe folgendermaßen umformen:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

Wir führen nun eine Indexverschiebung durch. Dazu führen wir einen neuen Index $j = k+1$ ein und ersetzen jedes k in den Summen durch ein entsprechendes j. Dabei ist zu beachten $k = 0 \Leftrightarrow j = 1$ bzw. $k = n-1 \Leftrightarrow j = n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

Zuletzt benennen wir unseren neuen Index j wieder in k um. Das hat den Vorteil, dass wir nun zwei Summen haben, die sich großteils aufheben:

$$\sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} = a^n - b^n \quad \square$$

Wir sehen, dass sich für $k \neq 0$ und $k \neq n$ die jeweiligen Summanden aufheben. Es verbleiben nur $a^n b^{n-n}$ von der ersten Summe und $a^0 b^{n-0}$ von der zweiten.

Ein großes Themengebiet in der Analysis ist die Bestimmung von Grenzwerten bzw. das Nachweisen derer Existenz. Wir wollen daher den folgenden Grenzwert für positive reelle Zahl x untersuchen:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1 \Leftrightarrow \lim n \to \infty(\sqrt[n]{x} - 1^n) = 0$$

Wir wählen nun $(x-1) = (a^n - b^n)$ mit $a^n = (\sqrt[n]{x})^n$ und $b^n = 1^n$. Über den binomischen Lehrsatz können wir nun $(a^n - b^n)$ folgendermaßen aufteilen:

$$(\sqrt[n]{x} - 1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k 1^{n-1-k}\right) = (\sqrt[n]{x} - 1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{x} - 1 = \frac{x-1}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k}$$

Wir wissen, dass $0 < \sqrt[n]{x} - 1$ für $x > 1$. Daraus können wir $\sqrt[n]{x} > 1$ folgern, womit auch $(\sqrt[n]{x})^k > 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k > \sum_{k=0}^{n-1} = n$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k} < \frac{1}{n}$$

Wir können also zuletzt die folgende Ungleichung aufstellen:

$$0 < \sqrt[n]{x} - 1 = \frac{x-1}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^k} < \frac{x-1}{n}$$

Wenn nun n immer größer wird, so wird $\frac{x-1}{n}$ immer kleiner, bis es beim Grenzübergang gegen den Wert 0 konvergiert. Da also $0 < \sqrt[n]{x} - 1 < 0$ kann $\sqrt[n]{x} - 1$ beim Grenzübergang ebenfalls nur 0 sein, womit $\lim n \to \infty \sqrt[n]{x} = 1$ bewiesen ist.

Typische Themen, die wir behandeln werden sind also Konvergenz, unendliche Prozesse, das Arbeiten mit Ungleichungen (Abschätzungen), Notation und Definitionen. Zur Notation wollen wir kurz die Verwendung von Indices betrachten. Wenn wir Variablen oder unbestimmte Größen nummerieren wollen, um eindeutig zu verweisen verwenden wir einen Index. Dieser steht im Subskript einer Variablen und ist typischerweise eine natürliche Zahl, wie z.B.:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bei einer indizierten Größe x_i nennen wir i den Index und die möglichen Werte von i den Indexbereich. Bei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ ist der Indexbereich $1, 2, 3$. Der Indexbereich kann endlich sein. Betrachten wir etwa alle k-ten Wurzeln einer positiven reellen Zahl x bis zu einem $n \in \mathbb{N}$ indizieren, so schreiben wir:

$$\sqrt[k]{x}, k = 1, 2, \dots, n$$

Wir können für endliche Indexbereiche eine Indexmenge $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ festlegen. Allerdings kann der Indexbereich auch unendlich sein. In diesem Fall schreiben wir oft $I = \mathbb{N}$.

Wir haben bereits das Summenzeichen $\sum$ verwendet. Das grundlegende Symbol ist ein großes Sigma[1]. Wir können $\sum$ verwenden um eine große Summe kompakt anzuschreiben, indem wir einen Indexbereich festlegen und über einen Laufindex $i \in I$ jene Objekte a_i indizieren, welche summiert werden sollen:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Dabei können wir natürlich auch mit den Index rechnen. Wollen wir etwa die ersten zwölf Objekte mit einem geraden Index i summieren, so können wir schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}$$

Ein wichtiges Werkzeug, wenn man mit Indizes arbeitet sind Indexverschiebungen. Sei k ein Index. Wir können k um ein $c \in \mathbb{N}$ verschieben:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=c+1}^{n+c} a_{j-c}$$

[1] der griechische Buchstabe SS"

1 Logik und Mengenlehre

1.1 Logik

Die Gebiete der Logik und Mengenlehre werden als Grundbausteine der modernen Mathematik beschrieben. Wir werden in dieser Lehrveranstaltung die Methoden der reellen Analysis herleiten und beweisen. Dazu müssen wir jedoch eine gutes Fundament schaffen und beginnen daher quasi am Anfang der modernen Mathematik, der logischen Aussage:

Definition 1.1: Aussagen

Eine Aussage $\mathcal{A}$ ist eine binäre Entscheidungsfrage.

Analysieren wir die obige Definition etwas. Solche Grundlegenden Dinge wie Aussagen sind schwer konkret zu formulieren, ohne sich auf gewisse sprachliche Eigenheiten zu einigen. Wir müssen also zuerst dafür sorgen, dass wir immer wissen, was eine Aussage sein kann. Wie oben geschrieben, bezeichnen wir eine Aussage als binäre Entscheidungsfrage. Wir stellen aber insofern keine Frage, sondern stellen eine Behauptung durch eine Aussage auf, und entscheiden, ob diese stimmt oder nicht. Stimmt die Aussage, also ist im gegebenen Kontext der Aussage schlüssig und wirft keine Widersprüche auf, so sagen wir, dass sie wahr ist. Für wahr schreiben wir oft w. Stimmt die Aussage nicht, so bezeichnen wir sie als falsch, f.

Eine Aussage $\mathcal{A}$ ist also eine Behauptung bzw. Frage die mit wahr oder falsch beantwortet werden kann. Die Bezeichnung als binäre Entscheidungsfrage stammt daher, dass wir nur zwischen den zwei Zuständen wahr und falsch unterscheiden. Kann eine Behauptung bzw. Frage nicht binär entschieden werden, so handelt es sich nicht um eine Aussage.

Beispiel 1. *$\mathcal{A}$: Graz ist die Hauptstadt von Österreich*

$\mathcal{B}$: Wien ist die Hauptstadt von Österreich

$\mathcal{C}$: 5 ist größer als 4 und 4 ist kleiner als 6

Wir sehen hier an Beispiel 1 schon, dass Aussagen sehr vielfältig formuliert werden können. Wir können wie bei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ deutsche Sätze aufstellen, die eine Behauptung bzw. Tatsache darlegen. Oder wie in $\mathcal{C}$ den Vergleich dreier abstrakter Konstrukte, nämlich Zahlen, aufstellen. Wer in Geographie gut aufgepasst hat, weis das $\mathcal{A}$ falsch ist. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ hingegen sind wahr.

Es ist zwar schön und gut, wenn wir uns beliebige Aussagen aufstellen können, allerdings wollen wir in der Mathematik oftmals nicht über ein bestimmtes Objekt eine Aussage aufstellen, sondern eine Art variable Aussage verwenden:

Definition 1.2: Aussageform

Sei x ein beliebiges Objekt. Wir nennen $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform, wenn $\mathcal{A}$ mit einem konkreten Objekt x eine Aussage ist.

Wir können Aussageformen mit einfachen Funktionen aus der Schulmathematik vergleichen, da wir $\mathcal{A}$ entweder als variablen Ausdruck $\mathcal{A}(x)$ anschreiben können, oder aber als expliziten Ausdruck von etwa $\mathcal{A}(42)$. Aussageformen werden oftmals auch als Prädikate bezeichnet. Prädikate werden insbesondere verwendet, um Mengen aus Grundmengen zu erzeugen, wobei die Elemente der neuen Menge eine bestimmte Eigenschaft haben sollen.

Wir können nun mit dem Konzept der Aussageform den Begriff der Wahrheitstabelle einführen. Eine solche Tabelle erlaubt es uns, eine Aussageform $\mathcal{A}(x)$ eindeutig durch Vorgabe von Objekten x und Wahrheitswerten $\mathcal{A}(x)$ zu definieren:

Beispiel 2. *Sei $\mathcal{A}(x)$: x ist eine Zahl, eine Aussageform, so ist die folgende Tabelle eine mögliche Wahrheitstabelle für $\mathcal{A}(x)$:*

x	$\mathcal{A}(x)$
4	w
y	f
Regen	f
Nichts	f

1.1.1 Verknüpfungen von Aussagen

Um nun die Syntax unserer Sprache zu erweitern, wollen wir uns anschauen, wie wir bestehende Aussagen miteinander verknüpfen können. Das geschieht im Allgemeinen durch sogenannten Junktoren. Ein Junktor $\mathcal{J}_1$ erster Klasse ist eine Aussageform $\mathcal{J}_1(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ wiederum eine Aussage ist. Da eine beliebige Aussage $\mathcal{A}$ nur die beiden Zustände w oder f annehmen kann, kann auch $\mathcal{J}_1(\mathcal{A})$ nur diesen beiden Zustände annehmen.

Definition 1.3: Negation

Sei $\mathcal{A}$ eine Aussage, so nennen wir den Junktor $\neg(\mathcal{A})$, auch geschrieben $\neg\mathcal{A}$, die Negation von $\mathcal{A}$ und sagen "nicht $\mathcal{A}$" oder "non $\mathcal{A}$". Die Negation einer Aussage nimmt genau den zu ihr komplementären Wahrheitswert an:

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
f	w
w	f

Tabelle 1: Wahrheitstabelle der Negation einer Aussage $\mathcal{A}$

Ein weiterer Junktor erster Klasse ist der Identitätsjunktor $\mathrm{id}(\mathcal{A})$. Dieser ist wahr, wenn $\mathcal{A}$ wahr ist, und falsch wenn $\mathcal{A}$ falsch ist. Wir schreiben daher allgemein $\mathrm{id}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Eine interessante Beobachtung ist, dass $\neg(\neg(\mathcal{A})) = \mathrm{id}(\mathcal{A})$. Wir können das auch verallgemeinern, indem wir $\mathcal{J}_1^n$ als n-fache Anwendung des Junktors $\mathcal{J}_1$ erster Klasse bezeichnen. So ist $\neg^n(\mathcal{A}) = \neg\mathcal{A}$, wenn n ungerade ist, und $\neg^n(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, wenn n gerade ist.

Neben dem Identitätsjunktor und der Negation gibt es noch zwei Konstanten, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}$. Diese sind vom Wahrheitswert von $\mathcal{A}$ unabhängig:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{F}$
f	w	f
w	w	f

Tabelle 2: Wahrheitstabelle für $\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}$

Wir haben also alle möglichen Junktoren erster Klasse erörtert und wollen uns nun einigen besonderen Junktoren zweiter Klasse widmen. Im allgemeinen können wir solche Junktoren auch als binäre Operatoren bezeichnen, da wir je auf zwei Operanden[2] eine Operation $\mathcal{J}_2$ anwenden.

[2] in diesem Fall Aussagen

Definition 1.4: Wichtige Junktoren zweiter Klasse

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Wir nennen $\wedge(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Konjunktion, $\vee(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Disjunktion, $\rightarrow(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Subjunktion und $\leftrightarrow(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ die Bijunktion von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$
f	f	f	f	w	w
f	w	f	w	w	f
w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w

Tabelle 3: Wahrheitstabelle der Konjunktion, Disjunktion, Subjunktion und Konjunktion

Mit diesen vier Junktoren und der Negation können wir bereits jeglichen logischen Junktor beliebiger Klasse darstellen. Tatsächlich reicht es aus, wenn wir uns auf $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ beschränken. Wir wollen uns nun kurz mit der Vollständigkeit dieser Junktoren beschäftigen. Wir unterscheiden im Allgemeinen zwischen zwei Normalformen von logischen Ausdrücken: der konjunktiven und der disjunktiven Normalform. Die konjunktive Normalform (kurz KNF) wird durch ein verallgemeinertes $\wedge$ gebildet, welches n Aussagen verknüpft.

Beispiel 3. *Ein Ausdruck in konjunktiver Normalform:*

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{C}) \wedge (\neg\mathcal{D} \vee \mathcal{E})$$

Aus der Wahrheitstabelle der Disjunktion $\vee$ geht hervor, dass es sich bei $\vee$ um ein inklusives Oder handelt, da $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wahr ist. Das exklusive Oder (im englischen oft XOR abgekürzt) hat kein standardisiertes Symbol, da man ein exklusives Oder oftmals eleganter mit den gegebenen Junktoren anschreiben kann. Will man explizit ein exklusives Oder anschreiben, so verwenden wir in diesem Dokument $\dot{\vee}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \dot{\vee} \mathcal{B}$	$(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\neg(\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B})$
f	f	f	f	f
f	w	w	w	w
w	f	w	w	w
w	w	f	f	f

Tabelle 4: Wahrheitstabelle des exklusiven Oders inklusive Darstellung in konjunktiver Normalform

1.1.2 Tautologien, Implikationen und Äquivalenzen

In einigen Texten werden die Subjunktion bzw. die Bijunktion respektive mit $\Rightarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$ eingeführt. Das ist formal nicht ganz korrekt, da es sich bei der Implikation $\Rightarrow$ um eine Aussage handelt. Die Subjunktion ist hingegen ein Junktor zweiter Klasse. Analog verhält es sich bei der Äquivalenz $\Leftrightarrow$. Diese beschreibt eine Aussage, wohingegen die Bijunktion ein Junktor ist.

Definition 1.5: Tautologie

Sei $\mathcal{A}(x)$ eine Aussageform. Wir nennen $\mathcal{A}(x)$ eine Tautologie $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, wenn $\mathcal{A}(x)$ immer wahr ist.

Diese Definition ist ohne die Sprache der Quantoren und Mengenlehre nicht ganz schön, da wir nicht ganz festlegen können, was *immer wahr* in diesem Fall bedeutet. Wir begnügen uns damit, dass $\mathcal{A}$ genau dann eine Tautologie ist, wenn für jedes beliebige x, dass wir uns denken können, $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.

Definition 1.6: Äquivalenz von Aussagen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Wir sagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind äquivalent, in Symbolen $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ eine Tautologie ist.

Definition 1.7: Implikation

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Wir sagen $\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$, in Symbolen $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ eine Tautologie ist.

Wie bereits erwähnt sind Implikationen und Äquivalenzen Tautologien, sprich sie sind von den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen unabhängig. Somit sind es keine Aussageformen mehr, sondern Aussagen, da sie einen festen Wahrheitswert besitzen.

Satz 1.1: Verneinung von Verknüpfungen

Seien A und B Aussagen, so gilt:
1. $\neg(A \lor B) \Leftrightarrow \neg A \land \neg B$, erstes de'Morgansche Gesetz
2. $\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$, zweites de'Morgansche Gesetz
3. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \land \neg B$

Beweis. Für 1. führen wir den Beweis über eine Wahrheitstabelle:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \lor B)$	$\neg A \land \neg B$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f
w	w	f	f	f	f

Für 2. verwenden wir 1.:

$$\neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg A) \land \neg(\neg B)) \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg A \lor \neg B)) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$$

3. folgt aus $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \lor B)$ und 1. □

Seien A und B Aussagen, so gilt $((A \Rightarrow B) \land (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A$. Der Spezialfall $A = B$ führ auf den Beweis durch Widerspruch: $((A \Rightarrow A) \land (A \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg A$. Da $A \Rightarrow A$ eine Tautologie ist, können wir die Aussage auf $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ verkürzen.

1.1.3 Quantoren

Nachdem wir nun wissen, wie wir aus bestehenden Aussagen Komposita erzeugen können, wollen wir uns mit quantifizierten Aussagen beschäftigen, die etwas über die Elemente von Mengen[3] aussagen. Quantoren erlauben es uns, Aussagen auf gewissen Basismengen zuzuschneiden um wichtige Sätze und Definitionen zu formulieren. Eine wichtige Definition in diesem Skript wird etwa die Existenz eines Grenzwertes einer (Cauchy) Folge sein.

[3] hier setzen wir voraus, dass aus der Schule bereits ein einfacher Mengenbegriff bekannt ist

Definition 1.8: Allquantor

Sei M eine Menge, $x \in M$ und $P(x)$ ein Prädikat. Die Aussage: *Für alle* $x \in M$ *gilt* $P(x)$ besitzt einen eindeutigen Wahrheitsgehalt. Sie ist wahr, wenn $P(x)$ für alle $x \in M$ zutrifft, ansonsten ist sie falsch. Wir schreiben:

$$\forall x \in M \colon P(x)$$

Wir können diese Aussage auch über eine Konjunktion definieren:

$$\forall x \in M \colon P(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in M} P(x)$$

Wir bezeichnen $\forall$ als Allquantor und $\forall x \in M \colon P(x)$ eine quantifizierte Aussage.

Definition 1.9: Existenzquantor

Sei M eine Menge, $x \in M$ und $P(x)$ ein Prädikat auf M. Die Aussage: *Es existiert ein* $x \in M$*, sodass* $P(x)$ *gilt* besitzt einen eindeutigen Wahrheitsgehalt. Sie ist wahr, wenn es zumindest ein $x \in M$, sodass $P(x)$ gilt, ansonsten ist sie falsch. Wir schreiben:

$$\exists x \in M \colon P(x)$$

Wir können diese Aussage auch über eine Disjunktion definieren:

$$\exists x \in M \colon P(x) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in M} P(x)$$

Wir bezeichnen $\exists$ als Existenzquantor.

Mit Satz 1.1 wissen wir, wie wir quantifizierte Aussagen verneinen können:

$$\neg(\forall x \in M \colon P(x)) \Leftrightarrow \neg\left(\bigwedge_{x \in M} P(x)\right) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in M} \neg P(x) \Leftrightarrow \exists x \in M \colon \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x \in M \colon P(x)) \Leftrightarrow \neg\left(\bigvee_{x \in M} P(x)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{x \in M} \neg P(x) \Leftrightarrow \forall x \in M \colon \neg P(x)$$

1.1.4 Komposita aus Quantoren

Satz 1.2: Rechenregeln der Junktoren

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen, so gelten die folgenden Rechenregeln:

Konjunktion	Disjunktion
Kommutativität	
$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$
Assoziativität	
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$
Distributivgesetze	
$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$

Beweis. Seien $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen. □

Wir wissen nun, wie Quantoren definiert sind. Wir wollen uns daher mit verschiedenen Verknüpfungen von

Quantoren beschäftigen. Sei $\mathcal{P}(x, y)$ ein Prädikat und x, y aus einer Menge M. Die folgende Aussage gilt:

$$\forall x \in M : \forall y \in M : \mathcal{P}(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in M : \forall x \in M : \mathcal{P}(x, y)$$

Die Äquivalenz folgt aus der Kommutativität der Konjunktion. Analog können wir bei einer Existenzaussage die Kommutativität der Disjunktion ausnützen:

$$\exists x \in M : \exists y \in M : \mathcal{P}(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in M : \exists x \in M : \mathcal{P}(x, y)$$

Sofern wir also Quantoren gleichen Typs behandeln, können wir sie vertauschen. Allerdings sind viele Sätze so formuliert, dass die Reihenfolge der Quantoren die Aussage indirekt erweitern oder verständlicher angeben.

Aufgrund der Distributivgesetze dürfen wir jedoch Existenzquantoren nicht mit Allquantoren vertauschen, da die resultierenden Aussagen nicht mehr ident sind.

1.2 Mengen

Definition 1.10: Mengendefinition nach CANTOR

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte, welche in der Zusammenfassung liegen werden Elemente von M genannt.

Die Mengenlehre ist seit ca. 120 Jahren die grundlegende Sprache in welcher mathematische Zusammenhänge formuliert werden. Mit dieser naiven Mengenlehre gibt es jedoch Probleme, die nicht so einfach behoben werden können. Ein solches Problem ist die Russelsche Antimonie. Dieser Widerspruch befasst sich mit der Menge aller Mengen $\mathcal{M}$ für deren Elemente gilt, dass sie sich nicht selbst enthalten. Ist $\mathcal{M}$ in sich selbst enthalten? Wenn dem so ist, so sollte sie nicht in sich selbst enthalten sein. Wenn sie jedoch nicht in sich selbst enthalten ist, so sollte sie in sich selbst enthalten sein. Das ist ein Widerspruch. Um solche Widersprüche zu vermeiden benötigen wir ein Axiomensystem in dem solche Mengen nicht existieren. Heutzutage verwendet man das Axiomensystem von Zermelo und Fränkel.

Sei M eine Menge und x ein Objekt. Die Relation $x \in M$ ist eine Aussage, da x entweder nur in M enthalten sein kann, oder nicht.

Je nach Fall kann es leichter sein, die Gleichheit zweier Mengen A und B über $A \subseteq B \land B \subseteq A$ zu zeigen, als direkt $A = B$ nachzuweisen. Bei der Gleichheit von Mengen ist zu beachten, dass die Reihenfolge der Elemente von A und B keine Rolle spielt:

$$\{2, 1, 7, 5, 3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Definition 1.11: Strikte (echte) Teilmenge

Seien A und B Mengen. Wir sagen A ist eine strikte (echte) Teilmenge von B, wenn zumindest ein $b \in B$ nicht in A enthalten ist. Wir schreiben $A \subset B$:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \land \exists b \in B : b \notin A)$$

Ein hilfreiches Konstrukt in der Mengenlehre ist die leere Menge $\emptyset$. Hierbei handelt es sich um jene Menge, die kein Element enthält. Das ist jedoch mit der Mengendefinition nach Cantor nicht möglich, da eine Menge durch ihre Elemente klassifiziert wird. Wenn die leere Menge also keine Elemente besitzt, so kann es sich nicht um eine Menge handeln. Um jedoch mit der leeren Menge arbeiten zu können, wird sie axiomatisch eingeführt.

