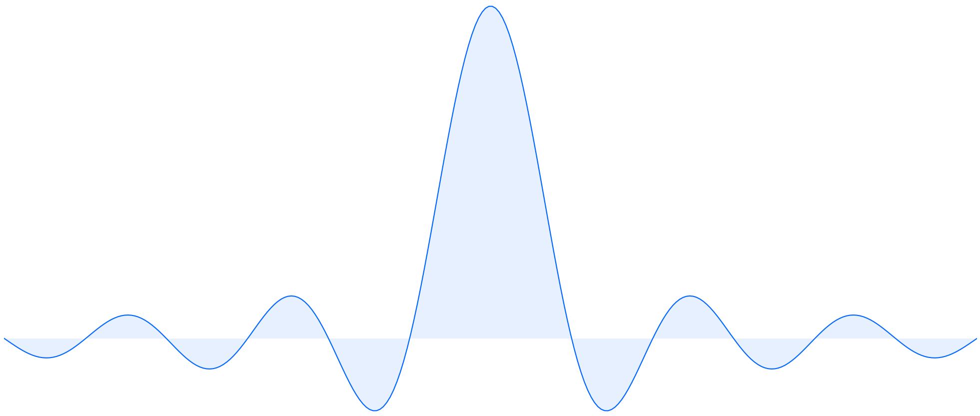
Analysis 2

[MAT.151UB]

gelesen von: Wolfgang Ring, Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn.
am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens Universität Graz

verfasst von: Laura Philomena Mossböck
11820925

Sommersemester 2022



Inhaltsverzeichnis

1 Regularitätseigenschaften reeller und komplexer Funktionen

Definition 1.0 (Erinnerung Stetigkeit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ gegeben, sei $x_0 \in D$. Wir sagen f ist stetig (engl. continuous) in x_0 falls:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f heißt stetig auf D, falls f in jedem einzelnen Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Stetigkeit in einem Punkt x_0 ist eine lokale Eigenschaft, ebenso wie die Unstetigkeit. Im Gegensatz dazu ist Stetigkeit auf D globale Eigenschaft, die separat gezeigt werden muss. Meistens kann man jedoch beide Beweise verknüpfen, indem man Stetigkeit für ein beliebiges x_0 in D nachweist.

Beispiel 1.1. *$p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p_n(x) = x^n$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (identisch argumentiert ist auch $p_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $p_n(z) = z^n$ stetig auf $\mathbb{C}$). Ein weiteres Beispiel ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$g(x) = \begin{cases} n & x \in \mathbb{Q} : x = \frac{m}{n} : \operatorname{ggT}(m,n) = 1 \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Funktion g ist überall auf $\mathbb{R}$ unstetig.

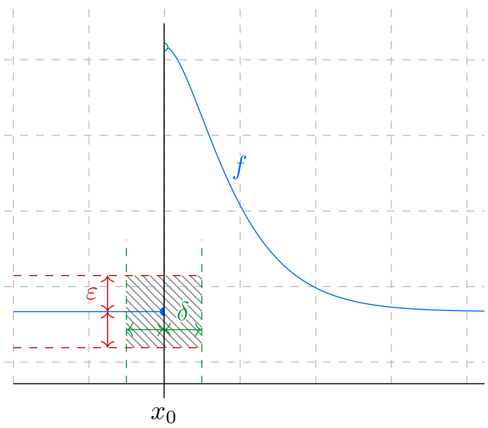


Abbildung 1: Beispiel einer Funktion mit einer Unstetigkeitsstelle an x_0

Satz 1.2 (Folgenkriterium für Stetigkeit)**.** *Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben, $x_0 \in D$, dann ist f stetig in x_0, genau dann wenn:*

$$\forall \xi \in \mathfrak{c}(D) : \lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0 : \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0)$$

Beweis. $\implies$: Sei $x_0 \in D$, f stetig in x_0 und sei $\xi \in \mathfrak{c}(D)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Zu zeigen ist, dass $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0)$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle aufgrund der Stetigkeit von f in x_0 δ so, dass für $x \in D$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Da $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert x_0 ist, gilt

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |\xi_n - x_0| < \delta. \tag{2}$$

Für diese Indices $n \geq N$ gilt somit 1 und 2, d.h:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |f(\xi_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Also ist $(f(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $f(x_0)$.

$\impliedby$ durch Kontraposition: Angenommen f sei nicht stetig in x_0. Wir zeigen, dass es eine Folge $\xi \in \mathfrak{c}(D)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ gibt, sodass $(f(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht den Grenzwert $f(x_0)$ hat. Wenn f nicht stetig in x_0 ist, gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x \in D\colon |x_0 - x| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und speziell $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$. Die Unstetigkeit von f in x_0 besagt nun, dass

$$\exists \xi_n \in D : |\xi_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge |f(\xi_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Wir betrachten nun die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\hat{\varepsilon} > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$n \geq N \implies \delta_n < \hat{\varepsilon}.$$

Für $n \geq N$ gilt somit $|\xi_n - x_0| < \delta_n \leq \frac{1}{N} < \hat{\varepsilon}$ also $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$, jedoch $\forall n \in \mathbb{N} : |f(\xi_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, also ist $f(x_0)$ nicht der Grenzwert der Folge $(f(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$. □

Satz 1.3 (Arithmetik stetiger Funktionen)**.** *Seien $f, g\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $x_0 \in D$ und f sowie g sind stetig in x_0. Dann gilt:*

- *$f + g\colon D \to \mathbb{C}$ ist stetig in x_0*
- *$fg\colon D \to \mathbb{C}$ ist stetig in x_0*

Sei weiters $\mathcal{N} = \{x \in D : g(x) = 0\}$, dann gilt:

- *$x_0 \in D \setminus \mathcal{N} \implies \frac{f}{g}\colon D \setminus \mathcal{N} \to \mathbb{C}$ ist stetig in x_0*

Sei $f\colon D \to E \subseteq \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$ und $g\colon E \to \mathbb{C}$ stetig in $y_0 = f(x_0)$, dann ist auch $(g \circ f)\colon D \to \mathbb{C}$ stetig in x_0.

Beweis. Wir verwenden die Rechenregeln konvergenter Folgen mit dem Folgenkriterium. Sei $\xi \in \mathfrak{c}(D)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Die Stetigkeit von f bzw. g impliziert:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0) \\
&\lim_{n\to\infty} g(\xi_n) = g(x_0) \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \big(f(\xi_n) + g(\xi_n)\big) = f(x_0) + g(x_0) \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \big(f(\xi_n)g(\xi_n)\big) = f(x_0)g(x_0)
\end{aligned}$$

Falls $\xi \in \mathfrak{c}(D \setminus \mathcal{N})$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n)}{g(\xi_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Sei $\xi \in \mathfrak{c}(D)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$, dann folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x_0) = y_0.$$

Mit der Stetigkeit von g gilt dann weiter

$$\lim_{n\to\infty} g(f(\xi_n)) = g(y_0) = g(f(x_0)) \iff \lim_{n\to\infty} (g \circ f)(\xi_n) = (g \circ f).(x_0)$$

Also ist die Komposition $g \circ f$ nach dem Folgenkriterium stetig in x_0. □

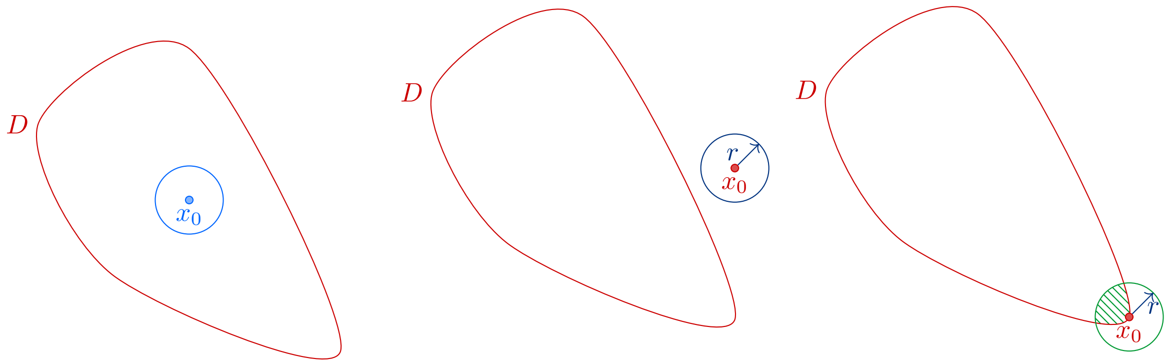
1.1 Topologische Eigenschaften des Definitionsbereichs

Definition 1.4 (Topologische Eigenschaften von Mengen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$.*

innerer Punkt *$x_0 \in D$ heißt innerer Punkt von D, falls $r > 0$ existiert, sodass $\mathcal{B}_r(x_0) \subseteq D$*
isolierter Punkt *$x_0 \in D$ heißt isolierter Punkt von D, falls es $r > 0$ gibt, sodass $\mathcal{B}_r(x_0) \cap D = \{x_0\}$*
Berührpunkt *$x_0 \in \mathbb{C}$ heißt Berührpunkt von D, falls $\forall r > 0 : \mathcal{B}_r(x_0) \cap D \neq \emptyset$*
Randpunkt *$x_0 \in \mathbb{C}$ heißt Randpunkt von D, falls x_0 sowohl ein Berührpunkt von D als auch $\mathbb{C} \setminus D$ ist*

Häufungspunkt *$x_0 \in D$ heißt Häufungspunkt von D, falls $\forall r > 0 : (\mathcal{B}_r(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$*

Wir nennen $\operatorname{int}(D) = \{x \in D : \exists r > 0\colon \mathcal{B}_r(x_0) \subseteq D\}$ den offenen Kern bzw. das Innere von D. Weiters nennen wir $\operatorname{cls}(D) = \{x \in \mathbb{C} : \forall r > 0 : \mathcal{B}_r(x_0) \cap D \neq \emptyset\}$ die abgeschlossene Hülle. Es gilt immer $\operatorname{int}(D) \subseteq D \subseteq \operatorname{cls}(D)$. Ferner ist $\partial D = \operatorname{cls}(D) \setminus \operatorname{int}(D)$ der Rand von D.



(a) ein innerer Punkt von D (b) ein isolierter Punkt von D (c) ein Randpunkt von D

Abbildung 2: Verschiedene Punkt einer Menge $D \subseteq \mathbb{C}$

Bemerkung 1.5. *Jeder isolierte Punkt von D kann kein Häufungspunkt von D sein. Die gerade definierten Begriffe gehören bereits zur Topologie metrischer Räume.*

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ gegeben und $x_0 \in D$ sei ein isolierter Punkt von D, dann ist f stetig in x_0. *Begründung:* Sei $\delta > 0$, sodass $\mathcal{B}_\delta(x_0) \cap D = \{x_0\}$. Sei weiters $\varepsilon > 0$. Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass $x \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$, sprich $x = x_0$. Dann folgt $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, also ist f stetig in x_0. Das heißt aber insbesondere, dass isolierte Punkte bei Stetigkeitsbetrachtungen keine wesentliche Rolle spielen. Falls alle Punkte in D isoliert sind, dann ist jede Abbildung $f\colon D \to \mathbb{C}$ auf D stetig[1].

Definition 1.6 (Diskrete Mengen)**.** *Wir nennen eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ diskret, wenn $D \neq \emptyset$ und nur isolierte Punkte besitzt, wie etwa $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.*

Lemma 1.7 (Klassifizierung durch Folgen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $x_0 \in \mathbb{C}$, dann gilt:*

1. *x_0 ist ein Berührpunkt von D ist äquivalent zu $\exists \xi \in \mathfrak{c}(D) : \lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$*
2. *x_0 ist ein Häufungspunkt von D ist äquivalent zu $\exists \xi \in \mathfrak{c}(D \setminus \{x_0\}) : \lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$*

Beweis. Für Berührpunkte: $\Longrightarrow$ Sei x_0 ein Berührpunkt von D, d.h.

$$\forall \varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0 : \exists \xi_n \in D \cap \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(x_0)$$

Sprich $\xi_n \in D$ und $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$, womit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$.

$\Longleftarrow$ Angenommen $\xi \in \mathfrak{c}(D)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Sei $r > 0$. Aufgrund der Konvergenz von ξ folgt:

$$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |\xi_n - x_0| < r \implies \xi_n \in \mathcal{B}_r(x_0)$$

Also ist $\mathcal{B}_r(x_0) \cap D \neq \emptyset$. Der Beweis für Häufungspunkte geht analog. □

Lemma 1.8. *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$ und es gelte $f(x_0) \neq 0$. Dann existiert $\delta > 0$, sodass $\forall x \in (\mathcal{B}_\delta(x_0) \cap D) : f(x) \neq 0$.*

Beweis. Sei $|f(x)_0| = \varepsilon > 0$. Da f stetig in x_0 ist, existiert $\delta > 0$, sodass $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, sprich $x \in D \cap \mathcal{B}_\delta(x_0)$, gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = |f(x_0)| \implies |f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \geq \underbrace{|f(x_0)|}_{=\varepsilon} - \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{<\varepsilon}$$
$$> \varepsilon - \varepsilon = 0 \implies f(x) \neq 0$$

□

[1] z.B. ist jede Abbildung auf $\mathbb{N}$ stetig (wie etwa Folgen)

1.2 Konstruktion von stetigen Funktionen aus gegebenen stetigen Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Wir betrachten $\mathrm{id}\colon D \to D$ mit $\mathrm{id}(z) = z$. Die Identität ist stetig auf $\mathbb{D}$ (folgt z.B. aus dem Folgenkriterium). Mit Satz 1.3 ist auch $p_n\colon D \to \mathbb{C}$ stetig

$$p_n(z) = z^n = \prod_{k=1}^{n} z = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{id}(z).$$

Auch die konstante Funktion $c(z) = a \in \mathbb{C} \forall z \in \mathbb{C}$ ist stetig:

$$\forall \varepsilon > 0 : |c(x) - c(x_0)| = |a - a| = 0 < \varepsilon$$

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, dann ist jedes Polynom $P\colon D \to \mathbb{C}$ mit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ stetig auf D (nach Satz 1.3). Sei $Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ und $\mathcal{N}_Q = \{z \in \mathbb{C}\colon Q(z) = 0\}$. Dann ist $R\colon D \setminus \mathcal{N}_Q \to \mathbb{C}$ mit $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ stetig auf $D \setminus \mathcal{N}_Q$.

Definition 1.9 (Gleichmäßige Stetigkeit). *Die Abbildung $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig auf D, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Unterschiede zur Stetigkeit:

1. die gleichmäßig Stetigkeit ist per Definition eine globale Eigenschaft
2. Stetigkeit auf D ist ebenfalls eine globale Eigenschaft, allerdings kann bei der Stetigkeit das δ zu jedem x_0 angepasst werden, während bei der gleichmäßigen Stetigkeit ein δ für alle x fixiert wird

Wir sehen schon, dass gleichmäßige Stetigkeit Stetigkeit impliziert, aber nicht umgekehrt.

Beispiel 1.10. $f(x) = \frac{1}{x}$. *Wir wählen $\varepsilon = 1 > 0$ und betrachten wir die Negation der gleichmäßigen Stetigkeit*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in D : |x_1 - x_2| < \delta \wedge |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Wir suchen also ein Punktpaar x_1, x_2, das hinreichend nahe beieinander ist, aber deren Funktionswerte weiter als unser gewähltes ε auseinander liegen. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ mit $\frac{1}{n} < \delta$. Wir setzen $x_1 = \frac{1}{n}$ und $x_2 = \frac{1}{n+1}$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \right| = |n - (n-1)| = 1 \geq \varepsilon$$
$$\left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{n+1-n}{n^2+n} \right| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n} < \delta$$

Definition 1.11 (Lipschitz Stetigkeit). *Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wir sagen f ist Lipschitz stetig auf D, falls:*

$$\exists L \geq 0 : \forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Dann nennen wir L eine Lipschitz-Konstante.

Bemerkung 1.12. *Wenn f Lipschitz-stetig ist, dann ist f auch gleichmäßig stetig auf D. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L+1}$, damit gilt für $|x_1 - x_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{L+1}$ gilt, womit $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| < L < \frac{\varepsilon}{L+1} < \varepsilon$*

Lemma 1.13 (Lipschitz Stetigkeit von $|x|$). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, dann ist die Abbildung $b\colon D \to \mathbb{R}$ mit $b(x) = |x|$ Lipschitz-stetig mit $L = 1$.*

Beweis. Folgt direkt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung:

$$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|$$

□

1.3 Stetigkeit auf kompakten Mengen

Wir erinnern uns: Eine Menge $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ heißt kompakt, wenn jede Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $\xi_n \in K$ eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt.

Definition 1.14 (Offene und Abgeschlossene Mengen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Wir nennen D eine offene Menge, falls $\operatorname{int}(D) = D$, d.h. jeder Punkt in D ist ein innerer Punkt. Wir nennen D eine abgeschlossene Menge, falls $D = \operatorname{cls}(D)$, d.h. jeder Berührpunkt von D liegt in D.*

Bemerkung 1.15. *Berührpunkte sind genau die Grenzwerte von Folgen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in D$.*

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt und abgeschlossen, dann gilt für eine beliebige Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Bolzano-Weierstrass, dass $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k} = x_0$. Als Grenzwert einer Folge von Elementen von D ist x_0 ein Berührpunkt von D, also $x_0 \in \operatorname{cls}(D) = D$, somit ist D kompakt.

Betrachten wir die Umkehrung. Sei D kompakt, wir zeigen dass D abgeschlossen und beschränkt sein muss. Zur Abgeschlossenheit sei x_0 ein Berührpunkt von D, dann $\exists \xi \in D^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Da D kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $\exists (\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und einen Grenzwert in D besitzt. Da ξ_n gegen x_0 konvergiert, konvergiert auch ξ_{n_k} gegen x_0, womit $D = \operatorname{cls}(D)$.

Zu Beschränktheit führen wir eine Kontraposition. Sei D unbeschränkt, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : \exists \xi_n \in D\colon |\xi_n| > n$, somit ist $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, womit jede Teilfolge von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, sprich divergent ist. Somit ist D nicht kompakt. Das ist ein Widerspruch, womit D beschränkt sein muss.

Satz 1.16 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Eine Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ ist kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Siehe oben. □

Satz 1.17 (Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Mengen)**.** *Sei $f\colon K \to \mathbb{C}$ stetig auf K und sei K kompakt, dann ist f gleichmäßig stetig auf K.*

Beweis. Angenommen f wäre nicht gleichmäßig stetig, sprich

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta : \exists u_\delta, v_\delta \in K\colon |u_\delta - v_\delta| < \delta \wedge |f(u_\delta) - f(v_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen $\delta = \frac{1}{n}$ und erhalten die Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n, v_n \in K, |u_n - v_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \varepsilon$. K ist kompakt, weshalb es eine konvergente Teilfolge $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von u_n gibt, mit dem Grenzwert $\tilde{u} \in K$. $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in K. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(v_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}}$ die konvergent ist d.h. $\lim_{\ell\to\infty} v_{n_{k_\ell}} = \tilde{v} \in K$. $(u_{n_{k_\ell}})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, daher gilt $\lim_{\ell\to\infty} u_{n_{k_\ell}} = \tilde{u}$. Sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig und:

$$\begin{aligned}
&N_1 \in \mathbb{N} : \ell \geq N_1 \implies |v_{n_{k_l}} - \tilde{v}| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \qquad N_2 \in \mathbb{N} : \ell \geq N_2 \implies |u_{n_{k_l}} - \tilde{u}| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} \\
&N_3 \in \mathbb{N} : \ell \geq N_3 \implies |u_{n_{k_l}} - v_{n_{k_l}}| < \frac{1}{n_{k_l}} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3}
\end{aligned}$$

Für $\ell \geq \max(N_1, N_2, N_3)$ gilt:

$$\begin{aligned}
&|\tilde{u} - \tilde{v}| \leq |\tilde{u} - u_{n_{k_l}}| + |u_{n_{k_l}} - u_{n_{k_l}}| + |v_{n_{k_l}} - \tilde{v}| < \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} + \frac{\tilde{\varepsilon}}{3} < \tilde{\varepsilon} \\
&\implies \forall \tilde{\varepsilon} > 0 : |\tilde{v} - \tilde{u}| < \tilde{\varepsilon} \implies |\tilde{u} - \tilde{v}| = 0
\end{aligned}$$

Also gilt $\tilde{u} = \tilde{v}$, womit

$$\lim_{\ell\to\infty} |f(u_{n_{k_\ell}}) - f(v_{n_{k_\ell}})| = |f(\tilde{u}) - f(\tilde{u})| = 0.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\forall \ell \in \mathbb{N}\colon |f(u_{n_{k_l}}) - f(v_{n_{k_l}})| \geq \varepsilon$. □

Satz 1.18 (Kompaktheit des Bildes)**.** *Sei $f\colon K \to \mathbb{C}$ stetig auf $K \subseteq \mathbb{C}$ und K kompakt, dann ist die Bildmenge $\operatorname{im}(f) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.*

Beweis. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = f(\xi_n)$ mit $\xi_n \in K$ eine beliebige Folge in $\operatorname{im}(f)$. $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in K. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k} = x \in K$. Weil f stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty} f(\xi_{n_k}) = f(x) = y \in \operatorname{im}(f)$. Das heißt es existiert eine konvergente Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y = f(x) \in \operatorname{im}(f)$. □

Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \operatorname{im}(f)$ stetig und bijektiv, dann ist $f^{-1}\colon \operatorname{im}(f) \to D$ nicht notwendigerweise stetig.

Beispiel 1.19. *Sei* $f\colon [0,1) \cup \{2\} \to [0,1]$ *mit:*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

f ist bijektiv und stetig. $f^{-1}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(y) = y$ für $y < 1$ und $f(y) = 2$ für $y = 1$ ist nicht stetig.

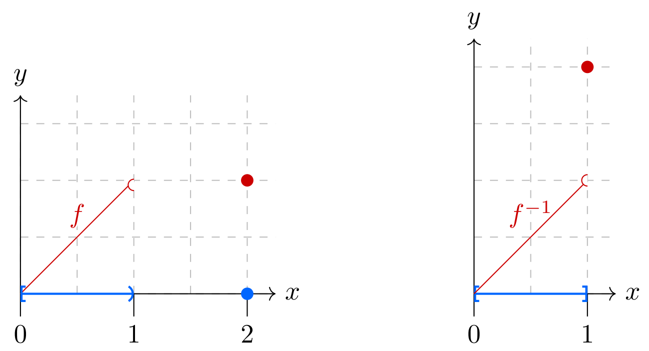


Abbildung 3: Graph von f und f^{-1}

Satz 1.20 (Stetigkeit der Umkehrfunktion). *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f\colon K \to f(K) \subseteq \mathbb{C}$ sei stetig auf K und bijektiv. Dann ist $f^{-1}\colon f(K) \to K$ stetig auf $f(K)$.*

Beweis. Sei $y = f(x) \in f(K)$ und angenommen $f^{-1}\colon f(K) \to K$ wäre in y nicht stetig, d.h. $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists \eta \in f(K)$ mit $|\eta - y| < \delta$ und $|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y)| = |\xi - x| \geq \varepsilon$. Wir wählen $\delta_n = \frac{1}{n}$ d.h. zu diesem ε existieren Folgen $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\eta_n = f(\xi_n) \in f(K)$ und $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in K$, wobei $\forall n \in \mathbb{N} |\eta_n - y| < \frac{1}{n}$ und $\forall n \in \mathbb{N} : |\xi_n - x| \geq \varepsilon$. Das heißt aber $\lim_{n\to\infty} \eta_n = y$ und der Grenzwert der Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, sofern existent, ungleich x. $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in K, K ist kompakt, also existiert eine konvergente Teilfolge $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k} = \hat{x} \in K$ und $\eta_{n_k} = f(\xi_{n_k})$ konvergiert gegen $f(\hat{x})$. Da f stetig ist, gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(\xi_{n_K}) = \lim_{k\to\infty} \eta_{n_k} = y = f(x).$$

Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt daher $f(\hat{x}) = f(x)$. Weiters ist f injektiv, also $\hat{x} = x$, daher

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} \xi_{n_k}.$$

Aber es gilt $|x - \xi_{n_k}| \geq \varepsilon$, also kann $\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k} = x$ nicht gelten. Das ist ein Widerspruch und somit ist f^{-1} stetig in y. □

Definition 1.21 (Maximum und Minimum einer Funktion). *Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Wir sagen f besitzt ein Maximum auf D, falls die Bildmenge $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt. Sprich $\exists M = f(x) \in f(D)$, sodass $\forall y \in f(D) : M \geq y$, bzw. $\forall \xi \in D : f(x) \geq f(\xi)$ mit $M = f(x)$. Wir nennen M das Maximum von f auf D und x die Maximalstelle von f. Ein Maximum $M \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt, allerdings muss x nicht eindeutig sein*[2]*. Analog definieren wir ein Minimum $m \in \mathbb{R}$, falls $w \in D$ existiert, sodass $\forall \xi \in D\colon m = f(x) \leq f(\xi)$, und nennen w die Minimalstelle.*
Die Menge der Maximalstellen wird manchmal mit $\arg\max f$ beschrieben, bzw. für Minimalstellen mit $\arg\min f$.

[2] z.B. sin hat für $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Maxima mit $\sin(x) = 1$

Beispiel 1.22. *Sei $D = (0,1)$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann gilt $f(D) = (1,\infty)$, daher ist $f(D)$ unbeschränkt und hat somit kein Supremum, also auch kein Maximum. Die Funktion $f(x) = x$ hingegen hat das Bild $f(D) = D$. Es gilt $\sup f(D) = 1$, aber es gibt kein $x \in D$, mit $f(x) = 1$.*

Satz 1.23 (Extremstellen auf kompakten Mengen)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ sei stetig auf K, dann besitzt f sowohl ein Maximum als auch ein Minimum.*

Beweis. Wir definieren σ durch

$$\sigma = \begin{cases} \sup(f(K)) & f(K) \subseteq \mathbb{R} \text{ ist nach oben beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir führen hier den Beweis für das Maximum. Für das Minimum funktioniert er analog. $\exists \xi_n \in K$, sodass $\sigma = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n)$ mit $f(\xi_n) \leq \sigma$. Wir nennen $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Maximalfolge. Da K kompakt ist $\exists (\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_{n_k} = x \in K$. Da f stetig ist, gilt $\lim_{k\to\infty} f(\xi_{n_k}) = f(x) = \sigma < \infty$ und $\sigma \in f(K)$, d.h. σ ist das Maximum der Menge $f(K)$. ☐

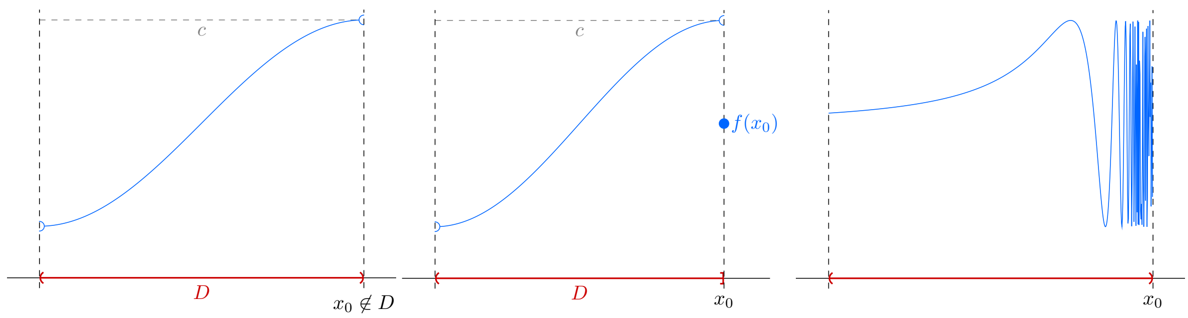
Bemerkung 1.24. *Dieses Argument funktioniert auch in viel allgemeineren Situationen. Sei K eine kompakte Teilmenge eines allgemeineren Raumes (z.B. ein Funktionenraum). Ferner schwächen wir den Begriff der Stetigkeit ab. Suchen wir z.B. ein Maximum in einer Menge von Funktionen, so betreiben wir die sogenannte Variationsrechnung.*

Definition 1.25 (Grenzwert einer Funktion)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $c \in \mathbb{C}$. Wir sagen f besitzt in x_0 den Grenzwert c falls*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Falls f in x_0 den Grenzwert c besitzt, schreiben wir:

$$c = \lim_{x\to x_0} f(x).$$



(a) Grenzwert existiert (b) Grenzwert existiert (c) Grenzwert existiert nicht

Abbildung 4: Beispiele für Grenzwerte von Funktionen

Satz 1.26 (Folgenkriterium für Grenzwerte)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ mit x_0, wobei x_0 ein Häufungspunkt von D ist und $c \in \mathbb{C}$, dann gilt:*

$$c = \lim_{x\to x_0} f(x) \iff \forall \xi \in \mathfrak{c}(D \setminus \{x_0\}) : \lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0 : \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = c$$

Beweis. Der Beweis wird analog für das Folgenkriterium für Stetigkeit geführt. ☐

Definition 1.27 (Fortsetzung)**.** *Seien $D \subseteq \hat{D} \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $\hat{f}\colon \hat{D} \to \mathbb{C}$. Wir nennen $\hat{f}$ eine Fortsetzung von f, falls $\forall x \in D$ gilt $f(x) = \hat{f}(x)$. Wir nennen f auch eine Einschränkung von $\hat{f}$ auf D und schreiben*

$$f = \hat{f}|_D.$$

Wenn f und $\hat{f}$ stetig auf D bzw. auf $\hat{D}$ sind, dann nennt man $\hat{f}$ eine stetige Fortsetzung von f.

