

## Übungsblatt №1

**Aufgabe 1.1.** Gegeben sei die folgende Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$$

An welchen Stellen  $x$  ist die Funktion stetig?

Betrachten wir  $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt  $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ . Da  $f_1(x) = \text{id}(x)$  und  $f_2(x) = 3$  beide stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  sind, ist auch  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . Sei nun  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 3$  mit  $\xi_n \neq 3$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n + 3) = 6 \\ f(3) &= 7 \neq 6 \end{aligned}$$

Somit ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

**Aufgabe 1.2.** Sei  $c \in \mathbb{R}$  und die folgende Funktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben:

$$g(x) = \begin{cases} 10-x & x \geq 2 \\ cx^2 + 1 & x < 2 \end{cases}$$

Für welche Werte von  $c$  ist  $g$  (überall) stetig?

Da  $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \geq 2 \\ f_2(x) & x < 2 \end{cases}$  und  $f_1$  und  $f_2$  jeweils stetig auf  $\mathbb{R}$  sind, müssen wir nur den Punkt  $x = 2$  betrachten, um zu entscheiden ob  $g$  stetig auf  $\mathbb{R}$  oder stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  ist. Angenommen  $f(x)$  ist in 2 nicht stetig, dann gilt:

$$\exists (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}: \xi_n \in \mathbb{R}: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 2 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n) \neq g(2)$$

Sei also  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton steigende Folge mit Grenzwert 2, sprich  $\forall n \in \mathbb{N}: \xi_n < 2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c\xi_n^2 + 1 = 4c + 1 \neq g(2) = 8$$

Damit  $g$  also unstetig in 2 ist, darf  $4c + 1 = 8$  nicht erfüllt sein. Wir suchen also  $C \subseteq \mathbb{R}: c \in C \implies 4c + 1 = 8$ , dann ist  $g$  für  $c \in \mathbb{R} \setminus C$  unstetig in 2. Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir  $c = \frac{7}{4}$ , womit  $C = \{\frac{7}{4}\}$ . Damit ist  $g$  für  $c \neq \frac{7}{4}$  unstetig in 2, bzw. für  $c = \frac{7}{4}$  ist  $g$  stetig in 2.

Wir betrachten weiterhin die folgende Funktion  $f$ :

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{|x^2 + x - 6|} = \frac{f_1(x)}{|f_2(x)|}$$

**Aufgabe 1.4.** a Bestimme den maximalen Definitionsbereich  $D(f) \subseteq \mathbb{R}$

- b Bestimme die inneren Punkte von  $D(f)$
- c Bestimme die Randpunkte von  $D(f)$
- d Bestimme die isolierten Punkte von  $D(f)$

Zu a). Da  $f_1(x)$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist, suchen wir jene  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|f_2(x)| = 0$ , da hier  $f(x)$  nicht definiert ist (Division mit 0). Wir lösen also die Gleichung  $f_2(x) = 0$ , da  $|0| = 0$ :

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

Da  $f_1(2) = 0$  haben  $f_1$  und  $f_2$  einen gemeinsamen Linearfaktor  $(x - 2)$ :

$$(x^3 - 7x^2 + 16x - 12) : (x - 2) = x^2 - 5x + 6 = f_{11}(x)$$

Es gilt weiterhin  $f_{11}(2) = 0$ , also können wir einen weiteren Linearfaktor  $(x - 2)$  abspalten:

$$(x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = (x - 3) \implies f_1(x) = (x - 3)(x - 2)^2$$

Somit:

$$f(x) = \frac{(x - 3)(x - 2)^2}{|(x + 3)(x - 2)|} = \frac{(x - 3)(x - 2)^2}{|(x + 3)| \cdot |(x - 2)|}$$

Da  $(x - 2)^2 > 0$  gilt  $(x - 2)^2 = |(x - 2)|^2$ , womit:

$$f(x) = \frac{(x - 3)|x - 2|}{|x + 3|}$$

Der Definitionsbereich von  $f$  ist also gegeben durch  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$ .

Zu b). Ein innerer Punkt  $x_0 \in D(f)$  zeichnet sich dadurch aus, dass  $\exists r \in \mathbb{R}: \mathcal{B}_r(x_0) \subseteq D(f)$ . Schreiben wir  $D(f)$  in Intervalle um erhalten wir:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} = \underbrace{(-\infty, -3)}_{=I_1} \cup \underbrace{(-3, \infty)}_{=I_2}$$

Sei  $x_0 \in I_2$  und  $\rho_1 \in (-3, x_0)$  und  $\rho_2 \in (x_0, 2)$ , wir wählen  $r = \min(|x_0 - \rho_1|, |x_0 - \rho_2|)$ , dann gilt:

$$\mathcal{B}_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq (\rho_1, \rho_2) \subset I_2$$

Sei  $x_0 \in I_2$ , dann  $\exists \rho \in (-3, x_0)$ . Sei  $r = |x_0 - \rho|$  so gilt  $\mathcal{B}_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ , wobei  $x_0 - r = x_0 - x_0 + \rho = \rho > -3$ , womit  $\mathcal{B}_r(x_0) \subseteq I_3$ .

Zu c). Die Randpunkte von  $D(f)$  sind Berührpunkte von  $D(f)$  und  $\mathbb{R} \setminus D(f) = \{-3\} = R$ . Da  $R$  nur aus isolierten Punkten besteht<sup>1</sup> gilt  $\forall x \in R: \forall r > 0: \mathcal{B}_r(x) \cap R \neq \emptyset$ , da  $\forall x \in R: \forall r > 0: \{x\} = \mathcal{B}_r(x) \cap R$ , also alle Punkte von  $R$  sind isoliert und Berührpunkte. Weiterhin ist  $-3$  ein Berührpunkt von  $D(f)$ , da  $\forall r > 0: \mathcal{B}_r(-3) \cap D(f) = (-3 - r, -3 + r) \setminus \{-3\}$ . Somit ist  $-3$  ein Berührpunkt von  $D(f)$  und von  $R$ , womit ein  $-3$  Randpunkt von  $D(f)$  ist.

Zu d).  $\forall x \in D(f): \forall r > 0: \mathcal{B}_r(x) \cap D(f) = (x - r, x + r) \setminus \{-3\} \neq \{x\}$ , also ist kein Punkt  $x \in D(f)$  ein isolierter Punkt.

---

<sup>1</sup>etwa für  $r = \frac{1}{100}: \mathcal{B}_{\frac{1}{100}}(-3) \cap R = \{-3\}$