Definition 1.12: Leere Menge

Es gibt eine Menge $\emptyset$ mit der Eigenschaft, dass sie keine Elemente hat:

$$\forall x : x \notin \emptyset$$

Satz 1.3: Eindeutigkeit der leeren Menge

Sei $\emptyset$ die leere Menge, so ist $\emptyset$ eindeutig.

Beweis. Seien $\emptyset, \emptyset'$ leere Mengen, so gilt:

$$\begin{aligned}
&x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset' \Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset' \\
&x \in \emptyset' \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow \emptyset' \subseteq \emptyset \\
&\Rightarrow \emptyset = \emptyset'
\end{aligned}$$

□

Es sei angemerkt, dass die leere Menge Teilmenge jeder Menge M ist.

1.2.1 Mengenoperationen

Nachdem wir nun einige Grundlegende Begriffe erörtert haben, wollen wir uns Mengenoperationen widmen. Diese stellen eine Art Analogon zu den logischen Verknüpfungen dar und bauen auf diesen auf. Operationen wie der Durchschnitt werden oft gebraucht um komplexere Mengen zu beschreiben, bei denen eine explizite Anschrift eventuell nicht sauber möglich ist[4].

Definition 1.13: Durchschnitt und Vereinigung von Mengen

Seien A und B Mengen. Wir nennen den Durchschnitt $A \cap B$ jene Menge an Elementen, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$A \cap B := \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$$

Weiters ist die Vereinigung $A \cup B$ jene Menge an Elementen, die in A oder in B liegen:

$$A \cup B := \{x \colon x \in A \vee x \in B\}$$

Die Operationen $\cap$ und $\cup$ sind kommutativ, sprich $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$. Das liegt insofern daran, dass $\vee$ bzw. $\vee$ kommutativ sind. Eine offensichtliche Eigenschaft des Durchschnitts ist, dass $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$.

Es kann natürlich auch vorkommen, dass A und B kein gemeinsames Element haben, wie etwa $\{1, 2\}$ und $\{3, 4\}$. In diesem Fall nennen wir A und B disjunkt.

Definition 1.14: Disjunkte Mengen

Seien A und B Mengen. Wir sagen A und B sind disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$.

Lemma 1.1: Distributivgesetze der Mengenlehre

Seien A, B, C Mengen, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{aligned}$$

Beweis. Wir beginnen mit $(A \cup B) \cap C$:

$$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Für $(A \cap B) \cup C$ gehen wir analog vor:

$$x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

[4] siehe Intervallschachtelungen bzw. deren Durchschnitt

□

Das Arbeiten mit Mengen und den Operatoren $\cup$ und $\cap$ wird manchmal als als Mengenalgebra bezeichnet.

Definition 1.15: Mengendifferenz

Seien A und B Mengen. Wir nennen die Differenz $A \setminus B$ jene Menge an x, die in A enthalten sind, aber nicht in B:

$$A \setminus B := \{x \colon x \in A \wedge x \notin B\}$$

Falls $B \subseteq A$ bezeichnen wir $A \setminus B$ als das Komplement von B mit B^c oder $C_A B$.

Eine einfache Folgerung mit der Mengendifferenz ist $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, da in $A \setminus B$ keine Elemente von B mehr enthalten sind. Mit der Mengendifferenz legt man sich oft auch noch eine weitere Operation fest, die symmetrische Differenz $A \triangle B$. Diese wird durch $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ festgelegt.

Lemma 1.2: de Morgansche Regeln der Mengenlehre

Seien A und B Teilmengen einer Grundmenge X, dann gilt.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Beweis. Wir beginnen mit $(A \cup B)^c$:

$$x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c)$$

Für $(A \cap B)^c$ gehen wir analog vor:

$$x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c)$$

□

1.2.2 Prädikate und Mengendefinitionen

Wir haben bereits zwei Arten gesehen, wie wir Mengen definieren können. Einerseits können wir alle Elemente auflisten, wie z.B.:

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right\}$$

Diesen Ansatz kann man auch für unendliche Mengen fortsetzen:

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right\}$$

Allerdings ist die Darstellung auf zweierlei problematisch. Einerseits gibt es Mengen, deren Elemente man nicht auflisten kann, wie z.B. die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Andererseits können wir unter anderem nicht jedes Muster korrekt fortsetzen:

$$B = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 64, \dots\}$$

Wie würde man die obige Menge B fortsetzen? Um solchen Problemen aus dem Weg zu gehen verwendet man die zweite Möglichkeit, Mengen anzuschreiben, indem man eine Grundmenge U festlegt, aus der die Elemente stammen, und ein Prädikat vorgibt, welches diese Elemente erfüllen müssen. Die Menge ist dann gegeben durch alle Elemente aus U, welche das Prädikat erfüllen. Sei $P(x)$ ein Prädikat von U:

$$A = \{x \in U : P(x)\}$$

Das hat einerseits die Folge, dass $A \subseteq U$ und $\forall x \in A : P(x)$ eine wahre Aussage ist.

Seien A und B Mengen der Form $A = \{x \in U : P(x)\}$ und $B = \{x \in U : Q(x)\}$, dann gelten die folgenden Operationen

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in U : P(x) \lor Q(x)\} \\
A \cap B &= \{x \in U : P(x) \land Q(x)\} \\
A^c &= \{x \in : \neg P(x)\} \\
\setminus B &= \{x \in U : P(x) \land \neg Q(x)\}
\end{aligned}$$

1.2.3 Konstruktion von Mengen aus gegebenen Mengen

Definition 1.16: Mächtigkeit von endlichen Mengen

Sei $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ eine endliche Menge, wobei für alle m_i, m_j gilt: $m_i = m_j \Rightarrow i = j$, sprich kein Element kommt doppelt vor. Wir sagen, dass m_k paarweise verschieden sind. Wir nennen die Anzahl n der paarweise verschiedenen Elemente die Mächtigkeit (auch Kardinalität) der Menge M.

Die Mächtigkeit einer Menge M wird oftmals mit $\#M$ oder $|M|$ bezeichnet. Dabei definiert man $\#M$ auch für unendliche Mengen.

Definition 1.17: Potenzmenge

Sei M eine Menge. Dann nennen wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{A : A \subseteq M\}$$

Insbesondere $M \in \mathcal{P}(M)$ und $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. Manchmal schreibt man auch 2^M für die Potenzmenge.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Nach CANTOR gilt für jede Menge M: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$, da $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Definition 1.18: kartesisches Produkt

Seien $M_1, M_2, \dots, M_n$ Mengen. Wir definieren das kartesische Produkt $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ folgendermaßen:

$$\bigtimes_{k=1}^{n} M_k = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(m_1, m_2, \dots, m_n), m_k \in M_k, k \in \{1, \dots, n\}\}$$

Dabei ist $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ ein n-Tupel von Elementen der Mengen M_k. Für $M_1 = M_2 = \dots = M_n$ schreiben wir M^n. Damit ermöglichen wir auch M^0, was wir als $M^0 = \emptyset$ festlegen.

Es sei angemerkt, dass zwei Tupel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ aus $\bigtimes_{k=1}^{n} M_k$ genau dann gleich sind, wenn $\forall k \in 1, \dots, n : a_k = b_k$. Zum Beispiel:

$$(2,3) \neq (3,2) \qquad (1,2) \neq (1,3) \neq (1,1)$$

Bei Tupeln spielen also sowohl die Reihenfolge als euch die Anzahl der Elemente eine Rolle.

Lemma 1.3: Mächtigkeit eines kartesischen Produktes

Seien A und B endliche Mengen mit $|A| = n$ und $|B| = m$. Dann gilt $|A \times B| = nm$

Beweis. Seien $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ Mengen, wobei a_k paarweise verschieden und b_j verschieden. Das kartesische Produkt kann durch die folgende Tabelle dargestellt werden:

	b_1	b_2	$\cdots$	b_{m-1}	b_m
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\cdots$	(a_1, b_{m-1})	(a_1, b_m)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\cdots$	(a_2, b_{m-1})	(a_2, b_m)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	$\cdots$	(a_3, b_{m-1})	(a_3, b_m)
$\vdots$			$\vdots$		
a_n	(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	$\cdots$	(a_n, b_{m-1})	(a_n, b_m)

Da wir jede Kombination der a_k und b_j auflisten, ist jedes Elemente von $A \times B$ in der Tabelle oben enthalten. Dabei ist jede Kombination oben eindeutig, aufgrund der vorherigen Überlegungen zur Gleichheit von Tupeln. □

1.2.4 Spezielle Teilmengen von $A \times A$

Definition 1.19: Relationen

Sei M eine nicht-leere Menge. Wir nennen eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige (binäre Relation) auf M. Sei $(x, y) \in R$, so schreiben wir xRy und sagen x steht in Relation zu y.

Beispiele: Sei $M = \mathbb{R}$. $R_\leq \subseteq \mathbb{R}^2$ und $(x, y) \in R_\leq$, falls $x \leq y$ erfüllt ist.

$M = \mathbb{N}$ und $(m, n) \in R_|$ falls m ein Teiler von n ist, also $m|n$:

$$m|n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\colon n = km$$

Definition 1.20: Symmetrie von Relationen

Sei M eine nicht-leere Menge und R eine Relation auf M. Wir sagen R ist symmetrisch wenn $\forall x, y \in M\colon (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$.

Ein besonders einfaches Beispiel ist $=$ auf M. Wenn $x = y$ dann muss natürlich auch $y = x$ gelten.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Sei $z \in \mathbb{Z}$, so ist z durch k teilbar, wenn $\exists l \in \mathbb{Z}\colon lk = z$. Wir sagen z steht in Relation $R_{\equiv_k}$ zu w, falls $z - w$ durch k teilbar ist, d.h. $\exists l \in \mathbb{Z}\colon z - w = lk$. Ist diese Relation symmetrisch? Sei $zR_{\equiv_k}w$ dann gilt $w - z = -lk = (-l)k$ also teilt k auch $w - z$ somit gilt $wR_{\equiv_k}z$, womit $R_{\equiv_k}$ symmetrisch ist. Üblicherweise schreiben wir $z \equiv w \mod k$, sprich z ist kongruent zu w modulo k.

Beispiel: Sei $M = \mathbb{R}$ und wir betrachten $\leq$. Diese ist allgemein nicht symmetrisch. Für $x = y$ gilt aber $y \leq x \wedge x \leq y$.

Definition 1.21: Antisymmetrie von Relationen

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Wir sagen R ist antisymmetrisch, falls:

$$\forall x, y \in M\colon ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y$$

Klassische Beispiele für antisymmetrische Relationen sind $\leq, <$ und $\geq, >$. Auch $\subseteq, \subset$ und $\supseteq, \supset$ sind antisymmetrische Relationen. Zu beachten:

$$x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$$

Die Relation $=$ ist also symmetrisch und antisymmetrisch. Wir können also nicht unbedingt aufgrund von Symmetrie ausschließen, dass eine Relation nicht antisymmetrisch ist.

Definition 1.22: Totale Relationen

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Wir sagen R ist total falls:

$$\forall x, y \in M\colon (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$$

Beispiel: $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total

Beispiel: $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ ist nicht total, da für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $\{x\} \not\subseteq \{y\}$ und $\{y\} \not\subseteq \{x\}$.

Definition 1.23: Reflexivität

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Wir sagen R ist reflexiv falls:

$$\forall x \in M\colon (x, x) \in R$$

Sei M eine Menge. Wir definieren die Diagonale $D \subseteq M \times M$ als $D = \{(x, x)\colon x \in M\}$. Wenn R reflexiv ist, so gilt $D \subseteq R$.

Beispiel: $(\mathbb{R}, \leq), (M, =), (\mathbb{N}, |), (\mathbb{Z}, \equiv), (\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv

Definition 1.24: Transitivität

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Wir sagen R ist transitiv falls:

$$\forall x, y, z \in M\colon ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R$$

Relationen, die eine Arte "Größenvergleich"beschreiben sind im Allgemeinen transitiv, wie z.B. $>$ auf $\mathbb{R}$. Gilt $x > y$ und $y > z$, dann folgt daraus $x > z$. Analog kann man auch mit Teilmengen arbeiten: $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, womit $A \subseteq C$. Interessanter ist hierbei aber $(Z, \equiv)$. Seien $z \equiv w \mod k$ und $w \equiv v \mod k$, sprich $z - w = lk$ und $w - v = mk$. Somit $z - w + w - v = lk + mk = (l + m)k$ bzw. $z - v = (l + m)k$, womit $z \equiv v \mod k$. Daher ist $\equiv$ transitiv.

Definition 1.25: Äquivalenzrelation

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Wir nennen R eine Äquivalenzrelation, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Sei weiters $M \neq \emptyset$ und R eine Äquivalenzrelation, so nennen wir $[x]_R = \{y \in M\colon xRy\}$ die Äquivalenzklasse von x in Bezug auf R. Dabei gilt $[x]_R \subseteq M$, weil xRx, da R reflexiv ist, weswegen $x \in [x]_R$, daher $[x]_R \neq \emptyset$.

Die Gleichheitsrelation $=$ auf einer beliebigen Menge M ist der Prototyp einer Äquivalenzrelation. Äquivalenzklassen beschreiben im Allgemeinen eine Art Gleichheit in Bezug auf eine gemeinsame Eigenschaft. Für die Algebra interessant sind etwa die Äquivalenzklassen von $\equiv$ über $\mathbb{Z}$. Wir legen diese folgendermaßen fest:

$$[k]_p = \{x \in \mathbb{Z}\colon x \equiv k \mod p\}$$

Allgemein bezeichnen wir $\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, \ldots, [p-1]_p\}$. Zu beachten ist:

$$\forall p \in \mathbb{N}\colon \bigcup_{n=0}^{p-1} [n]_p = \mathbb{Z}$$

Lemma 1.4: Durchschnitt von Äquivalenzklassen

Sei M eine nichtleere Menge und R eine Äquivalenzrelation auf M. Seien $x, y \in M$, dann gilt entweder $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$ oder $[x]_R = [y]_R$.

Beweis. Sei $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, dann $\exists z \in M \colon z \in [x]_R \wedge z \in [y]_R$. Damit gilt aber xRz und zRy, womit aus der Transitivität von R folgt: xRy.

Sei weiters $x' \in [x]_R$ womit $x'Rx$ und weiters $x'Ry$, weswegen $x' \in [y]_R$, daher $[x]_R \subseteq [y]_R$.

Sei $y' \in [y]$ womit $y'Ry$ und weiters $y'Rx$, weswegen $y' \in [x]_R$, daher $[y]_R \subseteq [y]_R$. □

Sei $I = \{1, 2, \dots, n\}$ eine endliche Indexmenge, so können wir n Mengen $M_1, M_2, \dots, M_n$ damit indizieren. Wir werden später sehen, dass wir uns auch mit unendlichen Indexmenge beschäftigen wollen. Hier wählen wir etwa $I = \mathbb{N}$ und indizieren $M_1, M_2, \dots$. Seien z.B. $M_k = \{1, 2, \dots, k\}$, so ist etwa $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{1\}$ und analog $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{N}$.

Definition 1.26: Mengenpartitionen

Sei M eine nichtleere Menge und I eine (endliche) Indexmenge. Sei weiters für jedes $i \in I$ $P_i \subseteq M$. Wir nennen $(P_i)_{i \in I}$ eine Partition von M falls:
- $\forall i \in I \colon P_i \neq \emptyset$
- $\forall i, j \in I \colon i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$ (P_i und P_j sind paarweise disjunkt)
- $\bigcup_{i \in I} P_i = M$

Sei M eine Menge, R eine Äquivalenzrelation auf M und $M_R = \{[x]_R \colon x \in M\}$. Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse aus M_R genau ein Element ξ aus. Die Menge all dieser Elemente ξ nennen wir ein vollständiges Representantensystem $\mathcal{R}$ der Äquivalenzrelation für das $\mathcal{R} \subseteq M$ gilt. Dabei erfüllt $\mathcal{R}$ die folgenden Eigenschaften:

- $\forall \xi, \eta \in \mathcal{R} \colon \xi \neq \eta \Rightarrow \neg(\xi R \eta)$
- $\forall x \in M \colon \exists \xi \in \mathcal{R} \colon \xi R x$

Die Äquivalenzklassen von R bilden somit eine Partition von M. Jede Äquivalenzrelation auf M erzeugt eine Partition. Umgekehrt: Sei $(P_i)_{i \in I}$ eine Partition von M. Definiere die folgende Relation R auf M:

$$xRY \Leftrightarrow \exists i \in I \colon x \in P_i \wedge x \in P_i$$

Wir prüfen ob R eine Äquivalenzrelation ist:

- Reflexivität:

$$\forall x \in A \colon \exists i \in I \colon x \in P_i \wedge x \in P_i \Rightarrow xRx$$

- Symmetrie: Wenn $x \in P_i \wedge y \in P_i$, dann gilt auch $y \in P_i \wedge x \in P_i$
- Transitivität: Sei xRy und yRz:

$$\begin{aligned}
&x \in P_i \wedge y \in P_i \qquad y \in P_j \wedge z \in P_j \\
&i \neq j \Rightarrow P_j \cap P_i = \emptyset \\
&y \in P_i \wedge y \in P_j \Rightarrow P_i = P_j \Rightarrow x \in P_j \wedge z \in P_j \Leftrightarrow xRz
\end{aligned}$$

Elemente, die im selben P_i liegen sind zueinander äquivalent. Das hei0t die Äquivalenzklassen dieser Relation sind genau die Partitionsmengen P_i. Jede Partition erzeugt also eine Äquivalenzrelation mit den Partitionsmengen als Äquivalenzklassen.

Definition 1.27: Totalordnung

Sei M eine Menge und R eine Relation auf M. Wir sagen, dass R eine Totalordnung auf M ist, falls R:
- reflexiv
- transitiv
- antisymmetrisch
- total

ist. Wir nennen R eine Halbordnung, falls R:
- reflexiv
- transitiv
- antisymmetrisch

ist.

1.2.5 Abbildungen

Definition 1.28: Abbildung

Seien M, N nichtleere Mengen. Eine Abbildung f von M nach N, $f\colon M \to N$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $x \in M$ ein Element $y \in N$ zuordnet. Wir schreiben $y = f(x)$ und nennen y das Bild von x. M ist die Definitionsmenge von f und B heißt Wertemenge. Oftmals bezeichnet man x als Argument der Funktion.

Beispiel: $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, Zuordnungsvorschrift als mathematische Formel.

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Wir nennen $\Gamma_f = \{(x, f(x))\colon x \in M\} \subseteq M \times N$ den Graphen von f. Dabei definiert f den Graphen Γ_f eindeutig. Die Umkehrung ist wahr. Sei $x \in M$. Wir suchen nun ein $y \in N$, sodass $(x, y) \in \Gamma_f$. Dazu wählen wir $y = f(x)$. Wir werden folgende Eigenschaften für Γ_f:

- $\Gamma_f \subseteq M \times n$
- $\forall x \in M\colon \exists y \in N\colon (x, y) \in \Gamma_f$
- $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Gamma_f\colon x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

Eine Abbildung zwischen Zahlenmengen (wie etwa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) nennt man oft Funktion.

Definition 1.29: Eigenschaften von Funktion

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Wir nennen:
- f injektiv, falls $\forall x_1, x_2 \in M\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- f surjektiv, falls $\forall y \in N\colon \exists x \in M\colon y = f(x)$

Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$. f ist nicht surjektiv und nicht injektiv. Nicht surjektiv, weil $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 > 0$. Und nicht injektiv, weil $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 = (-x)^2$. Schränken wir den Definitionsbereich und den Bildbereich auf $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ein, so ist f injektiv und surjektiv. Wir sehen also, dass die Eigenschaften einer Abbildung von der Abbildungsvorschrift, dem Definitionsbereich und der Bildmenge ab.

Definition 1.30: Bildmenge und Urbildmenge

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Sei $A \subseteq M$. Wir nennen $f(M) = \{f(x) | x \in A\} \subseteq N$ die Bildmenge von A. Sei $B \subseteq N$. Wir nennen $f^{-1}(B) = \{x \in M\colon f(x) \in L\} \subseteq M$ die Urbildmenge von B.

Es gilt $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A\colon y = f(x)$ und $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$. Falls $\forall x \in M$ gilt $f(x) \notin B$, dann $f^{-1}(B) = \emptyset$. Hingegen $M \neq \emptyset \Rightarrow f(M) \neq \emptyset$ und $x \in M \Rightarrow f(x) \in f(M)$. Falls $f(M) = N$ ist f surjektiv.

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Wir können die Wertemenge leicht modifizieren, sodass die modifizierte Abbildung surjektiv ist. Wir betrachten $f\colon A \to f(A)$. Diese Funktion ist per Definition surjektiv.

Definition 1.31: Bijektivität

Sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Wir nennen f bijektiv, falls f surjektiv und injektiv ist.

1.2.6 Verknüpfung von Abbildungen

Definition 1.32: Identische Abbildung

Sei M eine nichtleere Menge. Wir nennen $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = x$ die identische Abbildung auf M.

Definition 1.33: Verknüpfung

Seien L, M, N nichtleere Mengen, $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to N$ Abbildungen. Wir definieren $g \circ f\colon A \to C$ als $g(f(x))$. Wir bezeichnen $\circ$ als die Hintereinanderausführung von Funktionen. $\circ$ ist im allgemeinen nicht kommutativ, sprich $f \circ g \neq g \circ f$.

Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x)2x^2-$ und $g(y) = \frac{y+2}{3}$:

$$\begin{aligned}
g \circ f = g(f(x)) &= \frac{f(x)+2}{3} = \frac{2x^2-1+2}{3} = \frac{2x^2+1}{3} \\
f \circ g = f(g(y)) &= 2(g(y))^2 - 1 = 2\left(\frac{y+2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{9}(2y^2+4y+4) - 1 \\
&= \frac{2}{9}y^2 + \frac{8}{9}y - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(2y^2+8y-1)
\end{aligned}$$

Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $f(x) = x^2$ und $g(y) = \sqrt{y}$:

$$\begin{aligned}
g \circ f = g(f(x)) &= \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x| \\
f \circ g = f(g(y)) &= \sqrt{y}^2 = y
\end{aligned}$$

Definition 1.34: Umkehrabbildung

Sei $f\colon M \to N$ eine bijektive Abbildung. Sei $y \in N$:
- da f surjektiv ist $\exists x \in M\colon f(x) = y$
- da f injektiv ist, ist x eindeutig

Wir definieren nun $f^{-1}\colon N \to M$ als die Umkehrabbildung durch die Vorschrift $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Es sei angemerkt, dass die Umkehrabbildung unabhängig vom Urbild $f^{-1}(B)$ ist. Sei weiters $x \in M\colon f^1(f(x)) = z \Leftrightarrow f(z) = f(x) \Leftrightarrow x = z$, da f injektiv ist. Somit:

$$\forall x \in M\colon f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M$$

Sei $y \in N\colon f(f^{-1}(y)) = y$ weil $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$:

$$\forall y \in N\colon f(f^{-1}(y)) = y \Leftrightarrow f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_M$$

Beispiel: $f : M = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 0\} \to \{x \in \mathbb{R}\colon x > 1\} = N$ mit $f(x) = \frac{1}{x} + 1$. Wir wollen prüfen, ob f bijektiv ist, und wie die Umkehrabbildung aussieht, sofern sie existiert. Wenn f bijektiv ist, hat die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in N$ eine eindeutige Lösung $x \in M$:

$$\frac{1}{x} + 1 = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y-1}$$

Wir können also zu einem beliebigen y aus dem Wertebereich ein Argument x finden, für das gilt $f(x) = y$, da $\forall y \in N\colon y > 1$. Wir können aus der Lösbarkeit einer Gleichung über einem gegeben Körper also Surjektivität folgern. Wenn die Lösung der Gleichung eindeutig ist, so folgt Injektivität.

Lemma 1.5

Sei M eine endliche Menge und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Dann gilt $|f(M)| \leq |M|$.

Beweis. Sei $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$, wobei m_i paarweise verschieden. Dann $f(M) = \{f(m_1), \ldots, f(m_n)\}$. Sei f injektiv, dann gilt $\forall f(m_i) \neq f(m_j)\colon i \neq j$, sprich $f(m_i)$ sind paarweise verschieden, womit $|f(M)| = |M|$. Sei f nicht injektiv, so sind $f(m_i)$ nicht zwingend paarweise verschieden, womit $|f(M)| < |M|$. □

Lemma 1.6: Surjektivität aus Mächtigkeit

Seien M, N endliche Mengen. Dann existiert eine bijektive Abbildung $\sigma\colon M \to L$, wenn $|M| = |L|$.

Beweis. Sei $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ und $l = \{l_1, \ldots, l_n\}$, wobei m_i, l_j jeweils paarweise verschieden. $\sigma(m_i) = l_i$ für $k \in \{1, \ldots, n\}$. σ ist surjektiv, da für jedes l_i ein Urelement m_i existiert. Weiters ist σ injektiv, da die m_i und l_i paarweise verschieden sind.

Sie $\sigma : M \to L$ bijektiv. Nach Lemma 1.5 gilt $|L| \leq |A|$. Da σ bijektiv ist, gilt $|L| \geq |M| = |\sigma^{-1}(L)|$. Somit $|M| = |L|$. □

Definition 1.35

Seien M, N Mengen. Wir sagen M und N sind gleich mächtig, wenn eine bijektive Abbildung $\sigma\colon M \to N$ existiert. Eine Menge, für $N = \mathbb{N}$ nennen wir M abzählbar unendlich.

2 Das Zahlensystem

2.1 Natürliche Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion

Wir kennen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ bereits mit den üblichen Rechenregeln:

(A1) $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \colon m + n = n + m$ Kommutativgesetz der Addition

(A2) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon n + 0 = n = 0 + n$ neutrales Element der Addition

(A3) $\forall l, m, n \in \mathbb{N} \colon l + (m + n) = (l + m) + n$ Assoziativgesetz der Addition

(M1) $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \colon mn = nm$ Kommutativgesetz der Multiplikation

(M2) $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon 1n = n$ neutrales Element der Multiplikation

(M3) $\forall l, m, n \in \mathbb{N} \colon l(mn) = (ln)m$ Assoziativgesetz der Multiplikation

(D) $\forall l, m, n \in \mathbb{N}_0 \colon l(m + n) = lm + ln$ Distributivgesetz

2.1.1 Axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen

Guiseppe PEANO hat die natürlichen Zahlen folgendermaßen festgelegt:

1. ein besonderes Element 1 liegt in $\mathbb{N}$
2. auf $\mathbb{N}$ ist eine Abbildung $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert, die einer natürlichen Zahl ihren Nachfolger zuordnet
   (a) s ist injektiv
   (b) $\forall n \in \mathbb{N} \colon 1 \neq s(n) \Rightarrow 1 \notin s(\mathbb{N})$
3. Sei $J \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in J$ und $\forall n \in \mathbb{N} \colon n \in J \in J$, dann gilt $J = \mathbb{N}$

Eine Menge $J \subseteq \mathbb{N}$, welche die Bedingung $n \in J \Rightarrow s(n) \in J$ erfüllt nennen wir eine induktive Menge. Sei J induktiv und $1 \in J$, somit $J = \mathbb{N}$. Im konkreten Fall haben wir es oft mit einer einer Menge $J = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n)\}$. Wir wollen nun in einem Induktionsbeweis zeigen, dass $J = \mathbb{N}$ gilt:

- $1 \in J$, sprich $P(1)$ gilt
- Falls $n \in J$ dann ist zu zeigen, dass auch $n + 1 = s(n) \in J$ gilt, sprich $\forall n \in \mathbb{N} \colon P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

Gelingt uns so ein Beweis, so können wir argumentieren, dass $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2.1.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $J \subseteq \mathbb{N}$ mit den beiden Eigenschaften $1 \in J$ und $\forall n \in \mathbb{N} \colon \in J \Rightarrow n+1 \in J$. Dann gilt $J = \mathbb{N}$. Eine alternative Variante: Sei P ein Prädikat auf $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $P(1)$ gilt, und $\forall n \in \mathbb{N} \colon P(n) \Rightarrow P(n + 1)$.

Erörtern wir das Konzept anhand der Gaußschen Summenformel:

$$P(n) \colon \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir beginnen mit einer Induktionsbasis $P(1)$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1$$
$$\frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Es gilt also $1 \in J$. Wir fahren mit der Induktionsvoraussetzung fort:

$$P(n) \colon \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Danach benötigen wir die Induktionsbehauptung:

$$P(n+1)\colon \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Im Induktionsschritt zeigen wir $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1+\sum_{k=1}^{n} k = n+1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n+2+n^2+n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Beispiel: Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ Die Induktionsbasis zeigen wir für $n = 1$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \\ &\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir stellen gleich die Induktionsbehauptung auf und führen den Induktionsschritt aus:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{n+2} \\ &\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

Beispiel: Zu zeigen sei: $\forall n \in \mathbb{N}\colon n^2 + n \equiv 0 \mod 2$. Induktionsbasis:

$$n = 1\colon 1^2 + 1 = 2 \equiv 0 \mod 2$$

Im Induktionsschritt zeigen wir $(n+1)^2 + n + 1 \equiv 0 \mod 2$:

$$(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + n + 2(n+1)$$

Da $n^2 + n$ nach der Induktionsvoraussetzung gerade ist, und $\forall k \in \mathbb{N}\colon 2k \equiv 0 \mod 2$, ist $n^2 + n + 2(n+1)$ ebenfalls gerade.

2.1.3 Die Ordnungsstruktur auf $\mathbb{N}$

Wir können in $\mathbb{N}$ addieren, multiplizieren und eingeschränkt subtrahieren. Seien m, n natürliche Zahlen. Wir sagen m ist kleiner als n ($m < n$), falls $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $n = m + k$, analog heißt n größer als m ($n > m$). Wir sagen m ist kleiner oder gleich als n ($m \leq n$), falls $m < n \vee m = n$.

Die kleiner-gleich-Relation $\leq$ auf ist eine Totalordnung auf $\mathbb{N}$:

- Reflexivität: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist $n = n$, also ist auch $n \leq n$
- Transitivität: Sei $m \leq n$ und $n \leq p$, das heißt $\exists k, l \in \mathbb{N}_0\colon n = m + k, p = n + l$, womit $p = m + k + l = m + (k + l)$ weswegen: $m \leq p$
- Antisymmetrie: Sei $m \leq n$ und $n \leq m$:

$$\begin{aligned} &n = m + k, m = n + l \\ &\Rightarrow n = n + l + k \Rightarrow 0 = l + k \Rightarrow l = k = 0 \Rightarrow m = n \end{aligned}$$

- Totalität: Angenommen $\forall k \in \mathbb{N}_0\colon n \neq m + k$ und $\forall l \in \mathbb{N}_0\colon m \neq n + l$, womit $m \neq n$. $n \neq m + k \Rightarrow n \neq m + (n - m) = n$. Das ist ein Widerspruch, womit $n = m$

Einige Bemerkungen:

- Es gibt in $\mathbb{N}$ kein neutrales Element der Addition: $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \nexists k \in \mathbb{N}\colon n + k = n$
- Seien $m, n \in \mathbb{N}$, dann ist $(n < m) \wedge (n > m)$ falsch: Sei $n < m$, sprich $m = n + k$ für $k \in \mathbb{N}$. sei weiters $m < n$, womit $n = m + l$ für $l \in \mathbb{N}$. Damit $(m + n) = n + k + m + l = (m + n) + (k + l)$. Das ist ein Widerspruch, da in $(\mathbb{N}, +)$ kein neutrales Element 0 existiert.
- $\forall n \in \mathbb{N}\colon 1 \leq n$. Sei $n \neq 1 \Rightarrow n = 1 + (n - 1) \Rightarrow 1 < n$ per Definition von $<$
- Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$, dann gilt $m+1 \leq n$ $n = m+k$ mit $k \in \mathbb{N}$, womit $n = (m+1)+\underbrace{k-1}_{\in\_0} \Rightarrow m+1 \leq n$

Satz 2.1: Kleinstes Element

Jede nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element:

$$\forall M \subseteq \mathbb{N}\colon M \neq \emptyset\colon \exists m \in M : \forall x \in M : m \leq x$$

Beweis. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Angenommen M hätte kein kleinstes Element m (i). Unter dieser Annahme werden wir beweisen, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ die Bedingung $\forall x \in M : n < x$ gelten muss. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 1$ ist die Aussage erfüllt: $\forall x \in M\colon 1 < x$. Wenn dem nicht so wäre, müsste $x = 1$ für ein $x \in M$ gelten, womit $1 \leq x \forall x \in M$, weswegen 1 das kleinste Element in M wäre, was ein Widerspruch zu (i) ist. Im Induktionsschritt wählen wir $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\forall x \in M : n < x \Rightarrow n + 1 \leq x$. Angenommen für ein x' würde $n + 1 = x'$ gelten:

$$n + 1 = x' \in A \wedge \forall x \in A\colon n + 1 = x' \leq x$$

Damit ist x' ein kleinstes Element in M, was ein Widerspruch zu (i) ist. Daraus folgt $\forall x' \in M : x' \neq n + 1$ und $\forall x \in M : n + 1 \leq x$, dass $\forall x \in M : n + 1 < x$. Daher erfüllt $n + 1$ die geforderte Bedingung. Wir wenden nun Induktion an: $\forall n \in \mathbb{N}\colon \forall x \in M : n < x$. Sei $x \in M$, so $x < x \Rightarrow x = x + k$ für $k \in \mathbb{N}$. Das ist ein Widerspruch, da $(\mathbb{N}, +)$ kein neutrales Element besitzt. Somit kann (i) nicht zutreffen, weswegen M ein kleinstes Element besitzt. □

Unter den Standardaxiomen der Mengenlehre kann man beweisen, dass auf jeder beliebigen Menge M eine Wohlordnung existiert. Es sei angemerkt, dass man mit der Methode der vollständigen Induktion auch Aussage der Form $\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon P(n)$ bzw. $\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq k \in \mathbb{N}\colon P(n)$ beweisen kann. Für die Induktionsbasis beginnt man dan respektive $P(0)$ bzw. $P(k)$ beweisen.

Satz 2.2: Bernoulli Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ und $x \neq 0$ und für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$(1 + x)^n > 1 + nx$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis und beginnen mit $n = 2$:

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$$

Diese Ungleichung ist erfüllt, da $\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geq 0$. Im Induktionsschritt betrachten wir $n + 1$. Sei $n \in \mathbb{N}, n > 2$ und es gelte $(1 + x)^n > 1 + nx$ für $x \in \mathbb{R}, x > -1, x \neq 0$:

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) > (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$$

□

Definition 2.1: Rekursive Funktionen auf $\mathbb{N}$

Wir definieren eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$, wobei M eine beliebige Menge ist, durch die explizite Angabe von $f(1)$, sprich $f(1) = m \in M$. Weiters wird eine Vorschrift festgelegt, wie man aus gegeben $f(n)$ den Abbildungswert $f(n + 1)$ bestimmen kann. Aufgrund der vollständigen Induktion ist $f\colon \mathbb{N} \to M$ eindeutig. Wir nennen f eine rekursive Funktion.

Beispiel: $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(1) = 1$, $f(n+1) = f(n) + (n+1)$:

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	3	6	10	15	21

Tabelle 5: Funktionswerte für $f(n+1) = f(n) + (n+1)$ mit $f(1) = 1$

Wir sehen, dass $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Wir können also $f(n)$ explizit anschreiben:

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \frac{n(n+1)}{2}$$

Beispiel: $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(1) = 1$ und $g(n+1) = g(n) \cdot (n+1)$:

n	1	2	3	4	5	6
$g(n)$	1	2	6	24	120	720

Tabelle 6: Funktionswerte der Fakultät

Wir können $g(n)$ wieder explizit anschreiben:

$$g(n) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Definition 2.2: Folgen

Eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to M$ bezeichnen wir auch als Folge von Element aus M. Statt $a(n)$ schreiben wir dann a_n. Wir interpretieren die Abbildungsvorschrift auch als Nummerierung von Elementen. Statt $a\colon \mathbb{N} \to M$ schreiben wir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um die Folge zu bezeichnen.

Eine Indizierung durch eine endliche Indexmenge I kann auch als Abbildung $a\colon 1, 2, \ldots, N \to M$ mit $a(i) = m_i$, somit $m_1, m_2, \ldots, m_N \in M$ verstanden werden.

Man muss bei der Notation von Folgen Vorsicht walten lassen. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet ein geordnetes Tupel, während $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgenglieder ist. Für $a_n = (-1)^n$ ist etwa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1, 1, -1, \ldots)$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = a(\mathbb{N})$ ist hingegen $\{-1, 1\}$.

2.2 Erweiterung des Zahlensystems

Auf $\mathbb{N}$ sind zwei arithmetische Operationen $+$ und $\cdot$ definiert, sodass $(\mathbb{N}, +)$ eine kommutative Halbgruppe bildet und $(\mathbb{N}, \cdot)$ ein kommutatives Monoid. Erweitern wir $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{N}_0$ so bildet $(\mathbb{N}, +)$ ebenfalls ein kommutatives Monoid. Wir wollen nun weitere arithmetische Operationen ausführen, insbesondere wollen wir inverse Elemente zur Addition finden. Dazu erweitern wir $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$$

Die neuen Elemente $(-x)$ für $x \in \mathbb{N}$ erfüllen $x + (-x) = 0$. Wir nennen $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen. Auf $\mathbb{Z}$ sind Addition und Multiplikation definiert. Zusätzlich ist $(\mathbb{Z}, +)$ eine abelsche Gruppe, womit $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

Wir haben bereits auf $\mathbb{N}$ die Teilbarkeitsrelation $m|n$ untersucht. Diese verhält sich dabei ähnlich wie die Teilmengenrelation:

$$(n) = \{kn\colon k \in \mathbb{N}\}$$

Wir bezeichnen (n) als Menge der Vielfachen von n. Wenn $m|n$, dann gilt $(m) \subseteq (n)$ und:

$$\mathcal{M} = \{(n)\colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ entspricht genau der Teilmengenrelation auf $\mathcal{M}$: $m|n \Leftrightarrow (m) \subseteq (n)$. Wir können (n) auf ganzzahlige Vielfache von n erweitern:

$$(n) = \{kn \colon k \in \mathbb{Z}\}$$

Dabei nennen wir (n) das von n erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}$.

Der klassische Zahlbegriff wird in der Schule meist wie folgt gelernt:

1. Zählen im dekadischen System, wobei das Zählsystem unendlich fortgesetzt werden kann
2. Addition als abgekürzter Weiterzählprozess (z.B. 10 + 12, beginne bei 10 und zähle 12 Schritte weiter)
3. Subtraktion als Zählen in Gegenrichtung, Multiplikation als wiederholte Addition, Division als inverses zur Multiplikation
4. negative ganze Zahlen, Bruchzahlen, einfache Arithmetik mit den Grundrechenarten
5. Übergang von rationalen auf reelle Zahlen, sprich unendlich viele Nachkommastellen reelle Zahlen werden als Größe auf einer Geraden aufgetragen, somit haben die reellen Zahlen die geometrische Struktur einer kontinuierlichen Geraden

Ab 1860 begann man mit der Festlegung der grundlegenden Definitionen und Eigenschaften des Zahlensystems. Peano führte die Nachfolgerrelation als Axiom ein, um die natürlichen Zahlen aus der 1 zu erzeugen. Die natürlichen Zahlen erlauben es die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Körpererweiterungen festzulegen. Zur "schwierige" Schritt ist es nun, von den rationalen Zahlen auf die reellen Zahlen zu kommen. Dazu gibt es im allgemeinen drei Möglichkeiten:

- Dedekindsche Schnitte
- Intervallschachtelungen
- Cauchyfolgen

Wir werden uns näher mit Intervallschachtelungen beschäftigen. Davor werden wir jedoch eine kurze Wiederholung aus der linearen Algebra machen, um uns mit dem Körperbegriff vertraut zu machen. Sei R eine Menge auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind. Dabei sind $+\colon R^2 \to$ und $\cdot\colon R^2 \to R$ Abbildungen wobei wir statt $+(x, y)$ die Schreibweise $x + y$ verwenden bzw. $x \cdot y$. Zusammen mit R erfüllen $+$ und $\cdot$ die folgenden Axiome. Seien $x, y, z \in R$:

A1 $\forall x, y \in R\colon x + y = y + x$

A2 $\forall x, y, z \in R\colon (x + y) + z = x + (y + z)$

A3 $\exists 0_R \in R\colon \forall x \in R\colon x + 0_R = x$

A4 $\forall x \in R\colon \exists \tilde{x} \in R\colon x + \tilde{x} = 0_R$

M1 $\forall x, y \in R\colon x \cdot y = y \cdot x$

M2 $\exists 1_R \in R\colon \forall x \in R\colon 1_R \cdot x = x$

M3 $\forall x, y, z \in R\colon (x \cdot y) \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$

D $\forall x, y, z \in R\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Sind alle diese Axiome erfüllt, nennen wir $(R, +, \cdot)$ einen kommutativen Ring mit Eins. Dabei bezieht sich das kommutativ auf $(R, \cdot)$, da wir für einen Ring voraussetzen, dass $(R, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Ein klassisches Beispiel für einen kommutativen Ring mit Eins ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Es handelt sich nur um einen Ring, da $(\mathbb{Z}, \cdot)$ nur ein abelsches Monoid ist, also nicht jedes Element in $\mathbb{Z}$ ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}$ besitzt. Ein nicht kommutativer Ring mit Eins wäre z.B. die Menge aller 2×2 Matrizen, da wir die Einheitsmatrix E definieren können. Da die übliche Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, ist auch der Ring nicht kommutativ.

Um nun die reellen Zahlen zu erhalten, formen wir die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$ als Vereinigung der Äquivalenzklassen folgender Relation $R_\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}^2$:

$$(m, n) R_\mathbb{Q} (m', n') \Leftrightarrow m \cdot n' = n \cdot m'$$

Auf $\mathbb{Q}^+$ definieren wir die Rechenoperationen folgendermaßen:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl}$$
$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{m \cdot k}{n \cdot l}$$

Da wir die rationalen Zahlen über $R_{\mathbb{Q}}$ einführen und nur mit den Äquivalenzklassen rechnen, müssen wir prüfen, dass die Rechenoperationen unabhängig von der Darstellung sind. Wir zeigen hier den Beweis für die Addition, für die Multiplikation geht er analog.

Wir wissen bereits, dass zwei Brüche gleich sind, wenn $(m,n)R_{\mathbb{Q}}(m',n')$ erfüllt ist. Wir betrachten also vier Paare $(m,n)R_{\mathbb{Q}}(m',n')$ und $(k,l)R_{\mathbb{Q}}(k',l')$ und zeigen:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + nk}{nl} = \frac{m'l' + n'k'}{n'l'} = \frac{m'}{n'} + \frac{k'}{l'}$$

Wir müssen also zeigen $(ml + nk, n'l')R_{\mathbb{Q}}(m'l' + n'k', nl)$:

$$(ml + nk)n'l' = mn'll' + kl'nn' = nm'll' + lk'nn' = (m'l' + n'k')nl$$

Seien $x = \frac{m}{n}, y = \frac{k}{l}, z = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Wir zeigen das Distributivgesetz:

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{ml + nk}{nl} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(ml + nk)p}{nlq} = \frac{mlp + nkp}{nlq} = \frac{mp}{nq} + \frac{kp}{lq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} + \frac{k}{l} \cdot \frac{p}{q}$$

Da für eine rationale Zahl $x = \frac{m}{n}$ gilt $m, n \in \mathbb{N}$, gibt es auch $\tilde{x} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. Dabei ist $\tilde{x}$ das multiplikative Inverse zu x, es gilt also $\forall m, n \in \mathbb{N} \colon (mn, mn)R_{\mathbb{Q}}(1,1)$. Dabei ist $\frac{1}{1}$ das neutrale Elemente bezügliche der Multiplikation auf $\mathbb{Q}$. Da wir gezeigt haben, dass die Rechenoperationen unabhängig von der Darstellung der Brüche sind, ist das multiplikative Inverse auf $\mathbb{Q}$ eindeutig. Wir schreiben daher $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Um nun mit negativen Brüchen zu arbeiten, führen wir $\mathbb{Q}^-$ ein:

$$\mathbb{Q}^- = \left\{-\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Weiters benötigen wir eine 0 und führen daher $0 = \frac{0}{n}, n \in \mathbb{N}$ ein. Führen wir alles zusammen, erhalten wir $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \left\{\frac{0}{1}\right\} \cup \mathbb{Q}^-$$

Dabei handelt es sich bei den Äquivalenzklassen in $\mathbb{Q}^-$ um die additiven inversen zu den Elementen aus $\mathbb{Q}^+$.

