Blatt № 4

Aufgabe 10: Integrierender Faktor

Gegeben sei die nicht exakte Differentialgleichung

$$(x+3y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 0$$

Man bestimmen einen integrierenden Faktor $M(x,y)$ und bestimme alle Lösungen dieser Differentialgleichung. Man bestimme jene Lösung, welche die Anfangsbedingung $y(1)=1$ erfüllt.

Wir prüfen zuerst, ob M als Funktion in x beschrieben werden kann, dazu muss folgendes gelten:

$$\frac{\partial_y g - \partial_y h}{h} = f(x)$$
$$\partial_y g = 3 \qquad \partial_x h = 1 \Rightarrow \frac{\partial_y h - \partial_x g}{h} = \frac{2}{x}$$

Damit erhalten wir die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für M:

$$\frac{M'}{M} = \frac{2}{x} \Rightarrow \int^x \frac{M'(s)}{2M(s)}\,\mathrm{d}s = \ln(x)$$
$$u = M(s) \Rightarrow \int^x \frac{M'(s)}{M(s)}\,\mathrm{d}s = \int^M \frac{\mathrm{d}u}{2u} = \frac{1}{2}\ln(M(x))$$
$$\Rightarrow \ln(M(x)) = 2\ln(x) \Leftrightarrow M(x) = x^2$$

Wir prüfen nun, ob die Differentialgleichung $Mg\mathrm{d}x + Mh\mathrm{d}y = 0$ exakt ist:

$$\partial_y x^3 + 3x^2 y = 3x^2$$
$$\partial_x x^3 = 3x^2$$

Hernach gilt also $\partial_y Mg = \partial_x Mh$, somit ist die Differentialgleichung exakt. Es kann also eine Stammfunktion F gefunden werden, sodass $\partial_x F = Mg$ und $\partial_x F = Mh$.

$$\partial_x F = Mg \Rightarrow F(x,y) = \int M(x)g(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y) = \int x^3 + 3x^2 y\mathrm{d}x + \varphi(y)$$
$$= \frac{x^4}{4} + x^3 y + \varphi(y)$$
$$\varphi(y) = \int M(x)h(x,y) - \partial_y \int M(x)g(x,h)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \int x^3 - x^3\mathrm{d}y = 0$$
$$F(x,y) = \frac{x^4}{4} + x^3 y$$
$$\partial_x F = x^3 + 3x^2 y = x^2(x+3y) = Mg$$
$$\partial_y F = x^3 = x^2 x = Mh$$

Wir haben somit bereits eine implizite Lösung für y gefunden, und können diese (lokal) mittels des Hauptsatzes über implizite Funktionen nach y auflösen. Sei $x \neq 0$:

$$\frac{x^4}{4} + x^3 y = \alpha \Leftrightarrow y = \frac{\alpha}{x^3} - \frac{x}{4}$$
$$1 = \alpha - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow y(x) = \frac{5 - x^4}{4x^3}$$

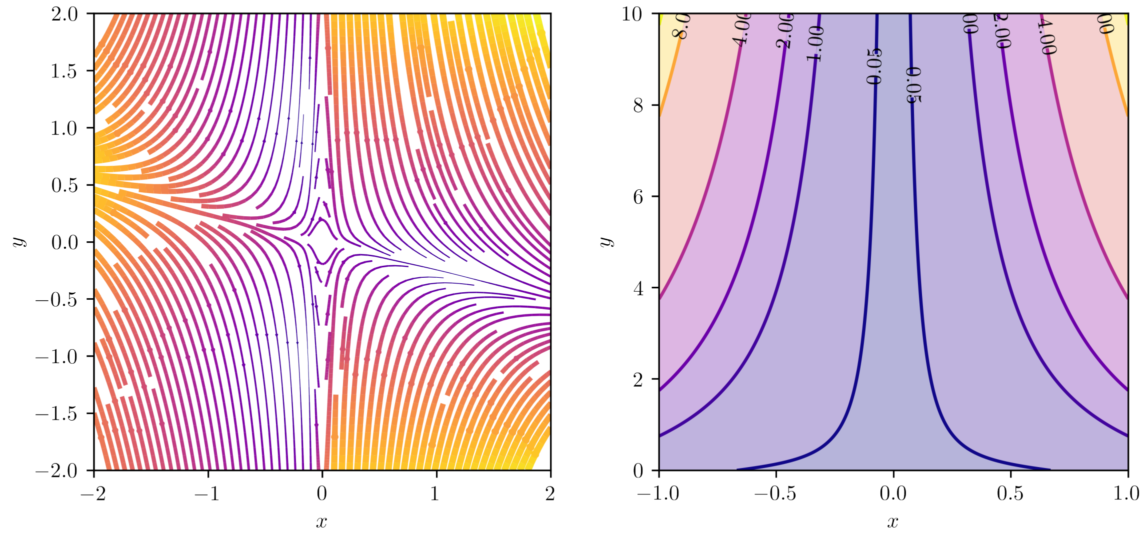

Abbildung 1: Richtungsfeld der Gleichung (links) und Konturlinien von F (rechts)

Aufgabe 11: Vergleich mit exakten Differentialgleichungen

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = xy(y-2) \qquad x \in \mathbb{R} \qquad y(0) = 1$$

a) Man bestimme die Lösung y
b) Man gebe die Lösung y implizit als Lösung einer Gleichung $F = 0$ mit geeignet gewähltem F an
c) Kann die unter Punkt a) erhaltene Lösung als Lösung einer exakten Differentialgleichung angegeben werden? Gibt es einen Zusammenhang mit der ursprünglichen Differentialgleichung?

