2. Übungsblatt

Aufgabe 6. Gegeben sind einige Aussagen, deren Wahrheitswert überprüft werden soll:

$$\begin{aligned}
\emptyset \subseteq \emptyset &\quad w \\
\emptyset \in \emptyset &\quad f \\
\emptyset \in \{\emptyset\} &\quad w \\
\emptyset \subseteq \{\emptyset\} &\quad w \\
\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) &\quad w \\
\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) &\quad w
\end{aligned}$$

Aufgabe 7. Es sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die zugehörige Potenzmenge. Welche der folgenden Aussagen sind gültig:

$$M \in \mathcal{P}(M) \tag{a}$$
$$M \subseteq \mathcal{P}(M) \tag{b}$$
$$\{M\} \in \mathcal{P}(M) \tag{c}$$
$$\{M\} \subseteq \mathcal{P}(M) \tag{d}$$

Zu (a) können wir direkt die Definition der Potenzmenge verwenden: $\mathcal{P}(M) = \{N : N \subseteq M\}$. Da wir in dieser Definition der Potenzmenge Gleichheit nicht ausschließen, ist auch M in $\mathcal{P}(M)$ enthalten, womit die Aussage wahr ist.
Bei (b) müssen wir uns überlegen, was die Aussage bedeutet. Wenn M tatsächlich eine Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$ ist, so müssen alle Elemente von M in $\mathcal{P}(M)$ vorkommen. Das ist allerdings nicht der Fall, somit ist diese Aussage falsch.
Die Aussage (c) ist falsch, da $\{M\}$ eine Menge der Menge der Elemente von M ist. M ist selbst aber eine Elemente von $\mathcal{P}(M)$.
Die Aussage (d) ist wahr, da M eine Element von $\mathcal{P}(M)$ ist. Somit ist die einelementige Menge $\{M\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$.

Aufgabe 8. Zu bestimmen ist $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \\
&\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9. Es seine A, B, C Mengen. Gegeben sind zwei Aussagen:

(a) Angenommen, alle Elemente von B sind Elemente von A und kein Element von C ist Element von B, dann gilt: kein Element von C ist Element von A

(b) Angenommen kein Element von B ist Element von A, alle Elemente von C sind Elemente von B, dann gilt: kein ELement von C ist Element von A

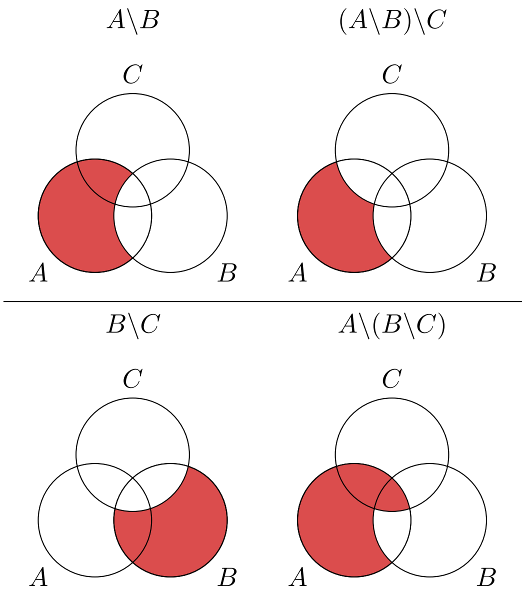
$$\begin{aligned}
&(a): \\
&\quad (\forall b \in B : b \in A) \land (\forall c \in C : c \notin B) \Rightarrow (\forall c \in C : c \notin A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b): \\
&\quad (\forall b \in B : b \notin A) \land (\forall c \in C : c \in B) \Rightarrow (\forall c \in C : c \notin A)
\end{aligned}$$

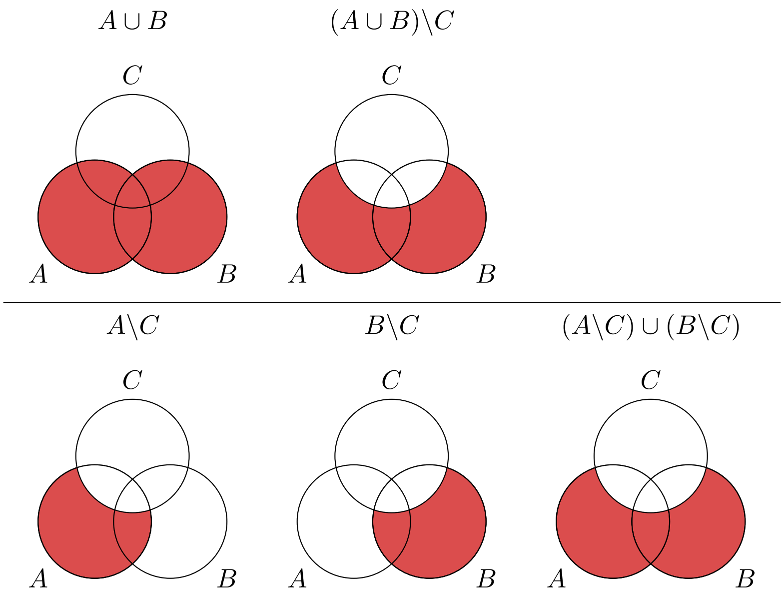
Aufgabe 10. Die folgenden Aussagen sollen mittels Venn-Diagrammen überprüft werden:

$$(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C) \tag{a}$$
$$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C) \tag{b}$$

Venn-Diagramme für (a):



Venn-Diagramme für (b):



Anhand der Venn-Diagramme können wir erkennen, dass $(A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\backslash C)$ falsch ist. $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$ hingegen ist richtig.

Aufgabe 11. Gegeben sind zwei lineare Gleichungssysteme:

$$(a)\quad \begin{aligned} x - 2y - 3z &= 5 \\ 4x + 10y + 6z &= 2 \\ 5x + 8y + 3z &= 7 \\ -x - 4y - 3z &= 1 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x - 2y - 3z &= 1 \\ 4x + 10y + 6z &= -1 \\ 5x + 8y + 3z &= 1 \\ -x + 10y + 6z &= -1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 4 & 10 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 7 \\ -1 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{II-4I,\ III-5I,\ IV+I} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 18 & 18 & -18 \\ 0 & 18 & 18 & -18 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{III-II,\ IV-II} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$z = \lambda \quad y + \lambda = -1 \Leftrightarrow y = -1 - \lambda$

$x - 2(-\lambda - 1) - 3\lambda = 5 \Leftrightarrow x + 2\lambda + 2 - 3\lambda = 5 \Rightarrow x = 3 + \lambda$

Wir sehen, dass bei (a) die folgende Gerade unsere Schnittmenge bildet:

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 10 & 6 & -1 \\ 5 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{II-4I,\ III-5I,\ IV+I} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -5 \\ 0 & 18 & 18 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 18 & 18 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right]$$

In Zeile 4 befindet die Gleichung $0 = -9$, was eine falsche Aussage ist. Daher hat dieses System keine Lösung.