Bemerkung 1.28. *Die stetige Fortsetzung einer Funktion f ist nicht eindeutig bestimmt, allerdings ist die Einschränkung sehr wohl eindeutig.*

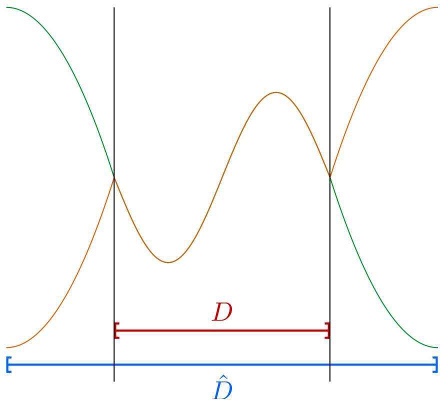


Abbildung 5: Zwei verschiedene stetige Fortsetzungen

Lemma 1.29. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $x_0 \notin D$ sei ein Häufungspunkt von D. Sei weiters $f\colon D \to \mathbb{C}$ gegeben und f habe den Grenzwert c in x_0, sprich $c = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Dann ist die Funktion $\hat{f}\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ mit:*

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ c & x = x_0 \end{cases}$$

eine Fortsetzung von f mit der Eigenschaft, dass $\hat{f}$ stetig in x_0 ist. Dabei ist $\hat{f}$ eindeutig.

Beweis. Zur Stetigkeit von $\hat{f}$: Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodas $|x - x_0| < \delta$

$$x \in D\colon x \neq x_0 \implies |f(x) - c| < \varepsilon \implies |\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)| < \varepsilon.$$

Für $x = x_0$ ist $|\hat{f}(x_0) - \hat{f}(x_0)| = 0 < \varepsilon$, sprich $\forall x \in D \cup \{x_0\}$ gilt

$$|x - x_0| < \delta \implies |\hat{f}(x) - \hat{f}(x_0)| < \varepsilon.$$

Zur Eindeutigkeit von $\hat{f}$: Weil x_0 ein Häufungspunkt von D ist, existiert $\xi \in \mathfrak{c}(D \setminus \{x_0\})$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Sei $g\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ eine weitere Fortsetzung von f, die stetig in x_0 ist, dann gilt $g(x_0) = \lim_{n\to\infty} g(\xi_n) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = c = \hat{f}(x_0)$. □

Lemma 1.30 (Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Funktion)**.** *Der Grenzwert einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ in einem Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{C}$ ist, sofern existent, eindeutig.*

Beweis. Seien c, d beide Grenzwerte von f in x_0. Nach Lemma 1.7 gibt es eine Folge $\xi \in \mathfrak{c}(D \setminus \{x_0\})$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Nach dem Folgenkriterium für Grenzwerte gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = c \qquad \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = d.$$

Aus der Eindeutigkeit der Grenzwerte von Folgen, folgt daher $c = d$. □

Satz 1.31 (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_1 < x_2$ mit $x_1, x_2 \in I$. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf I. Angenommen es gilt entweder $f(x_1) \leq 0$ und $f(x_2) \geq 0$, oder $f(x_1) \geq 0$ und $f(x_2) \leq 0$, dann existiert $x \in [x_1, x_2] \subseteq I$ mit $f(x) = 0$.*

Beweis. Wir verwenden eine Intervallschachtelung. Sei oBdA $f(x_1) \leq 0$ und $f(x_2) \geq 0$. Wir setzen $I_1 = [a_1, b_1]$ mit $a_1 = x_1$ und $b_1 = x_2$, dann gilt $f(a_1) \leq 0$ und $f(b_1) \geq 0$. Sei $I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq I_1$ mit $|I_k| = \frac{1}{2}|I_{k-1}|$ für $k = 2, \ldots, n$ und $I_k = [a_k, b_k]$ mit $f(a_k) \leq 0$ und $f(b_k) \geq 0$ für $k = 1, \ldots, n$. Wir setzen $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$.

- falls $f(m_n) \leq 0$ setzen wir $a_{n+1} = m_n$ und $b_{n+1} = b_n$ und es gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$ mit $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ und $f(a_{n+1}) \leq 0$ und $f(b_{n+1}) \geq 0$
- falls $f(m_n) > 0$ setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = m_n$ und es gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$ mit $|I_{n+1}| = \frac{1}{2}|I_n|$ und $f(a_{n+1}) \leq 0$ und $f(b_{n+1}) \geq 0$

Somit ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung mit

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} |I_1| \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt für $|I_N| < \varepsilon$, falls $n \geq N$:

$$|a_n - x| = x - a_n \leq b_n - a_n = |I_n| \leq |I_N| \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} a_n = x$$

Analog zeigen wir $\lim_{n\to\infty} b_n = x$. f ist stetig auf I und $x \in [x_1, x_2] \subseteq I$, dann erhalten wir mit Satz 1.2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \\ f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0 \\ \implies & f(x) = 0 \end{aligned}$$

□

Lemma 1.32 (Nullstellen Polynome ungeraden Grades)**.** *Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$ ein Polynom vom Grad n (also $a_n \neq 0$) und n ungerade, dann besitzt P eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir verwenden den Zwischenwertsatz. Wir normieren das Polynom P zuerst durch

$$\tilde{P}(x) = \frac{1}{a_n} \cdot P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_n} x^k = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k x^k \qquad \tilde{P}(x) = 0 \iff P(x) = 0.$$

Es reicht also zu zeigen, dass jedes normierte Polynom mit ungeraden Grad eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt. Sei also oBdA $a_n = 1$ und $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{x^{n-1}} &= \frac{x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k}{x^{n-1}} = x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-(n-1)} \geq x - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-(n-1)} \right| \\ &\geq x - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot \underbrace{|x|^{\overbrace{k-(n-1)}^{\leq 0}}}_{\leq 1} \geq x - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}_{=m\geq 0} \end{aligned}$$

Es gilt also $P(x) \geq x^{n-1}(x - m)$, speziell für $x = m + 1$:

$$P(m+1) \geq (m+1)^{n-1} \cdot 1 > 0$$

Sei $x \leq -1$:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{x^{n-1}} &= x + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-(n-1)} \leq x + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \underbrace{|x|^{k-(n-1)}}_{\leq 1} \\ &\leq x + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = x + m \end{aligned}$$

Da $n-1$ gerade ist, folgt $x^{n-1} > 0$ für $x \leq -1$, womit $P(x) \leq x^{n-1}(x+m)$, speziell für $x = -m-1$:

$$P(-m-1) \leq (m+1)^{n-1}(-1) < 0$$

Wir haben also ein Intervall $[-(m+1), m+1]$ gefunden, mit $P(-(m+1)) \leq 0$ und $P(m+1) \geq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen existiert also $x \in [-(m+1),(m+1)]$, sodass $P(x) = 0$ $\square$

2 Differentialrechnung

Definition 2.0 (Beschränktheit von Funktionen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Wir sagen f ist beschränkt auf D, falls $f(D) \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Menge ist, d.h. $\exists m \geq 0 : \forall x \in D : |f(x)| \leq m$*

Definition 2.1 (Landausche $\mathcal{O}$-Notation)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Sei x_0 ein Häufungspunkt von D. Angenommen es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $R\colon \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$. R sei beschränkt auf $\mathcal{B}_\varepsilon(x_0)$. Falls $\forall x \in D \cap \mathcal{B}_\varepsilon(x_0)$ gilt, dass $f(x) = R(x) \cdot |x - x_0|$, dann sagen wir f ist von der Klasse $\mathcal{O}(x - x_0)$ bzw. $f(x) = \mathcal{O}(x - x_0)$.*
Angenommen es existiert $\mathcal{B}_\varepsilon(x_0)$ mit $\varepsilon > 0$ und $r\colon \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$. Falls $\forall x \in D \cap \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) : f(x) = r(x) \cdot |x - x_0|$ dann sagen wir f ist von der Klasse $o(x - x_0)$, und schreiben $f = o(x - x_0)$.

Bemerkung 2.2.

- *Sei $f(x) = o(x - x_0)$ und r wie in Definition 2.1. Wähle $\hat{\varepsilon} = 1$. Aus der Stetigkeit von r in x_0 und $r(x_0) = 0$ folgt*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_0) : |x - x_0| < \delta \implies |r(x) - r(x_0)| = |r(x)| < \hat{\varepsilon} = 1$$

  Sprich für $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon, \delta\}$ und $\forall x \in \mathcal{B}_{\tilde{\varepsilon}}(x_0)$ gilt $|r(x)| < 1$, also ist r auf $\mathcal{B}_{\tilde{\varepsilon}}(x_0)$ auch beschränkt. Daraus folgt aber $f(x) = \mathcal{O}(x - x_0)$.

- *Sei $f(x) = \mathcal{O}(x - x_0)$, dann besitzt f in x_0 den Grenzwert 0, sprich $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Da $\forall x \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_0)$ gilt $|R(x)| \leq m$, sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $\delta \leq \min\left\{\varepsilon, \frac{\tilde{\varepsilon}}{m+1}\right\}$, dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass*

$$|f(x) - 0| = |R(x) \cdot |x - x_0|| \leq m \cdot |x - x_0| < m \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}}{m+1} < \tilde{\varepsilon}.$$

- *Sei x_0 ein Häufungspunkt von D und $x_0 \notin D$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ sei von der Ordnung $\mathcal{O}(x - x_0)$, dann kann f durch $f(x_0) = 0$ stetig auf $D \cup \{x_0\}$ fortgesetzt werden*

Definition 2.3 (Linear-Affine Abbildungen)**.** *Eine Abbildung $a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form $a(x) = kx + d$ mit $k, d \in \mathbb{C}$ nennen wir eine linear-affine Abbildung auf $\mathbb{C}$.*

Wir werden in erster Linie linear-affine Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachten mit Blick auf die Verallgemeinerung $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. A heißt dann linear-affin, wenn es eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und ein $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$, sodass $A(\boldsymbol{x}) = L(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{d}$.

Das Thema dieses Kapitels ist es, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und einer gegebenen Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, eine linear-affine Funktion $a\colon \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}$ zu finden, die f in einem Punkt $x_0 \in D$ „bestmöglich" approximiert. Unsere Mindestanforderung an a ist dabei, dass $a(x_0) = f(x_0)$ gilt. Wir wollen a bereits in einer geeigneten Form darstellen:

$$a(x) = kx + d = kx - kx_0 + \underbrace{d + kx_0}_{=\tilde{d}} = k(x - x_0) + \tilde{d}$$
$$a(x_0) = k(x_0 - x_0) + \tilde{d} \overset{!}{=} f(x_0) \implies \tilde{d} = f(x_0)$$

Lemma 2.4 (Rechenregeln für Funktionengrenzwerte)**.**

1. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, x_0 ein Häufungspunkt von D und $f, d\colon D \to \mathbb{C}$. Angenommen $c = \lim_{x \to x_0} f(x)$ und $d = \lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren, dann gilt*

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = c + d \text{ und } \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = c \cdot d.$$

Sei $\mathcal{N} = \{x \in D : g(x) = 0\}$, x_0 sei ein Häufungspunkt von $D \setminus \mathcal{N}$ und $d \neq 0$, dann gilt weiterhin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}.$$

2. *Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to E$, $g\colon E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, x_0 ein Häufungspunkt von D, $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) \in E$ und g sei stetig in y_0. Wir setzen $g(y_0) = z_0 = \lim_{y \to y_0} g(y)$, dann hat $g \circ f\colon D \to \mathbb{C}$ in x_0 den Grenzwert $z_0 = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$*

Beweis. 1. Folgt direkt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen und dem Folgenkriterium für Stetigkeit.

2. Wir verwenden das Folgenkriterium. Sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in$ und $\xi_n \neq x_0$ und $\lim_{n \to \infty} \xi_n = x_0$, dann gilt $\lim_{n \to \infty} f(\xi_n) = y_0$ und $\eta_n = f(\xi_n)$. Aus der Stetigkeit von g folgt $\eta_n \in E \implies \lim_{n \to \infty} g(\eta_n) = z_0$. □

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$. Wir betrachten eine linear-affine Funktion $a\colon I \to \mathbb{R}$ mit $a(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$ mit $a(x_0) = f(x_0)$. Es gilt:

$$\lim_{x \to x_0} (f - a)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} (k(x - x_0) + f(x_0)) = f(x_0) - k \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) - f(x_0) = 0$$

Wir wollen nun, dass die Approximation von f durch a eine höhere Approximationsgüte haben soll als lediglich $\lim_{x \to x_0} (f - a)(x) = 0$.

Definition 2.5 (Differenzierbarkeit)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben und $x_0 \in I$. Wir sagen f ist differenzierbar in $x_0 \in I$ falls eine linear-affine Funktion $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a(x_0) = f(x_0)$ existiert, sodass*

$$f(x) - a(x) = o(x - x_0).$$

Sprich $\exists r : I \to \mathbb{R}$, stetig in x_0 mit $r(x_0) = 0$ und $f(x) - k(x - x_0) - f(x_0) = r(x) \cdot |x - x_0|$.

Bemerkung 2.6.

$$f - a = o(x - x_0) \implies \lim_{x \to x_0} (f(x) - a(x)) = 0$$

Definition 2.7 (Umgebung)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $x \in D$. Wir nennen D eine Umgebung von X, falls $r > 0$ existiert, sodass $\mathcal{B}_r(x) \subseteq D$, also x ein innerer Punkt von D ist.*

Bemerkung 2.8. *Eine offene Menge ist eine Umgebung für alle ihre Elemente. Gilt eine Eigenschaft auf einer Umgebung U von x, so gilt sie insbesondere auf $\mathcal{B}_r(x)$. Umgekehrt ist $\mathcal{B}_r(x)$ selbst eine Umgebung von x, dann gilt die Eigenschaft offenbar auf einer Umgebung von x.*

Definition 2.9 (Lokale Beschränktheit)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Wir sagen f ist auf einer Umgebung von x_0 beschränkt, falls $r > 0$ und $M \geq 0$ existieren, sodass $\forall \xi \in D$ mit $|x - \xi| < r$ gilt $|f(\xi)| \leq M$, d.h. auf $D \cap \mathcal{B}_r(x_0$ ist f beschränkt.*

Lemma 2.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $f, g\colon D \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = 0$. Sei ferner g beschränkt in einer Umgebung von x_0, dann gilt*

$$\lim_{\xi \to x_0} f(\xi) g(\xi) = 0.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$, M und r derart, dass für alle $\xi \in D$ mit $|x_0 - \xi| < r$ gilt $|g(\xi)| \leq M$. Weiters sei $\tilde{\delta} > 0$, sodass $|f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{M+1}$ für $|x_0 - \xi| < \delta$. Wir setzen $\delta = \min(r, \tilde{\delta})$, dann gilt für $\xi \in D$ mit $|x_0 - \xi| < \delta$, dass

$$|f(\xi)g(\xi)| = |f(\xi)| \cdot |g(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{M+1} M < \varepsilon.$$

□

Satz 2.11. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt:*

1. *Falls f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f auch stetig in x_0*

2. *Sei f differenzierbar in x_0 und $a(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$ eine approximierende linear-affine Funktion, welche Definition 2.5, erfüllt. Dann gilt:*

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   Also ist a durch die Differenzierbarkeitsbedingung eindeutig bestimmt.

3. *Angenommen $k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert, dann ist f in x_0 differenzierbar und $a(x) = k(x - x_0) + f(x_0)$ ist die bestmögliche linear-affine Approximation.*

Beweis. 1. Sei $f(x) - f(x_0) - l(x - x_0) = \mathcal{O}(x - x_0)$, dann folgt $f(x) - f(x_0) = k(x - x_0) + r(x)|x - x_0|$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} k(x - x_0) + r|x - x_0| \\
&= \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + \lim_{x \to x_0} r(x) \cdot \lim_{x \to x_0} |x - x_0| = 0 \\
&\implies \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)
\end{aligned}$$

Sprich f ist stetig in x_0.

2. Sei $f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = r(x) \cdot |x - x_0|$. Für $x \neq x_0$ gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k + r(x) \frac{|x - x_0|}{x - x_0}.$$

Die Funktion $b(x) = \frac{|x-x_0|}{x-x_0}$ hat nur zwei mögliche Werte $+1$ oder -1, also ist $b(x)$ beschränkt auf einer Umgebung von x_0:

$$\lim_{x \to x_0} k + r(x) \frac{|x - x_0|}{x - x_0} = k + \lim_{x \to x_0} r(x) \frac{|x - x_0|}{x - x_0} = k \implies k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

3. Sei $k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Wir betrachten:

$$\begin{aligned}
&f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \right) (x - x_0) \\
&= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \right) \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \cdot |x - x_0| \\
&\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{\xi \to x_0} \frac{f(\xi) - f(x_0)}{\xi - x_0} = k - k = 0
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.12. *In Dimension 1 (also in $\mathbb{R}$) hätten wir das Konzept der Differenzierbarkeit auch formulieren können, wenn x_0 ein Häufungspunkt von D ist. In höheren Dimensionen ist das problematisch, deswegen wird Differenzierbarkeit auf offenen Mengen formuliert. In der Verallgemeinerung ist I dann eine offene Menge statt eines offenen Intervalls.*

Definition 2.13 (Ableitung). *Falls $f\colon I \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist, so nennen wir*

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

die Ableitung von f in x_0 und schreiben $k = f'(x_0)$.

Satz 2.14 (Eigenschaften der Ableitung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, dann gilt:*

1. *Linearität: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $(\alpha f + \beta g)$ in x_0 differenzierbar und es gilt*
$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$
2. *Produktregel: $f \cdot g\colon I \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) f(x_0).$$
3. *Sei $\forall x \in I : g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{1}{g}\colon I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
4. *Quotientenregel: Sei wieder $\forall x \in I : g(x) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Beweis. 1.

$$\begin{aligned}
\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) &= \alpha \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(x_0)}{x - x_0} = (\alpha f + \beta g)'(x_0)
\end{aligned}$$

2. Wir verwenden die Tatsache, dass g stetig ist:

$$\begin{aligned}
&f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = (f \cdot g)'(x_0)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x_0)} \cdot \left(- \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right) \\
&= \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}
\end{aligned}$$

Da wir zu Beginn nicht wissen, ob $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$ überhaupt existiert, müssen wir das Argument von unten nach oben lesen.

4.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

□

Satz 2.15 (Kettenregel)**.** *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle $g\colon I \to J$ sei differenzierbar in x_0, $g(x_0) = y_0 \in J$ und weiters $f\colon J \to \mathbb{R}$ differenzierbar in y_0. Dann ist $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0 mit $(g \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$.*

Beweis. Wir betrachten:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) - f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0)$$
$$= f(g(x)) - f(g(x_0)) \cdot f'(g(x_0)) \cdot (g(x) - g(x_0) - r_g(x) \cdot |x - x_0|)$$
$$= f(y) - f(y_0) - f'(y_0) \cdot (y - y_0) + f'(y_0) + f'(y_0) \cdot r_g(x) \cdot |x - x_0|$$
$$= r_f(y) \cdot |y - y_0| = r_f(g(x)) \cdot |g(x) - g(x_0)| + f'(y_0) \cdot r_g(x) \cdot |x - x_0|$$
$$= r_f(g(x)) \cdot \big|g'(x_0) \cdot (x - x_0) + r_g(x) \cdot |x - x_0|\big| + f'(y_0) \cdot r_g(x) \cdot |x - x_0|$$
$$= \overbrace{\left(\underbrace{r_f(g(x))}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left|g'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|} + r_g(x)\right|}_{\text{beschränkt}} + \underbrace{f'(y_0) \cdot r_g(x)}_{\to 0}\right)}^{= r_{f \circ g}} \cdot |x - x_0|$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0 \implies \lim_{x \to x_0} r_f(g(x)) = 0$$
$$\left|g'(x_0) \cdot \frac{x - x_0}{|x - x_0|} + r_g(x)\right| \xrightarrow{x \to x_0} 0$$
$$\lim_{x \to x_0} r_g(x) = 0$$
$$\implies \lim_{x \to x_0} r_{f \circ g}(x) = 0$$

□

Lemma 2.16. *Seien I, J offene Intervalle in $\mathbb{R}$. Sei $f\colon I \to J$ bijektiv und differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Sei $y_0 = f(x_0)$, dann ist $f^{-1}\colon J \to I$ differenzierbar in y_0 und es gilt*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis.

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\mathrm{d}_f(f^{-1}(y))}$$
$$= \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \mathrm{d}_f(x)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Wenn klar ist, dass $f'^{-1}(y)$ den Grenzwert x_0 in y_0 besitzt, sprich:

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

Wir betrachten daher $r > 0$, sodass $\mathcal{B}_r(x_0) \subseteq I$, dann gilt $\overline{\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(x_0)} \subseteq I$, $\overline{\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(x_0)}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, f ist also auf $\overline{\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(x_0)}$ stetig, dann folgt $f^{-1}\colon f(\overline{\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(x_0)}) \to \overline{\mathcal{B}_{\frac{r}{2}}(x_0)}$ ist stetig. □

Beispiel 2.17. *$p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p'(x_0) = n \cdot x^{n-1}$:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p_n(x) - p_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \right)$$
$$= \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^k x_0^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k x_0^{n-1-k} = n \cdot x_0^{n-1}$$

Es sei angemerkt, dass man bei der Grenzwertbildung $x \to x_0$ häufig $x = x_0 + h$ setzt. Dann $x \to x_0 \implies h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$$

Für die Potenzfunktion $p_n(x)$:

$$p_n'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left((x_0 + h)^n - x_0^n \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(x_0^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} h^k - x_0^n \right)$$
$$= \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} h^{k-1} = \binom{n}{1} \cdot x_0^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}$$

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cdot x^k$ ein Polynom, dann folgt mit Satz 2.14, dass P in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit:

$$P'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot c_k \cdot x_0^{k-1}$$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$:

$$p_k(x) = x^k = \frac{1}{x^{-k}}$$

ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Dann ist p_k für jedes $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit:

$$p_k'(x_0) = k \cdot x_0^{k-1}$$

Ein kurzer Beweis folgt direkt aus der Quotientenregel:

$$p_k'(x_0) = \left(\frac{1}{p_{-k}} \right)'(x_0) = -\frac{(-k) \cdot x_0^{-k-1}}{x_0^{-2k}} = k \cdot x_0^{-k-1+2k} = k \cdot x_0^{k-1}$$

Sei $w_n\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $w_n(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, wobei $w_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ finden wir, dass w_n in x_0 differenzierbar ist und die idente Ableitungsformel gilt:

$$w_n'(x_0) = \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$$

Wir verwenden Lemma 2.16:

$$\begin{aligned} w_n &= p_n^{-1} \\ w_n'(x_0) &= \frac{1}{p_n'(w_n(x_0))} = \frac{1}{n \cdot (w_n(x_0))^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x_0^{n-1}}} \end{aligned}$$

Sei $p_{\frac{m}{n}}\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit $p_{\frac{m}{n}}(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$, dann ist $p_{\frac{m}{n}}$ differenzierbar in $x_0 > 0$ mit:

$$p_{\frac{m}{n}}'(x_0) = \frac{m}{n} \cdot x_0^{\frac{m}{n} - 1} = \frac{m}{n} \cdot x_0^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \sqrt[n]{x_0^{m-n}}$$

Wir verwenden zum Beweis die Kettenregel:

$$\begin{aligned}
&p_{\frac{m}{n}} = p_m \circ w_n \\
&\implies p'_{\frac{m}{n}}(x_0) = p'_m(w_n(x_0)) \cdot w'_n(x_0) \\
&= m \cdot \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m-1}{n}+\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} x_0^{\frac{m-n}{n}}
\end{aligned}$$

Alle Potenzfunktionen $p_r\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $r \in \mathbb{Q}$ sind differenzierbar in $x_0 \in (0,\infty)$ mit $p'_r(x_0) = r \cdot x_0^{r-1}$.

Definition 2.18 (Ableitungsfunktion, stetige Differenzierbarkeit)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar, dann sagen wir f ist differenzierbar auf I. Die Abbildung $x \mapsto f'(x)$ nennen wir die Ableitungsfunktion von f, also $f'\colon I \to \mathbb{R}$. Falls f' eine auf I stetige Funktion ist, so sagen wir f ist stetig differenzierbar auf I. Mit $\mathcal{C}^1(I)$ bezeichnen wir die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf I.*

2.1 Monotonie und Differenzierbarkeit

Lemma 2.19. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall I monoton wachsend und differenzierbar in $x_0 \in I$. Dann gilt $f'(x_0) \geq 0$. Ist f monoton fallend, dann gilt $f'(x_0) \leq 0$.*

Beweis.

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x_0)}{\xi - x_0}$$

Für jede beliebige Folge $\xi \in \mathfrak{c}(I \setminus \{x_0\})$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$, falls $\xi_n > x_0$, folgt aus der Monotonie von f, dass $f(\xi_n) - f(x_0) \geq 0$ gilt, womit

$$\frac{f(\xi_n) - f(x_0)}{\xi_n - x_0} \geq 0.$$

Falls andererseits $\xi_n < x_0$, folgt $f(\xi_n) \leq f(x_0)$, womit:

$$\frac{f(\xi_n) - f(x_0)}{\xi_n - x_0} \geq 0$$

Damit gilt insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x_0)}{\xi_n - x_0} \geq 0.$$

Der Beweis funktioniert analog für monoton fallende Funktionen. □

Definition 2.20 (Lokale Extrema)**.** *Sei $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Wir sagen f hat in x_0 ein lokales Maximum falls $\exists r > 0$ sodass $\forall x \in D \cap \mathcal{B}_r(x_0) : f(x_0) \geq f(x)$. Wir sagen f hat in x_0 ein striktes lokales Maximum, falls $\exists r > 0$, sodass $\forall x \in (D \cap \mathcal{B}_r(x_0)) \setminus \{x_0\} : f(x_0) > f(x)$. Lokale Minima definieren wir analog.*
Angenommen f habe in x_0 ein (striktes) lokales Extremum und x_0 sei zusätzlich ein innerer Punkt von D, dann sagen wir f hat ein (striktes) inneres lokales Extremum in x_0.

Lemma 2.21 (Klassifizierung von Extrema durch die Ableitungsfunktion)**.** *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 sei ein innerer Punkt von D und f sei differenzierbar in x_0 und habe ein lokales inneres Extremum. Dann gilt notwendigerweise $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten oBdA den Fall, dass f in x_0 ein lokales Maximum besitzt. (Der Beweis folgt analog für lokale Minima).

