4. Übungsblatt

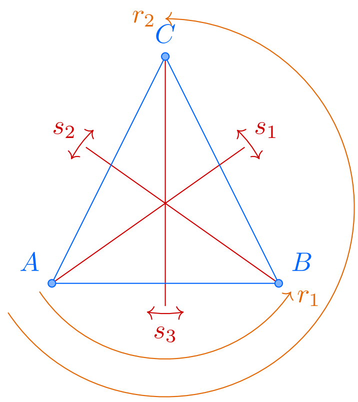
Aufgabe 16. Gegeben sein eine endliche Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element e. Zu zeigen ist:

$$\forall x \in G : \exists n \in \mathbb{N} : x^n = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ}_{n \text{ mal}} = e$$

Da es in G ein neutrales Element e gibt, und jedes Element $x_k \in G$ invertierbar ist, muss es eine Verknüpfung $x_k \circ x_l = e$ geben: $\forall x_k \in G\colon \exists x_l \in G\colon x_k \circ x_l = e = x_l \circ x_k$. Wir können daraus folgern, dass $x_l = x_k^{n-1}$ gilt, sofern die Aussage korrekt ist. Da x_k^{n-1} in G enthalten sein muss, gilt:

$$x_k \circ x_k^{n-1} = e$$

Aufgabe 17. Wir sollen die Verknüpfungstabelle für die symmetrische Gruppe S_3 aufstellen. Dazu verwenden wir alle Permutationen eines Dreiecks, welche das Dreieck erhalten:



Ein Dreieck hat 3 Spiegelungen s_1, s_2 und s_3 sowie zwei Rotationen r_1 und r_2, die neben der Identität id das Dreieck erhalten. Wir haben also folgende Abbildungen:

	Bild		
Permutation	A	B	C
id	A	B	C
s_1	A	C	B
s_2	C	B	A
s_3	B	A	C
r_1	B	C	A
r_2	C	A	B

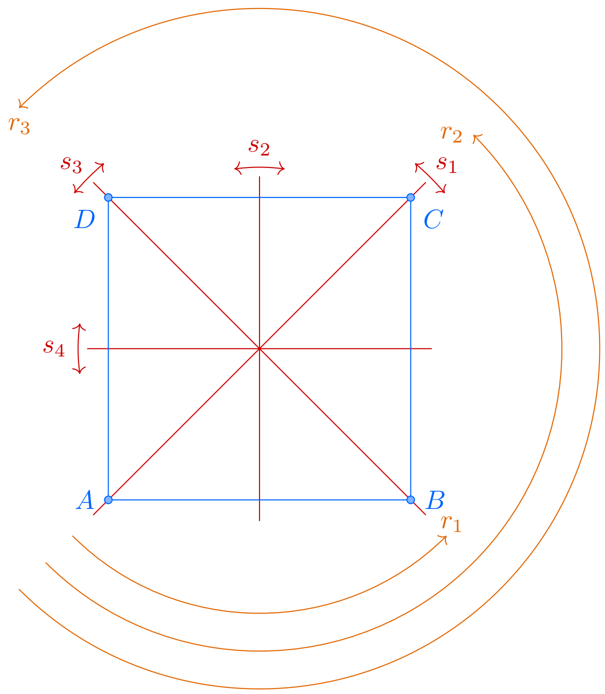
Unsere Verknüpfungstabelle schaut demnach folgendermaßen aus:

$\circ$	id	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2
id	id	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2
s_1	s_1	id	r_1	r_2	s_2	s_3
s_2	s_2	r_2	id	r_1	s_3	s_1
s_3	s_3	r_1	r_2	id	s_1	s_2
r_1	r_1	s_3	s_1	s_2	r_2	id
r_2	r_2	s_2	s_3	s_1	id	r_1

Wir suchen nun noch natürliche Zahlen k, für die gilt $\sigma^k = \text{id}$. Für id ist die Aufgabe nicht weiter schwer, hier ist $k = 1$. Auch für die Spiegelungen können wir schnell ein k finden, da sie zu sich selbst invers sind, für s_i ist k

also 2. Nur bei r_1 und r_2 müssen wir etwas mehr arbeiten. Wir sehen, dass $r_1 \circ r_2 = \text{id}$ gilt. Wir müssen also r_2 durch Verknüpfungen von r_1 erhalten. Wir sehen in der Tabelle, dass $r_1 \circ r_1 = r_2$ gilt, somit erhalten wir $r_1^r = \text{id}$. Zuletzt gehen wir analog für r_2 vor und erhalten $r_2^3 = \text{id}$.