Punkt a): Wir wenden die Trennung der Veränderlichen an:

$$\frac{y'}{y(y-2)} = x \Rightarrow \int \frac{y'(s)}{y(s)(y(s)-2)} \mathrm{d}s = \frac{x^2 + \ln(c)}{2}$$
$$z = y(s) \Rightarrow \mathrm{d}z = y'(s)\mathrm{d}s \Rightarrow \int \frac{y'}{y(y-2)}\,\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)}$$

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2}$$
$$A = \frac{1}{z-2}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2}$$
$$B = \frac{1}{z}\Big|_{z=2} = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \frac{\mathrm{d}z}{z(z-2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}\mathrm{d}z$$

Anmerkung: Die folgende Fallunterscheidung ist eigentlich nicht erfordert für dieses Beispiel, da wir durch die Anfangsbedingung wissen $0 < y < 2$. Allerdings habe ich das erst gemerkt, als ich schon fertig war.

Für $y > 2$ erhalten wir:

$$I = \frac{1}{2}(\ln(y-2) - \ln(y)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y-2}{y}\right)$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{y-2}{y}\right) = x^2 + \ln(c) \Leftrightarrow \frac{y-2}{y} = ce^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow y - 2 = yce^{x^2} \Leftrightarrow y(1 - ce^{x^2}) = 2 \Leftrightarrow y(x) = \frac{2}{1 - ce^{x^2}}$$
$$y > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - ce^{x^2}} > 1 \Leftrightarrow 1 - ce^{x^2} < 1 \Leftrightarrow ce^{x^2} > 0 \Rightarrow c > 0$$

Für $y < 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2-z} - \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}(\ln(2-z) - \ln(-z)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-z}{-z}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z-2}{z}\right)\\
&\Rightarrow y(x) = \frac{2}{1 - ce^{x^2}}\\
&y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - ce^{x^2}} < 0 \Leftrightarrow 1 - ce^{x^2} < 0 \Leftrightarrow ce^{x^2} < 1 \Leftrightarrow \ln(c) + x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < -\ln(c)\\
&\forall x \in \mathbb{R}\colon x^2 \geq 0 \Rightarrow -\ln(c) > 0 \Leftrightarrow \ln(c) < 0 \Leftrightarrow c \in (0,1)
\end{aligned}$$

Somit ist $y > 2$ auf $\mathcal{B}_{-\ln(c)}(0)$ definiert. Da $-\ln(c) \to \infty$ für $c \to 0$, können wir c beliebig klein wählen um einen hinreichend großen Definitionsbereich zu erhalten.

Für $0 < y < 2$ erhalten wir zuletzt:

$$\begin{aligned}
&I = \frac{1}{2}(\ln(2-z) - \ln(z)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-z}{z}\right)\\
&\Rightarrow \ln\left(\frac{2-y}{y}\right) = x^2 + \ln(c) \Leftrightarrow \frac{2-y}{y} = ce^{x^2}\\
&\Leftrightarrow 2 - y = yce^{x^2} \Leftrightarrow 2 = (1 + ce^{x^2})y \Leftrightarrow y(x) = \frac{2}{1 + ce^{x^2}}\\
&0 < \frac{2}{1 + ce^{x^2}} < 2 \Leftrightarrow 0 < 1 < 1 + ce^{x^2}\\
&\Rightarrow 0 < ce^{x^2} \Rightarrow c > 0
\end{aligned}$$

Wir haben somit eine allgemeine Lösung für y gefunden:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{2}{1-ce^{x^2}} & \begin{cases} c > 0, x \in \mathbb{R} & y > 2 \\ c \in (0,1), x \in \mathcal{B}_{-\ln(c)}(0) & y < 0 \end{cases} \\ \frac{2}{1+ce^{x^2}} & x \in \mathbb{R}, c > 0, 0 < y < 2 \end{cases}$$

Für die gegeben Anfangsbedingung gilt $0 < y < 2$, womit:

$$1 = \frac{2}{1+c} \Leftrightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$$