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x_0)}{\xi_n - x_0}$$

für jede beliebige Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\xi_n = x_0$ und $\forall n \in \mathbb{N} : \xi_n \neq x_0 \wedge \xi_n \in D$. Wir wählen $\xi_n = x_0 + \frac{r}{n+1} < x_0 + r$ für $n \geq 1$, sprich $\xi_n \in \mathcal{B}_r(x_0) \subset D$. Weiters gilt $\lim_{n\to\infty}\xi_n = x_0$, da $|\xi_n - x_0| = \frac{r}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Angenommen wir haben r so gewählt, dass:

$$\forall x \in \mathcal{B}_r(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

gilt. Dann folgt aber

$$\frac{\overbrace{f(\xi_n) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{\xi_n - x_0}_{>0}} \implies f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x_0)}{\xi_n - x_0} \leq 0.$$

Wir wählen statt ξ_n eine andere approximierende Folge $\tilde{\xi}_n = x_0 - \frac{r}{n+1} \in \mathcal{B}_r(x_0) \subset D$. Es gilt daher $\tilde{\xi}_n \leq x_0$ und $\lim_{n\to\infty}\xi_n = x_0$ und $f(\tilde{\xi}_n) \leq f(x_0)$:

$$\frac{\overbrace{f(\tilde{\xi}_n) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{\tilde{\xi}_n - x_0}_{<0}} \implies f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\tilde{\xi}_n) - f(x_0)}{\tilde{\xi}_n - x_0} \geq 0,$$

womit $f'(x_0) = 0$. □

Satz 2.22 (Satz von Michel Rolle). *Sei I ein offenes Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf I und $a, b \in \mathbb{I}$ mit $a < b$. Wenn $f(a) = f(b)$, dann $\exists x \in (a, b) : f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir machen eine Fallunterscheidung. Im ersten Fall sei f auf $[a, b]$ konstant, sprich $\forall x \in [a, b] : f(x) = c \in \mathbb{R}$. Wir bestimmen $f'(m)$ für $m = \frac{1}{2}(a + b)$. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\xi_n \in (a, b)$ und $\lim_{n\to\infty}\xi_n = m$ und $\xi_n \neq m$:

$$f'(m) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(m)}{\xi_n - m} == \lim_{n\to\infty} \frac{c - c}{\xi_n - m} = 0$$

Sei $f|_{[a,b]}$ nun nicht konstant, sprich $\exists \xi \in (a, b) : (f(\xi) \neq f(a)) \wedge (f(\xi) \neq f(b))$.Sei oBdA $f(\xi) > c = f(a) = f(b)$. Da f differenzierbar auf I ist, ist f auch stetig auf I, womit die Einschränkung $f|_{[a,b]}$ ebenfalls stetig ist. Da $[a, b]$ kompakt ist, $\exists x \in [a, b]$ mit $\forall w \in [a, b] : f(x) \geq f(w)$ nach Satz 1.23. Es gilt

$$f(x) \geq f(\xi) > f(a), f(b),$$

womit $x \neq a$ und $x \neq b$. Daher gilt $x \in (a, b)$, womit f auf (a, b) ein inneres globales Maximum besitzt, sprich $f'(x) = 0$. □

Satz 2.23 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I. Seien weiters $a, b \in I$ mit $a < b$, dann $\exists \xi \in (a, b)$, sodass*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Die Gerade $S^f_{a,b}$, die durch die Punkte $\begin{bmatrix} a & f(a) \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} b & f(b) \end{bmatrix}$ geht hat die folgende Funktionsgleichung:

$$S^f_{a,b}(x) = \frac{x - a}{b - a} f(b) + \frac{b - x}{b - a} f(a)$$

Wir nennen S eine Sekante von f. Wir betrachten $g(x) = f(x) - S^f_{a,b}(x)$, dann gilt:

$$g(a) = f(a) - S^f_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - S^f_{a,b}(b) = f(b) - f(b) = 0$$

Da g auf I differenzierbar ist, nach Satz 2.14, gilt nach dem Satz von Michel Rolle, dass g ein Extremum in $\xi \in (a, b)$ hat:

$$g'(x) = f'(x) - (S^f_{a,b})'(x) = f'(x) - \left(\frac{1}{b-a}f(b) - \frac{1}{b-a}f(a)\right)$$
$$g'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

□

Satz 2.24 (Monotonie)**.** *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I, wobei I ein offenes Intervall ist, dann gilt:*

- *f ist monoton wachsend auf I genau dann wenn $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$*
- *f ist monoton fallend auf I genau dann wenn $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$*

Beweis. $\implies$: Sei f monoton wachsend und $x \in I$ (da I offen ist, ist x ein innerer Punkt). Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in I$ und $\xi_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$, dann ist $f(\xi_n) - f(x) \geq$ und $\xi_n - x > 0$, womit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x)}{\xi_n - x} \geq 0.$$

$\impliedby$: Wir führen eine Kontraposition. Sei f nicht monoton wachsend auf I. Zu zeigen ist, dass $\exists \xi \in I$: $f'(\xi) < 0$. Betrachten wir die Negation von monoton wachsend:

$$\neg(\forall a, b \in I : a < b \implies f(a) \leq f(b)) \iff \exists \alpha, \beta \in I : (\alpha < \beta) \wedge (f(\alpha) > f(\beta))$$
$$\implies \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 0$$

Nach Satz 2.23 gibt es ein $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq I$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 0.$$

□

Korollar 2.25 (Ableitung einer konstanten Funktion)**.** *Sei $f: U \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I und I ein offenes Intervall, dann gilt*

$$\forall x \in I : f(x) = c \iff \forall x \in I : f'(x) = 0.$$

Beweis. $\implies$: Sei $x_0 \in I$, dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

$\impliedby$: Sei $\forall x \in I : f'(x) = 0$, dann folgt, dass

$$\forall x \in I : (f'(x) \leq 0) \wedge (f'(x) \geq 0).$$

Somit ist f monoton wachsend und fallend, bzw. konstant. □

Bemerkung 2.26. *Für alle vorangegangenen Resultate, die aus dem Satz von Michel Rolle hervorgehen ist wichtig, dass I ein Intervall ist.*

Lemma 2.27 (Strenge Monotonie aus dem Differentialquotienten)**.** *Sei I ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf I, dann gilt:*

- *$\forall x \in I : f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton wachsend auf I*
- *$\forall x \in I : f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton fallend auf I*

Der Beweis geht analog für den Beweis für Satz 2.24. Wir sehen jedoch, dass die Umkehrung nicht stimmt, da etwa $f(x) = x^3$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist, aber $f'(x) = 3x^2$ mit $f'(0) = 0$ nicht echt größer 0 ist.

Definition 2.28 (Konvexität). *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir sagen f ist konvex auf I, falls*

$$\forall a, b \in I : (a < b) \land (\forall \lambda \in (0,1)) : f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Wir sagen f ist strikt konvex, falls

$$\forall a, b \in I : (a < b) \land (\forall \lambda \in (0,1)) : f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Wir wollen uns die geometrische Bedeutung der Konvexität genauer anschauen. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit der Sekante $S^f_{ab}(x)$ mit $(a,b) \subseteq I$. Sei $x \in (a,b)$, dann setzen wir $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$, womit $0 < \lambda < 1$:

$$\begin{aligned}
1 - \lambda &= f - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-a-x+a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a} \\
\lambda &= \frac{x-a}{b-a} \implies \lambda b - \lambda a + a = x \implies : x = (1-\lambda)a + \lambda b \\
&\implies f(x) = f((1-\lambda)a + \lambda b) \\
S^f_{ab}(x) &= \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a) = (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)
\end{aligned}$$

f is also konvex auf (a,b), wenn $\forall x \in (a,b) : f(x) \leq S^f_{ab}(x)$.

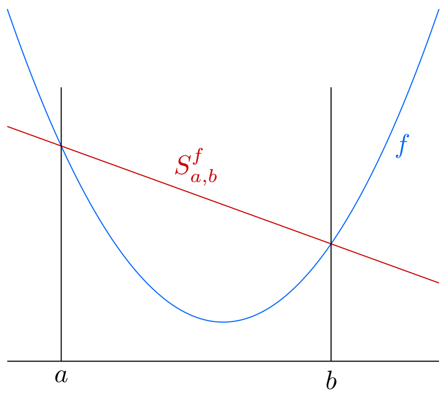


Abbildung 6: Beispiel einer konvexen Funktion

Lemma 2.29. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$. Wenn f konvex auf I ist, dann gilt:*

$$\forall a, b, c \in I : a < c < b : \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$$

Beweis. Sei $c = (1-\lambda)a + \lambda b$ und $\lambda = \frac{c-a}{b-a}$ bzw. $1 - \lambda = \frac{b-c}{b-a}$. Sei f konvex auf I:

$$\begin{aligned}
f((1-\lambda)a + \lambda b) &\leq \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) \\
\implies &(b - c + c - a) \cdot f(c) \leq (b-c)f(a) + (c-a)f(b) \\
\implies &(b-c)f(c) - (b-c)f(a) \leq (c-a)f(b) - (c-a)f(c) \\
\implies &\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.30 (Konvexität differenzierbarer Funktionen). *Sei $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf dem offenen Intervall I, dann gilt:*

- *f ist konvex auf I, wenn $f'\colon I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist*
- *f ist strikt konvex auf I, wenn $f'\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist*

Beweis. $\Longleftarrow$: Sei f' monoton wachsend auf I. Wir verwenden die Charakterisierung der Konvexität aus Lemma 2.27. Seien $a, b, c \in I$ mit $a < c < b$, dann gilt

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} - \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \mathcal{X}.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt $\exists \xi_1 \in (a, c) \wedge \xi_2 \in (c, b)$ sodass

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\xi_2) \qquad \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\xi_1).$$

Weil f' monoton ist und $\xi_2 > c > \xi_1$ gilt $\mathcal{X} = f'(\xi_2) - f'(\xi_1) \geq 0$.

$\Longrightarrow$: Sei f konvex auf I und $a < b$ mit $a, b \in I$. Wir bilden $\tilde{\xi}_n = a + \frac{b-a}{n}$ und $\xi_n = b - \frac{b-a}{n}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \tilde{\xi}_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = b$ und

$$n \geq 3 \implies \xi_n - \tilde{\xi}_n = (b-a)\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 0$$

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\tilde{\xi}_n) - f(a)}{\tilde{\xi}_n - a}$$

Nach Lemma 2.27 folgt:

$$\frac{f(\tilde{\xi}_n) - f(a)}{\tilde{\xi}_n - a} \leq \frac{f(\xi_n) - f(\tilde{\xi}_n)}{\xi_n - \tilde{\xi}_n} \leq \frac{f(b) - f(\xi_n)}{b - \xi_n}$$

$$\implies f'(a) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b) - f(\xi_n)}{b - \xi_n} = f'(b)$$

Da $\frac{f(\tilde{xi}_n)-f(a)}{\tilde{xi}_n - a}$ eine monoton fallende Folge ist und $\frac{f(b)-f(\xi_n)}{b-\xi_n}$ eine monoton wachsende Folge, folgt

$$f'(a) \leq \frac{f(\tilde{\xi}_n) - f(a)}{\tilde{\xi}_n - a} < \frac{f(b) - f(\xi_n)}{b - \xi_n} \leq f'(b).$$

□

Definition 2.31 (Höhere Ableitungen)**.** *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ gegeben und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir setzen $f^{(0)} = f$ und definieren $f^{(k)}$ induktiv. Sei $f^{(k-1)}$ gegeben und differenzierbar auf I, dann ist $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$. Sei etwa f' differenzierbar auf I, dann schreiben wir $f^{(2)} = (f^{(1)})' = (f')' = f''$ und nennen $f^{(k)}$ die k-te Ableitungsfunktion von f. Typischerweise schreiben wir f''' und danach $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ usw. Eine weitere Notation ist die Leibniz-Schreibweise:*

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$
$$f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$
$$f^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$$

Falls $f^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ existiert, nennen wir f k-mal differenzierbar auf I, bzw. fall $f^{(k)}$ stetig ist, ist f auf I k-mal stetig differenzierbar. Die Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf I bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^k(I)$, mit der Konvention, dass $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$ die Menge der stetigen Funktionen auf I ist. Ferner ist

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I)$$

die Menge der glatten Funktionen auf I.

Lemma 2.32 (Konvexität aus höheren Ableitungen)**.** *Sei $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf I, dann gilt:*

- *f ist konvex auf I, wenn $\forall x \in I : f''(x) \geq 0$*
- *f ist strikt konvex auf I, wenn $\forall x \in I : f''(x) > 0$*

Beweis. Wir haben in Satz 2.30 bereits gezeigt, dass eine Funktion f auf I konvex ist, wenn f' monoton wachsend ist. Weiters haben wir in Satz 2.24 gezeigt, dass f monoton wachsend ist, wenn $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$. Wenn f also konvex ist, dann muss $\forall x \in I : (f')'(x) = f''(x) \geq 0$ gelten. Analog für strikte Konvexität. $\square$

3 Potenzreihen

Wir haben bereits die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ kennengelernt, die für $|z| < 1$ mit $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Wir wollen nun einen besonderen Typ Reihe definieren, der es uns erlaubt eine Vielzahl an wichtigen und interessanten Funktionen darzustellen.

Definition 3.1 (Potenzreihe)**.** *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z_0 \in \mathbb{C}$, dann nennen wir einen Ausdruck der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt z_0. Oftmals schreibt man auch $w = z - z_0$, womit die Potenzreihe die folgende Form erhält

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k.$$

Ein wichtiges Beispiel ist etwa

$$\mathcal{E}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

Wir prüfen $\mathcal{E}$ auf Konvergenz. Sei $z \in \mathbb{C}$:

$$\frac{\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{z^k}{k!}\right|} = \frac{|z|}{k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sprich $\mathcal{E}$ konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$.

Lemma 3.2 (Absolute Konvergenz von Potenzreihen)**.** *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine gegebene Potenzreihe und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge. Angenommen $w \neq 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ sei konvergent, dann gilt $\forall z \in \mathbb{C}\colon |z| < |w|$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent.*

Beweis. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$ konvergiert, dann muss zumindest $(a_k w^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Nullfolge sein. Damit ist $(a_k w^k)_{k\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt, womit $\exists M \geq 0\colon |a_k w^k| \leq M$. Sei nun $|z| < |w|$, dann gilt

$$\sum_{k=0}^{N} |a_k z^k| = \sum_{k=0}^{N} |a_k w^k| \cdot \left|\frac{z}{w}\right|^k \leq M \cdot \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\left|\frac{z}{w}\right|}_{=q<1}^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} q^k = M \frac{1}{1-q}.$$

Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|$ konvergent. □

Definition 3.3 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)**.** *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe. Wir wissen bereits: für $z = 0$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 0^k = a_0 + 0 = a_0$ konvergent. Sprich die Menge*

$$\left\{ r \in \mathbb{R}\colon r \geq 0\colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ ist konvergent} \right\} = R$$

ist nicht leer. Nach der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ existiert $\varrho \in \mathbb{R}$ mit

$$\varrho = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}\colon r \geq 0\colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ ist konvergent} \right\}$$

Wir nennen ϱ den Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe. Wenn R unbeschränkt ist, setzen wir $\varrho = +\infty$. Wir nennen $\mathcal{B}_\varrho(0)$ den Konvergenzkreis.

Lemma 3.4 (Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius'). *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine gegebene Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut konvergent, falls $|z| < \varrho$ und divergent für $|z| > \varrho$.*

Beweis. Sei $|z| > \varrho$. Angenommen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ wäre konvergent. Wir betrachten:

$$r = \frac{1}{2}(|z| + \varrho)$$

Es gilt $\varrho < r < |z|$. Nach Lemma 3.2 ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ absolut konvergent, was ein Widerspruch zu:

$$\varrho = \sup\left\{ r \in \mathbb{R} \colon r \geq 0 \colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ ist konvergent} \right\}$$

ist. Sei $|z| < \varrho$, sprich $|z|$ ist keine obere Schranke der Menge

$$\left\{ r \in \mathbb{R} \colon r \geq 0 \colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ ist konvergent} \right\}$$

sprich, $\exists r > |z|$, sodass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ konvergiert. Nach Lemma 3.2 konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ hernach absolut. □

Satz 3.5 (Cauchy-Hadamard Formel). *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine komplexe Potenzreihe, dann gilt für den Konvergenzradius ϱ die folgende Beziehung:*

$$\varrho = \frac{1}{L} \qquad L = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Mit der Konvention $\frac{1}{0} = +\infty$ bzw. $\frac{1}{\infty} = 0$. Falls

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

existiert, dann gilt

$$\varrho = \frac{1}{q}$$

Beweis. Sei $L = \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ in $[0, \infty]$ und sei $|z| < \frac{1}{L}$, dann gilt:

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k \cdot z^k|} = |z| \cdot \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{L} \cdot L = 1$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut. Sei wiederum $|z| > \frac{1}{L}$, dann folgt:

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k \cdot z^k|} = |z| \cdot \limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > \frac{1}{L} \cdot L = 1$$

Nach dem Wurzelkriterium divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Somit gilt:

$$\varrho = \sup\left\{ |z| \colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ ist konvergent} \right\}$$

Sei $|z| < \frac{1}{q}$, somit:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1} \cdot z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = |z| \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < \frac{1}{q} \cdot q = 1$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Potenzreihe. Sei $|z| > \frac{1}{q}$, dann

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1} \cdot z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = |z| \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > \frac{1}{q} \cdot q = 1$$

Nach dem Quotientenkriterium divergiert die Potenzreihe also für $|z| > \frac{1}{q}$. □

Satz 3.6 (Konvergenzabschätzung für Potenzreihen)**.** *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* ϱ *und sei* $r < \varrho$. *Wir setzen* $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ *als das Restglied fest. Dann existiert ein* $c \geq 0$, *sodass für alle* $|z| \leq r$ *gilt:*

$$|R_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \right| < c \cdot \underbrace{\left(\frac{2r}{r+\varrho} \right)^n}_{=q^n}$$

$$q = \frac{r+r}{r+\varrho} < \frac{r+\varrho}{r+\varrho} = 1$$

Beweis. Sei $|z| \leq r < \varrho$:

$$|R_n(z)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k z^k| = \sum_{k=n}^{\infty} \left(|a_k| \cdot \left| \frac{1}{2}(r+\varrho) \right|^k \cdot \frac{|z|^k}{\left|\frac{1}{2}(r+\varrho)\right|^k} \right)$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot \left| \frac{1}{2}(r+\varrho) \right|^k \cdot q^k \leq \mathcal{X}$$

Weil $\frac{1}{2}(r+\varrho) < \frac{1}{2}(\varrho+\varrho) = \varrho$ ist $\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \cdot \left|\frac{1}{2}(r+\varrho)\right|^k$ konvergent, womit $\left(|a_k| \left(\frac{1}{2}(r+\varrho)\right)^k \right)_{k \geq n}$ beschränkt ist und es existiert $c_1 \geq 0$ mit $|a_k| \left(\frac{1}{2}(r+\varrho)\right)^k \leq c_1$:

$$\mathcal{X} = c_1 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} q^k = c_1 \cdot q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \underbrace{\frac{c_1}{1-q}}_{=c} \cdot q^n$$

□

Im Folgenden betrachten wir eine Folge von Funktionen $u_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ und nennen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Funktionenfolge auf Ω.

Definition 3.7 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)**.** *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *und* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Funktionenfolge auf* Ω. *Sei* $u \colon \Omega \to \mathbb{C}$ *ebenfalls gegeben.*

1. *Wir sagen, dass die Funktionenfolge* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise gegen die Funktion* u *konvergiert, falls:*

$$\forall x \in \Omega \colon u(x) = \lim_{n \to \infty} u_n(x)$$

2. *Wir sagen, dass die Funktionenfolge* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen die Funktion* u *konvergiert, falls:*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists N \in \mathbb{N} \colon n \geq N \implies |u_n(x) - u(x)| \varepsilon \forall x \in \Omega$$

Wir schreiben dann $u = \operatorname{unif\,lim}_{n \to \infty} u_n$

Korollar 3.8 (Gleichmäßige Konvergenz der Partialsummen)**.** *Sei* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* $\varrho > 0$. *Sei weiters* $0 < r < \varrho$ *fest, dann gilt: Auf* $\overline{\mathcal{B}_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq r\} \subseteq \mathcal{B}_\varrho(0)$ *konvergiert die Folge der Partialsummen*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

gleichmäßig gegen $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Beweis. Sei $r < \varrho$ und $|z| \leq r$, sprich $\overline{\mathcal{B}_r(0)}$. Nach Satz 3.6 existiert ein $c > 0$, sodass:

$$|P(z) - P_{n-1}(z)| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k\right| \leq c\left(\frac{2r}{r+\varrho}\right)^n$$

$$q = \frac{2r}{r+\varrho} < 1$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $n \geq N \implies cq^n < \varepsilon$. Damit gilt für alle $z \in \overline{\mathcal{B}_r(0)}$:

$$n \geq N \implies |P(z) - P_{n-1}(z)| < \varepsilon$$

Somit konvergiert P_n gleichmäßig gegen P. □

Satz 3.9 (Stetigkeit aus gleichmäßiger Konvergenz)**.** *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf Ω. Angenommen $u_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ ist stetig auf Ω $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei weiters $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen u auf Ω, dann ist u stetig auf Ω.*

Beweis. Sei $x_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N$ und $x \in \Omega$. Weil $u_N \colon \Omega \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt x_0 ist, folgt:

$$\exists \delta > 0 \colon \forall x \in \Omega \colon |x - x_0| < \delta \implies |u_N(x_0) - u_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}|u(x) - u(x_0)| &= |u(x) - u_N(x) + u_N(x) - u_N(x_0) + u_N(x_0) - u(x_0)| \\ &\leq |u(x) - u_N(x)| + |u_N(x) - u_N(x_0)| + |u_N(x_0) - u(x_0)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Sprich für $x \in \Omega$ mit $x \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ gilt $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$. □

Satz 3.10 (Stetigkeit von Potenzreihen)**.** *Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$, dann ist P eine stetige Funktion auf $\mathcal{B}_\varrho(0)$.*

Beweis. Sei $P(z)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ϱ und $z \in \mathcal{B}_\varrho(0)$. Wir setzen $r = \frac{1}{2}(|z| + \varrho)$, dann gilt $\underline{|z| < r} < \varrho$. Nach Satz 3.9 und Korollar 3.8 gilt, dass P stetig auf $\overline{\mathcal{B}_r(0)}$ ist. Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt für $z \in \overline{\mathcal{B}_r(0)}$, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\forall w \in \overline{\mathcal{B}_r(0)}$ mit $|z - w| < \delta$ folgt, dass $|P(z) - P(w)| < \varepsilon$. Wir setzen $\tilde{\delta} = \min\{\delta, r - |z|\} > 0$. Für $|w - z| < \tilde{\delta}$ gilt:

$$|w| = |z + w - z| \leq |z| + |w - z| < |z| + \tilde{\delta} \leq |z| + r - |z| = r$$

Sprich $w \in \overline{\mathcal{B}_r(0)} \subseteq \mathcal{B}_\varrho(0)$. Also gilt für alle $w \in \mathcal{B}_\varrho(0)$ mit $|z - w| < \tilde{\delta}$ die Ungleichung $|P(z) - P(w)| < \varepsilon$, womit $P \colon \mathcal{B}_\varrho(0) \to \mathbb{C}$ stetig in z ist. □

Einschub zu einseitigen Grenzwerten: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f \colon D \to \mathbb{C}$. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass $\forall \varepsilon > 0 \colon (x_0, x_0+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ gilt. Man könnte sagen, dass x_0 ein rechtsseitiger Häufungspunkt von D ist. Analog können wir für $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ sage, wenn $\forall \varepsilon > 0 \colon (x_0 - \varepsilon, x_0) \cap D \neq \emptyset$, dass x_0 ein linksseitiger Häufungspunkt von D ist. Dabei ist zu beachten, dass links- und rechtsseitige Häufungspunkte von D auch gewöhnliche Häufungspunkte von D sind.

Wir können einen rechtsseitigen Häufungspunkt auch über Folgen klassifizieren. Sei x_0 ein rechtsseitiger Häufungspunkt von D, dann $\exists (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_\in D$ und $\forall n \in \mathbb{N} \colon \xi_n > x_0$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$. Analog gilt für einen linksseitigen Häufungspunkt x_0, dass $\forall n \in \mathbb{N} \colon \xi_n < x_0$.

Definition 3.11 (Rechts- und linksseitige Grenzwerte)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und x_0 ein rechtsseitiger Häufungspunkt von D. Sei $f \colon D \to \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Wir sagen f hat in x_0 den rechtsseitigen Grenzwert c, falls:*

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta > 0 \colon x \in D \colon (|x - x_0| < \delta \wedge x > x_0) \implies |f(x) - c| < \varepsilon$$

Betrachten wir noch das Folgenkriterium für einseitige Grenzwerte. Sei $c \in \mathbb{C}$ der rechtsseitiger Grenzwert von $f \colon D \to \mathbb{C}$ im rechtsseitigen Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$, dann gilt $\forall (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$ und $\forall n \in \mathbb{N} \colon \xi_n > x_0$, dass $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = c$. Analog gilt das für linksseitige Grenzwert.

4 Die Exponentialfunktion und ihre Verwandten

Wir wollen uns nun näher mit der Operation des Potenzierens befassen. Wir haben bereits Exponenten aus den natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen als wiederholte Anwendung der Multiplikation mit sich selbst kennengelernt. Wie gehen wir allerdings mit der Funktion a^x um, wenn $a > 0$? Auf $\mathbb{Q}$ können wir damit noch gut arbeiten. Seien etwa $x, y \in \mathbb{Q}$, dann erfüllt die Funktion $f(x) = a^x$ die folgende **Funktionalgleichung**:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{3}$$

Was passiert aber für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wie können wir irrationale Zahlen, die keine Bruchdarstellung besitzen, mit einer Operation in Verbindung bringen, die auf der Verwendung von rationalen Zahlen aufgebaut ist? Eine mögliche Methode wäre, über Grenzwerte von Folgen zu arbeiten. Sei etwa $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen x, dann können wir einen Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n = a^{q_n}$ definieren mit $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = a^x$. Das wäre jedoch mühsam, da wir erstens für jedes Argument und jedes a nachweisen müssten, dass der Grenzwert existiert und eindeutig ist. Besser ist es daher, eine Funktion zu suchen, welche die Gleichung (3) erfüllt. Betrachten wir daher die folgenden Funktionenfolge:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ f_n(x)f_n(y) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den gleichmäßigen Grenzwert $f = \operatorname{unif}\lim_{n\to\infty} f_n$.

Lemma 4.1 (Konvergenzradius der Exponentialfunktion)**.** *Die Potenzreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

hat den Konvergenzradius ∞, sprich sie konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$ und ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}$.

Beweis. Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned} q = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{k!}\right|} &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{k+1}\right| = 0 \\ \implies \varrho = \infty \end{aligned}$$

□

Satz 4.2 (Fundamentallemma der Exponentialfunktion)**.** *Sei $x \in \mathbb{C}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine komplexe Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass für ein hinreichend großes n gilt:

$$\left| \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| < \varepsilon$$

Nach Lemma 4.1 konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|x|+1)^k}{k!}$, sprich $\exists K \in \mathbb{N} : \sum_{k=L}^{\infty} \frac{(|x|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$ für $L \geq K$. Weiters gilt

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$, sprich $\exists \tilde{K} \in \mathbb{N} : n \geq \tilde{K} \implies |x_n - x| < 1$. Wir wählen nun $N = \max\{K, \tilde{K}\}$ und $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} - \sum_{k=N}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{N-1}\left(\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} - \frac{x^k}{k!}\right)\right|}_{=\mathcal{X}_1} + \underbrace{\left|\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k}\right|}_{=\mathcal{X}_2} + \underbrace{\left|\sum_{k=N}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right|}_{=\mathcal{X}_3}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{X}_3 \leq \sum_{k=N}^{\infty}\frac{|x|^k}{k!} < \sum_{k=N}^{\infty}\frac{(|x|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\mathcal{X}_2 : \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!}\cdot\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{n} = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\underbrace{\frac{n-j}{n}}_{<1} < \frac{1}{k!}$$

$$n \geq N \geq \tilde{K} \implies |x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < |x| + 1$$

$$\implies \mathcal{X}_2 \leq \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{|x_n|^k}{n^k} < \sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\frac{(|x|+1)^k}{k!} < \sum_{k=N}^{\infty}\frac{(|x|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Für $\mathcal{X}_1$ ist N fest und n wird geeignet gewählt. Nach den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \implies \lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} = \frac{x^k}{k!}$$

$$k \in \{0,\dots,N-1\} \implies \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!}$$

Sprich es gibt ein $M \in \mathbb{N}$, mit $M \geq N$, sodass für alle $n \geq M$ folgt:

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}\frac{x_n^k}{n^k} - \frac{x^k}{k!}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$n \geq M \implies \mathcal{X}_1 < \frac{\varepsilon}{3}$$

Damit folgt also für diese Indizes:

$$\left|\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| \leq \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

Definition 4.3 (Exponentialfunktion)**.** *Sei* $z \in \mathbb{C}$. *Wir definieren* $\exp(z)$ *als*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

und nennen $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *die komplexe Exponentialfunktion.*

Satz 4.4 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.**

1. $\exp$ *erfüllt die Funktionalgleichung aus Gleichung* (3) *auf ganz* $\mathbb{C}$
2. *Es gilt:*

$$\lim_{z\to 0}\frac{\exp(z)-1}{z} = 1$$

Beweis. 1.

$$\exp(z)\exp(w) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{w}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\left(z+w+\frac{zw}{n}\right)\right)^n$$

$$\xi_n = z+w+\frac{zw}{n} \implies \lim_{n\to\infty}\xi_n = z+w$$

$$\implies \exp(z)\exp(w) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+w)^k}{k!} = \exp(z+w)$$

2. Sei $z \neq 0$:

$$\frac{\exp(z)-1}{z} = 1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!} = Q(z)$$

$Q(z)$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho = +\infty$, somit ist Q stetig auf $\mathbb{C}$, somit gilt:

$$\lim_{z\to 0} Q(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\exp(z)-1}{z} = Q(0) = 1$$

□

Definition 4.5 (Eulersche Zahl)**.** *Wir definieren die eulersche Zahl* $\mathrm{e} \in \mathbb{R}$ *als* $\mathrm{e} = \exp(1)$.

