# 8. Übungsblatt

**Aufgabe 34.** Welche der folgenden Strukturen sind Vektorräume? Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

(a) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ mit den üblichen Operationen

(b) $V_2 = \mathbb{Q}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den üblichen Operationen

(c) $V_3 = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den Operationen

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', 0)$$
$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Die üblichen Operationen auf $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{Q}$ sind:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$
$$\lambda \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

Wir beginnen mit (a) und prüfen , ob $(V, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist:

Abgeschlossenheit :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \colon x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$$
$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} \end{bmatrix}$$
$$\forall i \in [n] \colon x_{1i} + x_{2i} \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$$

Assoziativität :

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^n$$
$$(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$$
$$\Leftrightarrow \left( \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} \\ \vdots \\ x_{1n} + x_{2n} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} x_{31} \\ \vdots \\ x_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_{11} + x_{21}) + x_{31} \\ \vdots \\ (x_{1n} + x_{2n}) + x_{3n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_{11} + (x_{21} + x_{31}) \\ \vdots \\ x_{11} + x_2 1 + x_{31}) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$$

Kommutativität :

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} \\ \vdots \\ x_{12} + x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} + x_{11} \\ \vdots \\ x_{2n} + x_{1n} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$$

neutrales Element :

$$\mathbf{0}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{0}_n = \begin{bmatrix} x_{11} + 0 \\ \vdots \\ x_{1n} + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1$$

inverses Element :

$$\text{wähle:} \mathbf{x}_1^{-1} = \begin{bmatrix} -x_{11} \\ \vdots \\ -x_{1n} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_1^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} - x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} - x_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Somit ist $(V_1, \oplus)$ eine abelsche Gruppe. Weiter mit $\odot$:

Abgeschlossenheit :

$$\forall \lambda \in \mathbb{Q} \colon \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \odot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$$

$$\forall i \in [n] \colon \lambda x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Assoziativität :

$$\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$$

$$(\lambda\mu) \odot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} (\lambda\mu)x_1 \\ \vdots \\ (\lambda\mu)x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(\mu x_1) \\ \vdots \\ \lambda(\mu x_n) \end{bmatrix} = \lambda \odot (\mu \odot \mathbf{x})$$

Und zuletzt die Distributivgesetze mit $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \odot (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \lambda(v_1 + w_2) \\ \vdots \\ \lambda(v_n + w_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 + \lambda w_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n + \lambda w_n \end{bmatrix} = \lambda \odot \mathbf{v} \oplus \lambda \odot \mathbf{w}$$

$$(\lambda + \mu) \odot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda + \mu)v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 + \mu v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n + \mu v_n \end{bmatrix} = \lambda \odot \mathbf{v} \oplus \mu \odot \mathbf{v}$$

$V_1$ ist also ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$.
Bei $V_2$ beginnen wir mit der Abgeschlossenheit von $\odot$:

$$\forall q \in \mathbb{Q} \colon \forall r \in \mathbb{R} \colon \begin{cases} rq \in \mathbb{Q} & r \in \mathbb{Q} \\ rq \notin \mathbb{Q} & r \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Multiplikation ist also nicht abgeschlossen, da es Faktoren $r$ aus $\mathbb{K}$ gibt, für die $r \odot \mathbf{v}$ nicht mehr in $V_2$ liegt. Somit ist $V_2$ kein Vektorraum.

Zuletzt $V_3$. Hier ist $\oplus$ abgeschlossen, da die Addition in $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist und $0 \in \mathbb{R}$. Auch $\odot$ ist abgeschlossen, da $\forall \lambda, x \in \mathbb{R} \colon \lambda x \in \mathbb{R}$. WIr prüfen also, ob $(V_3, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist:

Assoziativität :

$$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u} \in V_3$$

$$(\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) \oplus \mathbf{u} = \begin{bmatrix} (v_1 + w_1) + u_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + (w_1 + u_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v} \oplus (\mathbf{w} \oplus \mathbf{u})$$

$$\text{neutrales Element :} \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} v_1 + 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{v}$$

$V_3$ ist also kein Vektorraum, da $\mathbf{0} + \mathbf{v} \neq \mathbf{v}$, es existiert also kein neutrales Element in $(V, \oplus)$.

**Aufgabe 36.** Gegeben ist das folgende Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} x - \phantom{3}y + 4z &= 1 \\ 2x + \phantom{3}y + 2z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2I,\ III-I} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{5\cdot II,\ 3\cdot III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III-5II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{2III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{II-5III,\ I-4III} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{I-6II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$