Aufgabe 18. Gesucht ist die Verknüpfungstabelle der Symmetriegruppe eines Quadrates $ABCD$. Hier müssen wir darauf achten, dass sich gegenüberliegende Punkte auch nach einer Transformation noch gegenüberliegen. Wir können daraus folgern, dass nicht alle der 24 möglichen Permutationen von 4 Punkten in der Ebene unser Quadrat erhalten. Betrachten wir eine Graphik:



In diesem Fall haben wir neben id 4 Spiegelungen s_1, s_2, s_3 und s_4, sowie drei Rotationen r_1, r_2 und r_3, welche das Quadrat erhalten. Wir können die Permutationen katalogisieren:

	Bild			
Permutation	A	B	C	D
id	A	B	C	D
s_1	A	D	C	B
s_2	B	A	D	C
s_3	C	B	A	D
s_4	D	C	B	A
r_1	B	C	D	A
r_2	C	D	A	B
r_3	D	A	B	C

Somit können wir die Verknüpfungstabelle aufstellen:

$\circ$	id	s_1	s_2	s_3	s_4	r_1	r_2	r_3
id	id	s_1	s_2	s_3	s_4	r_1	r_2	r_3
s_1	s_1	id	r_1	r_2	r_3	s_2	s_3	s_4
s_2	s_2	r_3	id	r_1	r_2	s_3	s_4	s_2
s_3	s_3	r_2	r_3	id	r_1	s_4	s_1	s_2
s_4	s_4	r_1	r_2	r_3	id	s_1	s_2	s_3
r_1	r_1	s_4	s_1	s_2	s_3	r_2	r_3	id
r_2	r_2	s_3	s_4	s_1	s_2	r_3	id	r_1
r_3	r_3	s_2	s_3	s_4	s_1	id	r_1	r_2

Aufgabe 19. Sie $(G, \circ)$ eine Halbgruppe. Zu zeigen ist, dass $i \wedge ii \Leftrightarrow iii$ ist:

i) $\exists e \in G \colon \forall a \in G \colon e \circ a = a$

ii) $\forall a \in G \colon \exists b \in G \colon a \circ b = e$

iii) $\forall a \in G \colon \exists b \in G \colon \forall c \in G \colon a \circ b \circ c = c$

Was besagen i und ii? Die Aussage i) besagt, dass in G ein linksneutrales Element existiert. Die Aussage ii) besagt, dass zu jedem Element a in G ein rechtsinverses Element b in G existiert. Betrachten wir nun iii). Damit die Gleichung erfüllt ist, muss $a \circ b$ offensichtlich gleich e sein. Da wir nach ii) ein rechtsinverses Element in G haben, muss gelten: $a \circ b = e$. Damit erhalte wir die Gleichung $e \circ c = c$. Nach i) ist e linksneutral, damit gilt $e \circ c$, womit unsere Gleichung erfüllt ist.

Aufgabe 20. Gesucht ist die Verknüpfungstabelle für die Halbgruppe $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$.

$\cdot$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	6	8	1	3	5	7
3	3	6	0	3	6	0	3	6
4	4	1	3	7	2	6	1	5
5	5	1	6	2	7	3	8	4
6	6	3	0	6	3	0	6	3
7	7	5	3	1	8	6	4	2
8	8	7	6	5	4	3	2	1

Wir sollen anhand der Tabelle alle invertierbaren Elemente bestimmen. Diese sind 1,2,4,5,7 und 8.

Aufgabe 21. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Zeige, dass $(G, \circ)$ abelsch ist, genau dann wenn, $\forall x, y \in G \colon x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} = e$.

$$
\begin{aligned}
& x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} = e \\
& \Leftrightarrow x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} \circ y = e \circ y \\
& \Leftrightarrow x \circ y \circ x^{-1} \circ x = y \circ x \\
& \Leftrightarrow x \circ y = y \circ x
\end{aligned}
$$