4.1 Eigenschaften der Exponentialfunktion

- $\exp(0) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = 1$
- $\exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z)$, womit $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$
- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exp(n) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$$

- Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\exp^m\left(\frac{1}{m}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m}\right) = \mathrm{e} \implies \exp\left(\frac{1}{m}\right) = \sqrt[m]{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{m}}$$

Wir können also für $r \in \mathbb{Q}$ $\exp(r)$ als e^r anschreiben. Da exp jedoch auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist, können wir auch $\exp(z) = \mathrm{e}^z$ schreiben für $z \in \mathbb{C}$. Damit hat die Funktionalgleichung in Gleichung (3) die folgende Form:

$$\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$$

Satz 4.6 (Eigenschaften von exp auf $\mathbb{R}$)**.** *Sei* $x \in \mathbb{R}$*, dann gilt:*

1. $\exp(x) \in \mathbb{R}$
2. $\exp(x) > 0$
3. exp *ist streng monoton wachsend*
4. $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ *ist bijektiv*
5. exp *ist differenzierbar auf* $\mathbb{R}$ *mit* $\exp' = \exp$
6. exp *ist strikt konvex auf* $\mathbb{R}$

Beweis. 1. klar, da $x \in \mathbb{R}$

2. Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \exp^2\left(\frac{x}{2}\right) > 0$$

3. Sei $\xi > 0$, dann gilt:

$$\mathrm{e}^{\xi} = 1 + \underbrace{\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3!} + \ldots}_{>0} > 1$$

Sei nun $x_1 < x_2$, d.h. $x_2 - x_1 > 1$, dann gilt:

$$\mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1 + x_2 - x_1} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2 - x_1} > \mathrm{e}^{x_1}$$

4. Da exp nach 3 streng monoton wachsend ist, ist exp injektiv. Für die Surjektivität suchen wir ein x, sodass $\mathrm{e}^x = y$ für $y \in (0, \infty)$. Wir machen eine Fallunterscheidung. Sei $y > 1$, dann ist $exp(y) > y$. Wir betrachten $f(x) = \mathrm{e}^x - y$. f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Da $f(0) = 1 - y < 0$ und $f(y) = \mathrm{e}^y - y > 0$ folgt nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen, dass $\exists x \in (0, y) : f(x) = 0$, womit gilt $\mathrm{e}^x = y$. Der Fall $y = 1$ ist trivial, da hier $x = 0$. Sei $0 < y < 1$, dann wählen wir $w = \frac{1}{y} > 1$, womit wir wieder nach dem Zwischenwertsatz $x \in (0, w)$ finden können mit $\mathrm{e}^x = \frac{1}{y}$. Damit folgt aber $\mathrm{e}^{-x} = y$, somit ist exp surjektiv auf $\mathbb{R}$ und damit auch bijektiv.

5.
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{h}(\mathrm{e}^h - 1) = \mathrm{e}^x \lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x$$

Die Exponentialfunktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

6. Da $\exp'' = \exp$, ist $\exp''$ streng monoton wachsend, womit exp strikt konvex auf $\mathbb{R}$ ist.

□

Definition 4.7 (Logarithmus naturalis)**.** *Wir bezeichnen die Umkehrfunktion* $\exp^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *mit der Notation* $\exp^{-1} = \ln$ *und nennen* $\ln(y) = \ln y$ *den natürlichen Logarithmus von* y *(logarithmus naturalis).*

Einige besondere Eigenschaften sind:

- $\ln 1 = 0$
- $e^{\ln y} = y$ für $y > 0$
- $\ln \mathrm{e}^x = x$ für $x \in \mathbb{R}$

Satz 4.8 (Eigenschaften von ln)**.**

1. $\forall y_1, y_2 \in (0, \infty) : \ln(y_1 \cdot y_2) = \ln y_1 + \ln y_2$
2. $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1$

Beweis. 1. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, dann $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{e}^{x_1} = y_1$ und $\mathrm{e}^{x_2} = y_2$, womit

$$y_1 y_2 = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2} = \mathrm{e}^{x_1 + x_2} \implies \ln(y_1 y_2) = x_1 + x_2 = \ln y_1 + \ln y_2.$$

2. Sei $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(0, \infty)$ mit $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$ und $\eta_n \neq 0$, dann setzen wir $\xi_n = \ln(\eta_n + 1)$ bzw. $\mathrm{e}^{\xi_n} = \eta_n + 1 \iff \eta_n = \mathrm{e}^{\xi_n} - 1$, somit gilt $\xi_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(\eta_n + 1)}{\eta_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\xi_n}{\mathrm{e}^{\xi_n} - 1} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{e}^{\xi_n} - 1}{\xi_n}} = \frac{1}{1} = 1$$

Hierbei haben wir Satz 4.4 verwendet.

□

Wir folgern daher, dass für $y > 0$ gilt: $0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{y}{y}\right) = \ln y + \ln \frac{1}{y}$ womit $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$. Daraus folgt aber direkt, dass für $y_1, y_2 > 0$ gilt $\ln \frac{y_1}{y_2} = \ln y_1 - \ln y_2$.

Satz 4.9 (Differenzierbarkeit des Logarithmus)**.** *Die Logarithmusfunktion* $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar auf* $(0, \infty)$ *mit* $\ln'(y) = \frac{1}{y}$.

Beweis.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(y+h)-\ln(y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{y+h}{y}\right)}{h}=\frac{\ln\left(1+\frac{h}{y}\right)}{\frac{h}{y}}\frac{1}{y}=\frac{1}{y}\lim_{\eta\to 0}\frac{\ln(1+\eta)}{\eta}=\frac{1}{y}$$

□

Definition 4.10 (Allgemeine Exponentialfunktion). *Sei $a>0$ und $z\in\mathbb{C}$, dann definieren wir $\exp_a(z)=a^z=\mathrm{e}^{\ln(a)z}=\exp(z\ln a)$ und nennen $\exp_a$ die Exponentialfunktion zur Basis a.*

Bemerkung 4.11. $a^0=\mathrm{e}^{0\ln a}=\mathrm{e}^0=1$. *Ferner gilt* $a^1=\mathrm{e}^{1\ln(a)}=\mathrm{e}^{\ln a}=a$. *Zuletzt*

$$a^{z+w}=\mathrm{e}^{z\ln a+w\ln a}=\mathrm{e}^{z\ln a}\mathrm{e}^{w\ln a}=a^z a^w$$

Aus der Kettenregel folgt des Weiteren, dass

$$\exp_a'(x)=\ln(a)\exp_a(x).$$

Satz 4.12 (Exponentielles Wachstum). *Für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\exp\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x=0$$

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ äquivalent dazu ist, dass $\forall M\in\mathbb{R}:\exists L\in\mathbb{R}:x>L\implies f(x)>M$ bzw. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ ist äquivalent zu $\forall\varepsilon>0:\exists L\in\mathbb{R}:x<L\implies|f(x)|<\varepsilon$. Sei $M\in\mathbb{R}$ gegeben, $x>0$ und $n\in\mathbb{N}$ fest, dann gilt

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\implies\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}>\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{x^n}=\frac{x}{(n+1)!}>M.$$

für $x>M(n+1)!$. Sei $\xi=-x$, dann gilt $x\to-\infty\iff\xi\to\infty$, womit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x&=\lim_{\xi\to\infty}(-\xi)^n\mathrm{e}^{-\xi}=(-1)^n\lim_{\xi\to\infty}\frac{\xi^n}{\mathrm{e}^\xi}\\&=(-1)^n\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\xi^n}}=\text{"}(-1)^\infty\cdot\frac{1}{\infty}-0\end{aligned}$$

□

4.2 Die trigonometrischen Funktionen

Wir haben nun bereits die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ betrachtet. Was passiert nun bei komplexen Argumenten? Sei $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\overline{z}}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\overline{z}}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\overline{1}+\frac{\overline{z}}{\overline{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\overline{1+\frac{z}{n}}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\overline{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}=\overline{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}=\overline{\mathrm{e}^z}\end{aligned}$$

Sei $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$, dann gilt:

$$|\mathrm{e}^z|^2=\mathrm{e}^z\cdot\overline{\mathrm{e}^z}=\mathrm{e}^{z+\overline{z}}=\mathrm{e}^{2x}>0$$

Sprich $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x>0$ auf ganz $\mathbb{C}$ und der Betrag der komplexen Exponentialfunktion hängt nur vom Realteil von z ab. Für $z=\mathrm{i}y$ gilt somit $|\mathrm{e}^z|=1$, sprich $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ legt den komplexen Einheitskreis fest.

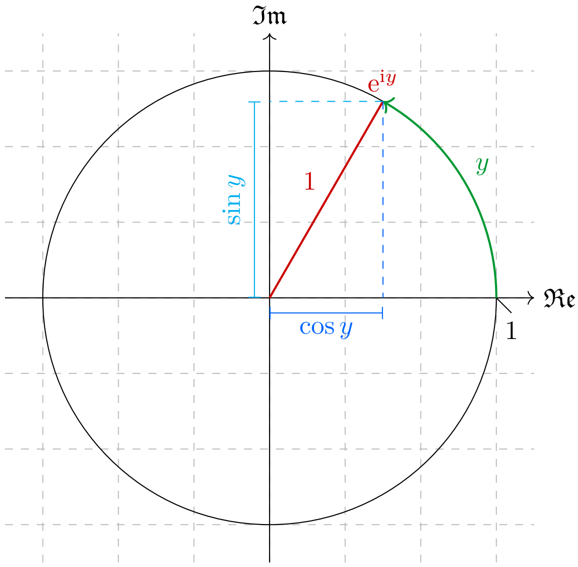


Abbildung 7: Der komplexe Einheitskreis mit einigen wichtigen Kenngrößen

Wir bezeichnen y als die Bogenlänge zwischen 1 und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. Das werden wir jedoch erst sehen, wenn wir eine Möglichkeit haben, die Länge einer Kurve zu messen. Wir sehen weiterhin, dass die mathematisch positive Orientierung am Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn geht.

Definition 4.13 (Sinus und Cosinus). *Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir definieren die folgenden Funktionen:*

$$\cos y = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})$$
$$\sin y = \mathfrak{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})$$

Daraus erhalten wir die erste Eulersche Identität:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \sin y$$

Woraus wir wiederum die zweite Eulersche Identität herleiten können:

$$\cos y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})$$
$$\sin y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y})$$

Mit der zweiten Eulerschen Identität können wir Sinus und Cosinus auf ganz $\mathbb{C}$ definieren.

Eine besonders Interessante Beobachtung ist, dass

$$1 = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|^2 = \cos^2(y) + \sin^2(y).$$

Dabei verwenden wir die Notation $\cos^2(y) = (\cos y)^2$.

4.2.1 Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen

Wir kennen bereits die Potenzreihe der Exponentialfunktion. Weiterhin wissen wir, wie Sinus und Cosinus definiert sind. Daher können wir $\exp(\mathrm{i}y)$ in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^k z^k}{k!} \\
&\mathrm{i}^{2k} = (\mathrm{i}^2)^k = (-1)^k \qquad \mathrm{i}^{2k+1} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^{2k} = (-1)^k \mathrm{i} \\
&\implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1) \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&\implies \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}
$$

Wir wollen nun Gleichung (3) für Sinus und Cosinus erörtern:

$$
\begin{aligned}
&\cos(z+w) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+w)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z+w)}\right) = \frac{1}{4}\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) - \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}\right) \\
&= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)
\end{aligned}
$$

Wir können analog für sin vorgehen und erhalten somit die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen (auf $\mathbb{C}$)

$$
\begin{aligned}
\cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \\
\sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).
\end{aligned}
$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen ist ihre Symmetrie[3]. Anhand der Potenzreihe des Cosinus sehen wir, dass gilt $\cos(z) = \cos(-z)$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die $f(z) = f(-z)$ erfüllt nennen wir gerade (oder symmetrisch). Eine Funktion für die gilt $f(z) = -f(-z)$ nennen wir ungerade (oder asymmetrisch). Der Sinus erfüllt diese Funktionalgleichung, wie auch an der Potenzreihe erkennbar ist.

4.3 Komplexe Differenzierbarkeit

Wir wollen uns nun bereits mit den Grundlagen der komplexen Analysis beschäftigen, da wir einige Funktionen kennengelernt haben, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert sind. Wir nennen $f\colon D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, falls

$$
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}
$$

In $\mathbb{C}$ existiert. Prüfen wir, ob $\exp' = \exp$ auch über $\mathbb{C}$ gilt:

$$
\lim_{\xi \to 0} \frac{\mathrm{e}^{z+\xi} - \mathrm{e}^z}{\xi} = \mathrm{e}^z \lim_{\xi \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\xi} - 1}{\xi} = \mathrm{e}^z
$$

Lemma 4.14. *Es gilt:*

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} &= 1 \\
\lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} &= 0
\end{aligned}
$$

[3] oftmals auch Parität genannt

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$. Mit dem Quotientenkriterium erhalten wir:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{2(k+1)}}{(2(k+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0$$

Damit ist sin konvergent auf $\mathbb{C}$ und somit auch stetig:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}}_{=f(z)} = f(0) = 1$$

Unter der Annahme das man 0^0 als 1 festlegt. Wir gehen analog für cos vor:

$$\frac{\cos(z)-1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k)!} = g(z)$$
$$\implies \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)-1}{z} = \lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = 0$$

□

Satz 4.15 (Differenzierbarkeit von Sinus und Cosinus)**.** *Die trigonometrischen sind stetig differenzierbar auf* $\mathbb{R}$ *mit:*

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$

Beweis.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}$$
$$= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$
$$= -\sin(x)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}$$
$$= \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x)$$

□

Lemma 4.16 (Polynomielle Abschätzungen für Sinus und Cosinus)**.** *Sei* $x \in [0,2)$*, dann gilt:*

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$
$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$$

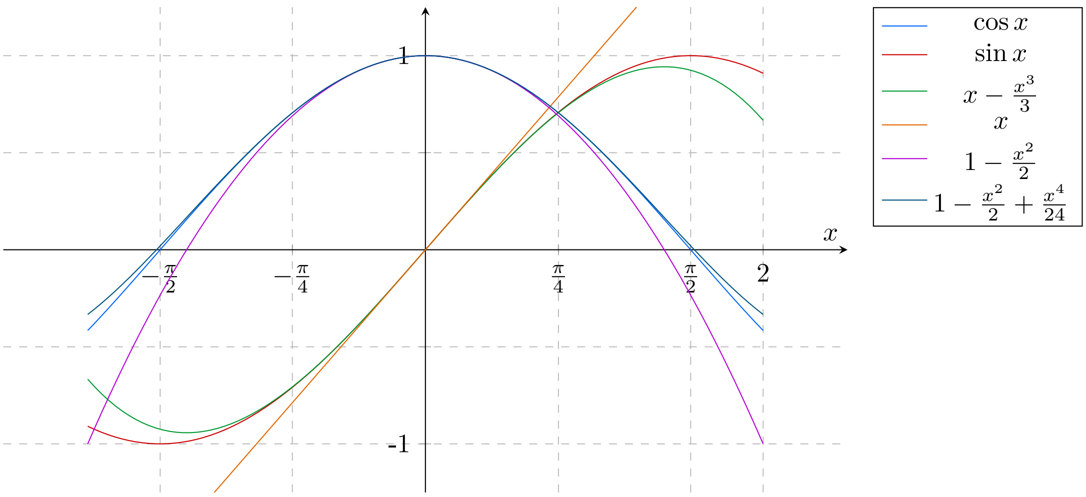


Abbildung 8: Motivation für Lemma 4.16

Beweis. Wir zeigen zuerst folgendes. Sei $x \in [0,2)$, dann gilt:

$$\forall j \in \mathbb{N} : \frac{x^{2j}}{(2j)!} > \frac{x^{2(j+1)}}{(2(j+1))!} \iff \forall j \in \mathbb{N} : \frac{(2(j+1))!}{(2j)!} > \frac{x^{2j+2}}{x^{2j}}$$
$$\forall j \in \mathbb{N} : (j+1)(j+1) > x^2$$

Diese Aussage ist für $j \in \mathbb{N}$ erfüllt. Da die Folgenglieder der Potenzreihe des Cosinus eine Nullfolge bilden und die Reihe alternierend ist, folgt nach Leibniz:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Wir können analog für den Sinus vorgehen. □

Wir sehen in Abbildung 8, dass cos auf $[0,2)$ eine Nullstelle hat (dies folgt auch direkt aus dem Zwischenwertsatz).

Definition 4.17 (Nullstellle des Cosinus)**.** *Wir bezeichnen die Nullstelle des Cosinus auf* $(0,2)$ *als* ξ *und schreiben* $\xi = \frac{\pi}{2}$*. Dann ist* π *gegeben durch* $\pi = 2\xi$*.*

Eine weitere wichtige Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen ist ihre Periodizität. Sie erfüllen nämlich die folgende Funktionalgleichung:

$$\exists! T \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{Z} : f(x) = f(x + kT)$$

Definition 4.18 (Periodizität)**.** *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gegeben. Wir nennen* f *periodisch mit der Periode* $T \in \mathbb{R}$*, falls* $\forall x \in \mathbb{R}$ *und* $\forall k \in \mathbb{Z}$ *gilt:*

$$f(x + kT) = f(x)$$

Sowohl der Sinus als auch der Cosinus sind periodisch mit Periodendauer $T = 2\pi$.

5 Elementare topologische Konzepte

Viele unserer bisherigen Betrachtungen lassen sich auf weit allgemeineren Räumen definieren[4]. Dazu führt man üblicherweise den Begriff des topologischen Raumes ein. Diesen stellen wir erst später auf und beginnen hier mit metrischen Räumen.

5.1 Metrische Räume

Definition 5.1 (metrischer Raum)**.** *Sei X eine Menge mit $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $d\colon X^2 \to [0,\infty)$ nennen wir eine Metrik auf X, falls*

1. $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

gelten. Das Paar (X,d) nennen wir einen metrischen Raum.

Bemerkung 5.2.

- *ein metrischer Raum muss im Allgemeinen keine Vektorraumstruktur aufweisen*
- *jede nicht-leere Teilmenge $Y \subseteq X$ ist mit der Einschränkung $d_Y = d|_Y$ wieder ein metrischer Raum*

Beispiel 5.3.

- *Sei $G = (V,E)$ ein Graph, wie z.B. in Abbildung 9. Ordnen wir jeder Kante $\{p_i, p_j\} \in E$ eine Gewichtung w_{ij} zu, mit der Konvention $w_{ii} = 0$, so ist durch*

$$d(p,q) = \min\left\{\sum_{k=1}^{n} w_{i_k j_k} \mid p_{i_1} = p, p_{j_n} = q, p_{j_k} = p_{j_{k+1}}, \{p_{i_k}, p_{j_k}\} \in E\right\}$$

eine Metrik auf G definiert.

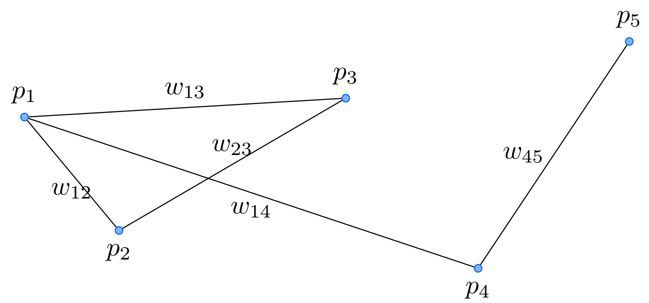


Abbildung 9: Beispiel eines gewichteten Graphen

- *Sei $\Gamma := \{\gamma(t) : t \in (0,1)\}$ der Graph einer Funktion $\gamma\colon (0,1) \to \mathbb{R}^2$. Mittels eines geeigneten Integrals können wir auf γ Distanzen messen. Dadurch ergibt sich ebenfalls eine Metrik.*

[4] auch Konzepte wie Integration (durch das Lebesgue-Integral, siehe Maßtheorie) und Differentiation (auf sogenannten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, siehe Analysis 3)

Definition 5.4 (Topologische Eigenschaften von Mengen). *Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$, so nennen wir $\mathcal{B}_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ die offene Kugel um x mit Radius r. Sei $D \subseteq X$, dann nennen wir*

- *x einen isolierten Punkt von D, falls $\exists r > 0 : \mathcal{B}_r(x) \cap D = \{x\}$*
- *x einen inneren Punkt von D, falls $\exists r > 0 : \mathcal{B}_r(x) \subseteq D$*
- *x einen Berührpunkt von D, falls $\forall r > 0 : \mathcal{B}_r(x) \cap D \neq \emptyset$*
- *x einen Randpunkt von D, falls x Berührpunkt von D und $X \setminus D$ ist*
- *x einen Häufungspunkt von D, falls $\forall r > 0 : (\mathcal{B}_r(x) \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset$*

Ferner ist $\mathrm{int}(D)$ die Menge der inneren Punkte von D, auch innerer Kern von D und $\mathrm{cls}(D)$ die Menge der Berührpunkte von D, auch abgeschlossene Hülle oder Abschluss von D, auch $\overline{D}$. Ferner ist $\partial D = \mathrm{cls}(D) \setminus \mathrm{int}(D)$ der Rand von D.
Gilt $\mathrm{int}(D) = D$, so nennen wir D offen. Ist $\mathrm{cls}(D) = D$, so nennen wir D abgeschlossen.

Bemerkung 5.5. *Wie in $\mathbb{C}$ gilt $\mathrm{int}(D) \subseteq D \subseteq \mathrm{cls}(D)$.*

Definition 5.6 (Konvergenz in metrischen Räumen). *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $x_n \in X$ heißt konvergent mit Grenzwert $x \in X$, falls $\forall \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $n \geq N \implies d(x, x_n) < \varepsilon$. In diesem Fall schreiben wir $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge in (X, d), falls es $\forall \varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $m, n \geq N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$ gilt.*
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so heißt $x \in X$ Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{N}$ mit $|J| = \aleph_0$ gibt, sodass $\forall k \in J : d(x_k, x) < \varepsilon$. Die Menge der konvergenten Folgen in (X, d) bezeichnen wir mit $\mathfrak{c}(X)$. Konvergiert jede Cauchyfolge in X, so nennen wir X vollständig

Bemerkung 5.7. *Offenbar ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig. Seien x, y mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $n \geq N_1 \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n \geq N_2 \implies d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daher folgt aus der Dreiecksungleichung 3 für $n \geq \max(N_1, N_2)$*

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $d(x, y) = 0$, wonach 2 gilt, dass $x = y$.

Ferner sind konvergente Folgen immer Cauchyfolgen, da für $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $n \geq N \implies d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mit der Dreiecksungleichung 3 folgt daher für $m, n > N$, dass

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \varepsilon.$$

Aus unserer Definition eines Häufungspunktes x von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist durch die Vorgabe einer streng monoton wachsenden Funktion $\nu\colon \mathbb{N} \to J$ eine gegen x konvergente Teilfolge $x_{\nu(n)}$ gegeben. Es gilt also, wie in $\mathbb{C}$, dass x genau dann ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, falls es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

Bemerkung 5.8. *Es gilt, wie in Lemma 1.7, dass x genau dann ein Berührpunkt von $D \subseteq X$ ist, falls es eine Folge $\xi \in \mathfrak{c}(D)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$ gibt. Ferner ist x ein Häufungspunkt von D, falls es eine Folge $\xi \in \mathfrak{c}(D \setminus \{x\})$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$ gibt. Die Beweise gehen analog.*

Lemma 5.9 (Eigenschaften offener und abgeschlossener Menge). *Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gelten*

1. - *$\emptyset$ und X sind offen*
   - *ist $(O_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Mengen, dann ist $O = \bigcup_{i\in I} O_i$ ebenfalls offen*
   - *sind O_1, O_2 offen in X, so ist $O_1 \cap O_2$ offen*
2. *$O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $X \setminus O$ abgeschlossen ist*
3. - *$\emptyset$ und X sind abgeschlossen*
   - *ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen, dann ist $A = \bigcap_{i\in I} A_i$ ebenfalls abgeschlossen*
   - *sind A_1, A_2 abgeschlossen in X, so ist $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen*

Beweis.

1. $\emptyset$ ist per Konvention offen. Da jede offene Kugel $\mathcal{B}_r(x)$ für jedes $x \in X$ und $r > 0$ per Definition eine Teilmenge von X ist, ist jeder Punkt von X ein innerer Punk, daher ist X offen. Sei $x \in O$, dann gibt es ein $j \in I$, sodass $x \in O_j$. Da O_j offen ist, gibt es $r > 0$, sodass $\mathcal{B}_r(x) \subseteq O_j$, womit aber auch $\mathcal{B}_r(x) \subseteq O$. Sei $x \in O_1 \cap O_2$. Da O_i offen ist, gibt es r_i, sodass $\mathcal{B}_{r_i}(x) \subseteq O_i$. Setzen wir $r = \min(r_1, r_2)$, so gilt $\mathcal{B}_r(x) \subseteq \mathcal{B}_{r_i}(x) \subseteq O_i$, womit $\mathcal{B}_r(x) \subseteq O_1 \cap O_2$.

2. Sei $A = X \setminus O$. Da O offen ist, gibt es für $x \in O$ ein $r > 0$, sodass $\mathcal{B}_r(x) \subseteq O$. Daraus folgt aber direkt, dass $A \cap \mathcal{B}_r(x) = \emptyset$, womit x kein Berührpunkt von A sein kann. Damit gilt aber für alle Berührpunkte y von A, dass $y \notin O$, daher $\operatorname{cls}(A) \subseteq A$. Somit ist A abgeschlossen.

   Sei hingegen $A \subseteq X$ abgeschlossen. Wir wollen zeigen, dass $O = X \setminus A$ offen ist. Sei dazu $x \in O$. Da $x \notin A$ ist x kein Berührpunkt von A, es gibt also $r > 0$, sodass $\mathcal{B}_r(x) \cap A = \emptyset$, damit aber $\mathcal{B}_r(x) \subseteq O$. Somit ist x ein innerer Punkt von O.

3. $\emptyset = X \setminus X$ und $X = X \setminus \emptyset$. Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Menge, so ist $O_i = X \setminus A_i$ für $i \in I$ ein Familie offener Mengen. Nach deMorgan gilt dann

   $$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (V \setminus O_i) = V \setminus \bigcup_{i \in I} O_i$$

   Sind $A_1, A_2 \subseteq X$ abgeschlossen, so sind $O_i = X \setminus A_i$ offen, womit $A_1 \cup A_2 = (V \setminus O_1) \cup (V \setminus O_2) = V \setminus (O_1 \cap O_2)$.

□

Bemerkung 5.10. *Durch Induktion können wir mittels Lemma 5.9 zeigen, dass für eine Familie offener Menge $(O_i)_{i \in I}$ gilt, dass*

$$\bigcap_{i \in I} O_i$$

offen ist. Analog gilt für eine Familie abgeschlossener Mengen $(A_i)_{i \in I}$, dass

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

abgeschlossen ist.

Definition 5.11 (Umgebung)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$. Wir nennen $U \subseteq X$ eine Umgebung von x, falls es $r > 0$ gibt, sodass $\mathcal{B}_r(x) \subseteq U$, also x ein innerer Punkt von U ist.*

Definition 5.12 (Stetigkeit)**.** *Sei (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, $x \in X$ und $f\colon X \to Y$. Wir nennen f stetig in x, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Ist f stetig in jedem $x \in X$, so nennen wir f stetig auf X.

Lemma 5.13 (Klassifizierung der Stetigkeit)**.** *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume, $f\colon X \to Y$ und $x \in X$. Dann gilt*

1. ***Folgenkriterium**: f ist genau dann stetig in x, falls für $\forall \xi \mathfrak{c}(X)$ mit $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = f(x)$.*
2. *f ist genau dann stetig in x, falls für jede Umgebung $V \subseteq Y$ von $f(x)$, ihr Urbild $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.*

Beweis. 1. geht analog zu Satz 1.2

2. $\implies$: Sei f stetig in x und V eine Umgebung von $f(x)$, sprich $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Da f stetig in x ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass für $y \in \mathcal{B}_\delta(x)$ gilt $f(y) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(x))$. Damit gilt $\forall y \in \mathcal{B}_\delta(x) : f(w) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq V$. Daraus folgt direkt $\mathcal{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(V)$, womit $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x ist.

