Blatt № 11

Aufgabe 31: Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome I

Man beweise die Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome $T_\ell(x)$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_j(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & j \neq \ell \\ \frac{\pi}{2} & \ell = j \neq 0 \\ \pi & \ell = \mathrm{j} = 0 \end{cases}$$

Wir erinnern uns an die folgende Eigenschaft der Tschebyscheff-Polynome:

$$T_\ell(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$$

Für das Integral eignet sich also eine trigonometrische Substitution $x = \cos(\theta)$, wonach $\mathrm{d}x = -\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$. Es folgt:

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1} \frac{T_j(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{0} \cos(j\theta)\cos(\ell\theta)\frac{-\sin(\theta)}{|\sin(\theta)|}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_{\pi}^{0} \cos(j\theta)\cos(\ell\theta)\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{\pi} \cos(j\theta)\cos(\ell\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Nach der trigonometrischen Identität $2\cos(\theta)\cos(\varphi) = \cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta+\varphi)$ erhalten wir:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(\theta(\ell+j)) + \cos(\theta(\ell-j))\,\mathrm{d}\theta$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Fall 1: $\ell \neq j$:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \cos(\theta k)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{k}\sin(\theta)\Big|_0^\pi = 0 \\ &\Rightarrow I = 0 \end{aligned}$$

Fall 2: Für $\ell = j \neq 0$ folgt

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2\ell\theta) + 1\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2\ell\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

Fall 3: Für $\ell = j = 0$ folgt:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi$$

Aufgabe 32

Man bestimme die Nullstellen $x_k^{(n+1)}$ des Tschebyscheff-Polynoms T_{n+1} und verwende diese als Stützstellen der numerischen Integrationsformel

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} f\left(x_k^{(n+1)}\right)\omega_k$$

mit den Integrationsgewichten

$$\omega_k = \int_{-1}^{1} \frac{L_k^n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad L_k^n(x) = \prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n} \frac{x - x_\ell^{(n+1)}}{x_k^{(n+1)} - x_\ell^{(n+1)}}$$

Man zeige, dass die Integrationsformel für alle Polynome $f_m(x)$ vom Grad $m \leq 2n+1$ exakt ist. Man verwende die Entwicklung der Lagrange-Polynome $L_k^n(x)$ nach den Tschebyscheff-Polynomen $T_i(x)$ zur Berechnung von

$$\omega_k = \frac{\pi}{n+1}$$

Wir beginnen mit den Nullstellen. Sei $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
T_\ell(\cos(\theta_k)) = \cos(\ell\theta_k) &\overset{!}{=} 0 = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\\
\Rightarrow \ell\theta_k &= \frac{(2k+1)\pi}{2} \Leftrightarrow \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2\ell}\\
\Rightarrow x_k &= \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2\ell}\right) = \cos\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\ell}\right)
\end{aligned}$$

Da die Winkel $\theta_k = \frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{\ell}$ periodisch mit Dauer ℓ sind, gibt es nur ℓ Nullstellen x_k, die alle einfach und verschieden sind.

Aufgabe 33: Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome II

Man beweise die Orthogonalität

$$\sum_{i=0}^{n} T_k\left(x_i^{(n+1)}\right) T_\ell\left(x_i^{(n+1)}\right) = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ \frac{1}{2}(n+1) & k = \ell \neq 0 \\ n+1 & k = \ell = 0 \end{cases}$$

und verwende diese zur Bestimmung des Interpolationspolynoms

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)$$

welches in den Stützstellen $x_i^{(n+1)}$ mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt.

Für die Orthogonalität prüfen wir zuerst $k = \ell = 0$. Es folgt $T_0(x) = 1$, ergo

$$\sum_{i=0}^{n} T_0\left(x_i^{(n+1)}\right) T_0\left(x_i^{(n+1)}\right) = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$$

Weiters verwenden wir die alternative Darstellung der Tschebyscheff-Polynome mit $T_k(x) = \cos(k\arccos(x))$ für $x \in [-1,1]$:

$$T_k\left(x_i^{(n+1)}\right) = \cos\left(k\arccos\left(\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)\right)\right)$$

$$= \cos\left(k\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$
$$\Rightarrow T_k\left(x_i^{(n+1)}\right)T_\ell\left(x_i^{(n+1)}\right) = \cos\left(k\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)\cos\left(\ell\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$

Für $k = l \neq 0$ folgt nun:

$$2\cos^2\left(\ell\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}\right) = 1 + \cos\left(\frac{(2i+1)\ell\pi}{n+1}\right) = 1 + \mathfrak{Re}\left(\exp\left(\mathrm{i}k\frac{2i\pi}{n+1}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)\right)$$
$$= 1 + \mathfrak{Re}\left(\exp\left(\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n+1}\right)^i\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} T_\ell^2\left(x_i^{(n+1)}\right) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\mathfrak{Re}\left(\exp\left(\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n+1}\right)^i\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)\right)$$
$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)\sum_{i=0}^{n}\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)^i\right)$$
$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left(\exp\left(\frac{\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)\frac{1-\mathrm{e}^0}{1-\exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n+1}\right)}\right) = \frac{n+1}{2}$$

Aus Aufgabe 32 wissen wir, dass für Polynome vom Grad $2n+1$ die Formel

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(x_k^{(n+1)}\right)$$

exakt ist, also auch für $f(x) = T_k(x)T_\ell(x)$. Wir wissen aber für $k \neq \ell$:

$$0 = \int_{-1}^{1}\frac{T_k(x)T_\ell(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T_k\left(x_i^{(n+1)}\right)T_\ell\left(x_i^{(n+1)}\right)$$

Damit haben wir die gesuchte Orthogonalität nachgewiesen. Sei $f\left(x_i^{(n+1)}\right) = y_i$, dann folgt

$$\sum_{i=0}^{n} y_i T_\ell\left(x_i^{(n+1)}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_k \sum_{k=0}^{n} T_k\left(x_i^{(n+1)}\right)T_\ell(x_i^{(n+1)})$$
$$= \begin{cases} a_0(n+1) & \ell = 0 \\ \frac{a_\ell(n+1)}{2} & \ell \neq 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i$$
$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i T_k\left(x_i^{(n+1)}\right)$$