Sei $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ mit $\varphi(n) = \frac{n}{1}$ eine Abbildung. Da 1 auf $(N, \cdot)$ das neutrale Elemente ist, ist φ injektiv, denn $\forall m, n \in \mathbb{N} \colon (m,1)\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}(n,1) \Leftrightarrow m = n$. Eine interessantere Eigenschaft ist:

$$\varphi(m + n) = \frac{m + n}{1} = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \varphi(n) + \varphi(m)$$
$$\varphi(m \cdot n) = \frac{m \cdot n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

Definition 2.3: Körper

Sei K eine nicht-leere Menge auf der zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert sind. Wir nennen $(K, +, \cdot)$ einen Körper, wenn $(K, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist und weiters $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Körper bilden für uns die grundlegende Struktur auf der wir mit ”normalen” Zahlen rechnen und die uns bekannten Rechenregeln und Operationen anwenden, dazu gehören neben der Addition und Multiplikation auch ”Abkürzungen” wie das Potenzieren um etwa wiederholte Multiplikation anzudeuten.

Definition 2.4: Geordnete Körper

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K^+ \subseteq K$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\forall x \in K$ gilt eine der folgenden Beziehungen:
   (a) $x \in K^+$
   (b) $x = 0$
   (c) $-x \in K^+$
2. $\forall x, y \in K^+$ gilt:
   - $x + y \in K^+$
   - $x \cdot y \in K^+$

Dann nennen wir K einen geordneten Körper, wobei K^+ die Menge der positiven Elemente in K ist, und hernach $K^- = \{x \in K \colon -x \in K^+\}$ die Menge der negativen Elemente in K. Anstatt $x \in K^+$ verwenden wir die Relationschreibweise $x > 0$.

Satz 2.3

Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper. Wir definieren die Relation $<$ auf K durch:

$$x < y \Leftrightarrow y - x = y + (-x) \in K^+$$

und die weitere Relation:

$$x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)$$

Dann ist $<$ eine transitive Relation auf K und $\leq$ ist eine Totalordnung auf K.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Transitivität von $<$. Seien $x, y, z \in K$ mit $x < y$ und $y < z$, sprich $y - x \in K^+$ und $z - y \in K^+$. Damit $<$ transitiv ist, muss $z - x \in K^+$ gelten:

$$z - x = z + (-y + y) - x = \underbrace{(z - y)}_{\in K^+} + \underbrace{(y - x)}_{\in K^+} \Rightarrow z - x \in K^+$$

Die Transitivität von $\leq$ wird beinahe von $<$ geerbt. Wir müssen nur die Fälle $x = y$ bzw. $y = z$ betrachten:

$$x = y \Rightarrow y < z \Leftrightarrow x < z \Rightarrow x \leq z$$
$$y = z \Rightarrow x < y \Leftrightarrow x < z \Rightarrow x \leq z$$
$$x = y, y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x \leq z$$

Die Reflexivität ist trivial, da $x \leq x$ für beliebige x erfüllt ist, die geordnet werden können. Damit $\leq$ eine Totalordnung ist, muss $\leq$ antisymmetrisch sein:

$$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

Angenommen $x \neq y$, somit gilt $x \leq y \Rightarrow x < y$, weiters gilt $y \leq x \Rightarrow y < x$. Da also $y - x \in K^+$ und $x - y \in K^+$ gilt:

$$(y - x) + (x - y) = (y - y) + (x - x) = 0 + 0 = 0$$

Daraus folgt aber $x = y$ □

Definition 2.5: Intervalle auf geordneten Körpern

Sei $(K,+,\cdot)$ ein geordneter Körper und $x,y \in K$ mit $x \leq y$:

$$[x,y] = \{z \in K\colon x \leq z \wedge z \leq y\}$$

Wir nennen $[x,y]$ das abgeschlossene Intervall mit den Grenzen x und y in K. Weiters:

$$(x,y) = \{z \in K\colon x < z \wedge z < y\}$$

Wir nennen (x,y) das offene Intervall mit den Grenzen x und y in K. Wir können auch rechtsoffene $[x,y)$ bzw. linksoffene $(x,y]$ Intervalle festlegen. Für den Fall $x > y$ ist $[x,y] = \emptyset$

Die rationalen Zahlen sind in zweierlei Hinsicht suboptimal. Einerseits gibt es Zahlen, wie etwa die Wurzel aus 2, die sich nicht als Bruch darstellen lassen können. Die Existenz solcher Zahlen ist bereits zur Zeit von Pythagoras bestätigt, allerdings war die Vorstellung der Existenz von Objekten, die kein Verhältnis beschreiben unpassend für die vorherrschende Philosophie und daher wurde der "Gebrauch" solcher irrationalen Zahlen schwer bestraft[5]. Weiterhin ist $\mathbb{Q}$ unzureichend, um analytische Geometrie zu betreiben. Dem Vektorraum $(\mathbb{Q}^2,+,\cdot)$ über $\mathbb{Q}$ fehlen entscheidende Punkte, um etwa einfache Gebilde wie Kreise vollständig zu beschreiben.

2.2.1 Wurzeln und Primzahlen

Wurzeln werden oftmals als Gegenoperation zur Potenzierung gesehen, was besonders aus den gängigen Rechenregeln für Exponenten folgt. Streng genommen handelt es sich bei einer Wurzel um keine Abbildung, da sie nicht eindeutig ist. So ist etwa $\sqrt{4}$ sowohl 2 als auch -2. Hernach können wir keine Umkehrabbildung zum Potenzieren anwenden, wenn das Wurzelziehen keine Abbildung ist. Wir können natürlich den Wertebereich einschränken, was jedoch der Definition der Wurzel widerstrebt. Bevor wir uns aber mit den noch etwas vagen Potenzen herumschlagen, wollen wir Wurzeln mit den uns gegebenen Mitteln der Algebra definieren.

Sie $|n$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Menge der Teiler von n: $|n = \{k \in \mathbb{N}\colon k|n\}$. Wir nennen eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ irreduzibel, wenn $|p = \{1,p\}$. Weiters nennen wir eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ prim, wenn für $m,n \in \mathbb{N}$ gilt $p|m \cdot n \Rightarrow p|m \vee p|m$.

Wir wollen nun zeigen, dass es keine rationale Zahl $x = \frac{m}{n}$ gibt, sodass $x^2 = 2$. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen $x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$, wobei $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$, sprich m und n sind teilerfremd und haben keine gemeinsamen Primfaktoren. Da $x^2 = 2$ gilt $m^2 = 2n^2$, m^2 ist also eine gerade Zahl. Da 2 eine Primzahl ist, teilt 2 auch $m^2 = m \cdot m$, somit ist m eine gerade Zahl. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $m = 2r$, dann gilt $2n^2 = 2 \cdot 2r^2$, womit $n^2 = 2r^2$. Somit sind m und n durch 2 teilbar, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist, dass m und n teilerfremd sind.

Wir können diese Argumentation auf allgemeine Primzahlen auslegen. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl, so gibt es keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x = \frac{m}{n}$, für die gilt $x^2 = p$. Wir fragen uns, wann die Wurzel einer zusammengesetzten Zahl k rational ist. Dazu machen wir einen kleinen Einschub und führen die Idee der starken Induktion ein. Sei $\mathcal{P}$ ein Prädikat auf $\mathbb{N}$, mit $\mathcal{P}(1)$ und $\forall n \in \mathbb{N}\colon \forall k \in \{1,2,\ldots,n\}\colon \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon \mathcal{P}(n)$.

Satz 2.4

Sei $k = \prod_{i=1}^{j} p_i$ eine zusammengesetzte Zahl. Angenommen $x^2 = k$ und $x = \frac{m}{n}$, dann gilt $\frac{m^2}{n^2} = k$ und $n = 1$, sprich $k = m^2$ ist eine Quadratzahl.

Beweis. Wir führen eine starke Induktion nach der Länge j der Primfaktorzerlegung. Für $j = 1$ folgt aus unseren vorherigen Überlegungen, dass eine einzelne Primzahl nicht als Quadratzahl eines Bruchs dargestellt werden kann, womit $n = 1$ gelten muss.

Sei $j \in \mathbb{N}$ und die Aussage gelte für alle zusammengesetzten Zahlen mit j (oder weniger) Primfaktoren. Sei $k = \prod_{i=1}^{j+1} p_i$ und es wäre $k = \frac{m^2}{n^2}$ mit $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$, so gilt $p_1 \cdot \cdots \cdot p_j \cdot p_{j+1} \cdot n^2 = m^2$ womit $p_{j+1}\ m^2$ und

[5] hierbei gibt es Geschichten, dass einige Schüler des Pythagoras sogar hingerichtet wurden

somit auch m teilt. Dann ist $n = p_{j+1} \cdot r$ für $r \in \mathbb{N}$ und $n^2 = p_{j+1}r^2$. Setzen wir das ein erhalten wir:

$$n^2 \prod_{i=1}^{j} p_i = p_{j+1}r^2$$

Somit teilt p_{j+1} das Produkt $p_1 \cdot \dots \cdot p_j \cdot n^2$. Wir können unterscheiden ob p_{j+1} (a) $\prod_{i=1}^{j} p_j$ teilt oder (b) n^2. Für (a) gilt, dass $p_{j+1} \in \{p_1, \dots, p_j\}$. Da die Indizierung nichts über die Zahlen Aussagt, wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_{j+1} = p_j$, womit $n^2 \prod_{i=1}^{j} p_i = p_j r^2 \Leftrightarrow n^2 \prod_{i=1}^{j-1} p_i = r^2 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{j-1} = \frac{r^2}{n^2}$. Nach der Induktionsbasis ist $n^2 = 1$. Somit haben wir gezeigt, dass $k = m^2$, wenn p_{j+1} eine Primzahl aus $\{p_1, \dots, p_j\}$ ist. Für (b) reicht die Tatsache, dass p_{j+1} n teilt, was ein Widerspruch zu $\text{ggT}(m, n) = 1$ ist. $\square$

2.2.2 Analytische Geometrie über $\mathbb{Q}$

Wir betrachten hier eine rationale Version der euklidischen Ebene, indem ein kartesisches Koordinatensystem auf $\mathbb{Q}^2$ aufspannen. Wir betrachten folgende Mengen:

- Gerade in $\mathbb{Q}^2 : \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \colon ax + by = c | a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- Kreis in $\mathbb{Q}^2 : S^r = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \colon x^2 + y^2 = r^2\}$

Ein interessanter Punkt, der in allen Kreisen fehlt, ist etwa $\frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, der Punkt den die Gerade $x - y = 0$ schneiden sollte. Der Kreis hätte also "Löcher", womit die Ebene nicht mehr durch S^r in zwei Gebiete partitioniert werden würde. Um solche Probleme zu beheben erweitern wir das Zahlensystem ein weiteres Mal. Dabei stellen wir die folgenden Anforderungen an den gesuchten Körper $(K, +, \cdot)$:

- $Q \subseteq K$
- $(K, +, \cdot)$ soll geordnet sein
- $(K, +, \cdot)$ erfüllt das archimedische Axiom
- K ist vollständig in Bezug auf Intervallschachtelungen

Definition 2.6: Betrag

Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper. Wir definieren die Abbildung $|\cdot| \colon K \to K^+$ durch:

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Wir nennen $|x|$ den Betrag von x.

Eine besonders wichtige Eigenschaft des Betrags ist die folgende Ungleichung:

Satz 2.5: Dreiecksungleichung

Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper mit einer Betragsfunktion $|\cdot|$. Seien $x, y \in K$, so gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis. Da x und y jeweils positiv, negativ oder 0 sein können, müssen wir insgesamt vier Fälle untersuchen:

1. $x > 0$ und $y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ und $|x| = x, |y| = y$, womit $|x + y| = x + y = |x| + |y|$
2. $x < 0$ und $y > 0$
   (a) $x + y \leq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y$ und $|x| + |y| = -x + y$, da $x < 0$ ist $-x > 0$, womit $-x > x$, weswegen $x + y < -x + y$
   (b) $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = -x - y$ und $|x| + |y| = -x + y$, somit $-x - y \leq -x + y \Leftrightarrow -y \leq y$, da $y > 0$
3. $x < 0$ und $y < 0 \Rightarrow |x| = -x$ und $|y| = -y$, sowie $|x + y| = -x - y$, somit $-x - y \leq -x - y$
4. eine der beiden Zahlen ist 0 $x = 0 \Rightarrow x + y = 0$, $|0| = 0$, somit $|x + y| = |y| = y = |y| + 0$

Der Fall $x = y = 0$ ist trivialerweise erfüllt. □

Sei $I \subseteq K$ ein Intervall über einem geordneten Körper $(K, +, \cdot)$ mit den Intervallgrenzen a und b, mit $a, b \in K$. Wir bezeichnen $|I| = b - a$. Bei Intervallen auf Körpern kann es vorkommen, dass $a = b$. Dabei müssen wir eine klare Unterscheidung zur Mächtigkeit von Mengen machen, da das Intervall $[a, a] = \{a\}$ eine Mächtigkeit von 1 hat, allerdings $|[a, a]| = 0$. Für (halb)-offene Intervalle ist $|(a, a)| = |[a, a)| = |(a, a]| = 0$, da alle diese Intervalle leer sind.

2.2.3 Einführung der reellen Zahlen

Definition 2.7: Intervallschachtelung

Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper. Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in K. Wir nennen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, wenn die Folge folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\forall n \in \mathbb{N} \colon I_{n+1} \subseteq I_n$
- $\forall \varepsilon \in K^+ \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq N \Rightarrow |I_n| < \varepsilon$

Definition 2.8: Vollständigkeit

Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper. Wir sagen K ist vollständig in Bezug auf Intervallschachtelungen, wenn gilt:

$$\forall x \in K \colon \exists (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Wir sehen, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist, da etwa die Intervallschachtelung $I_n = \left\{x \in \mathbb{Q} \colon 2 - \frac{1}{n} \leq x^2 \leq 2 + \frac{1}{n}\right\}$ einen leeren Durchschnitt hat. Das kann als Nachweis gesehen werden, dass es in $\mathbb{Q}$ kein x gibt, sodass $x^2 = 2$.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die I_n abgeschlossen sein müssen, da es sonst Folgen von I_n gibt, welche die zweite Bedingung für Intervallschachtelungen erfüllen, jedoch einen leeren Durchschnitt besitzen. Das ist unser letzter "Wunschpunkt" für eine Körper. Wir nehmen an, dass ein geordneter Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ existiert, der alle unsere Anforderungen erfüllt. Wir nennen $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen bzw. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ den Körper der reellen Zahlen.

Dieser Körper existiert tatsächlich, was wir jedoch nicht mit den gegebenen Mitteln nachweisen können, da wir dafür gewisse Konzepte der Funktionalanalysis benötigen. Man kann jedoch zeigen, dass der Körper der reellen Zahlen eindeutig ist. Arbeiten wir auf dem Körper der reellen Zahlen, so ergeben sich einige interessante Eigenschaften für Intervalle:

- Sei I ein beliebiges Intervall mit den Grenzen a und b, wobei $a < b$, dann gilt $(a, b) \subseteq I$. umgekehrt gilt $I \subseteq [a, b]$.
- die reelle Zahl $m = \frac{1}{2}(a + b)$ ist in I enthalten:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(a+b) - a = \frac{1}{2}a - a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(b-a) > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2}(a+b) \\
&b - \frac{1}{2}(a+b) = b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}(b-a) > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2}(a+b) \\
&\Rightarrow a < m < b \Rightarrow m \in I
\end{aligned}$$

- jedes Intervall auf $\mathbb{R}$ mit $|I| > 0$ ist nicht-leer
- jedes Intervall auf $\mathbb{R}$ mit $|I| > 0$ enthält unendliche viele Elemente

Seien I, J Intervalle, wobei I die Grenzen a und b hat, und J c und d. Sei $J \subseteq I$, dann gilt $a \leq c < d \leq b$. Wir zeigen $c \geq a$ durch Widerspruch. Angenommen $c < a$. Sei $z = \min\left(\frac{1}{2}(a - c), \frac{1}{2}(d - c)\right)$, wobei min das Minimum [6] zweier Zahlen ist. Wir betrachten nun $w = c + z$, es gilt dabei $c < w$, da $z > 0$ (nach unserer Annahme). Wir

[6] streng genommen ist das Minimum eine Abbildung von Mengen auf einen geordneten Körper, aus dem die Elemente der Menge stammen. Sei $(K, +, \cdot)$ ein geordneter Körper mit $M \subseteq K$, so ist $\min(M) = m \in M \colon \forall x \in M \setminus \{m\} \colon m \leq x$

wollen zeigen, dass $w < d$:

$$d - w = d - c - z \geq d - c - \frac{1}{2}(d-c) = \frac{1}{2}(d-c) > 0 \Rightarrow w < d \Rightarrow w \in (c,d)$$

Weiters gilt $w < a$, denn $a - w = a - c - z \geq a - c - \frac{1}{2}(a-c) = \frac{1}{2}(a-c) > 0$. Somit gilt $a > w$, daraus folgt aber $w \notin [a,b]$, was ein Widerspruch zu $(c,d) \subseteq [a,b]$ ist, womit $a \leq c$ gilt. Wir gehen analog vor, um zu zeigen, dass $d \leq b$.

Lemma 2.1

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon x < \varepsilon \Rightarrow x = 0$

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Sei $x \neq 0$, dann gilt $x > 0$ und auch $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$, es gilt aber $\varepsilon = \frac{x}{2} < x$, was ein Widerspruch zur Annahme ist, dass $\forall \varepsilon > 0 \colon x < \varepsilon$ gilt. ☐

Wir wollen noch einen kurzen Blick auf Intervallschachtelungen in $\mathbb{R}$ werfen. Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung auf $\mathbb{R}$. Angenommen $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, dann gilt $x = y$. Wir weisen wieder durch Widerspruch nach, dass der Durchschnitt einer Intervallschachtelung immer genau ein Element enthält. Angenommen $x \neq y$. Wir wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x > y$ und setzen $\tilde{\varepsilon} = x - y > 0$. Sei $I_n = [a_n, b_n]$. Da $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ gilt $a_n \leq y < x \leq b_n$. Damit gilt $\forall n \in \mathbb{N} \colon \tilde{\varepsilon} \leq b_n - y \leq b_n - a_n$, sprich $\exists \tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon |I_n| \geq \tilde{\varepsilon}$. Das ist ein Widerspruch zur zweiten Eigenschaft von Intervallschachtelungen.

2.2.4 Folgerungen aus dem arschimedischen Axiom

Zur Erinnerung, das archimedische Axiom besagt:

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \exists n \in \mathbb{N} \colon x < n$$

1. $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N \colon \frac{1}{n} > \varepsilon$ Wähle $x \in \mathbb{R}$ mit $x = \frac{1}{\varepsilon} < N$ womit $\frac{1}{N} < \varepsilon$ und für $n \geq N$ gilt $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$
2. Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p > 1$, dann gilt $\forall x \in \mathbb{R} \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon \forall n \geq N \colon p^n > x$
3. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq N \Rightarrow 0 < q^n < \varepsilon$

Lemma 2.2: Monotonie der Potenzfunktion

Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq y_1 < y_2$. Sei weiters $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $0 \leq y_1^k < y_2^k$

Beweis. Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die Aussage erfüllt. Sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte $y_1^k < y_2^k$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei $y_1 = 0$, dann ist $0^k = 0$. Da $y_2 > 0$ ist $y_2^{k+1} > 0$ bzw. $y_1^{k+1} < y_2^{k+1}$.

Für $y_1 > 0$ gilt $y_1^{k+1} = y_1^k y_1 < y_2^k y_1 < y_2^k y_2 = y_2^{k+1}$ ☐

Satz 2.6

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und sei $k \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $y \geq 0$ mit der Eigenschaft:

$$y^k = x$$

bzw. $y = \sqrt[k]{x}$

Beweis. Sei $x \geq 0$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei $x = 0$, dann gilt $0^k = 0 = x$, sprich $y = 0$ hat die gewünschte Eigenschaft. Im zweiten Fall betrachten wir $x > 0$. Wir konstruieren $I_n = [a_n^k, b_n^k]$ bzw. $J_n = [a_n, b_n]$ induktiv. Wir betrachten nun zuerst $a_n^k \leq x \leq b_n^k$ und zeigen das mit Induktion. Wir wählen $a_1 = 0$ und $b_1 = 1 + x$ (nach dem archimedischen Axiom), somit ist $J_1 = [0, x+1]$ und $|J_1| = x + 1$. Mit dieser Wahl erhalten wir $b_1^k > 1 + kx > x$. Wir setzen also $I_1 = [a_1^k, b_1^k]$ und es gilt $x \in I_1$. Wir konstruieren nun I_{n+1} und J_{n+1} mit den uns bekannten Regeln für Intervallschachtelungen. Da $a_n^k \leq x \leq b_n^k$ wählen wir $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ von J_n. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

a $a_n^k \leq x \leq m_n^k$ hierbei wählen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = m_n$ und $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, m_n]$. Somit $I_{n+1} = [a_{n+1}^k, b_{n+1}^k] = [a_n^k, m_n^k]$. Da $a_n < m_n < b_n$, dadurch auch $a_n^k < m_n^k < b_n^k$ gilt $J_{n+1} \subseteq J_n$ bzw. $I_{n+1} \subseteq I_n$. Weiters liegt x so, dass $a_n^k \leq x \leq m_n^k$ weswegen $x \in I_{n+1}$. Wir sehen, dass $|J_{n+1}| = \frac{1}{2}|J_n|$.

b $m_n^k < x \leq b_n^k$ hierbei wählen wir $a_{n+1} = m_n$ und $b_{n+1} = b_n$, dann sind wieder $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [m_n, b_n]$ bzw. $I_{n+1} = [m_n^k, b_n^k]$. Wiederum gilt $m_n^k < x \leq b_n^k$ womit $x \in I_{n+1}$, $J_{n+1} \subseteq J_n \Rightarrow I_{n+1} \subseteq I_n$ und $|J_{n+1}| = \frac{1}{2}|J_n|$.