   $\impliedby$: Seien nun die Urbilder von Umgebungen wieder Umgebungen. Für $\varepsilon > 0$ ist $\mathcal{B}_\varepsilon(f(x))$ eine Umgebung von $f(x)$, womit auch $f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$ eine Umgebung von x ist. Es gibt also $\delta > 0$ sodass $\mathcal{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$, d.h. $\forall y \in \mathcal{B}_\delta(x) : f(y) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(x))$. Damit ist f stetig in x, da $d_X(y,x) < \delta \implies d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

□

Bemerkung 5.14. *Eine Menge $O \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn $\forall x \in O : \exists r_x > 0 : \mathcal{B}_{r_x}(x) \subseteq O$, also $\forall x \in O$ ist O eine Umgebung von x.*

Lemma 5.15. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f \colon X \to Y$. Dann ist f genau dann stetig auf X, falls für jede offene Menge $O \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(C)$ offen in X ist.*

Beweis. $\implies$: Sei f stetig auf X, $O \subseteq Y$ offen und $x \in f^{-1}(O)$. Da O offen ist, ist O eine Umgebung von x, damit ist $f^{-1}(O)$ eine Umgebung von x. Da $f^{-1}(O)$ eine Umgebung für jedes $x \in f^{-1}(O)$ ist, ist $f^{-1}(O)$ offen.

$\impliedby$: Sei $x \in X$ und Urbilder offener Mengen seien offen unter f. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir $\mathcal{B}_\varepsilon(f(x))$, womit $f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$ eine offene Umgebung von x ist, also $\exists \delta > 0$ sodass $\mathcal{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathcal{B}_\varepsilon(f(x)))$, bzw. für $y \in \mathcal{B}_\delta(x)$ gilt $d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Damit ist f stetig in x. □

Definition 5.16 (Überdeckung)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Familie $(O_i)_{i \in I}$ von Mengen in X heißt Überdeckung von X, falls $X \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$. Sind die O_i für alle $i \in I$ offen, nennen wir $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Eine Teilüberdeckung $(O_j)_{j \in J}$ ist gegeben durch $J \subseteq I$ und $X \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$. Wir nennen eine Überdeckung endlich, falls $|I| \in \mathbb{N}$. Der metrische Raum (X,d) heißt überdeckungskompakt, falls jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.*
Der metrische Raum (X,d) heißt folgenkompakt, falls jede beliebige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt in X besitzt.

Wir zeigen, dass ein metrischer Raum X genau dann folgenkompakt ist, wenn X überdeckungskompakt ist.

Lemma 5.17. *Sei (X,d) ein folgenkompakter metrischer Raum. Sei $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, dann existiert ein $r > 0$, sodass zu jedem $x \in X$ ein O_i aus der Überdeckung existiert mit $x \in \mathcal{B}_r(x) \subseteq O_i$.*

Bemerkung 5.18. *Wir setzen hier nicht zu jedem $x \in X$ ein r voraus, sondern ein r für alle $x \in X$. Man vergleiche mit der gleichmäßigen Stetigkeit aus Definition 1.9.*

Beweis. Wir führen eine Beweis durch Widerspruch. Die Negation unserer Aussage ist $\forall r > 0 : \exists x \in X : \forall i \in I : \mathcal{B}_r(x) \not\subseteq O_i$. Da X folgenkompakt ist, konstruieren wir eine Folge. Dazu sei $r_n = \frac{1}{n}$. Dann existiert nach unserer Annahme, ein $x_n \in X$, sodass für alle $i \in I$ gilt $\mathcal{B}_{r_n}(x) \not\subseteq O_i$. Wir konstruieren damit die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da X folgenkompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $x \in X$. Da $(O_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X ist, gibt es ein $j \in I$, sodass $x \in O_j$. Da O_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $x \in \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq O_j$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, sodass $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $r_{n_k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir wählen $y \in \mathcal{B}_{r_{n_k}}(x_{n_k})$ beliebig, dann gilt

$$d(x,y) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y) < r_{n_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Daraus folgt aber, dass $\mathcal{B}_{r_{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(x) \subseteq O_j$, was ein Widerspruch zur Wahl von x_{n_k} ist. □

Satz 5.19. *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist X folgenkompakt genau dann wenn X überdeckungskompakt ist.*

Beweis. $\implies$: Wir führen eine Kontraposition. Sei X folgenkompakt und $(O_i)_{i \in I}$ sei eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Mittels Lemma 5.17 bestimmen wir ein $r > 0$, sodass $\mathcal{B}_r(x) \subseteq O_i$ für alle $x \in X$. Wir konstruieren induktiv eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die keine konvergente Teilfolge besitzt.

Sei dazu $x_1 \in X$ beliebig, und $i_1 \in I$ derart, dass $\mathcal{B}_r(x_1) \subseteq O_{i_1}$. Haben wir nun $x_1, \dots, x_n$ bereits konstruiert, wobei $x_k \in \mathcal{B}_r(x_k) \subseteq O_{i_k}$ und

$$x_k \in O_{i_k} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{k-1} O_{i_\ell}.$$

Da nach unserer Annahme

$$X \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} O_{n_k}$$

gilt, gibt es ein $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$. Ferner gibt es nach Lemma 5.17 ein $O_{i_{n+1}}$ mit $x_{n+1} \in \mathcal{B}_r(x_{n+1}) \subseteq O_{i_{n+1}}$. Wir behaupten nun, dass $\forall m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ gilt, dass $d(x_n, x_m) \geq r$. Sei oBdA $m > n$ mit $m = n + k$ und $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$x_m \in O_{i_m} \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m-1} O_{i_\ell}.$$

Damit gilt insbesondere $x_m \notin O_{i_n}$. Aus $x_n \in \mathcal{B}_r(x_n) \subseteq O_{i_n}$ folgt damit, dass $d(x_n, x_m) \geq r$. Somit kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzen, da für beliebige Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gilt, da für alle $k, \ell \in \mathbb{N}$ mit $k \neq \ell$ folgt $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \geq r$. Somit ist $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und kann auch nicht konvergent sein.

$\Longleftarrow$: Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Sei X nicht folgenkompakt, d.h. es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die keinen Häufungspunkt besitzt, d.h. $\forall x \in X$ gibt es $r_x > 0$, sodass $\mathcal{B}_{r_x}(x)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Jede offene Kugel $\mathcal{B}_{r_x}(x)$ ist offen in X womit $(\mathcal{B}_{r_x}(x))_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X ist. Da X überdeckungskompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{k=1}^{N} \mathcal{B}_{r_{y_k}}(y_k)$$

wobei jedes $\mathcal{B}_{r_{y_k}}(y_k)$ nur endlich viele Folgenglieder enthält. Damit enthält aber auch X nur endlich viele Folgenglieder von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele verschiedene Folgenglieder hat. □

Definition 5.20 (Kompakt)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ist X folgen- oder überdeckungskompakt, so nennen wir X kompakt.*

Lemma 5.21. *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum, dann ist X vollständig.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Aus der Kompaktheit von X folgt, dass es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und einen Häufungspunkt $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ gibt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass für $m, n \geq N_1$ gilt $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei weiters $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $k \geq N_2 \implies d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ gilt nun

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. □

Lemma 5.22. *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen, dann ist $(A, d|_A)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A. Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X und konvergiert damit gegen $x \in X$. Da $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in A$ ist x somit ein Berührpunkt von A, es gilt also $x \in \operatorname{cls}(A)$. Da A abgeschlossen ist, folgt $x \in \operatorname{cls}(A) = A$, womit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A konvergiert. □

Definition 5.23 (Beschränkter metrischer Raum)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir nennen X beschränkt, falls $\operatorname{diam}(X) = \sup\{d(x,y) : x,y \in X\} < \infty$. Ferner nennen wir X total beschränkt, falls es zu jedem $r > 0$ endlich viele Punkte $x_1^r, \ldots, x_n^r$ gibt, sodass*

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{B}_r(x_k^r).$$

Bemerkung 5.24. *Offenbar folgt aus der totalen Beschränktheit von X die Beschränktheit von X. Sei $x \in X$, wir setzen*

$$S(x) := \{d(x,x_k^r) : k = 1,\ldots,n\}.$$

Satz 5.25. *Sei (X,d) ein metrischer Raum, dann ist X genau dann kompakt, wenn X vollständig und total beschränkt ist.*

Beweis. $\Longrightarrow$: Sei X kompakt, dann ist nach Lemma 5.21 X vollständig. Wir müssen also nur noch zeigen, dass X total beschränkt ist. Offenbar ist $(\mathcal{B}_r(x))_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{B}_r(x_k).$$

$\Longleftarrow$: Sei X vollständig und total beschränkt. Wir zeigen, dass X folgenkompakt ist. Dazu zeigen wir, dass jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, die eine Cauchyfolge ist. Mit der totalen Beschränktheit von X können wir eine endliche Menge $D_n \subseteq X$ konstruieren, sodass

$$X \subseteq \bigcup_{y\in D_n} \mathcal{B}_{2^{-n}}(y).$$

Sei nun $A_n = \{n \in A_{n-1} : x_n \in \mathcal{B}_{2^{-n}}(y_n)\}$, wobei $y_n \in D_n$ beliebig, sodass $|A_n| = \aleph_0$, mit der Konvention $A_0 = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathcal{B}_1(y_0)\}$. Wir betrachten nun eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $\forall k \in \mathbb{N} : n_k \in A_k$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, sodass $2^{-N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für $k,\ell \geq N$, dass $x_{n_k}, x_{n_\ell} \in A_N$. Es gilt also

$$d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq d(x_{n_k}, y_N) + d(x_{n_\ell}, y_N) < \varepsilon.$$

Wir haben also eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, die eine Cauchyfolge ist. Da X vollständig ist, konvergiert diese Teilfolge, womit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt in X hat, daher ist X folgenkompakt. □

Definition 5.26 (Lipschitz-Stetigkeit)**.** *Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume. Wir nennen $f\colon X \to Y$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $L > 0$, falls*

$$\forall x,y \in X : d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x,y).$$

Gilt $Y = X$ und $L < 1$, dann nennen wir f eine Kontraktion auf X.

Satz 5.27 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrische Raum und $g\colon X \to X$ eine Kontraktion, dann gibt es ein eindeutiges $\overline{x} \in X$ mit $\overline{x} = g(\overline{x})$. Dieses $\overline{x}$ nennen wir einen Fixpunkt von g.*

Beweis. Sei $x_0 \in X$ beliebig. Wir konstruieren die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_n = g(x_{n-1})$. Wir zeigen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\ell \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$d(x_\ell, x_{\ell+1}) = d(g(x_{\ell-1}), g(x_\ell)) \leq L d(x_{\ell-1}, x_\ell) \leq L^2 d(x_{\ell-2}, x_{\ell-1}) \leq \cdots L^\ell d(x_0, x_1).$$

Ferner gilt

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+m}) \leq \cdots \leq \sum_{k=n}^{n+m-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Mit $d(x_\ell, x_{\ell+1}) \leq L^\ell d(x_0, x_1)$ folgt daher

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_0, x_1) \sum_{k=n}^{n+m-1} L^k = L^n d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{m-1} L^j \leq L^n d(x_0, x_1) \sum_{j=1}^{\infty} L^j = L^n d(x_0, x_1) \frac{1}{1-L}.$$

Wählen wir N groß genug, dass

$$d(x_0, x_1) \frac{L^N}{1-L} < \varepsilon$$

so gilt für $n, m \geq N$, dass $d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$. Daher ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Da g Lipschitz-stetig ist, ist g insbesondere stetig, wir können daher das Folgenkriterium anwenden und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

womit $\lim_{n\to\infty} x_n$ ein Fixpunkt von g ist. Sind $\overline{y}, \overline{x}$ Fixpunkte von g, dann gilt

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = d(g(\overline{x}), g(\overline{y})) \leq L d(\overline{x}, \overline{y}) \implies d(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

□

5.1.1 Normierte Vektorräume

Definition 5.28 (Normierter Raum)**.** *Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty)$ heißt Norm auf V, falls*

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in V : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ nennen wir einen normierten Raum.

Beispiel 5.29.
- *$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit $\|x\| := |x|$ sind normierte Vektorräume*
- *auf $\mathbb{R}^n$ können wir durch*

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

  eine Norm angeben, sofern $p \geq 1$. Ebenfalls nützlich ist die Supremumsnorm $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$.
- *Die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ lässt sich aber auch z.B. auf $\mathcal{C}(D)$ definieren, indem $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$.*

Bemerkung 5.30. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Durch $d\colon V^2 \to [0, \infty)$ mit $d(x, y) = \|x - y\|$ wird eine Metrik auf V induziert:*

$$\begin{aligned} &d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x) \\ &0 = d(x,y) = \|x-y\| \implies x = y \\ &d(x,y) = \|x-y\| = \|x+z-z+y\| \leq \|x-z\| + \|y-z\| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Somit ist (V, d) ein metrischer Raum. Ist (V, d) vollständig, so nennen wir $(V, \|\cdot\|)$ einen Banachraum.

Lemma 5.31 (Umgekehrte Dreiecksungleichung)**.** *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann gilt für alle $x, y \in V$, dass*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} &\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \\ &\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|x-y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\| \\ &\implies |\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \end{aligned}$$

□

Definition 5.32 (Operatornorm)**.** *Seien* $(V, \|\cdot\|_V)$ *und* $(W, \|\cdot\|_W)$ *normierte Räume. Ist* $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *so nennen wir* f *einen beschränkten linearen Operator, falls es ein* $m \geq 0$ *gibt, sodass* $\forall v \in V : \|fv\|_W \leq m\|v\|_V$*. Wir definieren durch* $\|f\| := \inf\{m \geq 0 : \forall v \in V : \|fv\|_W \leq m\|v\|_V\}$ *die Operatornorm von* f*.*

Bemerkung 5.33. *Es gilt ebenfalls* $\|f\| = \sup\{\|fv\|_W : \|v\|_V = 1\}$*. Ferner folgt* $\|fv\|_W \leq \|f\| \cdot \|v\|_V$*.*

Beispiel 5.34 (zum Banachschen Fixpunktsatz)**.** *Wir wollen ein lineares Gleichungssystem* $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *lösen. Ist* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ *eine Lösung, so gilt für eine reguläre Matrix* B*, dass* $\mathrm{B}(\mathrm{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$*. Wir definieren* $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *durch* $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \mathrm{B}(\mathrm{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$*. Es gilt*

$$\|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{y})\| = \|x - y - \mathrm{B}(\mathrm{A}\boldsymbol{x} - \mathrm{A}\boldsymbol{y})\| = \|(\mathrm{I}_n - \mathrm{BA})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\| \leq \|\mathrm{I}_n - \mathrm{BA}\| \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Offenbar ist g *eine Kontraktion, wenn* $\|\mathrm{I}_n - \mathrm{BA}\| < 1$*. Falls* $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$ *folgt* $\mathrm{I}_n - \mathrm{BA} = 0$ *und* $\|\mathrm{I}_n - \mathrm{BA}\| = 0$*. Finden wir eine leicht zu bestimmende Approximation* $\mathrm{B} \sim \mathrm{A}^{-1}$ *mit* $\|\mathrm{I}_n - \mathrm{BA}\| < 1$*, so konvergiert die Folge* $\boldsymbol{x}_{n+1} = g(\boldsymbol{x}_n)$ *gegen die Lösung* $\overline{\boldsymbol{x}}$ *von* $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*.*

5.2 Topologische Räume

Nachdem wir uns nun eingehend mit Metriken beschäftigt haben, stellt sich die Frage, welche Aussagen wir treffen können, wenn wir keinen Abstandsbegriff mehr haben.

Definition 5.35 (Topologie)**.** *Sei* $X \neq \emptyset$ *eine Menge. Eine Teilmenge* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(x)$ *nennen wir eine Topologie auf* X*, falls*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. *für Familien* $(O_i)_{i\in I}$ *mit* $\forall i \in I : O_i \in \mathcal{T}$ *gilt*
$$\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$$
3. *für* $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ *gilt* $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

Wir nennen Mengen $O \in \mathcal{T}$ *offen und das Paar* $(X, \mathcal{T})$ *einen topologischen Raum. Eine Menge* $A \subseteq X$ *heißt abgeschlossen, falls* $X \setminus A \in \mathcal{T}$*.*

Bemerkung 5.36. *Man vergleiche mit Lemma 5.9. Offenbar bilden die offenen Mengen in einem metrischen Raum* (X, d) *eine Topologie.*

Bemerkung 5.37. *Für die Menge* $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ ist abgeschlossen}\}$ *gelten*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. *für eine Familie* $(A_i)_{i\in I}$ *abgeschlossener Mengen ist*
$$\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$$
3. *für* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *folgt* $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

Definition 5.38 (Umgebungen und Stetigkeit)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologische Raum,* $x \in X$ *und* $U \subseteq X$*. Wir nennen* U *eine Umgebung von* x*, falls es* $O \in \mathcal{T}$ *gibt, sodass* $x \in O \subseteq U$*.*
Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ *und* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *topologische Räume. Wir nennen* $f\colon X \to Y$ *stetig in* $x \in X$*, falls für jede Umgebung* V *von* $f(x)$ *gilt, dass* $f^{-1}(V)$ *eine Umgebung von* x *ist.* f *heißt stetig auf* X*, falls* f *stetig in allen* $x \in X$ *ist.*

Bemerkung 5.39. f *ist stetig auf* X *genau dann wenn für jede offene Menge* $O \in \mathcal{T}_Y$ *gilt* $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_X$*.*

Definition 5.40 (Teilraumtopologie)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum und* $Y \subseteq X$ *nicht leer. Wir definieren die Teilraumtopologie auf* Y *durch*

$$\mathcal{T}|_Y := \{O \cap Y : O \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}|_Y$ *wir manchmal auch Spurtopologie genannt.*

Bemerkung 5.41. *Die Teilraumtopologie ist eine Topologie auf Y:*

- $\emptyset = \emptyset \cap Y$ *und* $Y = X \cap Y$
- *sind* $O_i' = O_i \cap Y$*, dann ist*

$$\bigcup_{i \in I} O_i' = Y \cap \bigcup_{i \in I} = Y \cap O \in \mathcal{T}|_Y$$

- $O_1', O_2' \in \mathcal{T}|_Y$*, dann folgt*

$$O_1' \cap O_2' = (Y \cap O_1) \cap (Y \cap O_2) = Y \cap (O_1 \cap O_2) \in \mathcal{T}|_Y$$

Somit ist $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ *wieder ein topologischer Raum.*

Bemerkung 5.42. *Im Allgemeinen gilt* $\mathcal{T}|_Y \not\subseteq \mathcal{T}$*. Sei etwa* $X = \mathbb{R}$*, dann ist* $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ *nicht offen in* $\mathbb{R}$*, aber für* $Y = [0,1]$ *ist* $\left(\frac{1}{2}, 1\right] = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap [0,1]$ *offen in* Y*.*

6 Integralrechnung

6.1 Das Cauchy Integral

Definition 6.1 (Partitionen und Treppenfunktionen)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Wir nennen $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$ falls $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Die Partition $(x_i)_{i=0}^n$ zerlegt $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle, daher nennen wir $\mathcal{Z} = (x_i)_{i=0}^n$ auch eine Zerlegung von $[a, b]$. Seien $\mathcal{Z}_1 = (x_i)_{i=0}^n$ und $\mathcal{Z}_2 = (y_j)_{j=0}^m$ beide Partitionen von $[a, b]$. Wir nennen $(y_j)_{j=0}^m$ eine Verfeinerung von $(x_i)_{i=0}^n$ falls*

$$\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2 \iff \{x_i | i = 0, \dots, n\} \subseteq \{y_j | j = 0, \dots, m\}.$$

Eine Funktion $\varphi\colon [a, b]$ heißt eine Treppenfunktionen in Bezug auf eine Partition $(x_i)_{i=0}^n$ falls

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i \in \mathbb{R}.$$

Eine Funktion φ heißt Treppenfunktion auf $[a, b]$ falls eine Partition $(x_i)_{i=0}^n$ existiert, sodass φ eine Treppenfunktion in Bezug auf $(x_i)_{i=0}^n$ ist. Wir nennen $\mathcal{T}([a, b]) = \{\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R} : \varphi \text{ ist eine Treppenfunktion}\}$ die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

Bemerkung 6.2. *Sei φ eine Treppenfunktion in Bezug auf $(x_i)_{i=0}^n$. Sei $(\xi_j)_{j=0}^m$ eine Verfeinerung von $(x_i)_{i=0}^n$, dann ist φ eine Treppenfunktion in Bezug auf $(\xi_j)_{j=0}^m$.*

Definition 6.3 (Integral von Treppenfunktionen)**.** *Sei $\varphi \in \mathcal{T}([a, b])$ eine Treppenfunktion in Bezug auf die Partition $(x_i)_{i=0}^n$. Wir setzen $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$ und definieren das Integral von φ (in Bezug auf $(x_i)_{i=0}^n$) durch*

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i \qquad x \in (x_{i-1}, x_i) \implies \varphi(x) = c_i.$$

Bemerkung 6.4.

- *In den Partitionspunkten x_i kann eine Treppenfunktion beliebige Werte annehmen, unabhängig von c_i und c_{i+1}. In der Integraldefinition kommen die Funktionswerte $\varphi(x_i)$ in den Partitionspunkten nicht vor.*
- *Sei φ eine Treppenfunktion in Bezug auf $\mathcal{Z}_1 = (x_i)_{i=0}^n$ und sei $\mathcal{Z}_2 = (\xi_j)_{j=0}^m$ eine Verfeinerung von $(x_i)_{i=0}^n$. Sei weiters $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i$ und $\varphi|_{(\xi_{j-1}, \xi_j)} = d_j$, dann gilt*

  $$\sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i = \sum_{j=1}^m d_j \Delta \xi_j.$$

  Also ist das Integral von φ unabhängig von der gewählten Partition.

  Beweis. Weil $\mathcal{Z}_1 \subseteq \mathcal{Z}_2$ existieren Indices $j_0, j_1, \dots, j_n$ mit $j_0 = 0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_n = m$ mit $x_i = \xi_{j_i}$. Für $j \in \{j_{i-1} + 1, \dots, j_i\}$ ist $d_j = c_i$ weil $(\xi_{j-1}, \xi_j) \subseteq (x_{i-1}, x_i)$. Es folgt somit

  $$\sum_{j=1}^m d_j \Delta \xi_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} d_j \Delta \xi_j = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} \Delta \xi_j = \sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i.$$

  □

Definition 6.5 (Gemeinsame Verfeinerung)**.** *Seien $\mathcal{Z}_1 = (x_i)_{i=0}^n$ und $\mathcal{Z}_2 = (y_j)_{j=0}^m$ Partitionen des Intervalls $[a, b]$. Wir definieren die gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ der Partitionen als jene Partition $(\xi_k)_{k=0}^p$ mit der Eigenschaft*

$$\{\xi_k | k = 0, \dots, p\} = \{x_i | i = 0, \dots, n\} \cup \{y_j | j = 0, \dots, m\}$$

Dabei ist $(\xi_k)_{k=0}^p$ aufsteigend sortiert.

Bemerkung 6.6. *Sei φ eine Treppenfunktion in Bezug auf $(x_i)_{i=0}^n$ und $(y_j)_{j=0}^m$, dann gilt:*

$$\sum_{i=1}^n c_i \Delta x_i = \sum_{j=1}^m c_j \Delta y_j = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x$$

Sei $(\xi_k)_{k=0}^p$ die gemeinsame Verfeinerung von $(x_i)_{i=0}^n$ und $(y_j)_{j=0}^m$, dann ist jedes der Integrale gleich dem Integral in Bezug auf $(\xi_k)_{k=0}^p$, sprich sie sind auch einander gleich.

Lemma 6.7 (Eigenschaften von Treppenfunktionen und ihren Integralen)**.**

1. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$, dann gilt $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{T}([a,b])$ und*

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) \,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi \,\mathrm{d}x$$

2. *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$, dann sind $\max(\varphi,\psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\min(\varphi,\psi)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen auf $[a,b]$*
3. *Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{T}([a,b])$ und $\forall x \in [a,b] : \varphi(x) \le \psi(x) \iff \varphi \le \psi$, dann gilt*

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x \le \int_a^b \psi \,\mathrm{d}x$$

4. *Sei $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$, dann ist $|\varphi| \in \mathcal{T}([a,b])$ und es gilt*

$$\left| \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |\varphi| \,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

1. Sind $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ die Zerlegungen von $[a,b]$, sodass φ und ψ Treppenfunktionen in Bezug auf $\mathcal{Z}_1$ bzw. $\mathcal{Z}_2$ sind. Sei $\mathcal{Z}$ die gemeinsame Verfeinerung dieser Zerlegungen. Wir $\mathcal{Z} = (\xi_i)_{i=0}^N$, $\varphi|_{(\xi_{i-1},\xi_i)} = c_i$ und $\psi|_{(\xi_{i-1},\xi_i)} = d_i$. Ist $f = \alpha\varphi + \beta\psi$, so folgt

$$f|_{(\xi_{i+1},\xi_i)} = \lambda c_i + \mu d_i.$$

Daher gilt $f \in \mathcal{T}([a,b])$. Ferner folgt

$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^N (\lambda c_i + \mu d_i)\Delta_{\xi_i} = \lambda \sum_{i=1}^N c_i \Delta_{\xi_i} + \mu \sum_{i=1}^N d_i \Delta_{\xi_i}$$
$$= \lambda \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \psi \,\mathrm{d}x.$$

Also ist $\mathcal{I} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T}([a,b]), \mathbb{R})$ mit $\mathcal{I}(\varphi) = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x$ ein lineares Funktional, sprich $\mathcal{I} \in (\mathcal{T}([a,b]))^*$.

2. Es sei wieder $(\xi_i)_{i=0}^N$ die gemeinsame Verfeinerung für φ und ψ. Dann gilt offenbar

$$\max(\varphi,\psi)|_{(\xi_{i-1},\xi_i)} = \max(c_i,d_i) =: e_i \qquad \text{und} \qquad \min(\varphi,\psi)|_{(\xi_{i-1},\xi_i)} = \min(c_i,d_i) =: f_i.$$

Somit sind $\max(\varphi,\psi), \min(\varphi,\psi) \in \mathcal{T}([a,b])$.

3. Ist $(\xi_i)_{i=0}^n$ die gemeinsame Verfeinerung für φ und ψ, so gilt $\varphi|_{(\xi_{i-1},\xi_i)} = c_i \le d_i = \psi|_{(\xi_{i-1},\xi_i)}$. Damit folgt

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n c_i \Delta_{\xi_i} \le \sum_{i=1}^n d_i \Delta_{\xi_i} = \int_a^b \psi \,\mathrm{d}x$$

4. offenbar gilt $|\varphi||_{(x_{i-1},x_i)} = |c_i|$, womit

$$\left| \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{i=1}^n c_i \Delta_{x_i} \right| \le \sum_{i=1}^n |c_i| \Delta_{x_i} = \int_a^b |\varphi| \,\mathrm{d}x.$$

□

Definition 6.8 (Regelfunktionen). *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls*

1. *f in jedem Punkt $x \in (a,b)$ einen links- und rechtsseitigen Grenzwert besitzt*
2. *f in $x = a$ einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt*
3. *f in $x = b$ einen linksseitigen Grenzwert besitzt*

Wir bezeichnen mit $\mathscr{R}([a,b])$ jene Menge von Funktionen f über $[a,b]$, die Regelfunktionen auf $[a,b]$ sind.

Beispiel 6.9.

- *Sei f stetig auf $[a,b]$, dann besitzt f in jedem $x \in [a,b]$ einen Grenzwert $c = f(x)$, womit $f \in \mathscr{R}([a,b])$, also $\mathcal{C}([a,b]) \subseteq \mathscr{R}([a,b])$*
- *$\varphi \in \mathcal{T}([a,b]) \implies \varphi \in \mathscr{R}([a,b])$. Sei $(x_i)_{i=0}^n$ eine Partition für φ mit $\varphi|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i$, dann gilt $x \in (x_{i-1},x_i) \implies \lim_{\xi\to x} \varphi(x) = c_i$, für $x = x_i$ gilt $\lim_{\xi\to x^+} \varphi(\xi) = c_{i+1}$ und $\lim_{\xi\to x^-} \varphi(\xi) = c_i$, also $\mathcal{T}([a,b]) \subseteq \mathscr{R}([a,b])$*

Lemma 6.10 (Regelfunktionen sind beschränkt). *Jedes $f \in \mathscr{R}([a,b])$ ist beschränkt.*

Beweis zu Lemma 6.10. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen $f \in \mathscr{R}([a,b])$ ist nicht beschränkt, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a,b] : |x_n| \geq n$. Weil $[a,b]$ kompakt ist existiert eine konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\xi_k = x_{n_k}$ und $x \in [a,b]$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_k = x$. Weil $|\xi_k| \geq n_k \geq k$ und weil $|f(x)| = \eta$, existiert $K \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k > K : |f(\xi_k)| \geq k > \eta = |f(x)|$, also $\forall k \geq K : \xi_k \neq x$. Es gibt also unendliche viele Folgenglieder $\xi_k < x$ oder unendliche viele Folgenglieder $\xi_k > 0$, oBdA existiert eine Teilfolge $(\xi_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\xi_{kl} < x$ und $\lim_{l\to\infty} \xi_{k_l} = x$ und $|f(\xi_{k_l})| \geq k_l \geq l$. Weil f in x einen beliebigen linksseitigen Grenzwert c besitzt gilt

$$\lim_{l\to\infty} |f(\xi_{k_l})| = |c|.$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass $(|f(\xi_{k_l})|)_{l\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. □

Lemma 6.11 (Cauchykriterium für Grenzwerte von Funktionen).

