Übungsblatt №2

Beispiel 7. *Man bestimme eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 - 1 = 0 \qquad u(x,0) = x.$$

Ist diese eindeutig?

Wir führen $p = \partial_x u$ und $q = \partial_y u$ ein. Ferner setzen wir $F(x,y,u,p,q) = p^2 + q^2 - 1 \overset{!}{=} 0$. Als charakteristisches System ergibt sich also

$$X'(s) = 2P(s) \qquad Y'(s) = 2Q(s) \qquad P'(s) = 0 \qquad Q'(s) = 0 \qquad U'(s) = 2(P^2(s) + Q^2(s)).$$

Wir erhalten also $P(s) = c_1$ und $Q(s) = c_2$. Damit folgen auch direkt

$$X(s) = 2c_1 s + x_0 \qquad Y(s) = 2c_2 s + y_0 \qquad U(s) = 2(c_1^2 + c_2^2)s + u_0.$$

Aus unserer Anfangsbedingung folgt $u_0 = x_0$ und $y_0 = 0$. Schränken wir F auf eine Charakteristik $\mathcal{C}$ ein, so folgt $F|_{\mathcal{C}} = P^2 + Q^2 - 1 = c_1^2 + c_2^2 - 1 = k$ bzw. $c_1^2 + c_2^2 = k + 1 \geq 0$. Ferner

$$(X(s) - x_0)^2 + Y^2(s) = 4s^2(c_1^2 + c_2^2) = 4s^2(k+1) \qquad U(s) - x_0 = 2(k+1)s \implies s = \frac{U(s) - u_0}{2(k+1)}.$$

Daraus folgt

$$u(x,y) = x \pm \sqrt{y^2}$$

Beispiel 8. *Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems*

$$xy - \partial_x u \partial_y u = 0 \qquad u(1,y) = y^2.$$

Wir setzen $p = \partial_x u$ und $y = \partial_y u$, dann ist die Differentialgleichung von der Form $F(x,y,u,p,q) = xy - pq = 0$. Das charakteristische System ist also

$$X'(s) = -Q(s) \qquad Y'(s) = -P(s) \qquad P'(s) = -Y(s) \qquad Q'(s) = -X(s) \qquad U'(s) = -2Q(s)P(s).$$

Offenbar brauchen wir für U erst Lösungen für P und Q. Wir erhalten

$$\begin{aligned} X''(s) &= -Q'(s) = -(-X(s)) = X(s) \implies X''(s) - X(s) = 0 \\ Y''(s) &= -P'(s) = -(-Y(s)) = Y(s) \implies Y''(s) - Y(s) = 0. \end{aligned}$$

Eine Differentialgleichung $f'' - f = 0$ hat die Lösung $f(s) = c_1 \mathrm{e}^s + c_2 \mathrm{e}^{-s}$. Damit sind $X(s) = c_1 \mathrm{e}^s + c_2 \mathrm{e}^{-s}$ und $Y(s) = c_3 \mathrm{e}^s + c_4 \mathrm{e}^{-s}$. Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$1 = X(0) = c_1 + c_2 \qquad y_0 = c_3 + c_4.$$

Ferner

$$Q(s) = -X'(s) = c_2 \mathrm{e}^{-s} - c_1 \mathrm{e}^s \qquad P(s) = -Y'(s) = c_4 \mathrm{e}^{-s} - c_3 \mathrm{e}^s$$

und somit

$$U'(s) = (c_2 \mathrm{e}^{-s} - c_1 \mathrm{e}^s)(c_4 \mathrm{e}^{-s} - c_3 \mathrm{e}^s) = c_2 c_4 \mathrm{e}^{-2s} - c_2 c_3 - c_1 c_4 + c_1 c_3 \mathrm{e}^{2s}.$$

Integration liefert

$$U(s) = -\frac{1}{2} c_2 c_4 \mathrm{e}^{-2s} - s(c_2 c_3 + c_1 c_4) + \frac{1}{2} c_1 c_3 \mathrm{e}^{2s} + c_5.$$

$$\begin{aligned} F|_{\mathcal{C}} &= (c_1 \mathrm{e}^s + c_2 \mathrm{e}^{-s})(c_3 \mathrm{e}^s + c_4 \mathrm{e}^{-s}) - (c_2 \mathrm{e}^{-s} - c_1 \mathrm{e}^s)(c_4 \mathrm{e}^{-s} - c_3 \mathrm{e}^s) \\ &= c_1 c_3 \mathrm{e}^{2s} + c_1 c_4 + c_2 c_3 + c_2 c_4 \mathrm{e}^{-2s} - c_2 c_4 \mathrm{e}^{-2s} + c_2 c_3 + c_1 c_4 - c_1 c_3 \mathrm{e}^{2s} \\ &= 2(c_1 c_4 + c_2 c_3) = 0 \iff c_1 c_4 = -c_2 c_3 \end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$y_0^2 = U(0) = \frac{1}{2}(c_1 c_3 - c_2 c_4) + c_5$$