Übungsblatt № 5

Aufgabe 5.1

Es sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - x$ gegeben.

a Zeigen Sie, dass f zweimal differenzierbar ist und bijektiv ist

b Beweisen Sie, dass f^{-1} differenzierbar ist und berechnen Sie $(f^{-1})'(1)$

Zu a:

Wir zeigen, dass f differenzierbar ist:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-(x+h)} - (x+h) - \mathrm{e}^{-x} + x\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-h} - h - \mathrm{e}^{-x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-h}\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} - h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-h}\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}}{h} - 1 = -1 + \mathrm{e}^{-x} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-h}-1}{h} \\
&z = -h \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{e}^{z}-1}{-z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{-1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{z}-1}{z} = -1 \\
&\Rightarrow -1 + \mathrm{e}^{-x} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-h}-1}{h} = -1 - \mathrm{e}^{-x} = f'(x)
\end{aligned}$$

Wir bestimmen noch f'':

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(-1 - \mathrm{e}^{-x-h} + 1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{h}\left(1 - \mathrm{e}^{-h}\right) \\
&= -\mathrm{e}^{-x} \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{-h}-1}{h} = \mathrm{e}^{-x} = f''(x)
\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass f streng monoton fallend ist. Dazu zeigen wir $f' < 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Sei $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-\xi} > 0 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-\xi} < 0 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-\xi} - 1 < -1 < 0$$

Da f stetig und streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$ ist, ist f injektiv.

Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir betrachten $f_y(x) = f(x) - y = \mathrm{e}^{-x} - x - y$. Da f_y eine Linearkombination stetiger Funktionen ist, ist f_y stetig. Für $x_1 > 0$ gilt $\mathrm{e}^{-x_1} < 1$, womit für $y > 0$ und $x_1 > 1$ gilt $f_y(x_1) < 0$. Weiterhin gilt für $x_2 < 0$ $\mathrm{e}^{-x_2} > 1$ und $\mathrm{e}^{-x_2} - x_2 > x_2$. Sei $x_2 > y$, dann gilt $f_y(x_2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat $f_y(x)$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$, womit $\exists x \in \mathbb{R}$ sodass $0 = f(x) - y$ bzw. $y = f(x)$. Damit ist f bijektiv auf $\mathbb{R}$.

Zu b:

Sei $y_0 = 1$, dann suchen wir $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $f(x_0) = y_0$:

$$1 = \mathrm{e}^{-x_0} - x_0$$

Versuch: $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-0} - 0 = 1 = y_0 \\
&\Rightarrow f'(x_0) = -\mathrm{e}^{0} - 1 = -2 \neq 0
\end{aligned}$$

Da also f bijektiv auf $\mathbb{R}$ ist und $f'(x_0) \neq 0$ für $f(x_0) = y_0$, ist f^{-1} in $y_0 = 1$ differenzierbar:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 5.4

Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n + (-2)^n}$

b $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n + n + (-2)^n}$

c $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\prod_{n=0}^{2n+1} i}$

Zu a:

$$\varrho_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{|3^n+(-2)^n|}}} = \sqrt[n]{|3^n+(-2)^n|}$$
$$\sqrt[n]{3^n-2^n} \leq \sqrt[n]{|3^n+(-2)^n|} \leq \sqrt[n]{3^n+2^n}$$

Wir suchen also den Grenzwert von $\sqrt[n]{3^n+2^n}$ und $\sqrt[n]{3^n-2^n}$:

$$\sqrt[n]{3^n+2^n} = \exp\left(\ln\left((3^n+2^n)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \exp\left(\frac{\ln(3^n+2^n)}{n}\right)$$
$$3^n+2^n = 3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right) \Rightarrow \exp\left(\frac{\ln(3^n+2^n)}{n}\right) = \exp\left(\frac{\ln(3^n)}{n} + \frac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right)$$

Da exp stetig ist, können wir $\lim_{n\to\infty}\exp(\xi_n) = \exp(\lim_{n\to\infty}\xi_n)$ schreiben:

$$\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln(3^n)}{n} + \frac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(3)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right) = 0\cdot\ln(1) = 0$$
$$\Rightarrow \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(3)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln(3)\right) = \exp(\ln(3)) = 3$$

Wir können die gleiche Methode für $\sqrt[n]{3^n-2^n}$ anwenden:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-2^n} = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\left((3^n-2^n)^{\frac{1}{n}}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln(3^n-2^n)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{\ln(3^n)}{n} + \frac{\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right)$$
$$= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln(3) + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right) = 0\cdot\ln(1) = 0$$
$$\Rightarrow \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln(3) + \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{n}\right) = \exp(\ln(3)) = 3$$

Wir können $\ln(3^n+2^n)$ berechnen, da $\forall n\in\mathbb{N}\colon 3^n > 2^n$ bzw. $\forall n\in\mathbb{N}\colon 3^n-2^n>0$. Nach dem Einzwecksatz gilt daher:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|3^n+(-2)^n|} = 3 = \varrho$$

Zu b:

$$\varrho_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{|2^n+n+(-2)^n|}}} = \sqrt[n]{|2^n+n+(-2)^n|}$$
$$\sqrt[n]{2^n-n+2^n} = \sqrt[n]{2^{n+1}-n} \leq \sqrt[n]{|2^n+n+(-2)^n|} \leq \sqrt[n]{2^{n+1}+n} = \sqrt[n]{2^n+n+2^n}$$

Da $2^{1+1}-1 = 3$ ist $\sqrt[n]{2^{n+1}-n}$ auf ganz $\mathbb{N}$ definiert. Wir wollen wieder den Einzwecksatz verwenden und beginnen mit $\sqrt[n]{2^{n+1}+n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}+n} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln\left((2^{n+1}+n)^{\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}+n\right)}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}\right)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{n}{2^{n+1}}\right)}{n}\right)\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{n}{2^{n+1}}\right)}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\cdot \ln\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\right) = 0\cdot\ln(1) = 0\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{n}{2^{n+1}}\right)}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right)\cdot \ln\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{n+1}}\right) = 0\cdot\ln(1) = 0\\
&\Rightarrow \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}\right)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{n}{2^{n+1}}\right)}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(2)}{n}\right)\\
&\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1\\
&\Rightarrow \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(2)}{n}\right) = \exp(\ln(2)) = 2
\end{aligned}
$$

Analog für $\sqrt[n]{2^{n+1}-n}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n+1}-n} = \exp\left(\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(2^{n+1}-n\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}-n\right)}{n}\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{n+1}\right)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{n}{2^{n+1}}\right)}{n}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(2)}{n}\right) = \exp(\ln(2)) = 2
\end{aligned}
$$

Nach dem Einzwecksatz gilt also:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|2^n+n+(-2)^n\right|} = 2$$

Zu c:

$$
\begin{aligned}
&q_n = \frac{\prod_{i=n+1}^{2n+1} i}{\prod_{i=n+2}^{2n+3} i} = \frac{\prod_{i=n+2}^{2n+3} i}{\frac{(2n+2)(2n+3)}{n+1}\prod_{i=n+1}^{2n+1} i} = \frac{n+1}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{(n+1)}{(n+1)(4n+6)} = \frac{1}{4n+6} = \frac{\frac{1}{n}}{4+\frac{6}{n}}\\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty} q_n = 0 \Rightarrow \varrho = \infty
\end{aligned}
$$