Wir behaupten nun, dass $|J_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|J_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x+1)$, was wir wieder mit vollständiger Induktion nachweisen. Für $n = 1$ gilt natürlich $|J_1| = x + 1 = 1 \cdot (1 + x) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 (1 + x)$. Für den Schritt:

$$|J_{n+1}| = \frac{1}{2}|J_n| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|J_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}|J_1|$$

Wir zeigen nun, dass es sich bei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um Intervallschachtelungen handelt. Wir müssen dabei noch zeigen, dass $\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N \Rightarrow |J_n| < \varepsilon$ bzw. analog für I_n. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig:

$$|J_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1})(x+1) < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n} < \frac{\varepsilon}{2(x+1)}$$

Nach dem archimedischen Axiom wissen wir, dass $\exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varepsilon}{2(x+1)}$, sprich J_n bildet eine Intervallschachtelung. Wir betrachten nun noch I_n. Nach der binomischen Formel[7]:

$$|I_n| = b_n^k - a_n^k = (b_n - a_n) \cdot \sum_{l=0}^{k-1} b_n^l a_n^{k-1-l}$$

Wir wissen, dass $0 \leq a_n < b_n \leq b_1 = x + 1$, somit:

$$\sum_{l=0}^{k-1} b_n^l a_n^{k-l} \leq \sum_{l=0}^{k-1}(x+1)^l(x+1)^{k-1-l} = \sum_{l=0}^{k-1}(x+1)^{k-1} = k(x+1)^{k-1} = c > 0$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} |I_n| &= (b_n - a_n)\sum_{l=0}^{k-1} b_n^l a_n^{k-1-l} \leq (b_n - a_n) \cdot k(x+1)^{k-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x+1)k(x+1)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}k(x+1)^k \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\forall n \geq M$ gilt $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2(x+1)^k}$, damit ist $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}k(x+1)^k < \varepsilon$ Das heißt auch $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung. Nach unserer Konstruktion gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon x \in I_n$:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$$

Nach dem Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen existiert $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Für dieses y gilt $a_n \leq y \leq b_n$ und nach Lemma 2.2 gilt $a_n^k \leq y^k \leq b_n^k$, sprich $\forall n \in \mathbb{N}\colon y^k \in I_n$. Da der Durchschnitt einer Intervallschachtelung nur ein Element enthält gilt $y^k = x$. □

2.2.5 Die Supremumseigenschaft in $\mathbb{R}$

Definition 2.9: Schranken

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt eine obere Schranke von A, falls $\forall a \in A\colon a \leq s$. Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt eine untere Schranke von A, falls $\forall a \in A\colon a \geq t$. Wenn A eine obere Schranke besitzt, so nennen wir A nach oben beschränkt. Analog nennen wir A nach unten beschränkt, wenn eine untere Schranke existiert. Wenn A nach unten und nach oben beschränkt ist, nennen wir A beschränkt.

[7] siehe z.B. Diskrete Mathematik (oder später hier, wenn ich Zeit + Lust habe :O)

An dieser Stelle sei angemerkt, dass für eine obere Schranke $s \in \mathbb{R}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dass jedes $s' \in \mathbb{R}$ mit $s' \geq s$ ebenfalls eine obere Schranke von A ist, da $\forall a \in A\colon a \leq s \leq s'$. Analog gilt für durch $t \in \mathbb{R}$ nach unten beschränkte Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$, dass $t' \leq t$ ebenfalls eine untere Schranke von A ist, da $\forall a \in A\colon a \geq t \geq t'$.

Definition 2.10: Supremum und Infimum

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $\sigma \in \mathbb{R}$ heißt das Supremum von A, falls:
- σ eine obere Schranke von A ist
- $\forall s \in \mathbb{R}\colon s < \sigma$ gilt, dass s keine obere Schranke von A ist

Sprich σ ist die kleinste obere Schranke von A. Analog nennen wir $\tau \in \mathbb{R}$ das Infimum von A, falls τ eine untere Schranke von A ist, und $\forall t \in \mathbb{R}\colon t > \tau$ gilt, dass t keine untere Schranke von A ist, sprich τ ist die größte untere Schranke von A ist. Wir schreiben $\sigma = \sup(A)$ und $\tau = \inf(A)$.

Wir können die Bedingung der kleinsten oberen Schranke formaler schön hinschreiben:

$$\forall s < \sigma\colon \neg(\forall a \in A\colon a \leq s) \Leftrightarrow \forall s < \sigma\colon \exists a \in A\colon a > s$$

Meist schreibt man $s < \sigma$ in der Form $s = \sigma - \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Analog können wir die größte untere Schranke festlegen:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists a \in A\colon \tau + \varepsilon > a$$

Definition 2.11: Minimum und Maximum

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Eine Zahl $m \in \mathbb{R}$ heißt das Maximum von A, wenn $m \in A$ und $\forall a \in A\colon m \geq a$. Eine Zahl $l \in \mathbb{R}$ heißt das Minimum von A, wenn $l \in A$ und $\forall a \in A\colon l \leq a$. Wir schreiben $m = \max(A)$ und $l = \min(A)$.

Es sei angemerkt, dass das Minimum einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ auch eine obere Schranke ist. Wenn $m = \max(A)$, dann ist $m' < m$ keine obere Schranke mehr, da $m \in A$, somit ist $m = \sup(A)$. Wenn eine Menge also ein Maximum und ein Minimum hat, so gilt:

$$\begin{aligned} m = \max(A) &\Rightarrow m = \sup(A) \\ l = \min(A) &\Rightarrow l = \inf(A) \end{aligned}$$

Weiters kann eine Menge A nur ein Supremum besitzen. Angenommen es gäbe zwei Suprema σ und σ'. Da σ das Supremum ist, gilt $\sigma' \geq \sigma$ bzw. analog $\sigma \geq \sigma'$. Nach der Antisymmetrie von $\geq$ folgt $\sigma = \sigma'$.

Lemma 2.3: Charakterisierung von Supremum und Infimum

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, dann gilt: σ ist das Supremum von A, wenn:
1. $\forall a \in A\colon a \leq \sigma$
2. $\forall \varepsilon > 0\colon \exists a \in A\colon a > \sigma - \varepsilon$

τ ist das Infimum von A, wenn:
1. $\forall a \in A\colon t \leq a$
2. $\forall \varepsilon > 0\colon \exists a \in A\colon a < \tau + \varepsilon$

Lemma 2.4

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ und A besitzt ein Maximum $m = \max(A)$. Dann ist m auch das Supremum von A. Angenommen A besitzt ein Minimum $l = \min(A)$, dann ist l auch das Infimum von A.

Aus der Eindeutigkeit des Supremums bzw. Infimums folgt sofort die Eindeutigkeit des Maximums bzw. Minimums.

Satz 2.7

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Dann besitzt A auch ein Supremum. Analog: Sei A nach unten beschränkt, dann besitzt A ein Infimum.

Beweis. Weil $A \neq \emptyset$ existiert $a \in A$ und weil A nach oben beschränkt ist, existiert eine obere Schranke s von A. Wir wählen $a_1 = a \in A$ und $b_1 = s + 1$, dabei ist b_1 eine obere Schranke und $b_1 \notin A$ (wäre $b_1 \in A$, dann wäre s keine obere Schranke von A). Wir konstruieren weitere Intervalle induktiv. Angenommen $J_1, \dots, J_n$ seien bestimmt mit $a_k \in A$ für $k = 1, \dots, n$ und $b_k \notin A$, wobei b_k eine obere Schranke von A ist für $k = 1, \dots, n$. Die J_k bilden eine Intervallschachtelung $J_k \subseteq J_{k-1}$ für $k = 2, \dots, n$ und $|J_n| \leq \frac{1}{2}|J_{k-1}|$. Wir betrachten $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und machen eine Fallunterscheidung über $m_n \in A$.

Fall 1 $m_n \notin A$ und m_n ist eine obere Schranke von A, dann setzen wir $a_{n+1} = a_n \in A$ und $b_{n+1} = m_n \notin A$ und b_{n+1} ist eine obere Schranke von A, somit ist $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq J_n$ und $|J_{n+1}| = \frac{1}{2}|J_n|$.

Fall 2 $m_n \in A$ oder m_n ist keine obere Schranke von A:

Fall 2a $m_n \in A$, dann ist m_n keine obere Schranke von A. Wir setzen $a_{n+1} = m_n$ und $b_{n+1} = b_n$. Dann gilt $a_{n+1} \in A$ und $b_{n+1} \notin A$ und b_n ist eine obere Schranke von A. $J_{n+1} \subseteq J_n$ und $|J_{n+1}| = \frac{1}{2}|J_n|$.

Fall 2b m_n ist keine obere Schranke von A, somit $\exists a \in A\colon m_n < a$. Weil b_n eine obere Schranke von A ist, gilt $a \leq b_n$. Andererseits ist $b_n \notin A \Rightarrow a < b_n$. Wir wählen in diesem Fall $b_{n+1} = b_n$ und $a_{n+1} = a$, womit $J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Hier gilt $a_n < m_n < a < b_n \Rightarrow [a, b_n] \subseteq [a_n, b_n] = J_n$, also $J_{n+1} \subseteq J_n$ und $|J_{n+1}| = b_n - a < b_n - m_n = b_n - \frac{b_n + a_n}{2} = \frac{2b_n - b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2}|J_n|$, also $|J_{n+1}| < \frac{1}{2}|J_n|$.

$a_{n+1} \in A$, $b_{n+1} \notin A$ und b_{n+1} ist eine obere Schranke von A. Wir zeigen $\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N\colon |J_n| < \varepsilon$:

$$|J_n| \leq \frac{1}{2}|J_{n-2}| \leq \frac{1}{4}|J_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |J_1|$$

$|J_n| < \varepsilon$ für n sodass $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |J_1| < \varepsilon$, d.h. für n sodass $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{|J_1|}$ ist der Fall für n hinreichend groß, weil $\frac{1}{2} < 1$. Das heißt $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung.

Sei $\sigma \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Wir behaupten, σ ist das Supremum von A. Wir zeigen: σ ist eine obere Schranke von A, und führen einen Beweis durch Widerspruch. Wäre σ keine obere Schranke von A, dann $\exists x \in A$ mit $x > \sigma$. Wir setzen $\varepsilon = x - \sigma > 0$ und wählen n so groß, dass $|J_n| < \varepsilon$:

$$x = x - \sigma + \sigma = \sigma + \varepsilon > \sigma + b_n - a_n \geq a_n + b_n - a_n = b_n \Rightarrow x > b_n$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass b_n eine obere Schranke von A ist. Wir zeigen $\forall s < \sigma$ gilt, dass s keine obere Schranke von A ist. Sei $s < \sigma$ und setze $\varepsilon = \sigma - s$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|J_n| < \varepsilon$:

$$s = s - \sigma + \sigma = -\varepsilon + \sigma < a_n - b_n + \sigma \leq a_n - b_n + b_n = a_n$$

Sprich $s < a_n \in$, was ein Widerspruch dazu ist, dass s eine obere Schranke von A ist, also ist s das Supremum von A. □

2.2.6 Mächtigkeitein von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Definition 2.12

Eine Menge M, die zu $\mathbb{N}$ gleichmächtig ist, nennen wir abzählbar unendlich. $\varphi\colon \mathbb{N} \to M$ sei bijektiv. Wir schreiben m_n und $M = \{m_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Da φ bijektiv ist, gilt $m_n \neq m_k$ für $n \neq k$.
Seien A und B Mengen. Wir nennen B mindestens gleichmächtig zu A, falls eine injektive Abbildung $\varphi\colon A \to B$ existiert. Eine Menge A heißt überabzählbar unendlich, wenn sie mindestens gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, aber nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Satz 2.8

$\mathbb{R}$ ist überabzählbar unendlich.

Beweis. $\varphi(n) = n$, $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist injektiv. Wir zeigen: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig durch Widerspruch. Angenommen $\mathbb{R} = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, also $n \mapsto x_n$ ist eine bijektive "Abzählung". Idee: wir konstruieren eine Intervallschachtelung $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \notin J_n$ induktiv. Für J_1 wählen wir $J_1 = [x_1 + 1, x_1 + 2]$, womit $|J_1| = 1$ und $x_1 \notin J_1$. Wir nehmen an $J_n \subset J_{n-1} \subset \dots \subset J - 1$ mit $x_k \notin J_k$ für $k = 1, \dots, n$ udn $|J_k| = \frac{1}{3}|J_{k-1}|$ für $k = 2, \dots, n$. Wir teilen J_n in drei gleich lange abgeschlossene Intervall I_n^1, I_n^2, I_n^3, also $|I_n^j| = \frac{1}{3}|J_n|$ für

$j = 1, 2, 3$ und $I_n^1 \cap I_n^2 \cap I_n^3 = \emptyset$, d.h. x_{n+1} kann nicht in allen drei Intervallen liegen.Es gibt somit zumindest ein Teilintervall I_n^j mit $x_{n+1} \notin I_n^j$. Wir wählen als J_{n+1} eines der Intervalle I_n^j mit $x_{n+1} \notin I_n^j$. Damit ist $x_{n+1} \notin J_{n+1}$ und $J_{n+1} \subseteq J_n$ und $|J_{n+1}| = \frac{1}{3}|J_n|$. Die Länge von $J - n$ wird beliebig klein. Sei $\varepsilon > 0$:

$$|J_n| = \frac{1}{3}|J_{n-1}| = \frac{1}{9}|J_{n-2}| = \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}|J_1| = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \varepsilon$$

Für ein hinreichend großes n. Sei $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_k$ und sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $x \in J_n$ und $x_n \notin J_n$ ist offensichtlich $\forall n \in \mathbb{N}\colon x \neq x_n$, sprich c ist eine reelle Zahl, somit gilt $x \notin \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}$ ist ein Widerspruch. □

Satz 2.9

$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

Beweis. Wir konstruieren eine bijektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Wir schreiben $\varphi(n) = q_n$. Betrachten wir folgende Graphik:

				q_4	q_3	q_1	q_2	q_7	q_8			
$\cdots$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
$\cdots$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-4}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$\cdots$	$\frac{-5}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-3}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$\cdots$	$\frac{-5}{4}$	$\frac{-4}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$
$\cdots$	$\frac{-5}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$
$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Alle rationalen Zahlen kommen in dieser Tabelle (sogar wiederholt) vor. Wir schreiten einen (unendlichen) Weg durch die Tabelle, sodass alle rationalen Zahlen dabei erfasst werden. Dabei gehen wir entlang eines bestimmten Dreiecks entlang (TODO) und zählen dabei die Brüche ab, dabei werden erfasste Brüche übersprungen. Durch diesen Prozess erhalten wir eine bijektive Abzählung von $\mathbb{Q}$. □

2.3 Körper der Komplexen Zahlen

Hierbei handelt es sich um unsere letzte Erweiterung des Zahlensystems. Wir wissen, dass $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$, d.h. die Gleichung $x^2 = y$ hat für $y < 0$ kein Lösung in $\mathbb{R}$. Also existieren in $\mathbb{R}$ keine Wurzeln aus negativen Zahlen. Da wir aber durchaus solche Wurzeln benötigen, konstruieren wir uns einen Zahlbereich, in dem das Wurzelziehen aus negativen Zahlen möglich ist. Dieser erweiterte Zahlbereich ist eine echte Obermenge von $\mathbb{R}$.

> Wir denken uns eine arithmetische Größe i, die zu den reellen Zalen hinzugefügt wird (adjungiert). Die Größe i habe die Eigenschaft:
>
> $$\mathrm{i}^2 = -1$$

Es gilt $i \notin \mathbb{R}$, weil keine Zahl in $\mathbb{R}$ die obige Eigenschaft besitzt. Mit i bilden wir Ausdrücke der Form:

$$z = a + \mathrm{i}b \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Definition 2.13: Menge der komplexen Zahlen

Wir nennen $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} := \{a + \mathrm{i}b | a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$$

Wir definieren eine Arithmetik auf $\mathbb{C}$ mit den Eigenschaften:

1. $a + \mathrm{i}b = c + \mathrm{i}b \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$

   sprich die Darstellung $z = a + ib$ ist eindeutig
2. $\mathrm{i}^2 = -1$, wobei wir i die imaginäre Einheit nennen
3. Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen folgen den Körperaxiomen (sprich den Körperaxiomen) für zusammengesetzte Ausdrücke

   Das bedeutet:

$$(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) \overset{K1}{=} (a + c) + \mathrm{i}b + \mathrm{i}d \overset{D1}{=} \underbrace{(a + c)}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\underbrace{(b + d)}_{\in\mathbb{R}}$$

$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}^2 bd = \underbrace{(ac - bd)}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\underbrace{(ad + bc)}_{\in\mathbb{R}}$$

4. das neutrale Element der Addition ist $0 + \mathrm{i}0 = 0$
5. inverse Elemente der Addition sind gegeben durch $-a + \mathrm{i}(-b)$:

$$(a + \mathrm{i}b) + (-a + \mathrm{i}(-b)) = a - a + \mathrm{i}b - \mathrm{i}b = 0$$

6. die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ ist kommutativ und assoziativ
7. das neutrale Element der Multiplikation ist $1 + \mathrm{i}0 = 1$:

$$(a + \mathrm{i}b)(1 + \mathrm{i}0) = a \cdot 1 + \mathrm{i}b \cdot 1 + \mathrm{i}0 \cdot a + \mathrm{i}^2 b \cdot 0 = a + \mathrm{i}b$$

8. auf $\mathbb{C}$ gilt das Distributivgesetz

Für die Körperstruktur von $\mathbb{C}$ fehlt noch die Existenz des multiplikativen Inversen. Sei $z \in \mathbb{C}, z = a + ib$ gegeben und $z \neq 0$, sprich $(a, b) \neq (0, 0) \Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0$. Wir setzen die Zahl $z' = \frac{a}{a^2+b^2} - \mathrm{i}\frac{b}{a+b^2}$ und behaupten, dass es sich hierbei um das multiplikative Inverse von z, sprich $zz' = 1$:

$$z \cdot z' = \frac{(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - \mathrm{i}ab + \mathrm{i}ab - \mathrm{i}^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

Somit ist nachgewiesen, dass z' das multiplikative Inverse zu z ist und schreiben z^{-1} bzw. $\frac{1}{z}$. Wie kann man dieses Inverse herleiten? Sei $z' = \alpha + \mathrm{i}\beta$, wobei α, β unbekannt sind. Es soll gelten $(a + \mathrm{i}b)(\alpha + \mathrm{i}\beta) = 1$, somit:

$$\underbrace{(a\alpha - b\beta)}_{=1} + \mathrm{i}\underbrace{(b\alpha + a\beta)}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\alpha - b\beta = 1 \\ b\alpha + a\beta = 0 \end{cases}$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach α und β auf, erhält man genau die Werte $\frac{a}{a^2+b^2}$ und $\frac{-b}{a^2+b^2}$. Damit erfüllt $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ alle Körperaxiome und ist somit ein Körper.

Definition 2.14: Real- und Imaginärteil

Sei $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit $\mathbb{C} = \{a + \mathrm{i}b | a, b \in \mathbb{R}\}$ der Körper der komplexen Zahlen. Sie $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann nennen wir α den Realteil $\mathfrak{Re}\{z\}$ und β den Imaginärteil $\mathfrak{Im}\{z\}$ von z. Wir schreiben:

$$\alpha = \mathfrak{Re}\{z\} \qquad \beta = \mathfrak{Im}\{z\}$$

Die Zahl $\overline{z} = \alpha - \mathrm{i}\beta$ nenne wir die zu $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$ komplex konjugiert komplexe Zahl.

Die Konjugation hat einige wichtige Eigenschaften:

- $\forall z \in \mathbb{C}$: $\overline{(\overline{z})} = z$
- $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{z}$
- $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $\overline{(zw)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Definition 2.15: Betrag einer komplexen Zahl

Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Wir setzen $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ und nennen z den Betrag der komplexen Zahl z.

