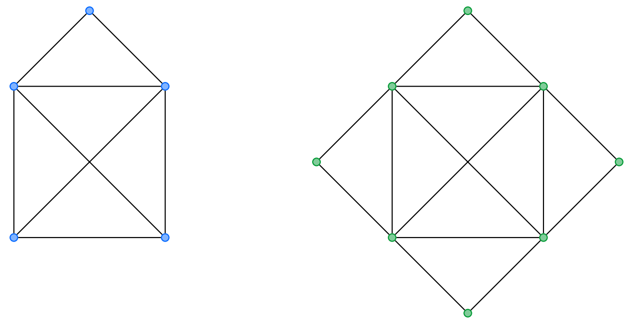
Übungsblatt № 7

Aufgabe 47

Eine offene Euler-Tour in einem Graph ist ein Kantenzug, der jede Kante genau einmal enthält und deren Endknoten verschieden sind. Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass ein Graph eine offene Tour enthält. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an den folgenden Graphen.



Betrachten wir den Pfad P_n, so stellen wir fest, dass dieser eine offene Euler-Tour ist. Wir formulieren also die Bedingung, dass ein zusammenhängender Graph genau dann eine offene Euler-Tour enthält, wenn er genau zwei Knoten mit ungeraden Grad hat.

Aufgabe 48

Der vollständige bipartite Graph $K_{m,n}$ besteht aus der Knotenmenge $A \cup B$ mit $|A| = m$ und $|B| = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, sodass $A \cap B = \emptyset$ und mit den Kanten $E = A \times B$.

a) Charakterisieren Sie alle Paare $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ für die $K_{m,n}$ einen Eulerschen Kreis besitzt
b) Charakterisieren Sie alle Paare $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ für die $K_{m,n}$ einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

Zu a): Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ ist eulersch, wenn alle Knoten geraden Grad haben. In $K_{m,n}$ haben Knoten in A Grad n und Knoten aus B Grad m, somit müssen m und n gerade sein.

Zu b): Wählen wir einen Startknoten $a_1 \in A$ aus, so können wir einen Knoten $b_1 \in B$ auswählen. Diese Knoten können nun nicht mehr verwendet werden. Zu b_1 wählen wir nun ein $a_2 \in A$, dazu wieder ein $b_2 \in B$ und so weiter. Wir bilden also eine eineindeutige Zuordnung der Knoten aus A und B. Damit der letzte Knoten in B liegt, muss als eine Bijektion zwischen A und B existieren, sprich $|A| = |B|$ bzw. $m = n$.

Aufgabe 49

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Falls für einen zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ die Ungleichung $|E| \leq 3(|V| - 2)$ erfüllt ist, dann ist G planar.

Wir betrachten $K_{3,3}$ mit $|V| = 6$ und $|K| = 9$, womit $9 \leq 3(6 - 2) = 12$ erfüllt ist. Angenommen $K_{3,3}$ wäre planar. Nach der Eulerschen Polyederformel hat das aufgespannte Polyeder $f = 5$ Flächen ($|V| - |E| + f = 2$). Ist B die Anzahl der Ränder dieser fünf Flächen. Da jede Kante zweimal als Rand verwendet wird, gilt $B = 2|E|$. Da zusätzlich jede Fläche von 4 oder mehr Kanten berandet wird, gilt $B \geq 4f$. Damit erhalten wir $4f \leq 2|E|$. Aber für $f = 5$ und $|E| = 9$ folgt damit die Ungleichung $20 \leq 18$ die falsch ist. Somit ist $K_{3,3}$ nicht planar.

Aufgabe 50

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen d, für welche die folgende Aussage gilt: Wenn in einem Graphen $G = (V, E)$ jeder Knoten Grad d oder weniger hat, dann ist G ein planarer Graph.

Ist G planar, so gilt $|E| \leq 3|V| - 6$, für $|V| \geq 3$:

$$\sum_{v \in V} \deg(V) = 2|E| \leq 6|V| - 12 \implies \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg(v) \leq 6 - \frac{12}{|V|} < 6$$

Aufgabe 51

Beweisen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jeder zusammenhängende Graph, planare, k-reguläre Graph $G = (V, E)$ besitzt $\frac{4+(k-2)}{2}|V|$ Flächen.

b) Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 12$ und G^{c} der Komplementgraph von G. Dann ist entweder G oder G^{c} nicht planar

c) Ein vollständiger 3-partiter Graph $K_{r,s,t}$ ist ein 3-partiter Graph mit $|V_1| = r$, $|V_2| = s$ und $|V_3| = t$, wobei jeder Knoten aus V_i mit Knoten aus V_j für $i \neq j$ verbunden ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der vollständige 3-partite Graph $K_{n,2n,3n}$ hamiltonsch, aber $K_{n,2n,3n+1}$ ist nicht hamiltonsch.

d) Wenn man zu einem beliebigen Baum drei Kanten hinzufügt, ist der entstehende Graph planar

Zu a): Wir kennen bereits die Eulersche Polyederformel für planare zusammenhängende Graphn: $f = e - v + 2$, wobei $f = |F|$ die Anzahl der Flächen, $e = |E|$ die Anzahl der Kanten und $v = |V|$ die Anzahl der Knoten ist.

$$
\begin{aligned}
f &\stackrel{!}{=} \frac{4 + (k-2)v}{2} = 2 + \frac{(k-2)}{2}v \\
2 + \frac{(k-2)v}{2} &= e - v + 2 \iff \frac{(k-2)v}{2} = e - v \\
&\iff kv - 2v = 2e - 2v \iff kv = 2e
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die Formel beweisen, da in einem k-regulären Graphen jeder Knoten Grad k hat, womit $kv = 2e$ gilt.

Zu c):

Wir führen einen Induktionsbeweis. Zum Induktionsanfang betrachten wir damit $K_{1,2,3}$:

Abbildung 1: Der Graph $K_{1,2,3}$ mit einem Hamiltonkreis

Im Induktionsschritt verwenden wir nun den Satz von Dirac. Dieser besagt, dass Graphen mit $|V| \geq 3$ und $\min_{v \in V} \deg(G) \geq \frac{|V|}{2}$ hamiltonsch sind. In $K_{n+1,2n+2,3n+3}$ erhalten wir $V = n+1+2(n+1)+3(n+1) = 6(n+1)$. Die Knoten in einem 3-partiten Graphen liegen in jener Menge, welche die maximale Anzahl an Knoten hat, hier also $3(n+1)$. Im 3-partiten Graphen gilt $\deg(v) = |V_1| + |V_2|$ für $v \in V_3$ und ähnlich für $v \in V_1$ usw. Damit gilt $\min_{v \in V} \deg(v) = n+1+2(n+1) = 3(n+1)$. Wir prüfen nun die Bedingung für den Satz von Dirac. Für $K_{n+1,2n+2,3n+3}$ gilt $\frac{|V|}{2} = 3(n+1)$, womit $\min_{v \in V} \deg(v) \geq \frac{|V|}{2}$. Daher ist $K_{n+1,2n+2,3n+3}$ hamiltonsch. In $K_{n+1,2n+2,3n+4}$ folgt $|V| = 6(n+1)+1$. Allerdings bleibt $\min_{v \in V} \deg(v) = 3(n+1)$:

$$3(n+1) \geq \frac{6(n+1)+1}{2} = 3(n+1) + \frac{1}{2}$$

Somit kann $K_{n+1,2n+2,3n+4}$ nicht hamiltonsch sein.

Zu d):