1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x \in [a,b]$, dann f besitzt in x einen Grenzwert genau dann wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \xi,\eta \in [a,b] : \xi \neq x \neq \eta : |\xi - x| < \delta \wedge |\eta - x| < \delta : |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon.$$
2. *f besitzt in $x \neq a$ einen linksseitigen Grenzwert, genau dann wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \xi,\eta < x : \xi,\eta \in [a,b] : |\xi - x| < \delta \wedge |\eta - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon.$$
3. *f besitzt in $x \neq b$ einen rechtsseitigen Grenzwert, genau dann wenn*
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \xi,\eta > x : \xi,\eta \in [a,b] : |\xi - x| < \delta \wedge |\eta - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon.$$

Beweis. $\implies$: Angenommen f besitzt in x den Grenzwert c. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta > 0$, sodass $\xi \neq x$ für $\xi \in [a,b]$ und $\xi \in \mathcal{B}_\delta(x) \implies |f(\xi) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sei nun $\eta \neq x$ für $\eta \in [a,b]$ und $\eta \in \mathcal{B}_\delta(x)$, dann ist

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq |f(\xi) - c| + |c - f(\eta)| < \varepsilon.$$

$\impliedby$: Wir verwenden das Folgenkriterium für Grenzwerte. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a,b]$ mit $\xi_n \neq x$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$. Wir zeigen, dass $\exists c \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = c$. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine solche Folge und $\varepsilon > 0$. Wir wählen δ dem Cauchy-Kriterium entsprechend. Weil $x = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ existiert $N \in \mathbb{N}$ sodass $n \geq N \implies \xi_n \in \mathcal{B}_\delta(x)$. Für $m,n \geq N$ gilt $\xi_n \in \mathcal{B}_\delta(x)$ und $\xi_m \in \mathcal{B}_\delta(x)$. Nach dem Cauchykriterium gilt daher $|f(\xi_n) - f(\xi_m)| < \varepsilon$, somit ist $(f(\xi_n)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Nach der Vollständigkeit der reellen Zahlen gilt $\exists x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = c$. Wir müssen nun noch zeigen, dass c von $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig ist. Angenommen$(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre eine weiter Folge wie $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir wissen $d = \lim_{n\to\infty} f(\eta_n)$. Wir bilden $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_{2n} = \xi_n$ und $y_{2n+1} = \eta_n$, es gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ und $\forall n \in \mathbb{N} : y_n \in [a,b] \wedge y_n \neq x$. Es existiert daher ein $e \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f(y_n) = e$. Da $f(y_n)$ konvergent ist, muss gelten, dass alle Häufungspunkte von $f(y_n)$ gleich sind, also muss gelten $c = e = d$. □

Definition 6.12 (Raum der beschränkten Funktionen). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Wir setzen*

$$\mathcal{B}(D) = \{f\colon D \to \mathbb{C} | f \textit{ ist beschränkt}\}$$

als die Menge der beschränkten Funktionen auf D.

Lemma 6.13 (Beschränkte Funktionen bilden einen Vektorraum). *$(\mathcal{B}(D), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein normierter Vektorraum.*

Beweis zu Lemma 6.13. Seien $f, g \in \mathcal{B}(D)$, sprich $\exists M, N \geq 0 : |f(x)| \leq M$ und $|g(x)| \leq N$ für $x \in D$. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda| \cdot |f(x)| + |\mu| \cdot |g(x)| \leq |\lambda| M + |\mu| N$$

Somit ist $\lambda f + \mu g \in \mathcal{B}(D)$. □

Lemma 6.14 (Funktionenräume auf $\mathbb{R}$). *Sei $D = [a,b]$, dann sind $\mathcal{T}([a,b])$, $\mathscr{R}([a,b])$ und $\mathcal{B}[a,b]$ Vektorräume auf $\mathbb{R}$ und es gilt*

$$\mathcal{T}([a,b]) \subseteq \mathscr{R}([a,b]) \subseteq \mathcal{B}[a,b].$$

Somit sind auch $(\mathcal{T}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ und $(\mathscr{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ normierte Vektorräume.

Beweis. $\mathcal{T}([a,b]) \subseteq \mathscr{R}([a,b]) \subseteq \mathcal{B}[a,b]$ haben wir schon über Definition 6.8 und Lemma 6.10 bewiesen. Weiterhin wissen wir auch schon, dass $\mathcal{T}([a,b])$ und $\mathcal{B}[a,b]$ Vektorräume sind. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\mathscr{R}([a,b])$ ein Vektorraum ist. Seien $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$, $x \in [a,b)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Seien weiters $c = \lim_{\xi \to x^+} f(\xi)$ und $d = \lim_{\xi \to x^+} g(\xi)$, dann folgt nach Lemma 2.4

$$\lambda \lim_{\xi \to x^+} f(\xi) + \mu \lim_{\xi \to x^+} g(\xi) = \lim_{\xi \to x^+} (\lambda f(\xi) + \mu g(\xi)) \text{ existiert.}$$

Analog für den linksseitigen Grenzwert. Somit ist $\lambda f + \mu g \in \mathscr{R}([a,b])$. □

Was bedeutet Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in \mathcal{B}(D)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$? Es gilt $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ in $\mathcal{B}(D)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ist äquivalent zu:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \\ \iff &\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in\} < \varepsilon \\ \iff &\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Definition 6.15 (gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge). *Sei D eine Menge und $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ seien gegeben. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f, falls*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in D.$$

Bemerkung 6.16. *Gleichmäßige Konvergenz von $f_n \in \mathcal{B}(D)$ gegen $f \in \mathcal{B}(D)$ ist gleichbedeutend mit Konvergenz in Bezug auf $\|\cdot\|_\infty$.*

Satz 6.17 (Approximationssatz für Regelfunktionen). *Seien $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben, dann ist f genau dann eine Regelfunktion, wenn es eine Funktionenfolge $\varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ gibt, sodass $f = \text{unif} \lim_{n\to\infty} \varphi_n$.*

Beweis. $\Longleftarrow$: Sei $\varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f konvergiert. Sei ferner $x \in [a,b)$. Wir zeigen, dass f in x einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und N so groß, dass $\|\varphi_n - f\|_\infty < \varepsilon$ für $n \geq N$. Für φ_N gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\varphi_N|_{(x,x+\delta)} = c$. Wir setzen $x_i = x$ und $x_{i+1} = x_i + \delta$. Für $\eta, \xi \in (x, x+\delta)$ gilt nun

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq |f(\xi) - \varphi_N(\xi)| + |\varphi_N(\xi) - \varphi_N(\eta)| + |\varphi_N(\eta) - f(\eta)| < \varepsilon.$$

Somit besitzt f in x einen rechtsseitigen Grenzwert. Das Argument für linksseitige Grenzwerte funktioniert analog.

$\Longrightarrow$: Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch.

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \varphi \in \mathcal{T}([a,b]) : \exists x \in [a,b] : |f(x) - \varphi(x)| \geq \varepsilon. \tag{4}$$

Unter der Annahme, das dies gilt, konstruieren wir eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, sodass 4 auf $[a_n, b_n]$ gilt. Als Startintervall nehmen wir $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b]$. Wir setzen $m_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ und nehmen an, 4 gilt auf I_n. Dann gilt 4 entweder auf $[a_n, m_n]$ oder auf $[m_n, b_n]$. Falls das nicht der Fall ist, gilt $\forall \varepsilon > 0 : \exists \varphi_\varepsilon^1 \in \mathcal{T}([a_n, m_n])$, sodass $\forall x \in [a_n, m_n] : \left|f(x) - \varphi_\varepsilon^1(x)\right| < \varepsilon$ und $\forall \varepsilon > 0 : \exists \varphi_\varepsilon^2 \in \mathcal{T}([m_n, b_n])$, sodass $\forall x \in [m_n, b_n] : \left|f(x) - \varphi_\varepsilon^2(x)\right| < \varepsilon$. Setzen wir

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon^1(x) & x \in [a_n, m_n] \\ \varphi_\varepsilon^2(x) & x \in [m_n, b_n] \end{cases},$$

so gilt offenbar $\forall x \in [a_n, b_n]$, dass $|f(x) - \varphi_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist, dass 4 auf I_n gilt. Wir wählen nun I_{n+1} nun als eines der beiden Intervalle von $[a_n, m_n]$ oder $[m_n, b_n]$, auf denen 4 gilt. Da $\mathbb{R}$ vollständig in Bezug auf Intervallschachtelungen ist, gibt es $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Sei $x \in (a, b)$. Da $f \in \mathscr{R}([a,b])$ gibt es $c^+ = \lim_{\xi\to x^+} f(\xi)$ und $c^- = \lim_{\xi\to x^-} f(\xi)$. Sei ε derart, dass 4 gilt, und $\delta_r > 0$, sodass für $\xi > x$ und $|\xi - x| < \delta_r$ folgt $|f(\xi) - c^+| < \varepsilon$. Sei außerdem $\delta_l > 0$ derart, dass für $\xi < x$ und $|\xi - x| < \delta_l$ gilt $|f(\xi) - c^-| < \varepsilon$. Für $\delta = \min(\delta_l, \delta_r)$ gelten offenbar beide Bedingungen. Wir definieren $\hat\varphi \in \mathcal{T}([x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}])$ und setzen

$$\hat\varphi(\xi) = \begin{cases} c^- & \xi \in [x - \frac{\delta}{2}, x) \\ f(x) & \xi = x \\ c^+ & \xi \in (x, x + \frac{\delta}{2}) \end{cases}.$$

Aus unserer Konstruktion von δ folgt nun $\forall \xi \in [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$, dass $|f(\xi) - \hat\varphi(\xi)| < \varepsilon$. Gilt $b_n - a_n < \frac{\delta}{2}$, so folgt $x \in [a_n, b_n] \subseteq [x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}]$. Dann ist $\hat\varphi|_{[a_n,b_n]} \in \mathcal{T}([a_n, b_n])$ und $\forall \xi \in I_n : |\hat\varphi(\xi) - f(\xi)| < \varepsilon$, was ein Widerspruch dazu ist, dass 4 auf I_n gilt. Die Randfälle $x = a$ oder $x = b$ gehen analog. □

Bemerkung 6.18. *Dieser Beweis ist nicht konstruktiv, er garantiert nur die Existenz der Funktionenfolge φ_n. Wie wir $\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|\varphi - f\|_\infty < \varepsilon$ finden ist unklar. Da Regelfunktionen beschränkt sind, gibt es zu $f \in \mathscr{R}([a,b])$ ein $M > 0$, sodass $\|f\|_\infty \leq M$. Wir definieren auf $[-M, M]$ die Funktion g_ε. Dabei setzen wir*

$$g_\varepsilon(x) = \left\lfloor \frac{x}{\varepsilon} \right\rfloor \varepsilon \qquad \textit{und} \qquad \varphi_\varepsilon = g_\varepsilon \circ f.$$

dann gilt $\|\varphi_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$.

Definition 6.19 (Cauchy-Integral)**.** *Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Sei*

$$i_n = \int_a^b \varphi_n \, \mathrm{d}x.$$

Wir setzen

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \, \mathrm{d}x$$

und nennen $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ das Cauchy-Integral von f.

Lemma 6.20 (Konvergenz des Cauchy-Integrals)**.** *Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen f, dann ist $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$i_n = \int_a^b \varphi_n \, \mathrm{d}x$$

konvergent in $\mathbb{R}$ und von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig.

Beweis. Wir zeigen, dass $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Sei $\varepsilon > 0$ und N so groß, dass

$$n \geq N \implies \forall x \in [a,b] : |\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Sind nun $m, n \geq N$, so gilt

$$\begin{aligned}|i_n - i_m| &= \left|\int_a^b \varphi_n \,\mathrm{d}x - \int_a^b \varphi_m \,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \varphi_n - \varphi_m \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |\varphi_n - \varphi_m| \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b |\varphi_n - f| \,\mathrm{d}x + \int_a^b |f - \varphi_m| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \,\mathrm{d}x + \int_a^b \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

Somit ist $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent in $\mathbb{R}$. Wir zeigen noch die Unabhängigkeit von der approximierenden Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f auf $[a,b]$ konvergiert. Seien weiter

$$j_n = \int_a^b \psi_n \,\mathrm{d}x.$$

Wir wissen, dass $\lim_{n\to\infty} i_n = I_1$ und $\lim_{n\to\infty} j_n = I_2$ existieren. Es seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1 \implies |i_n - I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $n \geq N_2 \implies |j_n - I_2| < \frac{\varepsilon}{3}$. Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ folgt daher

$$\begin{aligned}|I_1 - I_2| &= |I_1 - i_n + i_n + j_n - j_n - I_2| \leq |I_1 - i_n| + |I_2 - j_n| + |i_n - j_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + |i_n - j_n|.\end{aligned}$$

Da φ_n und ψ_n gleichmäßig gegen f konvergieren gibt es $N_3, N_4 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_3 \implies \|\varphi_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{6(b-a)}$ und $n \geq N_4 : \|\psi_n - f\| < \frac{\varepsilon}{6(b-a)}$. Es gilt somit für $n \geq \max(N_3, N_4)$, dass

$$\|\varphi_n - \psi_n\|_\infty = \|\varphi_n + f - f - \psi_n\|_\infty \leq \|\varphi_n - f\|_\infty + \|\psi_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Daraus folgt aber

$$\begin{aligned}|i_n - j_n| &= \left|\int_a^b \varphi_n - \psi_n \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |\varphi_n - \psi_n| \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \|\varphi_n - \psi_n\|_\infty \,\mathrm{d}x \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Für $n \geq \max(N_1, N_2, N_3, N_4)$ gilt somit $|I_1 - I_2| < \varepsilon$. Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $|I_1 - I_2| = 0$. □

Satz 6.21 (Elementare Eigenschaften des Cauchy-Integrals)**.** *Seien $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, dann gelten*

1. *$\mathcal{I}\colon \mathscr{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f \,\mathrm{d}x$ ist linear*
2. *falls $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)$, dann gilt $\mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(g)$*
3. *$f \in \mathscr{R}([a,b]) \implies |f| \in \mathscr{R}([a,b])$ und es gilt $|\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(|f|)$*

Beweis.

1. Sind $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$, so gibt es Folgen von Treppenfunktionen φ_n und ψ_n die gleichmäßig gegen f bzw. g konvergieren. Seien weiter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ sodass $n \geq N_1 \implies \|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)}$ und $\|\psi_n - g\| < \frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)}$. Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt daher

$$\begin{aligned}&\|\lambda\varphi_n + \mu\psi_n - \lambda\varphi_n - \mu\psi_n\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|\varphi_n - f\|_\infty + |\mu| \cdot \|\psi_n - g\|_\infty \\ &< |\lambda|\frac{\varepsilon}{2(|\lambda|+1)} + |\mu|\frac{\varepsilon}{2(|\mu|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Somit konvergiert $\lambda\varphi_n + \mu\psi_n$ gleichmäßig gegen $\lambda f + \mu g$. Mit den Rechenregeln für konvergente Folgen gilt daher ebenfalls, dass

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda f + \mu g \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n + \mu\psi_n \,\mathrm{d}x = \lambda \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \,\mathrm{d}x + \mu \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n \,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_a^b f \,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. Es sei $h \in \mathscr{R}([a,b])$ mit $\forall x \in [a,b] : h(x) \geq 0$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{I}(h) \geq 0$ gilt. Dazu sei φ_n eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen h konvergiert. Wir konstruieren $\psi_n = \max(\varphi_n, 0)$ und behaupten, dass ψ_n ebenfalls gleichmäßig gegen h konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $n \geq N \implies \|\varphi_n - h\|_\infty < \varepsilon$. Ist $\varphi_n(x) \geq 0$, so folgt $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$ und $|\psi_n(x) - h(x)| = |\varphi_n(x) - h(x)| < \varepsilon$. Gilt hingegen $\varphi_n(x) < 0$, so folgt $\psi_n(x) = 0$, daher

$$|\psi_n(x) - h(x)| = h(x) < h(x) - \varphi_n(x) = |h(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

Daraus folgt insgesamt $\|\psi_n - h\|_\infty < \varepsilon$. Somit konvergiert ψ_n ebenfalls gleichmäßig gegen h. Wir erhalten also

$$\int_a^b h \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \underbrace{\psi_n}_{\geq 0} \,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Gilt nun $f \leq g$, so setzen wir $h = g - f \geq 0$. Es gilt daher

$$\int_a^b g \,\mathrm{d}x - \int_a^b g \,\mathrm{d}x = \int_a^b h \,\mathrm{d}x \geq 0 \iff \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g \,\mathrm{d}x.$$

3. Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Sei φ_n eine Funktionenfolge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung für $n \geq N$

$$\forall x \in [a,b] : ||f(x)| - |\varphi_n(x)|| \leq |f(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon.$$

Somit konvergiert $|\varphi_n|$ gleichmäßig gegen $|f|$, und $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$. Ferner gilt

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}x\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_a^b \varphi_n \,\mathrm{d}x\right| \leq \lim_{n\to\infty} \int_a^b |\varphi_n| \,\mathrm{d}x = \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x.$$

Die Ungleichung gilt, da $\forall n \in \mathbb{N} : |\mathcal{I}(\varphi_n)| \leq \mathcal{I}(|\varphi_n|)$.

$\square$

Definition 6.22 (Indikatorunktion). *Sei X eine beliebige Menge und $D \subseteq X$. Die Funktion $\mathbb{1}_D \colon X \to \{0,1\}$ mit*

$$\mathbb{1}_D(x) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

nennen wir die Indikatorfunktion auf D.

Bemerkung 6.23. *Sei $X = \mathbb{R}$ und $I = [a,b]$, dann gilt offenbar $\mathbb{1}_I|_I \in \mathcal{T}(I)$ und $\mathbb{1}_I|_I \equiv 1$. Daraus folgt*

$$\int_a^b \mathbb{1}_I \,\mathrm{d}x = b - a$$

Satz 6.24 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**.**

1. *Sei* $f \in \mathscr{R}([a,b])$*. Setze* $M = \|f\|_\infty$ *und* $m = \inf\{f(x), x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$*, dann gilt:*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

2. *Sei* f *stetig auf* $[a,b]$ *unb* $p \in \mathscr{R}([a,b])$ *mit* $p \geq 0$*, dann ist* $fp \in \mathscr{R}([a,b])$ *und es existiert* $\xi \in [a,b]$*, sodass:*

$$\int_a^b fp \,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b p \,\mathrm{d}x$$

Beweis. Sei $I = [a,b]$.

1. Offenbar gilt $m\mathbb{1}_I \leq f \leq M\mathbb{1}_I$. Mit Satz 6.21 folgt dann direkt

$$m(b-a) = \int_a^b m\mathbb{1}_I \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathbb{1}_I \,\mathrm{d}x = M(b-a).$$

2. Da $p \geq 0$ gilt offenbar $mp \leq fp \leq Mp$. Damit folgt aus Punkt 1, dass

$$m\int_a^b p \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b fp \,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b p \,\mathrm{d}x.$$

Es gibt also $\mu \in [m,M]$, sodass $\mu\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}(fp)$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gibt es ein $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \mu$. Daraus folgt aber

$$f(\xi)\int_a^b p \,\mathrm{d}x = \int_a^b fp \,\mathrm{d}x.$$

□

Wir wollen nun Integrale „aneinanderfügen“. Seien $a < b < c$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$. Sei weiter $\varphi_1 \in \mathcal{T}([a,b])$ mit Partition $(x_i)_{i=0}^n$ und $\varphi_1|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i$, $\varphi_2 \in \mathcal{T}[b,c]$ mit Partition $(\xi_j)_{j=0}^m$ und $\varphi_2|_{(\xi_{j-1},\xi_j)} = d_j$. Wir legen φ folgendermaßen fest

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & x \in [a,b] \\ \varphi_2(x) & x \in (b,c] \end{cases}.$$

$\varphi \in \mathcal{T}([a,b])$ mit der Partition $(x_0,\ldots,x_n = \xi_0,\ldots,\xi_m)$ und es folgt

$$\int_a^b \varphi_1 \,\mathrm{d}x + \int_b^c \varphi_2 \,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n c_i\Delta x_i + \sum_{j=1}^m d_j\Delta\xi_j = \int_a^c \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Wir können ein Integral auch „aufteilen“. Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a,c]$ und $b \in [a,c]$ sei oBdA ein Partitionspunkt. Wir nennen $\varphi_1 = \varphi|_{[a,b]}$ und $\varphi_2 = \varphi|_{[b,c]}$, dann gilt $\varphi_1 \in \mathcal{T}([a,b])$ und $\varphi_2 \in \mathcal{T}[b,c]$, und ferner

$$\int_a^c \varphi \,\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_1 \,\mathrm{d}x + \int_b^c \varphi_2 \,\mathrm{d}x.$$

Wir erweitern diese Idee auf Regelfunktionen. Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen auf $[a,c]$ die gleichmäßig gegen $f \in \mathscr{R}$ konvergiert. Dann konvergiert $\varphi_n|_{[a,b]}$ gleichmäßig gegen $f|_{[a,b]}$ und $\varphi_n|_{[b,c]}$ gleichmäßig gegen $f|_{[b,c]}$:

$$\begin{aligned}\int_a^c f \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \varphi_n\big|_{[a,b]} \,\mathrm{d}x + \int_b^c \varphi_n\big|_{[a,b]} \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n\big|_{[a,b]} \,\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty}\int_b^c \varphi_n\big|_{[b,c]} \,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big|_{[a,b]} \,\mathrm{d}x + \int_b^c f\big|_{[b,c]} \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Wir werden von nun an nur f statt $f|_{[\alpha,\beta]}$ schreiben, wenn wir eine Einschränkung betrachten. Jede Regelfunktion $f \in \mathscr{R}([a,b])$ ist ebenso eine Regelfunktion auf jedem Teilintervall $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$

$$\int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f|_{[\alpha,\beta]} \, \mathrm{d}x.$$

Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und $\alpha < \beta < \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$, dann gilt:

$$\int_\alpha^\gamma f \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f \, \mathrm{d}x$$

Ferner setzen wir für $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und $\alpha, \beta \in [a,b]$:

$$\int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}x = -\int_\beta^\alpha f \, \mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_\alpha^\alpha f \, \mathrm{d}x = 0.$$

Damit gilt für $\gamma \in [a,b]$ mit $\alpha < \beta < \gamma$, dass

$$\int_\alpha^\gamma f \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}x + \int_\beta^\gamma f \, \mathrm{d}x.$$

Lemma 6.25 (Unstetigkeitstellen von Regelfunktionen)**.** *Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und $\mathcal{A} \subseteq [a,b]$ mit $\mathcal{A} = \{x \in [a,b] : f$ ist nicht stetig in $x\}$. Dann gilt $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.*

Beweis. Wir verwenden den Approximationssatz für Regelfunktionen. Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $(x_i)_{i=0}^N(n)$ eine Partition von φ_n und $\mathcal{A}_n = \{x_i^n, i = 0, \dots, N(n)\}$, $\mathcal{A}_n$ ist endlich. φ_n ist stetig in jedem $x \in [a,b] \setminus \mathcal{A}$. Es gilt:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ ist abzählbar. Behauptung: Sei $x \in [a,b] \setminus \tilde{\mathcal{A}}$, dann ist f stetig in x. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen M, sodass für $n \geq M$ und $\xi \in [a,b]$ die Ungleichung $|f(\xi) - \varphi_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist. $x \notin \tilde{\mathcal{A}} \implies x \notin \mathcal{A}_M$, sprich $x \neq x_i^M$ für $i = 0, \dots, N(M)$. Sei $x \in (x_{i-1}^M, x_i^M)$. Wir wählen $\delta = \min(x - x_{i-1}^m, x_i^m - x) > 0$. Für $\xi \in [a,b]$ und $|\xi - x| < \delta$ gilt $\xi \in (x_{i-1}^M, x_i^M)$, sprich $\varphi^M(\xi) = \varphi^M(x) = c_i^M$. Für $\xi \in [a,b]$ mit $|\xi - x| < \delta$ gilt weiters:

$$|f(x) - f(\xi)| \leq |f(x) - \varphi^M(x)| + |\varphi^M(x) - \varphi^M(\xi)| + |\varphi^M(\xi) - f(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Somit ist f stetig in x. Also $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ ist abzählbar, womit $\mathcal{A}$ höchstens abzählbar unendlich ist. $\square$

Lemma 6.26 (Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen, (ehemals Lemma 8))**.** *Sei f stetig auf $[a,b]$ und $\mathcal{A}$ eine höchstens abzählbar unendliche Menge und f sei differenzierbar auf $[a,b] \setminus \mathcal{A}$. Sei weiters $L \geq 0$ sodass $|f'| \leq L$, dann gilt für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

Sprich f ist Lipschitz-Stetig mit Konstante L.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$, oBdA $x_1 < x_2$. Sei $\varepsilon > 0$, wir setzen $F_\varepsilon(x) = |f(x) - f(x_1)| - (L+\varepsilon)(x - x_1)$, mit $F_\varepsilon \colon [x_1, b] \to \mathbb{R}$. Wir behaupten nun, dass $\forall \varepsilon > 0 : F_\varepsilon \leq 0$. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\exists \overline{\varepsilon} > 0$ und $\overline{x} \in (x_1, b]$ und $F_{\overline{\varepsilon}}(\overline{x}) > 9$. Wir halten fest:

- $F_{\overline{\varepsilon}}(x_1) = 0$
- $F_{\overline{\varepsilon}}$ ist stetig auf $[x_1, b]$
- Die Menge der Funktionswerte $F_{\overline{\varepsilon}}(\mathcal{A} \cap [x_1, b])$ ist höchstens abzählbar unendlich.

$\overline{x} > x_1$. Wir setzen $F_{\overline{\varepsilon}}(\overline{x}) = c > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen gilt $F_{\overline{\varepsilon}}([x_1, \overline{x}]) \supseteq [0, c]$, wobei $[0, c]$ überabzählbar unendlich ist, womit auch $F_{\overline{\varepsilon}}([x_1, \overline{x}])$ überabzählbar ist. Hernach ist $F_{\overline{\varepsilon}}([x_1, \overline{x}] \cap \mathcal{A}) \cap [0, c]$ abzählbar, sprich $\exists \gamma \in F_{\overline{\varepsilon}}([x_1, \overline{x}] \setminus \mathcal{A}) \cap [0, c]$ mit $\forall x \in F_{\overline{\varepsilon}}^{-1}(\{\gamma\}) \cap [x_1, \overline{x}]$ gilt $x \notin \mathcal{A}$. Nach Satz 1.31 gilt weiters $\exists x \in [x_1, \overline{x}]$ und $0 < \gamma < c$ mit $F_{\overline{\varepsilon}}(x) = \gamma$ und f ist differenzierbar in x. $\mathcal{M} = F^{-1}(\{\gamma\}) \cap [x_1, \overline{x}] \neq \emptyset$, $\mathcal{M}$ ist beschränkt und $\mathcal{M} \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Sei nun $z = \sup \mathcal{M}$ und $z_n \in \mathcal{M}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. $F_{\overline{\varepsilon}}(z_n) = \gamma \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_{\overline{\varepsilon}}(z)$ d.h. $F_{\overline{\varepsilon}}(z) = \gamma$ und $z \in (x_1, \overline{x})$, womit $z \in \mathcal{M}$ und f differenzierbar in z ist. Also gilt $F_{\overline{\varepsilon}}(z) = \gamma < c$ womit $z \neq \overline{x}$. Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
&F_{\overline{\varepsilon}}(z) = \gamma \\
&z \in (x_1, \overline{x}) \\
&f \text{ ist differenzierbar in } z \\
&F_{\overline{\varepsilon}}(w) \neq \gamma \forall w \in (z, \overline{x})
\end{aligned}$$

Wir können die Aussage sogar noch verschärfen: für $w \in (z, \overline{x}]$ gilt $F_{\overline{\varepsilon}}(w) > \gamma$. Falls $F_{\overline{\varepsilon}}(w) < \gamma$ folgt nach dem Zwischenwertsatz $\exists v \in (w, \overline{x}) : F_{\overline{\varepsilon}}(v) = \gamma$, was ein Widerspruch dazu ist, dass $v > w > z$ und z maximal mit $F_{\overline{\varepsilon}}(z) = \gamma$ in $[x_1, \overline{x}]$.