Lemma 2.5: Eigenschaften des Betrags

Für den Betrag in $\mathbb{C}$ gelten die folgenden Beziehungen:

1. $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt:
   - $|z| = |\overline{z}|$
   - $|\mathfrak{Re}\{z\}| \leq |z|$
   - $|\mathfrak{Im}\{z\}| \leq |z|$
   - $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $|zw| = |z||w|$
3. $\forall z, w \in \mathbb{C}$: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Beweis. Zu (1):

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$
- $|\mathfrak{Re}\{z\}| = |a| = \sqrt{a} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- $|\mathfrak{Im}\{z\}| = |b| = \sqrt{b} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- Sei $z = a + ib$, somit $a^2 + b^2 \geq 0$ womit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ Sei wiederum $|z| = 0$, sprich $\sqrt{a^+ b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$, da $a, b \in \mathbb{R}$

Zu (2):

$$|zw| = \sqrt{(zw)(\overline{zw})} = \sqrt{(zw) \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z||w|$$

Zu (3): Wir zeigen $|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{w} = z\overline{z} + w\overline{z} + \overline{w\overline{z}} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\mathfrak{Re}\{w\overline{z}\} + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|w\overline{z}| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

□

An dieser Stelle sei angemerkt, dass es keine Möglichkeit gibt eine Teilmenge $\mathbb{C}^+$ von "positiven komplexen Zahlen" zu definieren mit der $\mathbb{C}$ ein geordneter Körper ist. Wäre $\mathbb{C}^+$ die Menge der positiven Elemente in $\mathbb{C}$. Wir habe schon überlegt:

$$1 = 1 + \mathrm{i}0 \in \mathbb{C}^+ \Rightarrow -1 \in \mathbb{C}^-, -1 \notin \mathbb{C}^-$$

Ebenso: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z^2 \in \mathbb{C}^+$ allerdings gilt für $z = \mathrm{i}$, dass $z^2 = -1 \in \mathbb{C}^-$. Das heißt nicht, dass es keine Totalordnung auf $\mathbb{C}$ geben kann. Wie immer die Ordnung definiert wird, sie kann nicht $\forall x, y > 0$: $x + y > 0 \wedge xy > 0$ erfüllen.

Für $x \in \mathbb{R}$ identifizieren wir $x = x + \mathrm{i}0$, das heißt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Für eine komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ gilt: $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Im}\{x\} = 0$.

2.3.1 Geometrische Überlegungen über den komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen sind geometrisch betrachtet eine kontinuierliche Gerade, die beidseitig unendliche und lückenlos ist. Wir nennen $\mathbb{R}$ eindimensional[8]. Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ entspricht der Lage von Punkten auf der Gerade.

[8]Der Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ hat eine Basis B mit $|B| = 1$

Größere Elemente liegen dabei "weiter rechts", kleinere "weiter links". Die Geometrie von $\mathbb{C}$ ist nicht eindimensional[9]. Wir identifizieren komplexe Zahlen $z = a + ib$ mit Punkten in der euklidischen Ebene mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Reelle Zahlen liegen auf der horizontalen Achse, rein imaginäre Zahlen auf der vertikalen. Wir nennen dieses geometrische Modell der komplexen Zahlen die Gaußsche Zahlenebene, nach Carl Friedrich Gauß (1777-1855). Wir nennen die horizontale Achse die reelle Achse und die vertikale die imaginäre Achse. Die geometrische Addition in der Gaußschen Zahlenebene funktioniert analog zur Addition von Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Der Betrag einer komplexen Zahl entspricht der Hypotenuse des Dreiecks $((0,0),(a,0),(a,b))$ bzw. $((0,0),(0,b),(a,b))$. Die komplexe Konjugation entspricht einer Spiegelung an der reellen Achse.

Die Multiplikation mit i in der Gaußschen Zahlenebene entspricht einer Drehung um 90° in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn). Die Multiplikation mit einer rein reellen Zahl α ist als Streckung zu verstehen und wird analog zur Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ ausgeführt. Bei der Multiplikation von z mit einer anderen beliebigen komplexen Zahl 2 hat das Produkt u einen Winkel α zur reellen Achse, mit $\alpha = \varphi_z + \varphi_w$, weiters gilt $|u| = |z||w|$.

Lemma 2.6

Sei $w \in \mathbb{C}$, $w \neq$. Dann existieren genau zwei unterschiedliche komplexe Zahlen z_1 und z_2, die die Gleichung $z^2 - w = 0$ lösen, sprich $z_1^2 = z_2^2 = w$.

Beweis. Sei das gegebene $w = c + id$ und das gesuchte $z = x + iy$ mit unbekannten x bzw. y. Wir lösen $(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy \stackrel{!}{=} c + id$, also:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = c & (I) \\ 2xy = d & (II) \end{cases}$$

Wir erhalten also ein nicht-lineare Gleichungssystem in x und y. Wir formen $4x^2(I) + (II)^2$:

$$4x^-44x^2 = d^2 \Leftrightarrow 4x^4 - 4cx^2 - d^2 = 0$$

Hierbei handelt es sich um eine biquadratische Gleichung wir können also nach x^2 lösen (wir schreiben $x^2 = u$) und erhalten $4u^2 - 4cu - d^2 = 0$:

$$4u^2 - 4cu - d^2 = 0 \Leftrightarrow u^2 - cu - \frac{d^2}{4} = 0$$
$$d_{1,2} = \frac{c + \sqrt{c^2 + d^2}}{2}$$

Für $d \neq 0$ ist $u = \frac{c+\sqrt{c^2+d^2}}{2}$ die einzig sinnvolle Lösung. Wir haben also einen Ausdruck für x gefunden:

$$x = \pm\sqrt{\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Wir suchen noch die Lösung für y:

$$y^2 = x^2 - c = \frac{c}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2} - c = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2} - \frac{c}{2} > 0$$

Somit erhalten wir:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2} - \frac{c}{2}}$$

Insgesamt lösen nur:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + c} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}$$
$$z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + c} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}$$

die Gleichung $z^2 - w = 0$. Es gilt allgemein $z_1 = -z_2$. Für den Spezialfall $d = 0$ ist $z_{1,2} = \pm\sqrt{c}$ für $c \geq 0$ bzw. $z_{1,2} = \pm i\sqrt{-c}$ für $c < 0$ □

[9] der Vektorraum $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ hat eine Basis B mit $|B| = 2$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass in $\mathbb{C}$eine viel stärkere Aussage gilt, der Fundamentalsatz de Algebra. Sei $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein komplexes Polynom mit:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad a_k \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \geq 1$$

Wir nennen $P(x)$ ein komplexes Polynom vom Grad n. Der Fundamentalsatz besagt, dass jedes komplexe Polynom eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

3 Reelle und komplexe Folgen und Reihen

Definition 3.1: Folgen

Eine Abbildung $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bzw. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ nennen wir eine reelle bzw. komplexe Folge. Generelle schreiben wir a_n statt $a(n)$ und nennen n den Folgenindex und a_n das n-te Folgenglied.

Alternativ können wir auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben um eine Folge zu notieren und dann separat eine Abbildungsvorschrift angeben, wie etwa z.B. $a_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{n+1}$. Oftmals wird auch $\mathbb{N}$ als Indexmenge verwendet, sprich die Folgenglieder beginnen bei a_0 statt a_1.

Definition 3.2: Beschränktheit von Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt, falls $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \le c$. Eine solche Zahl c nennen wir die obere Schranke der Folge. Analog nennen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt, wenn $\exists d \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \ge d$. Wir nennen d dann eine untere Schranke von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Der Begriff der Beschränktheit wurde bereits für Mengen festgelegt. Wir können aber die Beschränktheit einer Folge durch die Beschränktheit von $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ nachweisen.

Lemma 3.1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt ist äquivalent zu:

$$\exists m \in \mathbb{R}\colon m \ge 0\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \le m$$

Beweis. $\Leftarrow$ Angenommen $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \le m \Leftrightarrow -m \le a_n \le m$, d.h. m ist eine obere Schranke der Folge und $-m$ ist eine untere Schranke der Folge, sprich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

$\Rightarrow$ Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei beschränkt, sprich $\exists d, c \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon d \le a_n \le c$. Wir zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \le \max(|c|, |d|)$$

Sei $a_n \ge 0$, dann gilt $0 \le |a_n| = a_n \le c = |c| \le \max |c|, |d|$. Sei $a_n < 0$, dann gilt $d \le a_n \Leftrightarrow -a_n \le -d$, sprich $0 < -a_n = -|a_n| \le -d = |d| \le \max(|c|, |d|)$, sprich für $m = \max |c|, |d|$ gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \le m$. $\square$

Definition 3.3: Komplexe Beschränktheit

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, falls:

$$\exists m \in \mathbb{R}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \le m$$

Definition 3.4: Monotonie

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, falls:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_{n+1} \geq a_n$$

Und monoton fallend, falls:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_{n+1} \leq a_n$$

Wir nennen eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend, falls:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_{n+1} > a_n$$

Analog nennen wir sie streng monoton fallend, falls:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_{n+1} < a_n$$

Um die Monotonie einer Folge nachzuweisen verwenden wir oftmals Induktion.

Definition 3.5: Konvergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Sei weiters $a \in \mathbb{C}$ gegeben. Wir sagen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert a, falls:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, schreiben wir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Ist eine Folge nicht konvergent, so nennen wir sie divergent. Wir können uns das Konzept der Konvergenz geometrisch veranschaulichen. Sei $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathbb{K}}(z_0) := \{z \in \mathbb{K}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$ eine offene Kreisscheibe mit Radius ε um z_0. Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, falls wir zu einem beliebigen ε einen Folgenindex N finden können, für den gilt $\forall n \geq N\colon a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(a)$. Für reelle Folge vereinfacht sich $\mathcal{B}_\varepsilon(x_0) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Beispiel (wohl eines der wichtigsten): Wir betrachten die folgende Folge:

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

über $\mathbb{R}$. Wir behaupten dass die Folge konvergent mit Grenzwert 0 ist. Wir müssen also zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Da $|\frac{1}{n} + 0| = \frac{1}{n}$ folgt direkt aus dem Archimedischen Axiom, dass die Folge konvergent ist.

Beispiel: Sei $q \in \mathcal{B}_1^{\mathbb{C}}(0)$, dann ist $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 0. Da $|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n$, folgt aus dem Archimedischen Axiom wider, dass $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Definition 3.6: Nullfolgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen 0 konvergente komplexe Folge, so nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Lemma 3.2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge über $\mathbb{C}$, dann gilt: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{C}$ ist äquivalent dazu, dass $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge, somit $\forall \varepsilon >: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$. Wenn $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gilt:

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \underbrace{||a_n - a| - 0|}_{=|a_n - a|} < \varepsilon$$

□

Lemma 3.3: Eindeutigkeit des Grenzwertes

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ kann höchstens einen Grenzwert haben.

Beweis. Angenommen a, b sind Grenzwerte mit $a \neq b$ und sei $|a - | > 0$. Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$. Für dieses ε existiert $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \geq N_1: |a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$. Ebenso existiert $N_2 \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_2: |a_n - b| < \varepsilon = \frac{1}{2}|a - b|$. Wir wählen ein $n = \max(N_1, N_2)$, sprich $n \geq N_1$ und $n \geq N_2$, damit gilt:

$$\begin{aligned} &|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = |a - b| \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, somit kann nur ein Grenzwert existieren. □

3.1 Arbeiten mit Grenzwerten

3.1.1 Einige Bemerkungen über reelle Funktionen

Definition 3.7

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$. Wir sagen: f ist monoton wachsend falls:

$$\forall x, y \in I: x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Und monoton fallend:

$$\forall x, y \in I: x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Und die strikten Varianten:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \forall x, y \in I: x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

Die Monotonie ist nur definiert, wenn die Definitionsmenge I ein Intervall ist. So ist etwa $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht monoton.

Lemma 3.4

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f: I \to J$ eine streng monotone Funktion. Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch bijektiv. Außerdem gilt $f^{-1}: J \to I$ ist von gleicher Monotonie wie f.

Beweis. Sei f ohne Beschränkung der Allgemeinheit streng monoton wachsend. Sei $x, y \in I$ mit $x \neq y$ und o.B.d.A. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, sprich $f(x) \neq f(y)$, also ist f injektiv.

Es verbleibt zu zeigen, dass f^{-1} von gleicher Monotonie ist. Angenommen f^{-1} wäre nicht streng monoton wachsend. Dann $\exists v, w \in J: v < w: f^{-1}(v) \geq f^{-1}(w)$. Falls $v < w$ folgt aus der Injektivität von f^{-1}, dass $f^{-1}(v) \neq f^{-1}(w)$,s sprich wir können annehmen, dass $v < w$ und $f^{-1}(v) > f^{-1}(w)$ gilt. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, sprich:

$$f(f^{-1}(w)) < f(f^{-1}(v)) \Rightarrow w < v$$

Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, somit ist f^{-1} streng monoton wachsend. □

Lemma 3.5

Sei $f: I \to J$ und $g: J \to K$ gegeben, wobei I, J, K Intervalle in $\mathbb{R}$ sind. Seien f, g monoton wachsend, dann ist auch die Komposition $g \circ f: I \to K$ monoton wachsend. Das gilt auch für starke Monotonie.

Beweis. Seien $x, y \in I$ mit $x \leq y$, sprich $f(x) \leq f(y)$ und $g(f(x)) \leq g(f(x))$. □

Definition 3.8: Potenzfunktionen

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die Potenzfunktion n-ten Grades $p_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als $p_n(x) = x^n$. Sei im folgenden $n \geq 1$. Wie n-te Wurzelfunktion $w_n: [0, \infty) \to [0, \infty)$ ist definiert als $w_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Wir notieren $w_n = p_{\frac{1}{n}}$ bzw. $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Für $q = \frac{m}{n}$ definieren wir die allgemeine Potenzfunktion mit Exponent q:

$$\begin{aligned} &p_q = p_{\frac{m}{n}}, p_q: [0, \infty) \to [0, \infty) \\ &p_q(x) = p_m \circ w_n = w_n \circ p_m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m} \end{aligned}$$

Wir wissen für $x, y \geq 0$ mit $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$, durch Induktion erhalten wir $x^n < y^n$, also ist p_n auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend. Nach Lemma 3.4 ist w_n streng monoton wachsend. Die allgemeine Potenzfunktion $p_{\frac{m}{n}}$ ist nach Lemma 3.5 ebenfalls streng monoton wachsend.

3.1.2 Eigenschaften konvergenter Folgen

Lemma 3.6

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$, dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Beweis. Sei $\varepsilon = 1$. Weil $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| - 1$ für für $n \geq N$. Für diese $n \geq N$ gilt die Dreiecksungleichung:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

Wir setzen $m' = \max(\{|a_i|, i = 1, \dots N - 1\})$. Weiter sei $m = \max(\{m, 1 + |a|\})$. Für $n < N$ gilt $|a_n| \leq m' \leq m$ und für $n \geq N$ gilt $|a_n| < 1 + |a| \leq m$, sprich $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq m$, somit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. □

Satz 3.1: Einige wichtige konvergente Folgen

1. Sei $s = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, dann ist $\left(\frac{1}{p_s(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge
2. Sei $a > 0$, dann ist $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert 1
3. $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert 1
4. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, sei $k \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$$

Beweis. Zu 1)

Sei ε beliebig. Wir suchen $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{p_s(n)} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{p_s(n)} < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon < p_s(n) \\ &\Leftrightarrow p_q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < p_q(p_s(n)) \Leftrightarrow p_q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < p_p(n) \\ &\Leftrightarrow w_p\left(p_q\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) < w_p(p_p(n)) \Leftrightarrow p_{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n \end{aligned}$$

Für $n \geq N > p_{\frac{1}{s}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ist $\left|\frac{1}{p_s(n)}\right| < \varepsilon$

Zu 2)

Sei $a > 0$. Wir zeigen $\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. Hierbei sei vorweg angemerkt:

$$(a-1) = (\sqrt[n]{a})^n - 1^n = (\sqrt[n]{a} - 1)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt[n]{a}^k\right) = (\sqrt[n]{a} - 1)\sum_{k=0}^{n-1} p_{\frac{k}{n}}(a)$$

Wir machen eine Fallunterscheidung über $a > 1$:

1. Fall $a > 1$, dann:

$$\sqrt[n]{a} - 1 = \frac{a-1}{\sum_{k=0}^{n} a^{\frac{k}{n}}}$$

Weiters ist $a^{\frac{k}{n}} > 1^{\frac{k}{n}} = 1$, somit:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} > \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Damit ist:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 = \frac{|a-1|}{\left|\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}}\right|} = \frac{a-1}{\sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}}} < \frac{a-1}{n}$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N > \frac{a-1}{\varepsilon}$, dann gilt $\forall n \geq N$:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{N} < \frac{a-1}{\frac{a-1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

2. Fall $a = 1$: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$ somit $\sqrt[n]{1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$
3. Fall $0 < a < 1$, somit ist $\alpha = \frac{1}{a} > 1$:

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \left|\sqrt[n]{a}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)\right| = |\sqrt[n]{a}|\left|1 - \sqrt[n]{\frac{1}{a}}\right| = |\sqrt[n]{a}||1 - \sqrt[n]{\alpha}| < |1 - \sqrt[n]{\alpha}| < \varepsilon$$

Nach Fall 1 können wir ein n finde, dass diese Ungleichung erfüllt ist

Zu 3)

Wir wissen setzen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$, somit ist $x_n + 1 = \sqrt[n]{n}$ bzw. $(x_n + 1)^n = n$. Wir wissen für $n \geq 2$ gilt $x_n > 0$:

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \underbrace{\kappa}_{>0} > 1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 > 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow 2\frac{n-1}{n(n-1)} > x_n^2$$

Also gilt $\forall n \geq\colon x_n^2 < \frac{2}{n}$ bzw. $x_n < \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Sei $\varepsilon > 0$, wie wählen nun N so, dass $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, für diese n gilt $0 < x_n < \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} < \sqrt{2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} = \varepsilon$, d.h:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{n} - 1| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Zu 4)

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen für ein hinreichend großes n:

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| < \varepsilon \tag{1}$$

Wir setzen $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$, dann ist:

$$|z|^n = (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \tag{2}$$

Wir wählen $N > 2k$ und $n \geq N$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
|z|^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j > \binom{n}{k+1} x^{k+1} = \frac{\prod_{j=0}^{k}(n-j)}{(k+1)!} x^{k+1} \\
&> \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} x^{k+1} \\
&\Rightarrow |z|^n > \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!} x^{k+1} \Rightarrow \frac{n^k}{|z|^k} < \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2^{k+1})(k+1)!}{x^{k+1}}}_{=c>0}
\end{aligned}$$

Dabei ist c von n unabhängig und $\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wir wählen nun $N \in \mathbb{N}$, sodass $N > 2k$ und $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{c}$, dann gilt für $n \geq N$:

$$\frac{n^k}{|z|^k} < \frac{1}{n} c \leq \frac{1}{N} c < \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$$

□

Wir sehen bei Punkt 4), dass obwohl n^k divergent ist, die Folge $\frac{n^k}{z^n}$ trotzdem konvergiert, da z^n exponentielles Wachstum aufweist, und n^k nur polynomielles[10].

Wir wissen nun bereits, dass Konvergenz Beschränktheit impliziert. Gilt das auch umgekehrt? Nein, betrachten wir z.B. die Folge $(-1)^n$, so ist diese durch 1 und -1 beschränkt, jedoch konvergiert diese Folge nicht. Wir betrachten daher folgenden Satz:

Satz 3.2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (streng) monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergent. Analog gilt für (streng) monoton fallende Folgen, die nach unten beschränkt sind, dass sie konvergieren.

Beweis. Setze $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, M ist nach oben beschränkt. Nach der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ gilt $\exists a \in \mathbb{R} \colon a = \sup(M)$, sprich:

- $\forall n \in \mathbb{N} \colon a_n \leq a$
- $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists a_k \in M \colon a_k > a - \frac{\varepsilon}{2}$ womit $\exists N \in \mathbb{N} \colon a_N \geq a - \frac{\varepsilon}{2}$

Sprich $\forall n \geq N$ gilt:

$$a \geq a_n \geq a_N \geq a_N - \frac{\varepsilon}{2} > a_N - \varepsilon$$

Insbesondere:

$$a_N - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon$$

Somit $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ □

Satz 3.3: Einschließungsregel

Sein $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit dem gleichen Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Sei weiters $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N} \colon a_n \leq c_n \leq b_n$ dann ist auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a.

[10] Mit der Landau-Notation aus der theoretischen Informatik lassen sich die Wachstumsgeschwindigkeiten von Folgen als Klassen von Funktionen darstellen, die es erlauben derlei Folgen schnell und einfach zu evaluieren, indem man prüft ob die Nennerfolge aus einer größeren Familie stammt als die Zählerfolge

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1 \Rightarrow a_n - a| < \varepsilon$ und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - a|\varepsilon$. Wir setzen $N = \max(N_1, N_2)$. Wir wählen $n \geq N$, dann gilt:

$$a - c_n \leq a - a_n \leq |a - a_n| < \varepsilon$$
$$c_n - a \leq b_n - a \leq |b_a - a| < \varepsilon$$

Also gilt $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. □

Lemma 3.7: umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \colon ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Beweis. Wir zeigen $|z| - |w| \leq |z - w|$ und $|w| - |z| \leq |z - w|$:

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w|$$
$$|w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |z - w|$$

□

Satz 3.4: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexe konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gelten die folgenden Rechenregeln:

i) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b$

ii) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) = ab$

iii) Mit $\forall n \in \mathbb{N} \colon b_n \neq 0$ gilt $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis. Zu i)

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei $N = \max(N_1, N_2)$ und sei $n \geq N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$$

Zu ii)

Seien $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma 3.6 beschränkt, sprich $\exists M \geq 0 \colon \forall n \in \mathbb{N} \colon |a_n| \leq M$. Wir betrachten:

$$\begin{aligned}
&|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\
&\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&\leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|
\end{aligned}$$

Wir wählen $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$ und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_2 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$. Für $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ gilt:

$$|a_n b_n - ab| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \leq \frac{\varepsilon M}{2(M+1)} + \frac{\varepsilon |b|}{2(< b| + 1)} < \varepsilon$$

Wir zeigen zuerst $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen $\frac{1}{b}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da $b \neq 0$ gilt $|b| > 0$. Wir setzen $\eta = \frac{1}{2}|b| > 0$. Da $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$ existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1 \Rightarrow |b_n - | < \eta = \frac{1}{2}|b|$. Damit ist $|b_n| = |b_n - b + b| \geq ||b| - |b - b_n||$ nach Lemma 3.7. Somit

$$|b_n| \geq |b| - |b_n - b| \geq |b| - \eta = |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|$$

Wir wählen $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon|b|^2$. Für $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ gilt:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|} < \frac{\varepsilon|b|^2}{2|b||b_n|} = \varepsilon$$

Somit $\frac{1}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \frac{1}{b}$. Nach ii):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} = \frac{a}{b}$$

□

Satz 3.5

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert a. Sei $a_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ und $a = x + \mathrm{i}y$ mit $x_n = \mathfrak{Re}\{a_n\}$ und $y_n = \mathfrak{Im}\{a_n\}$ bzw. $x = \mathfrak{Re}\{a\}$ und $y = \mathfrak{Re}\{a\}$, dann gilt:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Re}\{a_n\} = \mathfrak{Re}\{a\} = x$
ii) $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{Im}\{a_b\} = \mathfrak{Im}\{a\} = y$
iii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$
iv) $\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$
v) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige komplexe Folge mit $a_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende reelle Folge ist, und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen y konvergierende reelle Folge. Dann ist auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a = x + \mathrm{i}y$

Beweis. Zu i)

Es gilt $|\mathfrak{Re}\{z\}| \leq |z|$ und $|\mathfrak{Im}\{z\}| \leq |z|$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Für diese n gilt $|\mathfrak{Re}\{a_n - a\}| = |\mathfrak{Re}\{a_n\} - \mathfrak{Re}\{a\}| \leq |a_n - a|$ also gilt $\mathfrak{Re}\{a_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}\{a\}$

ii) Wird analog zu i) bewiesen.

