Übungsblatt № 10

Aufgabe 10.1

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$

b $\int x \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

Zu a:

Sei $u = x^2$ und $V = \ln x$, mit partieller Integration erhalten wir:

$$\int x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$$
$$= x^3\left(\frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}\right)$$

Zu b:

Wir bestimmen zuerst $(\ln^2)'$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln^2 x = 2\frac{\ln x}{x}$$

Weiters bestimmen wir zuerst $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$:

$$\int x \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$$

Sei $u = x$ und $V = \ln^2 x$, mit partieller Integration erhalten wir:

$$\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}\int 2x^2\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2$$
$$= x^2\left(\frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}\right)$$

Aufgabe 10.2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a $\int_{-2}^{0} \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

b $\int_{-3}^{5} |x-4|\,\mathrm{d}x$

Zu a:

Wir wählen die Substitution $u = 1 - x$ und erhalten somit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1$. Weiters gilt für $x = -2$ das $u = 3$ und für $x = 0$ erhalten wir $u = 1$:

$$\int_{-2}^{0}\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int_{3}^{1}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int_{1}^{3}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\Big|_1^3$$
$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{27} - 1\right)$$

Zu b: Wir nutzen die Eigenschaft des Integrals, dass wir es aufteilen können:

$$\int_{-3}^{5}|x-4|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{4}|x-4|\,\mathrm{d}x + \int_{4}^{5}|x-4|\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-3}^{4} 4 - x \,\mathrm{d}x + \int_{4}^{5} x - 4 \,\mathrm{d}x$$
$$\int_{-3}^{4} 4 - x \,\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{4} = (16-8) - \left(-12 - \frac{9}{2}\right) = 20 + \frac{9}{2}$$
$$\int_{4}^{5} x - 4 \,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)\Big|_{4}^{5} = \left(\frac{25}{2} - 20\right) - (8-16) = \frac{25}{2} - 20 + 8 = \frac{1}{2}$$
$$20 + \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 25$$

Aufgabe 10.3

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a $\int \sin(x)\mathrm{e}^{2x} \,\mathrm{d}x$

b $\int_0^{2\pi} \cos^4(x) \,\mathrm{d}x$

Zu a:

Wir vereinfachen den Integranden zuerst etwas:

$$\sin(x)\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{x(2+\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{x(2-\mathrm{i})}\right)$$

Weiters bestimmen wir $\int \mathrm{e}^{\alpha x}$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$u = \alpha x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{d}u$$
$$\Rightarrow \int \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x}$$

Wir können somit das Integral bestimmen:

$$\int \sin(x)\mathrm{e}^{2x} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{x(2+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2\mathrm{i}}\int \mathrm{e}^{x(2-\mathrm{i})}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{2+i}\mathrm{e}^{x(2+i)} - \frac{1}{2-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{x(2-\mathrm{i})}\right) = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{2+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{1}{2-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$
$$= \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{10\mathrm{i}}\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \mathrm{e}^{2x}\frac{1}{10\mathrm{i}}\left(4\mathrm{i}\sin(x) - 2\mathrm{i}\cos(x)\right)$$
$$\frac{\mathrm{e}^{2x}}{5}\left(2\sin(x) - \cos(x)\right)$$

Zu b:

Wir verwenden die Rekursionsformel für $\cos^k$:

$$\int \cos^k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\sin(x)\cos^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int \cos^{k-2}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(x)\cos^3(x) + \frac{3}{4}\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}\int 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x)\cos^3(x) + \frac{x}{2}$$
$$\Rightarrow \int \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(x)\cos^3(x) + \frac{3}{8}\left(\sin(x)\cos(x) + x\right)$$
$$\frac{1}{4}\sin(2\pi)\cos^3(2\pi) + \frac{3}{8}(\sin(2\pi)\cos(2\pi) + 2\pi) - \frac{1}{4}\sin(0)\cos^3(0) - \frac{3}{8}(\sin(0)\cos(0) + 0) = \frac{3\pi}{4}$$

Aufgabe 10.4

Berechnen Sie doe folgenden Integrale:

a $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x$

b $\displaystyle\int \frac{1}{9\cos^2(x)+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Zu a:

Wir wählen die Substitution $u = x - 1$, somit ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1$:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}\,\mathrm{d}u$$

Wir wählen nun eine neue Substitution $s = \sqrt[6]{u}$, mit $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{6u^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{6s^5}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}\,\mathrm{d}u = 6\int_0^1 \frac{s^5}{s^3+s^2}\,\mathrm{d}s = 6\int_0^1 \frac{s^5}{s^2(s+1)}\,\mathrm{d}s\\
&6\int_0^1 \frac{s^3}{s+1}\,\mathrm{d}s\\
&(s^3):(s+1) = s^2 - s + 1 - \frac{1}{s+1}\\
&\Rightarrow 6\int_0^1 \frac{s^3}{s+1}\,\mathrm{d}s = 6\int_0^1 s^2 - s + 1 - \frac{1}{s+1}\,\mathrm{d}s\\
&= 6\left(\int_0^1 s^2 - s + 1\,\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{1}{s+1}\,\mathrm{d}s\right)\\
&= 6\left(\left(\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + s\right)\Big|_0^1 - \left(\ln(s+1)\Big|_0^1\right)\right)\\
&= 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \ln(2) + \ln(1)\right) = 6\left(\frac{2-3+6}{6} - \ln(2)\right) = 5 - 6\ln(2)
\end{aligned}$$

Zu b:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{9\cos^2(x)+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{9\cos^2(x)} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin^2(x)}{9\cos^2(x)}} = I\\
&u = \frac{\tan(x)}{3} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3\cos^2(x)}\\
&\Rightarrow I = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\frac{1}{1+u^2}\cos^2(x)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{3}\arctan(u) = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}\tan(x)\right)
\end{aligned}$$