Wir betrachten $x \in (z, \overline{x})$ und setzen:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{F_{\overline{\varepsilon}} - F_{\overline{\varepsilon}}}{x - z} = \frac{|f(x) - f(x_1)| - |f(z) - f(x_1)|}{x - z} - (L + \overline{\varepsilon})\frac{x - x_1 - z + x_1}{x - z} \\
&\leq \frac{|f(x) - f(z)|}{x - z} - (L + \overline{\varepsilon})
\end{aligned}$$

Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Es gilt $F_{\overline{\varepsilon}}(x) > \gamma$ und $F_{\overline{\varepsilon}}(z) = \gamma$, womit $\forall x \in (z, \overline{x}] : \varphi(x) > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x) - f(z)|}{|x - z|} \geq L + \overline{\varepsilon} \\
&\forall x > z : \lim_{x \to z^+} \frac{|f(x) - f(z)|}{|x - z|} = |f'(z)| \geq L + \overline{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch dazu, dass f differenzierbar in z ist und $|f'(z)| \leq L$. Somit:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq (L + \varepsilon)|x_1 - x_2| \forall \varepsilon \geq 0$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

□

Korollar 6.27 (Zu Lemma 6.26). *Seien $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und $\mathcal{A} \subset [a, b]$ höchstens abzählbar und f, g differenzierbar auf $[a, b] \setminus \mathcal{A}$ mit $f' = g'$, dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ sodass:*

$$f = g + c$$

Beweis. Sei $h = f - g$, differenzierbar auf $[a, b] \setminus \mathcal{A}$ mit $h'(x) = 0$, womit $|h'| \leq 0$. Nach Lemma 6.26 folgt daher $|h(x_1) - h(x_2)| \leq 0|x_1 - x_2| = 0$, sprich $h(x_1) = h(x_2) = c$ □

Definition 6.28 (Einseitige Ableitungen). *Sei $F \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir sagen F besitzt in $x \in [a, b)$ die rechtsseitige Ableitung $F'_+(x)$, falls*

$$F'_+(x) = \lim_{\xi \to x^+} \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}$$

existiert. Analog sagen wir, dass F in $x \in (a, b]$ die linksseitige Ableitung $F'_-(x)$ besitzt, falls

$$F'_-(x) = \lim_{\xi \to x^-} \frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x}$$

existiert.

Bemerkung 6.29. *F ist genau dann differenzierbar in $x \in (a,b)$, wenn F in x rechts- und linksseitig differenzierbar ist und $F'_+(x) = F'_-(x)$ gilt. In diesem Fall folgt natürlich $F'(x) = F'_+(x) = F'_-(x)$.*

Definition 6.30 (Stammfunktion)**.** *Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Wir sagen $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine primitive Stammfunktion von f, falls F in jedem Punkt $x \in [a,b)$ eine rechtsseitige Ableitung besitzt, sodass $F'_+(x) = \lim_{\xi\to x^+} f(\xi)$, und in jedem $x \in (a,b]$ eine linksseitige Ableitung besitzt, mit $F'_-(x) = \lim_{\xi\to x^-} f(\xi)$.*

Bemerkung 6.31. *Wir führen die Notation $f_+(x) = \lim_{\xi\to x^+} f(\xi)$ und $f_-(x) = \lim_{\xi\to x^-} f(\xi)$ ein.*

Satz 6.32 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I)**.** *Sei $f \in \mathscr{R}([a,b])$ und $\alpha \in [a,b]$. Wir definieren*

$$F(x) = \int_\alpha^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Dann ist diese Integralfunktion eine Stammfunktion von f im Sinne von Definition 6.28. Falls f in $x \in (a,b)$ stetig ist, so ist F in x differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

Beweis. Wir führen den Beweis für rechtsseitige Differenzierbarkeit von F. Der Beweis für linksseitige Differenzierbarkeit geht analog. Dazu sei $x \in [a,b)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählen wir $\delta > 0$ derart, dass $\forall x \in [a,b]$ mit $\xi > x$ und $|\xi - x| < \delta$ gilt $|f(\xi) - f_+(x)| < \varepsilon$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\xi - x}(F(\xi) - F(x)) - f_+(x)\right| = \left|\frac{1}{\xi - x}\left(\int_\alpha^\xi f\,\mathrm{d}y - \int_\alpha^x f\,\mathrm{d}y - \int_x^\xi f_+\,\mathrm{d}y\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\xi - x}\left(\int_x^\xi f\,\mathrm{d}y - \int_x^\xi f_+\,\mathrm{d}y\right)\right| \le \left|\frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi |f - f_+|\,\mathrm{d}y\right| \\
&< \frac{1}{|\xi - x|}\int_x^\xi \varepsilon\,\mathrm{d}y = \varepsilon\frac{\xi - x}{|\xi - x|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{\xi\to x^+}\frac{F(\xi) - F(x)}{\xi - x} = f_+(x).$$

□

Bemerkung 6.33.

$$\left(\int_\alpha^x f\,\mathrm{d}\xi\right)' = f$$

Satz 6.34 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, f eine Regelfunktion auf I und F eine beliebige Stammfunktion von f auf I. Dann gilt für $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha \le \beta$, dass*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = F(\beta) - F(\alpha) =: F(x)\Big|_\alpha^\beta.$$

Beweis. Sei $a \in I$ beliebig gewählt, dann ist $G(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ eine Stammfunktion von f. Sei $A \subseteq I$ die Menge der Punkte in denen f nicht stetig ist, dann ist A nach Lemma 6.25 höchstens abzählbar. $\forall x \in I \setminus A$ gilt F, G sind differenzierbar in x mit $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Nach Korollar 6.27 existiert $c \in \mathbb{R}$ sodass $F = G + c$. Es gilt also $F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) + c - G(\alpha) + c = G(\beta) - G(\beta)$, und ferner

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_a^\beta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_a^\alpha f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_\alpha^a f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_a^\beta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_\alpha^\beta f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

□

Integration erfolgt durch „Antidifferentiation“:

f'	f	F
sx^{s-1}	x^s für $s \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{s+1}}{s+1}$ mit $s \neq -1$
	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$ für $x > 0$
		$\ln(-x)$ für $x < 0$
		$\ln(\lvert x\rvert)$ für $x \neq 0$
$\exp$	$\exp$	$\exp$
$\cos$	$\sin$	$-\cos$
$-\sin$	$\cos$	$\sin$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan$
$\frac{1}{x}$	$\ln$	$x(\ln(x) - 1)$

Tabelle 1: Stammfunktionen und Ableitungen gebräuchlicher Funktionen

Wir werden im Verlauf des Kapitels noch weitere Funktionen kennenlernen. Betrachten wir die Tangensfunktion tan. Sie ist definiert durch

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$

Wir sehen schon, dass tan an gewissen Stellen unstetig ist, nämlich an den Nullstellen von cos. Obwohl sin und cos periodisch mit 2π sind, gilt:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = \tan(x)$$

Also ist tan periodisch mit Periodendauer π. Weiters gilt $\tan(0) = 0$. Da cos eine gerade Funktion ist, bestimmt sin die Parität von tan, weswegen gilt $\tan(-x) = -\tan(x)$. Somit ist der Tangens eine ungerade Funktion. Wenden wir die uns bekannten Regeln zum Ableiten an erhalten wir:

$$\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} > 0$$

Abgesehen von den Sprungstellen an $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist der Tangens also streng monoton steigend auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bzw. auf einer zyklischen Verschiebung $(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{\sin(x)}^{\to 1^+}}{\underbrace{\cos(x)}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{\sin(x)}^{\to -1}}{\underbrace{\cos(x)}_{\to 0^+}} = -\infty$$

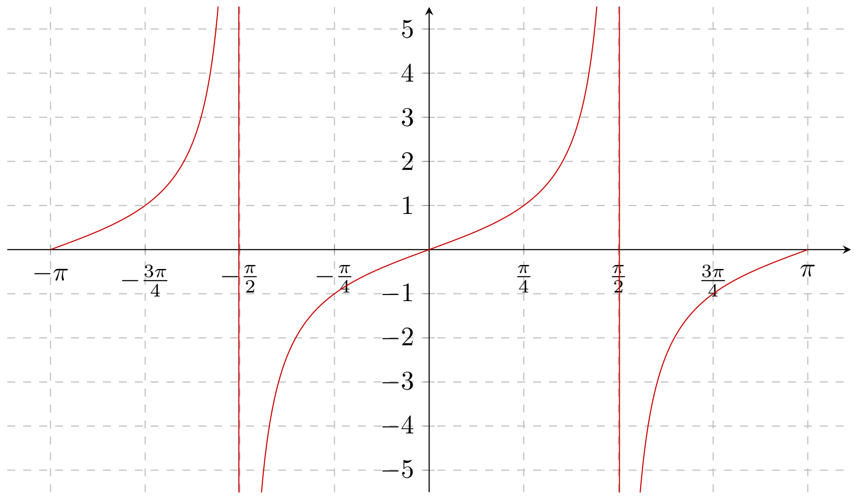


Abbildung 10: Verlauf von tan

Da der Tangens streng monoton steigend ist, ist er auf $(\frac{2-1}{2}\pi, \frac{2+1}{2}\pi)$ injektiv und weiterhin stetig. Er ist ebenfalls surjektiv. Sei $y \in \mathbb{R}$, wir wählen $M = |y| + 1$. Sei β sodass $\tan(\beta) > M$ und α sodass $\tan(\alpha) < -M$, dann nimmt tan nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen jeden Wert zwischen $-M$ und M an, somit $\exists \xi \in [\alpha, \beta]$ mit $\tan(\xi) = y$. Somit ist $\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijektiv mit der Umkehrfunktion $\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dem „Arcustangens“. Dieser ist ebenfalls stetig und differenzierbar und streng monoton wachsend:

$$\begin{aligned}\arctan' &= \frac{1}{\tan' \circ \arctan} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \circ \arctan}} = \frac{\cos^2 \circ \arctan}{\cos^2 \circ \arctan + \sin^2 \circ \arctan} \\ &= \left(\frac{\cos^2 \circ \arctan + \sin^2 \circ \arctan}{\cos^2 \circ \arctan}\right)^{-1} = \left(1 + \left(\frac{\sin \circ \arctan}{\cos \circ \arctan}\right)^2\right)^{-1} \\ &= \left(1 + (\tan \circ \arctan)^2\right)^{-1} = \left(1 + \mathrm{id}^2\right)^{-1} = \frac{1}{1 + \mathrm{id}^2}\end{aligned}$$

Somit gilt $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ für $y \in \mathbb{R}$.

6.2 Integrationsmethoden

Die Methode der Antidifferentiation klingt zuerst relativ einfach, da man lediglich umgekehrt differenzieren muss. Es stellt sich jedoch heraus, dass das Auffinden von Stammfunktionen für beliebige Regelfunktionen von einfach über sehr kompliziert zu schlichtweg unmöglich[5] ist. Um das Auffinden von Stammfunktionen also zu vereinfachen wollen wir uns zuerst einige gängige Stammfunktionen zurechtlegen, wie in Tabelle 1, und versuchen eventuell kompliziertere Ausdrücke in diesen „einfachen“ Funktionen darstellen. Das erfordert jedoch teilweise nicht-triviale Umformungen und algebraische Methoden. Gängiger ist es also daher „mechanische“ Methoden anzuwenden. Diese stellen eine Vorgehensweise zur Vereinfachung des zu integrierenden Ausdrucks dar, mit der die Stammfunktion direkt bestimmt wird.

6.2.1 Partielle Integration

Betrachten wir etwa die Funktion xe^x, so können wir nicht direkt eine Stammfunktion bestimmen. Die partielle Integration baut darauf auf, dass gewisse Funktionen durch Ableiten einfacher werden, wie etwa $\mathrm{id}' = 1$.

Seien $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen der Regelfunktionen $f, g \in \mathscr{R}(I)$. Es folgt analog wie in der Herleitung der Produktregel, dass FG einseitige Ableitungen mit den folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned}(FG)'_+ &= F'_+G + G'_+F \\ (FG)'_- &= F'_-G + G'_-F\end{aligned}$$

[5] ein beliebtes Beispiel ist die Klasse der elliptischen Integrale, die den Umfang einer Ellipse bestimmen, wie etwa $\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2(x) + \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Für $x \in I$, wobei die einseitigen Ableitungen an x „sinnvoll“ sind, sprich es gilt, dass FG eine Stammfunktion von $fG + gF$ ist.

Lemma 6.35 (Partielle Integration)**.** *Seien $f, g \in \mathscr{R}(I)$ und F, G Stammfunktionen von f bzw. g, dann gilt für $\alpha, \beta \in I$:*

$$\int_\alpha^\beta fG \, \mathrm{d}x = FG\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta gF \, \mathrm{d}x$$

Und für das unbestimmte Integral:

$$\int fG \, \mathrm{d}x = FG - \int gF$$

Seien speziell u, v stetig differenzierbar auf I, dann gilt:

$$\int_\alpha^\beta u'v \, \mathrm{d}x = uv\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v'u \, \mathrm{d}x$$

Partielle Integration erlaubt es uns, eine Vielzahl an Funktionen zu integrieren. So können wir etwa die Stammfunktion für ln bestimmen, indem wir $1 \cdot \ln(x)$ als $u'v$ bezeichnen:

$$\int 1 \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x = x \ln(x) - \int \frac{x}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln(x) - x$$

Wir können diesen Ansatz jedoch verallgemeinern. Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $I = (0, \infty)$:

$$\int x^a \ln(x) \, \mathrm{d}x = \ln(x) \frac{x^{a+1}}{a+1} - \int \frac{x^{a+1}}{x(a+1)} \, \mathrm{d}x = \ln(x) \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} \tag{5}$$

Für Funktionen der Form $x^k \mathrm{e}^x$ mit $k \in \mathbb{N}$ müssen wir $k - 1$ mal partiell integrieren. Dafür gibt es zwar geschlossene Ausdrücke, wir werden jetzt lediglich den Fall $k = 1$ und $k = 2$ betrachten. Interessant hierbei ist jedoch die vorhandene Rekursion. Sei $I_k = \int x^k \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, dann ist $I_k = x^k \mathrm{e}^x - kI_{k-1}$:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \mathrm{e}^x \\
I_1 &= \int x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - I_0 = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \\
I_2 &= \int x^2\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2I_1 = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x \\
I_3 &= \int x^3\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = x^3\mathrm{e}^x - 3I_2 = x^3\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^x + 6x\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

Mit diesen Funktionen können wir eine Vermutung für I_k aufstellen:

$$I_k = \int x^k \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} x^i \frac{k!}{i!}$$

Diese Formel lässt sich leicht durch Induktion verifizieren:

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= x^{k+1}\mathrm{e}^x - (k+1)I_k = x^{k+1}\frac{(k+1)!}{(k+1)!}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}x^i\frac{k!}{i!} \\
&= \mathrm{e}^x\left(\frac{(k+1)!}{(k+1)!}x^{k+1} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+1-i}x^i\frac{(k+1)!}{i!}\right) = \mathrm{e}^x\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^{k+1-i}x^i\frac{(k+1)!}{i!}
\end{aligned}$$

Eine Klasse an Integralen, die ebenfalls oftmals auftritt ist die folgende:

$$\int \cos^k(x) \, \mathrm{d}x$$

Auch hier gibt es einen rekursiven Ansatz. Allerdings könnte man das Problem auch auf die Eulersche Identität zurückführen:

$$\cos^k(x) = \frac{1}{2^k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^k = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathrm{e}^{l\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)x}$$

$$= \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xl-\mathrm{i}kx+\mathrm{i}lx} = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(2l-k)}$$

$$\int \cos^k(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2^k}\int\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(2l-k)} = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x(2l-k)}\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{1}{\mathrm{i}(2l-k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x(2l-k)} = \frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{1}{\mathrm{i}(2l-k)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xl}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)x}$$

Hierbei handelt es sich zwar technisch gesehen um einen geschlossenen Ausdruck, allerdings müssen wir eine nicht unkomplizierte Summe berechnen. Sinnvoller ist es daher, Partielle Integration anzuwenden. Wir wählen $u' = \cos(x)$ und $v = \cos(x)$, damit gilt:

$$\int \cos^2\ \mathrm{d}x = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x)\cos(x) + \int 1 - \cos^2(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\iff 2\int \cos^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) + \frac{1}{2}x$$

Verallgemeinern wir das ganze erhalten wir mit $u' = \cos(x)$ und $v = \cos^{k-1}(x)$:

$$\int \cos^k(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x)\cos^{k-1}(x) + \int (k-1)\cos^{k-1}(x)\sin^2(x)\ \mathrm{d}x$$

$$= \sin(x)\cos^{k-1}(x) + (k-1)\int \cos^{k-2}(x)\ \mathrm{d}x - (k-1)\int \cos^2(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\iff k\int \cos^k(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x)\cos^{k-1}(x) + (k-1)\int \cos^{k-2}(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\iff \int \cos^k(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k}\sin(x)\cos^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int \cos^{k-2}(x)\ \mathrm{d}x$$

Mit $C_k = \int \cos^k(x)\ \mathrm{d}x$ also rekursiv:

$$C_k = \frac{1}{k}\sin(x)\cos^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}C_{k-2}$$

Mit $C_1 = \cos(x)$ und $C_0 = x$.

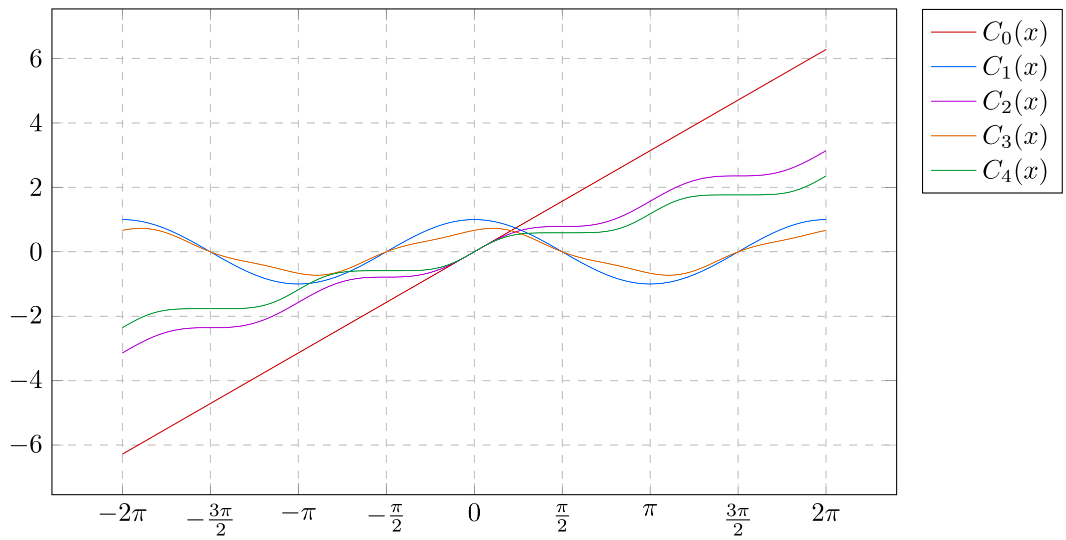


Abbildung 11: Verlauf der $C_k(x)$

Wir können auch analog eine rekursive Formel für S_k finden:

$$\begin{aligned}
S_k &= \int \sin^k(x)\,\mathrm{d}x \\
S_k &= -\frac{1}{k}\cos(x)\sin^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}\int \sin^{k-2}(x)\,\mathrm{d}x \\
S_k &= -\frac{1}{k}\cos(x)\sin^{k-1}(x) + \frac{k-1}{k}S_{k-2}
\end{aligned}$$

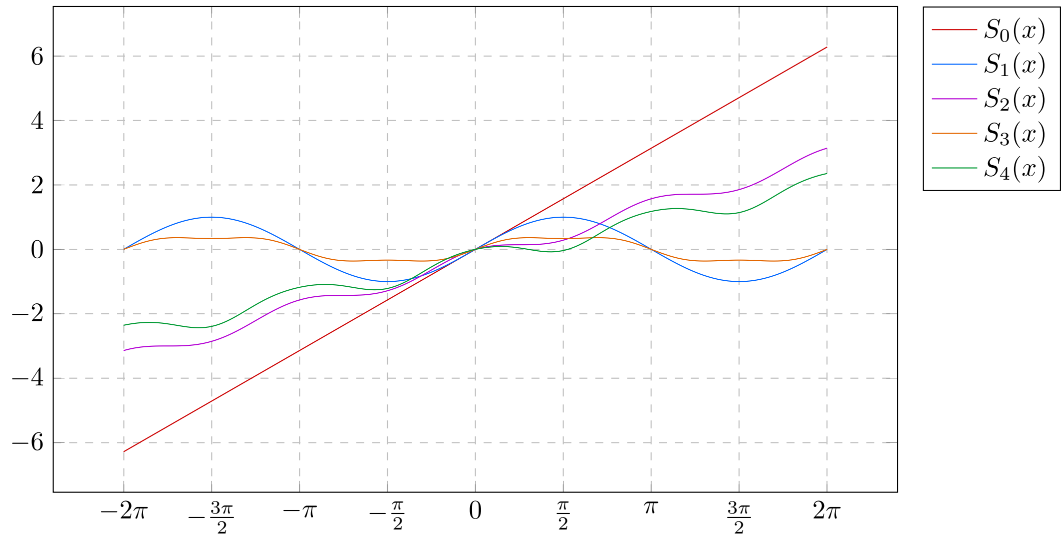


Abbildung 12: Verlauf der $S_k(x)$

Betrachten wir Auswertungen dieser Funktionen. Wir legen $c_m = C_m(\frac{\pi}{2}) - C_m(0)$. Da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos^2(x) = 0$, gilt daher:

$$c_m = \frac{m-1}{m}c_{m-2}$$

Es gilt dabei dass $c_0 = \frac{\pi}{2}$ und $c_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1$ womit $c_1 = 1$. Wir finden also explizite Darstellungen für c_m:

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2} \\
c_{2n+1} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}
\end{aligned}$$

Satz 6.36 (Wallis Produkt)**.** *Nach John Wallis (1616-1703). Betrachte w_n mit:*

$$w_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^n}{(2k-1)(2k+1)}$$

dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{\pi}{2}$$

Beweis zu Satz 6.36.

$$\frac{\pi}{2}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \frac{\pi}{2}\frac{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}}{\frac{\pi}{2}\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{j}}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k-1)} = w_n$$

Wir zeigen $\lim_{n\to\infty}\frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = 1$. Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $0 \leq \cos(x) \leq 1$ womit $0 \leq \cos^{2k+2}(x) \leq \cos^{2k+1}(x) \leq \cos^{2k}(x)$. Somit folgt $c_{2k+2} \leq c_{2k+1} \leq c_{2k}$ für $k \geq 1$:

$$1 \geq \frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} \geq \frac{2_{2k+2}}{c_{2k}} = \frac{\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\frac{\pi}{2}}{\prod_{j=1}^{k}\frac{2j-1}{2j}\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} = \frac{2k+1}{2k+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Hernach $\lim_{k\to\infty}\frac{c_{2k+1}}{c_{2k}} = 1$. □

6.2.2 Substitutionsmethode

Lemma 6.37 (Integration durch Substitution)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiters sei $t\colon [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:*

$$\int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} (f\circ t)(u)\cdot t'(u)\,\mathrm{d}u$$

Beweis zu Lemma 6.37. Sei F eine Stammfunktion von f, dann gilt :

$$\int_{t(\alpha)}^{t(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(t(\beta)) - F(t(\alpha)) = \chi$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht:

$$(F\circ t)'(u) = F'(t(u))\cdot t'(u) = f(t(u))\cdot t'(u)$$
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t(u))\cdot t'(u)\,\mathrm{d}u = F\circ t\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(t(\beta)) - F(t(\alpha)) = \chi$$

□

Betrachten wir einige Beispiel, insbesondere $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Die Funktion $\sqrt{1-x^2}$ beschreibt den Halbkreis-Bogen auf $[-1,1]$ mit Radius 1. Hernach bestimmt das Integral die Fläche des Kreises. Wir wählen eine Substitution $x = \cos u$ mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = -\sin(u)$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2(u)}(-\sin(u))\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{2}\sin(u)\cos(u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

Ein Viertel des Einheitskreises hat also die Fläche $\frac{\pi}{4}$, womit der Einheitskreis eine Fläche von π hat.

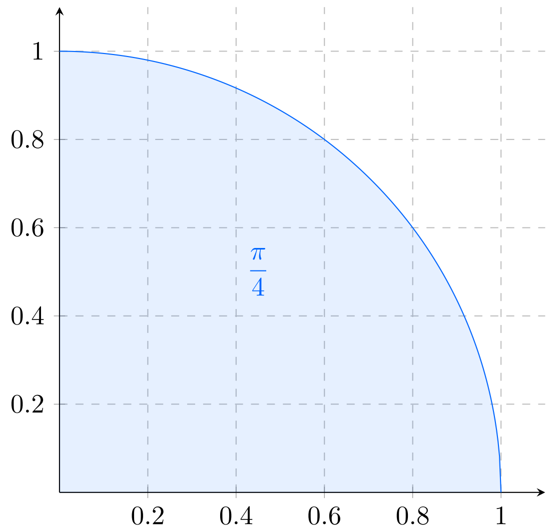


Abbildung 13: Graph und bestimmtes Integral von $\sqrt{1-x^2}$

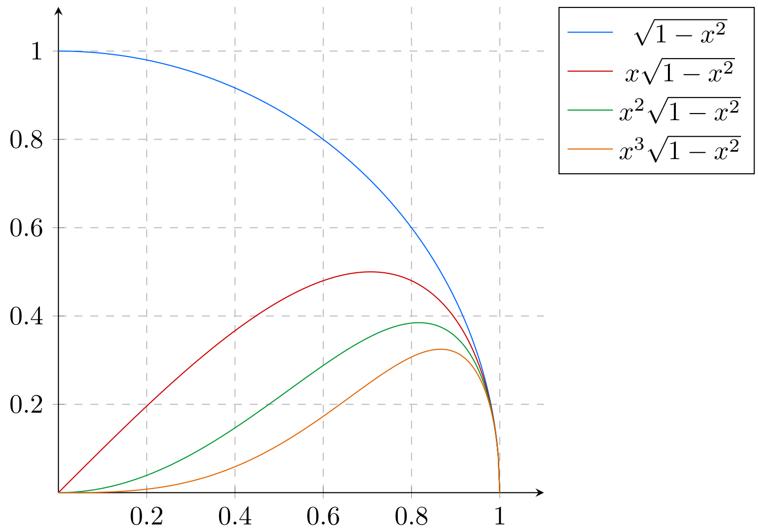


Abbildung 14: Graphen von $x^k\sqrt{1-x^2}$

Bestimmen wir $K_k = \int_0^1 x^k\sqrt{1-x^2}$. Für $k = 1$ bietet sich eine andere Substitution an: $u = 1 - x^2$ mit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -2x$:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 x\sqrt{u}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Was passiert nun bei $k = 2$?

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad x = \cos(u), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = -\sin(u)$$

$$\implies I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\sin^2(u)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)(1-\cos^2(x))\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) - \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = c_2 - c_4$$

Für $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 x^k \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad x = \cos(u), \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = -\sin(u)$$
$$\implies I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(u)\sin^2(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(u) - \cos^{k+2}(u)\,\mathrm{d}u = c_k - c_{k+2}$$

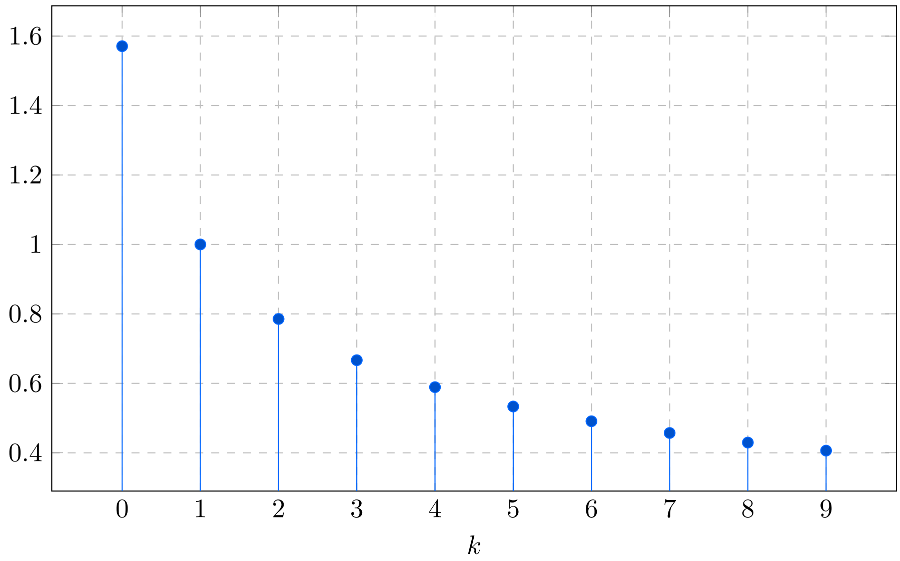


Abbildung 15: Verlauf der c_k

Substitution erlaubt es uns auch, beliebige Exponentialfunktionen zu integrieren. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten $\mathrm{e}^{\alpha x}$ und wählen $u = \alpha x$ mit $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \alpha$:

$$\int_a^b \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\beta b} \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}\left(\mathrm{e}^{\alpha b} - \mathrm{e}^{\alpha a}\right)$$

Mit dieser Korrespondenz lässt sich ein alternativer Beweis führen, dass $\int \cos = \sin$, indem man die Eulersche Identität verwendet:

$$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$
$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) = \sin(x)$$

6.2.3 Uneigentliche Integrale

Wir haben bis jetzt nur bestimmte Integrale über „endlichen“ Intervallen $[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ berechnet, wollen uns jedoch auch eine Möglichkeit erarbeiten Integrale über $[a,b]$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ zu bestimmen. Der springende Punkt liegt darin, den Funktionengrenzwert zu verwenden.

