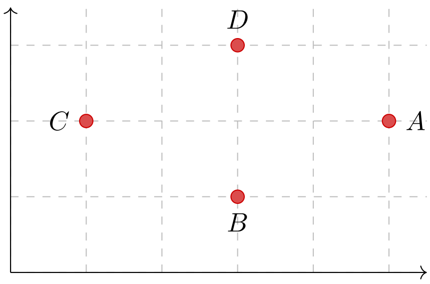
1. Übungsblatt

Aufgabe 1. Gegeben seien drei Eckpunkte A, B, und C eines Parallelogramms. Gesucht sind die Koordinaten des vierten Punktes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wir wissen, dass ein Parallelogramms je zwei parallele Seiten besitzt. Wir müssen also eine Strecke parallel verschieben um die verbleibenden Koordinaten zu bestimmen:

$$D = C + \overrightarrow{BA} = A + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BA} = A - B = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Aufgabe 2. Gesucht ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 10\xi + 4\eta + 3\zeta &= 15 \\ -2\xi + \eta - \zeta &= 1 \\ -3\xi - \eta - \zeta &= -4 \end{aligned}$$

Wir verwenden Gauß'sche Elimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & 4 & 3 & 15 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{10}I,\ -\frac{1}{2}II,\ -\frac{1}{3}III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \overset{II-I,\ III-I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{9}{10} & \frac{1}{5} & -2 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{6} \end{array}\right]$$

$$\overset{-\frac{10}{9}II,\ -15III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{20}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right] \overset{III-II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{20}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{18} & \frac{5}{18} \end{array}\right] \overset{-\frac{5}{18}III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{20}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{I-\frac{3}{10}III,\ II+\frac{2}{9}III}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{I-\frac{2}{5}II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Die Lösung ist also $(\xi, \eta, \zeta) = (1, 2, -1)$. Das entspricht einem Punkt im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit dem unbekannten Parameter δ:

$$\begin{aligned} x + (1-\delta)y &= 1 \\ (1+\delta)x + \qquad y &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1-\delta & 1 \\ 1+\delta & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{II-(1+\delta)I}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1-\delta & 1 \\ 0 & \delta^2 & -\delta \end{array}\right] \overset{\frac{1}{\delta^2}II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1-\delta & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\delta} \end{array}\right] \overset{I-(1-\delta)II}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1+\frac{1-\delta}{\delta} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\delta} \end{array}\right]$$
$$1 + \frac{1-\delta}{\delta} = \frac{\delta + 1 - \delta}{\delta} = \frac{1}{\delta}$$

Wir sehen, dass wir mit $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = -\frac{1}{\delta}$ das System eindeutig lösen können. Der Lösungsbereich ergibt sich daher zu $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Das macht insbesondere Sinn, da für $\delta = 0$ die beiden Zeilen des Systems identisch sind, und wir z.B. durch Elimination immer zur folgenden Matrix gelangen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Dieses System ist nicht eindeutig lösbar[1], sondern beschreibt die Gerade $y = 1 - x$.

Aufgabe 4. Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E:

$$\begin{aligned} g &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ E &= \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi - \eta + \zeta = 3\} \end{aligned}$$

Gesucht sind nun die Geradengleichung zu g und die Parameterform von E. Wir beginnen mit g:

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 3a + 4b = 0 \\ &a = 1 \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \\ &\Rightarrow x - \frac{3}{4}y = c \\ &x = 1, y = 2 \rightarrow 1 - \frac{3}{4} \cdot 2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = c \\ &\Rightarrow g = \left\{ x - \frac{3}{4}y = -\frac{1}{2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

Für E:

$$\begin{aligned} &\xi - \eta + \zeta = 3 \Leftrightarrow \xi = 3 + \eta - \zeta \\ &\Rightarrow E = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

[1] wir sprechen später davon, dass die Gleichungen linear abhängig sind