Zu iii) Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Wir zeigen $||a_n| - |a|| < \varepsilon$ für diese n:

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

Zu iv)

$$|a_n - a| = \sqrt{(a_n - a)\overline{(a_n - a)}} = |\overline{a_n - a}| = |\overline{a}_n - \overline{a}|$$

Zu v)

Sei $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$:

$$|(x_n + \mathrm{i}y_n) - (x + \mathrm{i}y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}$$

Wir wählen $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ und $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Für $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ gilt:

$$|(x_n + \mathrm{i}y_n) - (x + \mathrm{i}y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

□

Satz 3.6: Monotonie des Grenzwertes

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen. Angenommen es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N\colon a_n \leq b_n$. Sei weiters $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$, dann gilt $a \leq b$

Beweis. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen $a > b$. Sei $\varepsilon = a - b > 0$:

i) $\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N_a \in \mathbb{N} \colon n \geq N_a \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

ii) $\forall \varepsilon \colon \exists N_b \in \mathbb{N} \colon n \geq N_b \Rightarrow |b_n - b| \frac{\varepsilon}{2}$

Wir setzen $\tilde{N} = \max(N, N_a, N_b)$. Für $n \geq \tilde{N}$ gelten $a_n \leq b_n$, i) und ii). Es gilt:

$$\begin{aligned} & a_n - b_n = (a_n - a) + (a - b) + (b - b_n) \geq \varepsilon - |a_n - a| - |b_n - b| \\ & > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 0 \\ & \Rightarrow a_n - b_n > 0 \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $a_n \leq b_n$, womit $a_n - b_n \leq 0$ □

Definition 3.9: Offene Kugel

Sei V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper ist. Existiert auf V eine Norm $\|\cdot\| \colon V \to \mathbb{K}$, dann können wir für $r \in \mathbb{K}, z \in V$ eine offene Kugel $\mathcal{B}$ definieren:

$$\mathcal{B}_r(z) = \{w \in V \colon \|w - z\| < r\}$$

Die abgeschlossene Kugel $\overline{\mathcal{B}_r(z)}$ ist definiert als:

$$\overline{\mathcal{B}_r(z)} = \{w \in V \colon \|w - z\| \leq r\}$$

Wir werden uns hauptsächlich mit offenen Kugeln über dem zweidimensionalen $\mathbb{R}$ Vektorraum $\mathbb{C}$ und in $\mathbb{R}$ beschäftigen, für die wir bereits den Betrag als Norm[11] verwenden. Auf $\mathbb{R}$ entspricht eine offene Kugel einem offenen Intervall symmetrisch um eine Zahl $x \in \mathbb{R}$.

Definition 3.10: Häufungspunkt

Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl z heißt Häufungspunkt der Folge, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists M \subseteq \mathbb{N} \colon |M| = |\mathbb{N}| \colon \forall n \in M \colon z_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(z)$$

Ein Beispiel einer Folge, die solche Häufungspunkte besitzt haben wir bereits kennengelernt $(-1)^n$. Da $\forall n \in [0]_2 \colon (-1)^n = 1$ und $\forall n \in [1]_2 \colon (-1)^n = -1$ sind $+1$ und -1 Häufungspunkte von $(-1)^k$. Eine Erweiterung dieser Folge wäre (i^n).

Lemma 3.8

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Es gilt $a \in \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt der Folge ist äquivalent zu $\forall \varepsilon > 0 \colon \forall N \in \mathbb{N} \colon \exists n \geq N \colon |a_n - a| < \varepsilon$.

Beweis. $\Rightarrow$ Sei a ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. In $\mathcal{B}_\varepsilon(a)$ liegen unendlich viele Folgenglieder a_n. Die Anzahl der Folgenglieder a_n mit Index $n < N$ ist genau $N - 1$ (also nur endlich viele), d.h. es existiert ein $n \geq N$ mit $a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\Leftarrow$ Angenommen die Bedingung gilt. Sei $\varepsilon > 0$. Wir konstruieren induktiv unendlich viele Folgenglieder $a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(a)$.

$k = 1$. Wähle $N_1 =$. Nach der Bedingung existiert $n \geq N_1$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Dieses n setzen wir gleich n_1.

Angenommen $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}$ sind bereits konstruiert mit $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ und $|a_{n_j} - a| \varepsilon$ für $j = 1, \dots, k$. Wir konstruieren nun $a_{n_{k+1}}$. Wir wählen $N_{k+1} = n_k + 1 > n_k$ nach der Bedingung existiert $n \geq N_k$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Wir wählen n_{k+1} als genau jenes n, weil $n = n_{k+1} \geq N > n_k$ ist und $|a_{n_{k+1}} - a| < \varepsilon$. Also sind $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ unendlich viele unterschiedliche Folgenglieder mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_{n_n} \in \mathcal{B}_\varepsilon(a)$. □

[11] siehe Linear Algebra

Definition 3.11: Teilfolgen

Sei $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Wir schreiben wieder ν_k mit $k \in \mathbb{N}$ statt $\nu(k)$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir konstruieren daraus die Folge $(\tilde{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $\tilde{a}_k = a_{\nu(k)} = a_{n\nu_k}$. Wir nennen $(\tilde{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} = (a_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Meist schreiben wir $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ statt $(a_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Beispiel: Wir betrachten $\nu_k = 3k$ und $a_n = \frac{1}{n}$, dann ist $a_{n_k} = \frac{1}{3k}$, womit $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{6}, \ldots$.

Lemma 3.9

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente komplexe Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent gegen a.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Für $k \geq N$ gilt $n_k \geq k \geq N$, sprich $\forall k \geq N\colon |a_{n_k} - a|\varepsilon$. □

Lemma 3.10

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge, dann sind äquivalent:
1. $a \in \mathbb{C}$ ist ein Häufungspunkt
2. $\exists \nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon \lim_{n\to\infty} a_{\nu_k} = a$ mit ν streng monoton steigend

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = a$. Sei $\varepsilon > 0$. Aus der Konvergenz der Teilfolge folgt:

$$\exists K \in \mathbb{N}\colon k \geq K \Rightarrow a_{n_k} \in \mathcal{B}_\varepsilon(a)$$

Somit liegen in $\mathcal{B}_\varepsilon(a)$ unendliche viele Folgenglieder.

2) $\Rightarrow$ 1)

Sei a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir konstruieren eine konvergente Teilfolge induktiv. Wir setzen $\varepsilon_k = \frac{1}{k} > 0$ mit $k \in \mathbb{N}$. Wir verwenden Lemma 3.8 für $N = 1$ und $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, womit $\exists n \in \mathbb{N}\colon |a_n - a| < 1$. Wir wählen $n_1 = n$, d.h. $|a_{n_1} - a| < \varepsilon_1$. Angenommen $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ sind bereits konstruiert mit $n_1 < \cdots < n_k$ und $|a_{n_k} - a| < \varepsilon_k$. Wir wählen $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}, N = n_k + 1$ und verwenden Lemma 3.8: womit $\exists n \geq N > n_k\colon |a_n - a| < \varepsilon_{k+1}$. Wir setzen $n_{k+1} = n$, sprich $n_{k+1} > n_k > \cdots > n_1$ und $|a_{n_{k+1}} - a| < \varepsilon_{k+1}$. Für die konstruierte Folge gilt:

Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$, wir wählen $K \in \mathbb{N}\colon \forall k \geq K\colon \varepsilon_k < \tilde{\varepsilon}$. Für diese $k \geq K$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon_k = \frac{1}{k} < \tilde{\varepsilon}$$

Somit ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$. □

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, dann ist a auch ein Häufungspunkt der Folge. Weiters ist der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{K}}$ in $\mathbb{C}$ der einzige Häufungspunkt.

Satz 3.7: Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis. Wir konstruieren induktiv eine Intervallschachtelung $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$, sodass $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ ein Häufungspunkt der Folge ist.

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt $\exists M > 0\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \in [-M, M]$. Wir setzen $I_1 = [-M, M]$, womit $|I_1| = 2M > 0$. In I_1 liegen alle (d.h. unendlich viele) Folgenglieder. Angenommen $I_1, \ldots, I_k$ sind bereits konstruiert mit $I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1$ und $|I_k| = \frac{M}{2^{k-2}}$ und alle Intervalle $I_1, \ldots, I_k$ enthalten unendliche viele Folgenglieder.

Wir setzen $I_k = [a_k, b_k]$ und wählen $m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Zumindest eines der Intervalle $[a_k, m_k]$ oder $[m_k, b_k]$ muss unendlich viele Folgenglieder enthalten. Wir wählen eines der Teilintervalle aus, das unendlich viele Folgenglieder enthält als nächstes Intervall I_{k+1}, damit gilt $I_{k+1} \subseteq I_k$ und $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k| = \frac{M}{2^{(k+1)-2}}$ und I_{k+1} enthält unendlich viele Folgenglieder. $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung. Sei $\varepsilon > 0$, dann $|I_k| = \frac{4M}{2^k} < \varepsilon$ ist äquivalent zu $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4M}$ was für hinreichend große k erfüllt ist. Sei $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$. Wir zeigen nun, dass a ein Häufungspunkt der Folge ist. Sei $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ groß genug, dass $\frac{M}{2^{k-2}} < \varepsilon$. Wir betrachten $\mathcal{B}_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ mit $I_k = [a_k, b_k]$ und $a \in I_k$. Wir zeigen $a_n > a - \varepsilon$ und $b_k < a + \varepsilon$:

$$\begin{aligned}
a_k &= a + a_k - a > a - \varepsilon \\
b_K &= b_k - a + a \leq b_k - a_k + a < \varepsilon + a
\end{aligned}$$

Somit gilt $I_k \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, sprich $\mathcal{B}_\varepsilon(a)$ enthält unendlich viele Folgenglieder. □

Alternative Formulierungen von Satz 3.7 sind:

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge
- Sei $K = [l, r] \subseteq \mathbb{R}$ und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \in K$, dann besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} = a \in K$

Sei K eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass jede Folge von Elementen in K, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in K$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt. Eine solche Menge nennen wir kompakt. Auf $\mathbb{R}$ ist jedes Intervall $[a, b]$ mit $a \leq b$ kompakt.

Satz 3.8: Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$

Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$. Dann hat $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und daher einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$.

Beweis. Seien $z_n = a_n + ib_n$ die Glieder der gegebenen komplexen Folge. Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$. Nach Satz 3.7 hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} = a \in \mathbb{R}$. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist folgt ebenfalls nach Satz 3.7, dass eine konvergente Teilfolge $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $b_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} = b$ existiert. Damit ist auch $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a. Also gilt für $(z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$: $z_{n_{k_l}} = a_{n_{k_l}} + ib_{n_{k_l}}$, dass die Folgen der Real- und Imaginärteile beide konvergieren, womit $(z_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist und somit einen Häufungspunkt besitzt. □

Definition 3.12: Cauchy-Folge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Lemma 3.11

Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert $N \in \mathbb{N}\colon n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seien nun $m, n \geq N$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Satz 3.9

Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist auch konvergent.

Beweis. Wir verwenden Intervallschachtelungen für den Beweis. Wir benötigen dabei die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ in Bezug auf Intervallschachtelungen. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wir wählen $N \in \mathbb{N}\colon \forall m, n \geq N\colon |a_m - a_n| < 1$. Dann folgt für alle $n \geq N$:

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$$

Sei weiters $m = \max(|a_1|, \ldots, |a_{N-1}|)$ und $M = \max(m, |a_N| + 1)$. Dann gilt für $n < N\colon |a_n| \leq m \leq M$ und für $n \geq N\colon |a_n| \leq |a_N| + 1 \leq M$, sprich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Wir definieren unsere Intervallschachtelung induktiv mit $I_1 = [-2M, 2M]$, $l_1 = |I_1| = 4m$ und $N_1 = 1$. Wir stellen folgende Eigenschaften von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fest:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \in I_1$
2. $a_n \leq M \Rightarrow a_n + M \leq 2M$, $a_n \geq -M \Rightarrow a_n - M \geq -2M$ sprich $\forall n \in \mathbb{N}\colon [a_n - M, a_n + M] \subseteq I_1$

Seien $I_1, \ldots, I_k$ konstruiert, sodass $l_J = |I_j|$ und $\forall j \in \{1, \ldots, k\}\colon \exists N_j\colon \forall n \geq N_j\colon a_n \in I_j$, wobei $N_{j+1} \geq N_j$. Und $\forall n \geq N_j\colon [a_n - \frac{l_j}{4}, a_n + \frac{l_j}{4}] \subseteq I_j$ und zuletzt $I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1$ und $|I_k| = \frac{1}{2}|I_{k-1}| = \cdots = \frac{1}{2^{k-1}}|I_1|$.

Wir wählen $N_{k+1} \geq N_k$, sodass $\forall m, n \geq N_{k+1}\colon |a_n - a_m| < \frac{l_k}{4}$:

$$I_{k+1} = \left[a_{N_{k+1}} - \frac{l_k}{4}, a_{N_{k+1}} + \frac{l_k}{4}\right]$$
$$|I_{k+1}| = a_{N_{k+1}} + \frac{l_k}{4} - a_{N_{k+1}} + \frac{l_k}{4} = \frac{l_k}{2} = \frac{1}{2}|I_k|$$

Sei $n \geq N_{k+1} \Rightarrow |a_n - a_{N_{k+1}}| < \frac{l_k}{4}$ womit $a_n = a_n - a_{N_{k+1}} + a_{N_{k+1}} \geq a_{N_{k+1}} - |a_N - a_{N_{k+1}}| > a_{N_{k+1}} - \frac{l_k}{4}$. Weiters $a_n = a_n - a_{N_{k+1}} + a_{N_{k+1}} \leq a_{N_{k+1}} + |a_n - a_{N_{k+1}}| < a_{N_{k+1}} + \frac{l_k}{4}$. Sprich $a_{N_{k+1}} - \frac{l_k}{4} < a_n < a_{N_{k+1}} + \frac{l_k}{4}$ somit $a_n \in [a_{N_{k+1}} - \frac{l_k}{4}, a_{N_{k+1}} + \frac{l_k}{4}]$. Wir brauchen nun noch $I_{k+1} \subseteq I_k$:

$$\forall n \geq N_k\colon |a_n - a_{N_k}| < \frac{l_k}{4}$$

□

Definition 3.13: Vollständigkeit in Bezug auf Cauchy-Folge

Sei X eine Menge auf der eine Abstands-Funktion existiert (auf $\mathbb{R}$ etwa der Betrag). Wir nennen X vollständig (in Bezug auf Cauchy-Folgen), falls jede Cauchyfolge auf X konvergent ist.

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind vollständig. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge über $\mathbb{C}$ mit $z_n = a_n + ib_n$. Wegen $|a_n - a_m| = |\mathfrak{Re}\{z_n\} - \mathfrak{Re}\{z_m\}| = |\mathfrak{Re}\{z_n - z_m\}| \leq |z_n - z_m|$ folgt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen über $\mathbb{R}$. Also existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, womit $z_n = a_n + ib \overset{a\to+}{\longrightarrow} ib$. Weiters ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig, etwa die Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ hat keinen rationalen Grenzwert.

Definition 3.14

Sei $x \in \mathbb{R}$, dann $\exists! n \in \mathbb{Z}\colon n \leq x < n+1$. Wir nennen n das "größte Ganze" von x und schreiben $n = \lfloor x \rfloor$.

Lemma 3.12

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dann $\exists q \in \mathbb{Q}\colon |x - q| < \varepsilon$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Wir betrachten $q = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in \mathbb{Q}$:

$$x - q = \frac{nx}{n} - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = \frac{1}{n}(nx - \lfloor nx \rfloor) < \frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$x - q = \frac{1}{n}(nx - \lfloor nx \rfloor) \geq 0$$

Somit $|x - q| < \varepsilon$. □

Definition 3.15

Sei $M \subseteq \mathbb{K}$ (wobei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist). Wir nennen M liegt dicht in $\mathbb{K}$, wenn $\forall x \in \mathbb{K}\colon \forall \varepsilon > 0\colon \exists q \in M\colon |x - q| < \varepsilon$.

Wir haben bereits mit Lemma 3.13 gezeigt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Wir können diese Aussage etwas einschränken:

Lemma 3.13

Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann enthält I unendlich viele rationale Zahlen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass jedes Intervall (a, b) mit $a < b$ zumindest eine rationale Zahl enthält. Sei dazu $m = \frac{1}{2}(a + b)$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, dann $\exists q \in \mathbb{Q}$ sodass:

$$|q - m| < \varepsilon = \frac{1}{2}(b - a) \Rightarrow q \in (a, b)$$

Wir können also in einem beliebigen Intervall auf $\mathbb{R}$ immer eine beliebige rationale Zahl q finden. Betrachten wir nun die Intervalle (a, q) und (q, b), so können wir jeweils wieder rationale Zahlen q_{11} und q_{12} finden. Wir zerlegen unser Anfangsintervall also in unendlich viele disjunkte Teilintervalle und finden immer mindestens eine rationale Zahl in diesen Teilintervallen. Nach n Iterationen haben wir bereits 2^n rationale Zahlen gefunden. Da 2^n divergent ist, ist auch die Anzahl der rationalen Zahlen unendlich. □

Lemma 3.14

$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig in Bezug auf Cauchy-Folgen.

Beweis. Sei $x = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sei weiters $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ und $q_n \in \mathbb{Q}$, sodass $|q_n - x| 1 \frac{1}{n} = \varepsilon_n$ (nach Lemma 3.12). Damit ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Somit haben wir eine Folge auf $\mathbb{Q}$ gefunden, die einen irrationalen Grenzwert besitzt, $\mathbb{Q}$ kann somit nicht vollständig sein. □

Definition 3.16

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge über $\mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir:

$$\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a \in \mathbb{R}\colon \exists \nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}\colon a_{\nu_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = a\}$$

Untersuchen wir einige Folgen auf ihre Häufungspunkte:

- für $a_n = n$ gilt $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \emptyset$
- sei a_n konvergent mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} = a$, dann ist $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \{a\}$
- sei a_n beschränkt, dann gilt $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$
- sei q_n eine Folge, die alle rationalen Zahlen enthält. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dann enthält $\mathcal{B}_\varepsilon(x)$ unendlich viele rationale Zahlen, womit x ein Häufungspunkt von q_n ist, somit $\mathcal{H}((q_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \mathbb{R}$
- sei a_n nach oben durch $M \in \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist auch $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ beschränkt

Definition 3.17: Limes Superior und Limes Inferior

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ sei nach oben beschränkt und nicht leer, dann besitzt $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ein Supremum. Wir nennen $\sigma = \sup(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})) = \limsup_{n\to\infty} a_n$ den Limes Superior. Wenn $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ nach unten beschränkt ist, so nennen wir $\tau = \inf(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})) = \liminf_{n\to\infty}$ den Limes Inferior.

Hier sei angemerkt, dass für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$. Wenn nun gilt $\forall n \in \mathbb{N}\colon |a_n| \leq M$ für $M \in \mathbb{R}$, dann gilt $\forall a \in \mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\colon |a| \leq M$, womit $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existieren.

Lemma 3.15

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \neq \emptyset$ und nach oben beschränkt. Dann gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})) = \max(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}))$. Ist $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$ nach unten beschränkt, so gilt analog $\liminf_{n\to\infty} = \inf(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})) = \min(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}))$.

Beweis. Sei $\sigma = \limsup_{n\to\infty} a_n$, wir zeigen $\forall \varepsilon > 0 \colon |\mathcal{B}_\varepsilon(\sigma) \cap \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}|$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $\sigma = \sup(\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}))$, dann ist $\sigma - \frac{\varepsilon}{2}$ keine obere Schranke für $\mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$, daher existiert ein Häufungspunkt a mit:

$$\sigma - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \sigma$$

Da a ein Häufungspunkt ist, enthält $\mathcal{B}_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

$$\begin{aligned} &a - \frac{\varepsilon}{2} > \sigma - \varepsilon \\ &a + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sigma + \frac{\varepsilon}{2} < \sigma + \varepsilon \\ &\Rightarrow \mathcal{B}_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

Somit enthält auch $\mathcal{B}_\varepsilon(\sigma)$ unendlich viele Folgenglieder. $\square$

Wir nennen $\limsup_{n\to\infty} a_n$ den größten Häufungspunkt, und $\liminf_{n\to\infty} a_n$ den kleinsten Häufungspunkt der Folge a_n.

