Blatt № 1

Aufgabe 1: Prüfen einer Lösung

Man zeige, dass die durch

$$u(t) = \frac{1}{\nu}\int_0^t \sin(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s$$

für $t > s$ definierte Funktion eine Lösung des folgenden Anfangswertproblems ist:

$$u''(t) + \nu^2 u(t) = f(t) \qquad u(0) = u'(0) = 0$$

Wir erinnern uns an die Leibnizregel für Parameterintegrale. Sei $f\colon (\alpha,\beta)\times(c,d)\to\mathbb{R}$ mit $(t,s)\mapsto f(t,s)$ stetig in t differenzierbar. Seien weiter $a,b\colon(\alpha,\beta)\to(c,d)$ stetig differenzierbar, dann ist F auf (α,β) stetig differenzierbar mit:

$$F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(t,s)\ \mathrm{d}s \Rightarrow F'(t) = f(t,b(t))\cdot b'(t) - f(t,a(t))\cdot a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t,s)\ \mathrm{d}s$$

Hernach können wir u' und u'' bestimmen. Sei $g_1(t,s) = \sin(\nu(t-s))f(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\nu}\int_0^t g_1(t,s)\ \mathrm{d}s = \frac{1}{\nu}\left(g_1(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\sin(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{1}{\nu}\left(\sin(\nu(t-t))f(t) + \int_0^t \nu\cos(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s\right) = \int_0^t \cos(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Sei nun $g_2(t,s) = \cos(\nu(t-s))f(s)$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t g_2(t,s)\ \mathrm{d}s = g_2(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\cos(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s\\ &= \cos(\nu(t-t))f(t) - \nu\int_0^t \sin(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s = f(t) - \nu\int_0^t \sin(\nu(t-s))f(s)\ \mathrm{d}s = f(t) - \nu^2 u(t)\end{aligned}$$

Setzen wir in die Gleichung ein erhalten wir:

$$f(t) - \nu^2 u(t) + \nu^2 u(t) = f(t)$$

$u(t)$ erfüllt also die Differentialgleichung. Zuletzt prüfen wir noch die Anfangsbedingungen:

$$u(0) = \frac{1}{\nu}\int_0^0 g_1(t,s)\ \mathrm{d}s = 0 \qquad u'(0) = \int_0^0 g_2(t,s)\ \mathrm{d}s = 0$$

Aufgabe 2: Finden einer Lösung

Analog zu Beispiel 1 bestimme man eine allgemeine Darstellung für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) + \mu u(t) = f(t) \qquad u(0) = 0$$

Beginnen wir damit, die Gleichung etwas umzuschreiben, um die Produktregel ausnutzen zu können:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mu t}u'(t) + \mu\mathrm{e}^{\mu t}u(t) = \mathrm{e}^{\mu t}f(t) &\Leftrightarrow (\mathrm{e}^{\mu t}u(t))' = \mathrm{e}^{\mu t}f(t)\\ \Rightarrow \mathrm{e}^{\mu t}u(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}f(s)\ \mathrm{d}s &\Leftrightarrow u(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\int_0^t \mathrm{e}^{\mu s}f(s)\ \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Mit der Produktregel können wir verifizieren, dass u die Gleichung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\mu u(t) + \mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{e}^{\mu t}f(t) = -\mu u(t) + f(t) \Leftrightarrow u'(t) + \mu u(t) = -\mu u(t) + f(t) + \mu u(t) = f(t)$$

Auch die Anfangsbedingung lässt sich leicht überprüfen:

$$u(0) = \int_0^0 \mathrm{e}^{\mu s} f(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

Aufgabe 3: Orthogonale Signale

Für $k, l \in \mathbb{N}$ beweise man die Orthogonalität

$$I_{kl} = \int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(l\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{kl}$$

Dabei ist δ_{kl} das Kronecker-Delta.

Seien $k = l$, dann gilt $\sin(k\pi x)\sin(l\pi x) = \sin^2(k\pi x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2k\pi x))$ Hernach:

$$I_{kk} = \frac{1}{2}\int_0^1 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2k\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2k\pi)}{2k\pi} = \frac{1}{2}$$

Für $k \neq l$ folgt:

$$\begin{aligned}
&\sin(k\pi x)\sin(l\pi x) = \frac{\cos((k-l)\pi x) - \cos((k+l)\pi x)}{2} \\
&\Rightarrow I_{k\neq l} = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((k-l)\pi x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos((k+l)\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin((k-l)\pi x)}{(k-l)\pi}\bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\frac{\sin((k+l)\pi x)}{(k+l)\pi}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\frac{\sin((k-l)\pi)}{(k-l)\pi} - \frac{1}{2}\frac{\sin((k+l)\pi)}{(k+l)\pi}
\end{aligned}$$

Da $k, l \in \mathbb{N}$: $\exists n, m \in \mathbb{Z}$: $k - l = n \wedge k + l = m$. Da $\forall n \in \mathbb{Z}$: $\sin(n\pi) = 0$ folgt somit:

$$I_{k\neq l} = 0$$

bzw. für $k, l \in \mathbb{N}$ damit:

$$I_{kl} = \int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(l\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{kl}$$