Übungsblatt №3

Aufgabe 3.5. *Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 8$. Wir sollen mit der Definition der Differenzierbarkeit zeigen, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und somit f' berechnen.*

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, f ist differenzierbar in x_0, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Wir bestimmen also diesen Grenzwert für unser f:

$$f(x) - f(x_0) = 3x^3 - 3x_0^3 - x^2 + x_0^2 + 5x - 5x_0 = 3(x^3 - x_0^3) - (x^2 - x_0^2) + 5(x - x_0)$$

$$(x^n - x_0^n) = (x - x_0) \sum_{k=1}^{n-1} x^k x_0^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = 3(x - x_0) \sum_{k=0}^{2} x^k x_0^{2-k} - (x - x_0)(x + x_0) + 5(x - x_0)$$

$$= 3(x - x_0)(x_0^2 + xx_0 + x^2) - (x - x_0)(x + x_0) + 5(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 3(x_0^2 + xx_0 + x^2) - (x + x_0) + 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 3(x_0^2 + xx_0 + x^2) - (x + x_0) + 5 = 3(3x_0^2) - 2x_0 + 5 = 9x_0^2 - 2x_0 + 5$$