$\in$

Satz 3.10

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und nach oben beschränkt. Angenommen $\exists \sigma \in \mathbb{R} \colon \limsup_{n\to\infty} a_n = \sigma$, dann gilt $\forall \varepsilon > 0$:

- a Es gibt unendlich viele Folgenglieder mit der Eigenschaft $a_n > \sigma - \varepsilon$
- b Nur endlich viele Folgenglieder erfüllen $a_n \geq \sigma + \varepsilon$

Sind umgekehrt a und b erfüllt, dann ist σ der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis. $\Leftarrow$

Angenommen σ erfüllt die Charakterisierung. Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten $\mathcal{B}_\varepsilon(\sigma)$. Es erfüllen also unendlich viele Folgenglieder $a_n > \sigma - \varepsilon$ und nur endlich viele $a_n \geq \sigma + \varepsilon$. Sprich es bleiben unendlich viele Folgenglieder, die zwei Bedingungen erfüllen:

$$\sigma - \varepsilon < a_n < \sigma + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(\sigma)$$

Somit ist σ ein Häufungspunkt der Folge. Sei $s > \sigma$. Wir prüfen, ob s ein Häufungspunkt von a_n ist. Wenn dem nicht so ist, dann gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sigma$. Es gilt $\varepsilon = s - \sigma > 0$, und mit b weiter $a_n \geq s - \frac{\varepsilon}{2} = \sigma + \frac{\varepsilon}{2}$ für endlich viele Folgenglieder. Somit gilt $s \notin \mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

$\Rightarrow$

Sei $\sigma = \limsup_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Da σ ein Häufungspunkt ist, gilt, dass $\mathcal{B}_\varepsilon(\sigma)$ unendlich viele Folgenglieder enthält, sprich für unendlich viele Folgenglieder gilt $a_n > \sigma - \varepsilon$. Wir zeigen nun noch, dass nur endlich viele Folgenglieder $a_n \geq \sigma + \varepsilon$ erfüllen. Wir ordnen diese Folgenglieder nach aufsteigenden Indizes an und erhalten somit eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ der ursprünglichen Folge, mit $\forall k \in \mathbb{N} \colon a_{n_k} \geq \sigma + \varepsilon$. Somit ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt nach Satz Satz 3.7 einen Häufungspunkt s. Weil $a_{n_k} \geq \sigma + \varepsilon$ gilt $s \geq \sigma + \varepsilon$. Da $\lim_{l\to\infty} a_{n_{k_l}} = s$ gilt $s \in \mathcal{H}((a_n)_{n\in\mathbb{N}})$, was ein Widerspruch zu $\sigma = \limsup_{n\to\infty} a_n$ ist. $\square$

Definition 3.18: Bestimmte Divergenz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Wir sagen a_n ist bestimmt divergent gegen ∞, falls:

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq N \Rightarrow a_n > x$$

Analog sagen wir a_n divergiert bestimmt gegen $-\infty$, falls:

$$\forall x \in \mathbb{R} \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq N \Rightarrow a_n < x$$

Definition 3.19: Erweiterung der reellen Zahlen

Wir definieren die erweiterte reelle Zahlenachse $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$, wobei $-\infty \neq \infty$, mit den folgenden Rechenregeln. Sei $x \in \mathbb{R}$:

- $x + \infty = \infty$
- $x + (-\infty) = -\infty$
- $x > 0 \Rightarrow x \cdot \infty = \infty \wedge x \cdot (-\infty) = -\infty$
- $x < 0 \Rightarrow x \cdot \infty = -\infty \wedge x \cdot (-\infty) = \infty$
- $\infty + \infty = \infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

Zu beachten sind die unbestimmten Ausdrücke der Form:

$$\infty + (-\infty) \qquad 0 \cdot (\pm\infty)$$

Lemma 3.16

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen und b_n bestimmt divergent gegen ∞. Sei weiters $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$, mit $n \geq N \Rightarrow a_n \geq \varepsilon > 0$, dann ist ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞.

Beweis. Sei $x > 0$ und $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass:

$$n \geq N_1 \Rightarrow b_n \geq \max\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0\right)$$

Sei weiters $\tilde{N} = \max N, N_1$, dann gilt für $n \geq \tilde{N}$ $a_n b_n \geq \varepsilon b_n > x$, somit ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞. $\square$

3.2 Reelle und Komplexe Reihen

Definition 3.20: Reihen in $\mathbb{C}$

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die die n-te Partialsumme s_n:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Wir schreiben die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als unendliche Summe an:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Wenn $s_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s$, bzw. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, so schreiben wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

Anstatt der Schreibweise $\lim_{n\to\infty} s_n = s$

Reihen beginnen in Kontrast zu Folgen bereits bei $n = 0$ mit der Indizierung, verwenden also $\mathbb{N}_0$ als Indexmenge. Um die Konvergenz von Reihen nachzuweisen ist es oftmals schwierig, die Konvergenz über die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu bestimmen.

Lemma 3.17: Cauchy-Konvergenzkriterium für Riehen

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe. Dann ist die Reihe konvergent, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n, m \geq N \colon m \leq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis. Wir verwenden $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ und verwenden nun, dass s_n konvergent ist, wenn s_n eine Cauchyfolge ist, sprich es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \tilde{N} > 0 \colon \tilde{m}, n \geq \tilde{N} \Rightarrow |s_n - s_{\tilde{m}}| < \varepsilon$$

Wir wählen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n \geq \tilde{m}$, womit:

$$|s_n - s_{\tilde{m}}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{\tilde{m}}\right|$$

$$N = \tilde{N} + 1 \qquad m = \tilde{m} + 1$$

Wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, dann gilt somit:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon m, n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

□

Lemma 3.18: Riehen mit nicht-negativen Summanden

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe, also $\forall k \in \mathbb{N} \colon a_k \in \mathbb{R}$, mit $a_k \geq 0$, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, wenn s_n beschränkt ist.

Beweis. Wir verwenden $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Da $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \geq 0$ ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ monoton wachsend. Wenn s_n konvergent ist, dann ist s_n auch nach oben beschränkt. □

Definition 3.21: Absolute Konvergenz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe. Wir nennen die Reihe absolut konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Lemma 3.19: Absolut Konvergente Reihen

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist, dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beweis. Wir zeigen, dass eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ die Cauchy-Eigenschaft für Reihen erfüllt, also:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon nm, n \geq N \wedge m \leq n \colon \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist, gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n, m \geq N \colon m \leq n \colon \left| \sum -k = m^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt daher:

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

Womit auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Cauchy-Konvergenzkriterium konvergent ist. □

Lemma 3.20: Folgerung aus dem Cauchy-Kriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe, konvergente Reihe, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Die Umkehrung ist falsch.

Beweis. Wir verwenden das Cauchy-Kriterium für m mit $n = m + 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Cauchy gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \colon m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=m}^{m+1} a_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{m+1}| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

□

Beispiel: Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Wir betrachten die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

Die geometrische Reihe ist konvergent mit:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
qs_n &= \sum_{k=0}^{n} q \cdot q^k = \sum_{k=1}^{n+1} q^k \\
&\Rightarrow s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \Rightarrow s_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \\
|q| &< 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}
\end{aligned}$$

Da q^k für $|q| > 1$ bestimmt gegen ∞ divergiert, und $\sum_{k=1}^{\infty} 1^k$ ebenfalls gegen ∞ divergiert, ist die Reihe für $|q| \geq 1$ bestimmt divergent. Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} = \mathcal{B}_1(0)$, dann ist $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

definiert und kann durch $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ dargestellt werden. Ein weiteres klassisches Beispiel für eine Reihe ist die harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Obwohl $\frac{1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ist diese Reihe bestimmt divergent gegen ∞. Betrachten wir die folgende Teilfolge:

$$s_m = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{2^m} = 1 + \frac{m}{2}$$

Wir sehen, dass die harmonische Reihe also bestimmt divergent ist. Wir können die harmonische Reihe jedoch leicht modifizieren. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 1$, dann ist h_α konvergent:

$$h_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Wir zeigen, dass s_{2^m-1} beschränkt ist:

$$\begin{aligned}
s_{2^m-1} &= 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^m-1)^\alpha} \\
&\leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^\alpha} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k
\end{aligned}$$

Da $2^{\alpha-1} > 2$ für $\alpha > 1$ ist $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$. Somit ist gilt fü 4 $2^m \geq n+1$, dass $s_n \leq s_{2^m-1}$, womit h_α konvergent ist. Für $\alpha < 1$ ist $\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$, womit die zugehörige h_α ebenfalls divergent ist.

Sei $\alpha > 1$, dann definieren wir $\zeta : (1,\infty) \to \mathbb{R}$:

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Exkurs

Eine besonders wichtige Zeta-Funktion ist die *Riemannsche Zetafunktion*. Diese ist auf $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
\zeta : \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\} &\to \mathbb{C} \\
s &\mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}
\end{aligned}$$

Riemann hat mit Methoden der komplexen Analysis eine *analytische Fortsetzung* auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gefunden[12]. Mit dieser Fortsetzung lassen sich zweierlei Arten von Nullstellen von $\zeta(s)$ finden. Die trivialen und die nicht-trivialen. Die trivialen Nullstellen s_0 erfüllen alle $\mathfrak{Im}\{s\} = 0$ und $\mathfrak{Re}\{s\} \equiv 0 \mod 2$ und $\mathfrak{Re}\{s\} < 0$. Die nicht trivialen Nullstellen erfüllen, bis her, die Bedingung $\mathfrak{Re}\{s\} = \frac{1}{2}$. Die Riemannsche Vermutung ist nun, dass alle nicht-trivialen Nullfolgen der **analytischen Fortsetzung** von $\zeta(s)$ auf der kritischen Linie liegen, also $\mathfrak{Re}\{s\} = \frac{1}{2}$ erfüllen. Was besonders interessant an diesen Nullstellen ist, dass mit ihnen die Primzahlfunktion $\pi(n)$ sehr gut approximiert werden kann.

Exkurs Ende

Satz 3.11: Vergleichskriterien für Reihen

Sei $s_n\colon \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eine komplexe Reihe. Sei weiters $t_n\colon \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe. Wenn gilt $\exists K \in \mathbb{N}\colon k \geq K i1mplies |a_k| \leq c_k$, dann ist s_n konvergent. Wir nennen t_n eine Majorante von s_n. Ist t_n hingegen divergent und $\exists K \in \mathbb{N}\colon k \geq K \Rightarrow |a_k| \geq c_k$, dann ist auch s_n divergent. Wir nennen t_n eine Minorante von s_n.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ beschränkt ist. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n \geq K$:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=1}^{K} |a_k| + \sum_{k=K+1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{K} |a_k| + \sum_{k=K+1}^{n} c_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} c_k
\end{aligned}
$$

Das Minorantenkriterium

$$
\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{K} a_k + \sum_{k=K+1}^{n} a_n \geq \sum_{k=1}^{k} a_k + \sum_{k=K+1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{K} (a_k - c_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k
$$

Da t_n unbeschränkt ist, ist auch s_n unbeschränkt und divergiert somit. □

Satz 3.12: Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}\colon a_k \neq 0$. Wenn gilt:

$$
\exists K \in \mathbb{N}\colon \exists q \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) : \forall k \geq K\colon \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq 1
$$

Dann ist die gegebene Reihe absolut konvergent. Wenn hingegen gilt:

$$
\exists K \in \mathbb{N}\colon \forall k \geq K\colon \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1
$$

Dann ist die gegebene Reihe divergent.

Beweis. Wir zeigen zuerst den Fall der Divergenz durch Induktion. Sei $|a_k| \geq |a_K|$:

$$
|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq |a_K|
$$

Somit ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, womit die Reihe divergent ist. Für den Fall, dass die Reihe konvergent ist, zeigen wir:

$$
\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |a_k| + |a_K| \sum_{j=0}^{n-K} q^j
$$

[12] typischerweise wird die gefundene Lösung durch die Funktionalgleichung $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$ beschrieben

Für ein $n \geq K$. Wir behaupten nun, dass $k \geq K \Rightarrow |a_k| \leq |a_K| \cdot q^{k-K}$ gilt durch Induktion. Für $k = K$ ist die Behauptung erfüllt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \Rightarrow |a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k| \leq q \cdot q^{k-K} \cdot |a_K| = q^{(k+1)-K}|a_K|$$

Damit gilt dann aber:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{K-1} |a_k| + |a_K| \sum_{j=0}^{n-K} q^j$$

Da K eine natürliche Zahl ist und $\sum_{j=0}^{n-K} q^j$ durch $\frac{1}{1-q}$ beschränkt ist, ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ beschränkt und somit konvergent, weswegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent ist. □

Satz 3.13: Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe und angenommen folgendes gilt:

$$\exists q \in \mathbb{R} \colon 0 \leq q < 1 \colon \exists K \in \mathbb{N} \colon k \geq K \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq q$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Falls andererseits $k \geq K \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, dann ist die Reihe divergent.

Beweis. Wir beginnen mit der Divergenz. Wenn $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1 \Rightarrow |a_k| \geq 1^k = 1$, sprich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge, womit die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht divergieren kann. Wenn aber $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ ab einem $k \geq K$, dann gilt $\forall k \geq K \colon |a_k| \leq q^k$. Da $0 \leq q < 1$ haben wir somit eine Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gefunden und die Reihe konvergiert. □

Lemma 3.21: Reformulierung des Wurzelkriteriums

Sei $\sum_{k=1}^{\infty}$ eine komplexe Reihe, wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

1. Wenn $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \eta < 1$ existiert, dann ist die Reihe absolut konvergent
2. Wenn $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \eta \geq 1$ existiert, dann ist die Reihe divergent

Beweis. Zu 1. Sei $\eta < 1$ und $\eta = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{2}(1-\eta) > 0$. Nach der Charakterisierung des Limes Superior erfüllten höchstens endlich viele Indizes k die Bedingung:

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq \eta + \varepsilon = \frac{1}{2}(\eta + 1) < 1$$

Sprich $\exists K \in \mathbb{N} \colon k \geq K \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{2}(1+\eta) < 1$. Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe daher konvergent.

Zu 2. Sei $\eta = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, dann existiert eine Teilfolge $(a_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k_l]{|a_{k_k}|} = \eta$, somit:

$$\exists L \in \mathbb{N} \colon \sqrt[k_l]{|a_{k_l}|} > \frac{1}{2}(\eta + 1) > 1$$
$$\Rightarrow \forall l \geq L \colon |a_{k_l}| > 1^{k_l} = 1$$

Damit haben wir eine Minorante gefunden, womit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, weswegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent ist. □

Lemma 3.22: Reformulierung des Quotientenkriteriums

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine komplexe Reihe mit $\forall j \in \mathbb{N} \colon a_k \neq 0$:

1. Wenn $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ existiert, dann ist die Reihe absolut konvergent
2. Wenn $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| >$ existiert, dann ist die Reihe divergent

Beispiel: Binomialreihe von Isaac Newton Wir kennen bereits den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ bzw. $\binom{s}{k}$ für $s \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen uns nun eine Verallgemeinerung von Newton anschauen:

$$B_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k \stackrel{?}{=} (1+z)^s$$
$$\binom{s}{k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(s-j)}{k!}$$

Wir untersuchen die *binomische Reihe* auf Konvergenz, wobei $s \notin \mathbb{N}_0$, mit dem Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{\binom{s}{k+1} z^{k+1}}{\binom{s}{k} z^k} \right| = |z| \left| \frac{k! \prod_{j=0}^{k}(s-j)}{(k+1)! \prod_{j=0}^{k-1}(s-j)} \right| = |z| \left| \frac{s-k}{k+1} \right| = |z| \left| \frac{\frac{s}{k}-1}{1+\frac{1}{k}} \right| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} |z|$$

Damit ist $B_s(z)$ konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

Definition 3.22: Alternierende Reihen

Sei $\alpha_k \in \mathbb{R}$ mit $\forall k \in \mathbb{N}\colon \alpha_k > 0$, dann nennen wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k$$

eine alternierende Reihe.

Satz 3.14: Konvergenzkriterium von Leibniz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \alpha_k$ eine alternierende Reihe mit $\forall k \in \mathbb{N}\colon |\alpha_{k+1}| \leq |\alpha_k|$ und $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, dann ist die Reihe divergent.

Beweis. Wir betrachten die Partialsummen:

$$s_{2m+1} = s_{2m} + \underbrace{(-1)^{2m+1}\alpha_{2m+1}}_{\leq 0} \leq s_{2m}$$
$$s_{2m+2} = s_{2m} - \alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2} = s_{2m} + \underbrace{\alpha_{2m+2} - \alpha_{2m+1}}_{\leq 0} \leq s_{2m}$$

Sprich die Folge der Partialsummen $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Wenn wir die ungeraden Indizes betrachten:

$$s_{2m+1} = s_{2m-1} + \underbrace{\alpha_{2m} + \alpha_{2m+1}}_{\geq 0} \geq s_{2m-1}$$

Die Teilfolge $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ ist also monoton wachsend, es gilt also:

$$\forall m \in \mathbb{N}\colon s_{2m} \geq s_{2m+1} \geq \cdots \geq s_1$$

Also ist $(s_{2m})_{m\in\mathbb{N}}$ nach unten durch s_1 beschränkt. Weiters gilt:

$$s_{2m+1} \leq s_{2m} \leq \cdots \leq s_2$$

Also ist $(s_{2m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben durch s_2 beschränkt. Da die Teilfolgen beschränkt sind, existieren auch die Häufungspunkte $\sigma = \limsup_{n\to\infty} s_n$ und $\tau = \liminf_{n\to\infty} s_n$. Da $s_{2m+1} \leq s_{2m}$ gilt somit auch $\sigma \leq \tau$. Sei $\varepsilon = \tau - \sigma > 0$, wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$ mit :

$$\begin{aligned}
&2m+1 \geq N \Rightarrow \alpha_{2m+1} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \varepsilon\tau - \sigma \leq s_{2m} - s_{2m+1} = -(-1)^{2m+1}\alpha_{2m+1} = \alpha_{2m+1} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \tau - \sigma = 0 \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n
\end{aligned}$$

□

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe ist nach Satz 3.14 konvergent:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$$

Dabei ist zu beachten, da mit dem Leibniz-Kriterium keine absolute Konvergenz nachgewiesen wird, wie an der alternierenden harmonischen Reihe zu sehen ist. Es gibt komplexe Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind. Diese Reihen nennt man *bedingt konvergent*.

4 Regularitätseigenschaften reeller und komplexer Funktionen

Schon seit der Antike beschäftigt man sich in der Mathematik mit gekrümmten Kurven in der Ebene, insbesondere Parabeln und Kreislinien. Im alten Griechenland hat man lediglich mit Zirkel und Lineal gearbeitet, wobei das Lineal nur verwenden Wurde, um gerade Strecken zu zeichnen und nicht zu messen. Erst mit Fermat und Descartes wurde die *Koordinatengeometrie* gängig, welche den Startschuss zur analytischen Geometrie darstellte. Dabei werden Punkte in der Ebene als Koordinatenpaare beschrieben, die Elemente des $\mathbb{R}^2$ sind. Mithilfe dieser Notation können wir etwa einen Kreis durch eine einfache implizite Gleichung beschreiben:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Etwas später entwickelten dann Wilhelm Gottfried Leibniz und Isaac Newton die Methoden der Infinitesemalrechnung[13] um Kurven in der Ebene auf bestimmte Eigenschaften zu untersuchen. Leonhard Euler führte dann schließlich den Begriff der transzendenten Funktion ein. Dabei handelt es sich um einen speziellen Typ Funktion, welche durch Reihen der Form:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

beschrieben werden können. Solche Reihen nennen wir Potenzreihen. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts kam der uns gängige Begriff der Abbildung als beliebige Zuordnung in Gebrauch.

Definition 4.1: Stetigkeit

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung mit $D \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $D \subseteq \mathbb{C}$. Sei weiters $x_0 \in D$. Wir sagen f ist stetig in x_0, falls:

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists \delta > 0\colon \forall x \in D\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Falls f an einer Stelle x_0 nicht stetig ist, so nennen wir x_0 eine Unstetigkeitsstelle von f.

Beispiel: Sei $p_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p_k(x) = x^k$. Wir zeigen, dass für $x_0 \in \mathbb{R}$, p_k stetig in x_0 ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig:

$$|p_k(x) - p_k(x_0)| = |x^k - x_0^k| = |(x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \cdots + x_0^k)|$$

Wähle $|x - x_0| < 1$, dann gilt $|x| = |x - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + |x_0| < 1 + |x_0|$, also gilt:

$$|x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \cdots + x x_0^{k-2} + x_0^{k-1}| \leq \underbrace{|x|^{k-1}}_{<1+|x_0|} + \underbrace{|x|^{k-2}}_{<1+|x_0|} \underbrace{|x_0|}_{<1+|x_0|} + \cdots + \underbrace{|x_0|^{k-1}}_{<1+|x_0|} < k(1 + |x_0|)^{k-1}$$

Wir wählen nun δ:

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{k(1 + |x_0|)^{k-1}}\right\}$$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |x^l - x_0^k| = |x - x_0| \left|\sum_{j=0}^{k} x_0^j x^{k-1-j}\right| \leq |x - x_0| \cdot k(1 + |x_0|)^{k-1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{k(1 + |x_0|)^{k-1}} \cdot k(1 + |x_0|)^{k-1} = \varepsilon$$

Stetigkeit ist eine *lokale* Eigenschaft, da wir nur eine unmittelbare Umgebung um einen Punkt x_0 betrachten.

Definition 4.2: Stetigkeit auf D

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$. Wir sagen f ist stetig auf D, wenn f in allen $x_0 \in D$ stetig ist.

Die Stetigkeit auf D ist hingegen eine globale Eigenschaft, da wir jeden Punkt im Definitionsbereich betrachten.

[13] heute oftmals Differential- und Integralrechnung bzw. Analysis, engl. calculus