Damit ist die Lösung $y(x)$ gegeben durch:

$$y(x) = \frac{2}{1 + e^{x^2}}$$

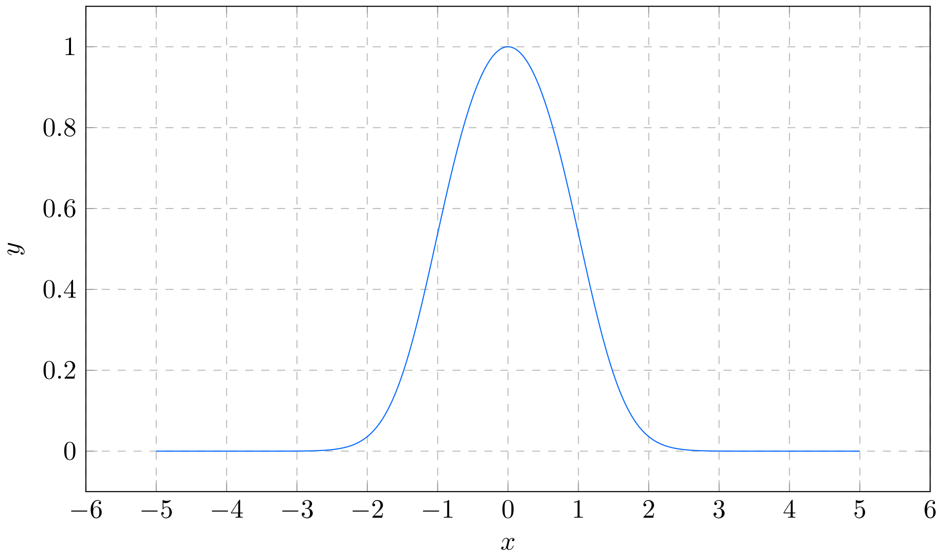

Abbildung 2: Graph von $y(x)$

Punkt b): Wir suchen eine Funktion $F(x, y)$, sodass wir y als implizite Lösung von $F = 0$ angeben können:

$$y = \frac{2}{1 + e^{x^2}} \Leftrightarrow y(1 + e^{x^2}) - 2 = 0 = F(x, y)$$

Punkt c): Wir haben F gefunden. Da F auf $\mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, folgt:

$$\partial_x F = 2xye^{x^2} \qquad \partial_y F = 1 + e^{x^2}$$
$$2xye^{x^2}\mathrm{d}x + (1 + e^{x^2})\mathrm{d}y = 0$$

Diese Differentialgleichung ist per Definition exakt. Weiters haben wir die Stammfunktion F bereits gefunden.

Aufgabe 12: Lipschitz-Stetigkeit

Man untersuche die folgenden Funktion $f(x)$ in ihrem jeweiligen Definitionsbereich D auf Lipschitz-Stetigkeit und bestimme gegebenenfalls die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante:

a) $f(x) = \cos(x)$, $D = [0, \pi]$
b) $f(x) = |x|$, $D = \mathbb{R}$
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [2, \infty)$
d) $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, 2]$

Erinnern wir uns zuerst an die Definition der Lipschitz-Stetigkeit auf einem metrischen Raum (X, d). Sei $D \subseteq X$ und $f\colon D \to X$, dann nennen wir f Lipschitz-stetig auf D, falls

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x_1, x_2 \in D \colon d(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1, x_2)$$

Analog ist f nicht Lipschitz-stetig auf D, falls

$$\forall L \in \mathbb{R}^+ \colon \exists x_1, x_2 \in D \colon d(f(x_1), f(x_2)) > Ld(x_1, x_2)$$

Wir arbeiten nun mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und wählen daher $d(x, y) = |x - y|$ als Metrik auf $\mathbb{R}$. Falls f differenzierbar auf D ist, dann ist f Lipschitz-stetig auf D, falls $\sup_{x\in D} |f'(x)| < \infty$. Dann gilt $L = \sup_{x\in D} |f'(x)|$ ist die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante.

Punkt a): $f'(x) = \sin(x)$. Der Sinus wird durch 1 beschränkt, und nimmt diesen bei $\frac{(4k+1)\pi}{2}$ für $k \in \mathbb{Z}$ an. Für $k = 0$ gilt $\frac{\pi}{2} \in D$, damit folgt $L = 1$.

Punkt b): Folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$$

Punkt c):

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wir sehen, dass $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ gilt. Weiters ist $f'(2) > 0$ und $f''(x) < 0$ für $x \in \mathbb{R}$, also also ist f' streng monoton fallend, womit $f'(x)$ durch $\frac{\sqrt{2}}{4}$ beschränkt ist. Somit ist f Lipschitz-stetig auf D und es gilt $L = \sup_{x\in D} |f'(x)| = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ist die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante.

Punkt d): Wir verwenden die Unbeschränktheit der Ableitung. Sei $M \in \mathbb{R}^+$, dann gilt:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \geq M \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq \frac{1}{M} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{1}{2M} \Rightarrow x \leq \frac{1}{4M^2}$$

Für $x \leq \frac{1}{4M^2}$ folgt also $f'(x) \geq M$. Da wir für alle $M \in \mathbb{R}^+$ ein solches x finden können, ist f' unbeschränkt, und damit ist f nicht Lipschitz-stetig.