Definition 6.38 (Uneigentliches Integral)**.** *Sei I ein Intervall mit Randpunkten a, b wobei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f \in \mathscr{R}$. Für jedes kompakte Teilintervall $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$ ist $f\big|_J \in \mathscr{R}(J)$. Sei $c \in I$, dann definieren wir das uneigentliche Integral von f auf I folgendermaßen:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\alpha \to a_+}\int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to b_-}\int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sofern beide Grenzwerte existieren. Andernfalls nennen wir das Integral divergent.

Hier ist wichtig anzumerken, dass sofern das uneigentliche Integral für ein $c \in I$ konvergiert, auch alle anderen $c' \in I$ zum gleichen Ergebnis führen. Falls $a \neq -\infty$ können wir den rechtsseitigen Grenzwert des

Integrals vernachlässigen, da wir lediglich $F(a)$ auswerten müssen. Analog, falls $b \neq \infty$ kann der linksseitige Grenzwert vernachlässigt werden.

Hier lässt sich eine gewisse Parallelität zu einigen Reihen feststellen. Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Analog divergiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$$

gegen ∞, da ln streng monoton wachsend ist. Jedoch konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gegen $\zeta(k)$, wobei ζ die Riemannsche Zeta-Funktion ist. Betrachten wir nun das zugehörige uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} \,\mathrm{d}x = \frac{x^{1-k}}{1-k}\bigg|_1^{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(1-k)} \frac{1}{x^{-(k-1)}} - \frac{1}{1-k} = \frac{1}{k-1}$$

Hier ist erkennbar, warum $k > 1$ gelten muss, da der Grenzwert sons nicht konvergiert. Wir können jedoch auch $s = k \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ verwenden und feststellen, dass das uneigentliche Integral konvergiert. Analog gilt für

$$\int \frac{1}{x^s} \,\mathrm{d}x$$

dass $0 < s < 1$ gelten muss, damit das Integral gegen $\frac{1}{1-s}$ konvergiert.

Manche uneigentlichen Integrale können „problematisch“ zu berechnen sein, daher wollen wir manchmal lediglich abschätzen, ob das Integral überhaupt konvergiert. Dazu werden wir uns desselben Prinzips wie bei den vergleichsbasierten Konvergenzkriterien bei Reihen annehmen, nämlich Majoranten (und Minoranten). Dazu erinnern wir uns an das Cauchy-Kriterium für konvergente Funktionen. Sei $f\colon (a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine konvergente Funktion mit $\lim_{x \to \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$, dann gilt nach dem Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists M \in (a, \infty) : \forall x, y \geq M : |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Analog definieren wir Funktionengrenzwerte gegen $-\infty$.

Satz 6.39 (Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-kompaktes Intervall mit Randpunkten a, b und $f, g \in \mathscr{R}(I)$ mit $0 \leq |f| \leq g$. Angenommen $\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x$ ist ein konvergentes uneigentliches Integral, dann sind auch*

$$\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}x$$

und

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

konvergent. Wir nennen g in diesem Fall eine Majorante von f.

Beweis zu Satz 6.39. Wir betrachten $\beta \to b_-$ mit $c \in I$:

$$\lim_{\beta \to b_-} \int_c^{\beta} g(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{\beta \to b_-} G(\beta)$$

Dieser Grenzwert existiert nach unserer Voraussetzung. Nach dem Cauchy-Kriterium gilt daher:

$$\forall \varepsilon > 0 : |G(\beta_1) - G(\beta_2)| < \varepsilon$$

wobei $\beta_1, \beta_2 < b$ aber „nahe genug“ an b. Sei oBdA $\beta_1 \geq \beta_2$:

$$G(\beta_1) - G(\beta_2) = \int_c^{\beta_1} g(x) \,\mathrm{d}x - \int_c^{\beta_2} g(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\beta_2}^{\beta_1} g(x) \,\mathrm{d}x \geq 0$$

Nach Cauchy ist also $\int_{\beta_2}^{\beta_1} g(x) \,\mathrm{d}x < \varepsilon$ für β_1, β_2 hinreichend nahe an b. Somit:

$$\left| \int_{\beta_2}^{\beta_1} f(x) \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{\beta_2}^{\beta_1} |f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_{\beta_2}^{\beta_1} g(x) \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

Wir legen nun $F(\beta) = \int_c^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$ und $\tilde{F}(x) = \int_c^\beta |f(x)|\ \mathrm{d}x$ fest:

$$\left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x)\ \mathrm{d}x \right| = |F(\beta_1) - F(\beta_2)| < \varepsilon$$

für β_1, β_2 hinreichend nahe an b. Nach Cauchy konvergiert also $\int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$. Analog für $\int |f(x)|\ \mathrm{d}x$:

$$\int_{\beta_2}^{\beta_1} |f(x)|\ \mathrm{d}x = |\tilde{F}(\beta_1) - \tilde{F}(\beta_2)| < \varepsilon$$

Somit konvergiert auch $\int_c^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$. Der Beweis geht analog für $\alpha \to a_+$. □

Eine besonders wichtige Funktion, welche in der Signalverarbeitung oftmals auftritt ist die sinc Funktion, der „sinus cardinalis“. Allgemein unterscheidet man beim sinus cardinalis zwischen der normierten Funktion $\mathrm{sinc}(x)$ und der nicht-normierten Version $\mathrm{si}(x)$:

$$\mathrm{si}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$
$$\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Der Beweis, dass $\mathrm{si}(x) = \mathrm{sinc}(x) = 1$ stützt sich auf die Regel von L'Hospital, einer Methode Grenzwerte zu bestimmen, die wir noch nicht kennengelernt haben. Jedoch können wir zeigen, dass für $\mathrm{sinc}(x) = 1$ der sinus cardinals auf $\mathbb{R}$ stetig ist, was eine vorzuziehende Eigenschaft ist. Wir nennen sinc normiert, weil $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(x)\ \mathrm{d}x = 1$. Wir können das per se den Beweis dafür nicht zeigen, aber wir wollen zumindest die Konvergenz des Integrals $\int_1^\infty \mathrm{si}(x)\ \mathrm{d}x$ nachweisen:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\sin(x)}{x}\ \mathrm{d}x = \lim_{\beta\to\infty} \left(-\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\beta - \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{\cos(1)}{1} - \lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}x \\
&\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Wir haben somit eine Majorante für $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\ \mathrm{d}x$ gefunden, welche konvergiert, somit existiert $\int_1^\infty \mathrm{si}(x)\ \mathrm{d}x$. Hier ist jedoch wichtig anzumerken, dass $\int_1^\infty |\mathrm{si}(x)|\ \mathrm{d}x$ nicht konvergiert. Daher ist $\mathrm{si}(x)$ auf $[1, \infty)$ keine Lebesgue integrierbare Funktion.

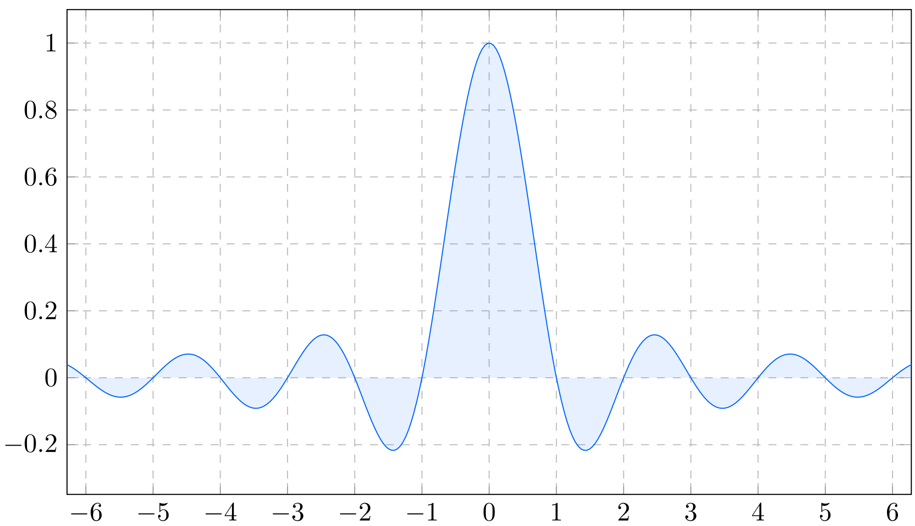


Abbildung 16: Verlauf des normierten sinus cardinalis mit hinterlegter Fläche

Definition 6.40 (Eulersche Gammafunktion)**.** *Für $x > 0$ definieren wir*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

mit $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die eulersche Gammafunktion.

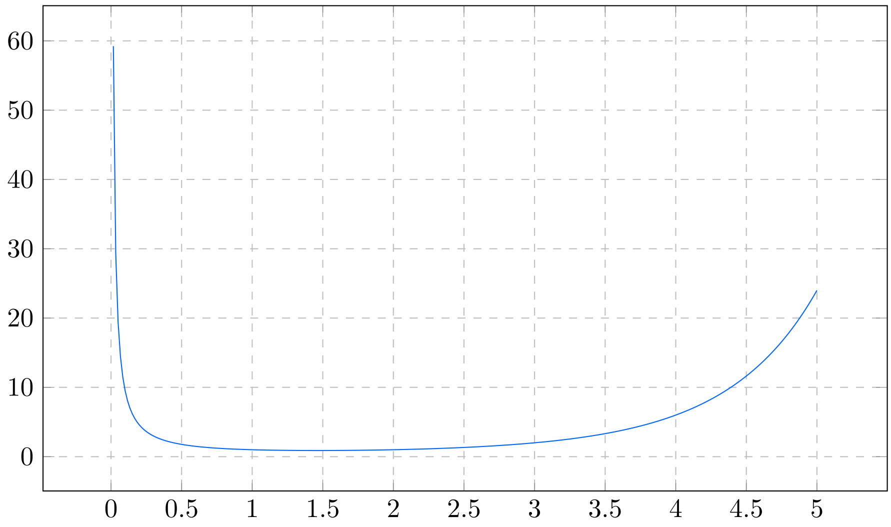


Abbildung 17: Verlauf der eulerschen Gammafunktion

Lemma 6.41 (Eigenschaften von $\Gamma(x)$)**.** *1. $\Gamma(x)$ konvergiert für $x > 0$*

2. Γ erfüllt die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

3. $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \Gamma(n+1) = n!$

Beweis zu Lemma 6.41. Zu 1:

$$\int_0^\infty c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = -2c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\Big|_0^\infty = 2c$$

Daher ist $\int_0^\infty c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}x$ konvergent. Wir zeigen, dass für ein festes $x > 0$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ existiert, sodass $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$, also eine Majorante. Wir haben bereits gezeigt, dass aufgrund des exponentiellen Wachstums

$$\lim_{t\to\infty}(t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}) = 0$$

gilt. Sprich $\exists L > 0 : 0 < t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} < 1$ für $t > L$. Auf $[0, L]$ ist $t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ stetig und somit beschränkt, womit $\exists M > 0 : \forall t \in (0, L] : 0 < t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \leq M$. Wir wählen nun $c = \max(M, 1)$, womit $\forall t \in [0,\infty) : t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \leq c$. Da $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} > 0$, gilt somit:

$$\forall t \in [0,\infty) : t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leq c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$$

Nach Satz 6.39 ist $c\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ eine Majorante für $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, womit $\Gamma(x)$ konvergiert.

Zu 2:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{x+1-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$u' = \mathrm{e}^{-t} \qquad v = t^x$$

$$\implies \Gamma(x) = \lim_{\beta\to\infty}\left((-t\mathrm{e}^{-t})\Big|_0^\beta + x\int_0^\beta t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = x\lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

Zu 3:

Wir führen einen Induktionsbeweis. $\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$. Nach der Funktionalgleichung gilt $\Gamma((n+1)+1) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$. $\square$

7 Ausbau der Differential- und Integralrechnung

7.1 Einiges über Polynome

Definition 7.1 (Polynomring über $\mathbb{R}$ und Teilbarkeit). *Mit*

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k x^k : n \in \mathbb{N}_0, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

bezeichnen wir den Polynomring über $\mathbb{R}$. Für ein $p \in \mathbb{R}[x]$ definieren wir $\mathrm{Grad}(p)$ als Funktion $\mathrm{Grad}\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{N}$ durch

$$\mathrm{Grad}(p) = \max \{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}.$$

Wir sagen $p \in \mathbb{R}[x]$ teilt $q \in \mathbb{R}[x]$, falls es ein Polynom $r \in \mathbb{R}[x]$ gibt, sodass $q = pr$, und schreiben dann $p|q$. Wir nennen $x_0 \in \mathbb{R}$ eine k-fache Nullstelle von p, falls $(x - x_0)^k|p$. Die Vielfachheit $\lambda(x_0)$ ist gegeben durch

$$\lambda(x_0) = \max \left\{k \in \mathbb{N} : (x - x_0)^k|p\right\}.$$

Bemerkung 7.2. *Für das Nullpolynom 0 setzen wir die Konvention $\mathrm{Grad}(0) = -\infty$. Für $p, q \in \mathbb{R}[x]$ gilt*

$$\mathrm{Grad}(pq) = \mathrm{Grad}(p) + \mathrm{Grad}(q).$$

Das folgt aus dem Produkt endlicher Summen, da

$$p(x)q(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n+m} x^k \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$$

mit der Konvention $a_\ell = 0$ für $\ell > n$ bzw. $b_\ell = 0$ für $\ell > m$.

Lemma 7.3. *Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $\mathrm{Grad}(p) = n \geq 0$, dann hat p nur endlich viele Nullstellen $x_1, \ldots, x_m$ und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda(x_1) \leq n.$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Sei $p(x) = c \neq 0$, nach unserer Voraussetzung, dass $\mathrm{Grad}(p) \geq 0$. Somit hat p keine Nullstelle. Im Induktionsschritt $n \to n - 1$ machen wir nun eine Fallunterscheidung. Hat p keine reelle(!) Nullstelle, so ist die Summe der Vielfachheiten $0 \leq \mathrm{Grad}(p) = n + 1$. Besitzt p eine k_1-fache Nullstelle $x_1 \in \mathbb{R}$, so gibt es $q \in \mathbb{R}[x]$ mit $p(x) = (x - x_1)^{k_1} q(x)$ und daher $\mathrm{Grad}(q) \leq n$. Ist $\tilde{x} \neq x_1$, so gilt für $P(\tilde{x}) = 0$, dass $\tilde{x}$ eine $\tilde{k}$-fache Nullstelle von q ist. Da $(x - \tilde{x})^{\tilde{k}} \not| (x - x_1)^{k_1}$ und $(x - \tilde{x})$ prim in $\mathbb{R}[x]$ ist, gibt es $r \in \mathbb{R}[x]$ mit $q(x) = (x - \tilde{x})^{\tilde{k}} r(x)$. Ferner muss $r(\tilde{x}) \neq 0$ gelten, da sonst $(x - \tilde{x})^{\tilde{k}+1}$ q teilt, was ein Widerspruch zur Vielfachheit von $\tilde{x}$ ist. Nach unserer Induktionsvoraussetzung hat q nur endlich viele Nullstellen $x_2, x_3, \ldots, x_m$ mit

$$\sum_{\ell=1}^{m} k_\ell \leq \mathrm{Grad}(q) \leq n + 1 - k_1 \implies \sum_{\ell=1}^{m} k_\ell \leq n + 1 = \mathrm{Grad}(p).$$

□

Bemerkung 7.4. *Der Fundamentalsatz der Algebra garantiert die Existenz von $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$, sodass $p(z_i) = 0$. Für diese Zahlen gilt*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda(z_k) = \mathrm{Grad}(p).$$

Definition 7.5 (Lineare Unabhängigkeit). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f_1, \ldots, f_n \colon D \to \mathbb{C}$. Wir nennen $f_1, \ldots, f_n$ linear unabhängig, falls*

$$\forall z \in D : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(z) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_i = 0.$$

Bemerkung 7.6. *Die Bedingung $\forall x \in D : f(x) = c$ schreiben wir auch als $f \equiv c$ an.*

Bemerkung 7.7. *Polynome $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\mathrm{Grad} p_i \neq \mathrm{Grad} p_j$ für $i \neq j$. Dazu führen wir einen Induktionsbeweis. Sei $p_1 \neq 0$, dann gilt $\alpha_1 p_1 \equiv 0$ falls $\alpha_1 = 0$. Im Induktionsschritt $l \to l+1$ seien $n_i = \mathrm{Grad}(p_i)$, und oBdA $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_{l+1}$. Aus $\sum_{i=1}^{l+1} \alpha_i p_i \equiv 0$ folgt*

$$\alpha_{l+1} p_{l+1} = -\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i.$$

Angenommen $\alpha_{l+1} \neq 0$. Mit

$$\mathrm{Grad}\left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i\right) \leq \max_{i=1,\ldots,l} \mathrm{Grad}(\alpha_i p_i) = n_l.$$

Daraus folgt aber $n_{l+1} = \mathrm{Grad}(\alpha_i p_i) \leq n_l < n_{l+1}$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass $n_{l+1} > n_l$, woraus $\alpha_{l+1} = 0$ folgt. Nach unserer Induktionsvoraussetzung sind die $p_1, \ldots, p_l$ linear unabhängig, womit auch $p_1, \ldots, p_{l+1}$ linear unabhängig sind.

Definition 7.8. *Wir setzen $\mathscr{P}_n := \{p \in \mathbb{R}[x] : \mathrm{Grad}(p) \leq n\}$ als den Vektorraum der Polynome von Grad n.*

Bemerkung 7.9. *Offenbar ist $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ eine Basis von $\mathscr{P}_n$, womit $\dim(\mathscr{P}) = n+1$. Für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{B}_{x_0} = \{1, x - x_0, \ldots, (x - x_0)^n\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathscr{P}_n$.*

Lemma 7.10.

1. *Sei $p \in \mathscr{P} \setminus \{0\}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Ist*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k$$

die Darstellung von p in der Basis $\mathcal{B}_{x_0}$, so ist x_0 genau dann eine k-fache Nullstelle von p, wenn $b_0 = b_1 = \cdots = b_{k-1} = 0$ und $b_k \neq 0$ gilt.

2. *Für die Koordinaten b_k in $\mathcal{B}_{x_0}$ von $p \in \mathscr{P}_n$ gilt*

$$b_k = \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k p}{\mathrm{d}x^k}(x_0).$$

3. *x_0 ist genau dann eine k-fache Nullstelle von p, wenn $p^{(j)}(x_0) = 0$ für $j = 0, \ldots, k-1$ und $p^{(k)}(x_0) \neq 0$.*

Beweis. 1. $\Longleftarrow$:

$$p(x) = \sum_{j=k}^{n} b_j (x - x_0)^j = (x - x_0)^k \underbrace{\sum_{j=k}^{n} b_j (x - x_0)^{j-k}}_{=q(x)}.$$

mit $q(x_0) = b_k \neq 0$. Für die Rückrichtung führen wir eine Induktion nach k aus. Sei x_0 also eine 0 fache Nullstelle von p, es gilt also

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j \implies 0 \neq p(x_0) = b_0.$$

Im Induktionsschritt $k \to k+1$ sei x_0 eine $k+1$ fache Nullstelle von p, es gibt also $q \in \mathscr{P}_n$ mit $q(x_0) \neq 0$ und $p(x) = (x-x_0)^{k+1} q(x)$. Sei $p_1 = (x-x_0)^k q(x)$, dann ist x_0 eine k-fache Nullstelle von p_1, nach der Induktionsvoraussetzung gilt also

$$p_1(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \tilde{b}_j (x-x_0)^j \qquad \text{mit } \tilde{b}_k \neq 0.$$

$$\implies p(x) = (x-x_0) \sum_{j=k}^{n-1} \tilde{b}_j (x-x_0)^j = \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{b}_{j-1} (x-x_0)^j.$$

Setzen wir $b_j = \tilde{b}_{j-1}$, so gilt $b_{k+1} \neq 0$.

2. Sei

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-x_0)^j,$$

dann gilt nach der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}^k p}{\mathrm{d}x^k}(x) = \sum_{j=k}^{n} b_j (x-x_0)^{j-k} \prod_{i=0}^{k-1} (j-i) \implies \frac{\mathrm{d}^k p}{\mathrm{d}x^k}(x_0) = k! x_0 b_k.$$

3. Aus 1 und 2 folgt direkt, dass $p^{(j)}(x_0) = b_j = 0$ für $j = 0, \ldots, k-1$, wenn x_0 eine k-fache Nullstelle ist, und natürlich $p^{(k)}(x_0) = b_k \neq 0$.

$\square$

Bemerkung 7.11. *Ein Polynom $p \in \mathscr{P}_n$ ist also durch seine Ableitungen in x_0 eindeutig festgelegt*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k p}{\mathrm{d}x^k}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Sei nun $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \colon I \to \mathbb{R}$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar in $x_0 \in I$. Wir suchen $p \in \mathscr{P}_n$, sodass $p^{(k)}(x_0) = f^{(x_0)}(k)$ für $k = 0, \ldots, n$. Nach unseren vorherigen Überlegungen folgt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Definition 7.12 (Taylor-Polynom)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offene Intervall und $f \in \mathcal{C}^{n-1}$. Für x_0 nennen wir*

$$T_f^n(x; x_0) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0)(x-x_0)^k$$

das Taylor-Polynome von f von Grad n im Entwicklungspunkt x_0. Weiters setzen wir

$$R_f^{n+1}(x; x_0) := f(x) - T_f^n(x; x_0)$$

als das Restglied $(n+1)$-ter Ordnung bei der Approximation von f durch T_f^n..

Satz 7.13 (Satz von Taylor)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, dann gilt*

$$R_f^{n+1}(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi) \,\mathrm{d}\xi.$$

Beweis. Wir führen eine Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt $R_f^1(x; x_0) = f(x) - f(x_0)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II gilt also

$$\frac{1}{0!} \int_{x_0}^{x} (x-\xi)^0 f'(\xi) = \int_{x_0}^{x} f'(\xi) \,\mathrm{d}\xi = f(x) - f(x_0).$$

Im Induktionsschritt $n-1 \to n$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$R_f^n(x;x_0) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^{n-1}f^{(n)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Wir führen nun partielle Integration durch. Dazu sei $u(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n}$ und $v(\xi) = f^{(n)}(\xi)$. Daraus folgt

$$u'(\xi) = (x-\xi)^{n-1} \qquad \text{und} \qquad v'(\xi) = f^{(n+1)}(\xi).$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} R_f^n(x;x_0) &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{(x-x_0)^n}{n}f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \\ R_f^{n+1}(x;x_0) &= f(x) - T_f^n(x;x_0) = f(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - T_f^{n-1}(x;x_0) \\ &= R_f^n(x;x_0) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{1}{n!}\int_{x_0} x^(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

□

Satz 7.14 (Lagrange-Form des Restglieds)**.** *Sei $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Für $x, x_0 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$R_f^{n+1}(x;x_0) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

für ein geeignetes $\xi \in (x, x_0)$.

Beweis. Wir wollen den Mittelwertsatz der Integralrechnung verwenden. Für $x > x_0$ gilt nach dem Satz von Taylor

$$R_f^{n+1}(x;x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Mit $p(\tau) = (\tau - x_0)^n$ gibt es ein $\xi \in (x_0, x)$, sodass

$$\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^n\,\mathrm{d}\tau.$$

Sei $u = x - \tau$, dann folgt $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}\tau$ und somit

$$\int_{x_0}^{x}(x-\tau)^n\,\mathrm{d}\tau = \int_{x}^{x_0}u^n\,\mathrm{d}u = -\frac{(x-\tau)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x_0}^{x} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

$$\implies R_f^{n+1}(x;x_0) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Für $x < x_0$ folgt indessen

$$R_f^{n+1}(x;x_0) = -\frac{1}{n!}\int_{x}^{x_0}(x-\tau)^n f^{(n+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ist n gerade, so folgt $(x-\tau)^n \geq 0$ für $\tau \in [x, x_0]$. Mit der vorherigen Substitution ergibt sich also

$$R_f^{n+1}(x;x_0) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\left(-\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Für n ungerade ist $(x-\tau)^n \leq 0$ für $\tau \in [x, x_0]$, daher folgt in diesem Fall

$$-\int_{x}^{x_0}(x-\tau)^n\,\mathrm{d}\tau = -\frac{(\tau-x)^{n+1}}{n+1}\bigg|_{x}^{x_0} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Insgesamt ergibt sich also die behauptete Darstellung von $R_f^{n+1}(x;x_0)$. □

Satz 7.15 (Reduzierte Regularität für den Satz von Taylor)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I)$ und $x_0 \in I$. Dann gilt für $n \geq 1$, dass*

$$R_f^{n+1}(x; x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach n. Nach der Definition der Differenzierbarkeit gilt für $n = 1$, dass

$$R_f^2(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Im Induktionsschritt für $n-1 \to n$ wissen wir, dass $f' \in \mathcal{C}^{n-2}(I)$. Wir wenden daher die Induktionsvoraussetzung auf f' an und erhalten

$$R_{f'}^n(\xi, x_0) = f'(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f')^{(k)}(x_0)}{k!}(\xi - x_0)^k = r(\xi)(\xi - x_0)^{n-1},$$

wobei $r(x_0) = 0$ und r stetig in x_0. Für $\xi \neq x_0$ ist

$$r(\xi) = \frac{f'(\xi) - T_{f'}^{n-1}(\xi; x_0)}{(\xi - x_0)^{n-1}}$$

stetig in ξ, womit r stetig auf I ist. Integrieren wir nun $R_{f'}^n$ erhalten wir

$$\int_{x_0}^x f'(\xi)\, \mathrm{d}\xi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!} \int_{x_0}^x (\xi - x_0)^k\, \mathrm{d}\xi = \int_{x_0}^x r(\xi)(\xi - x_0)^{n-1}\, \mathrm{d}\xi.$$

Für die linke Seite gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II

$$f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}\frac{1}{k}(\xi - x_0)^k\Big|_{x_0}^x = f(x) - T_f^n(x; x_0) = R_f^{n+1}(x; x_0).$$

Für die rechte Seite folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für $x \geq x_0$

$$\int_{x_0}^x r(\xi)(\xi - x_0)^{n-1}\, \mathrm{d}\xi = r(\hat{\xi})\frac{(x - x_0)^n}{n}$$

wobei $\hat{\xi} \in (x_0, x)$. Da $\hat{\xi}$ eine Funktion in x ist, folgt für $x \to x_0$, dass $\lim_{x \to x_0} r(\hat{\xi}(x)) = 0$, also

$$R_f^{n+1}(x; x_0) = o((x - x_0)^n).$$

Den Fall $x < x_0$ bearbeiten wir analog. □

Korollar 7.16 (Hinreichende Optimalitätsbedingungen)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ und $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$, und $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0*

1. *ein striktes lokales Minimum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$,*
2. *ein striktes lokales Maximum, falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$,*
3. *kein lokales Extremum, falls n gerade ist.*

Beweis. 1. Sei $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ und n gerade. Da $f^{(n+1)}$ stetig auf I ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ für $\xi \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Mit der Lagrange-Form des Restglieds gilt für ein ξ zwischen x_0 und x, dass

$$T_f^n(x; x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0)$$
$$\Longrightarrow f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} > 0$$

für $x \in (x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$, somit hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

2. geht analog
3. $$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$
Da $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $f^{(n+1)}(\xi)$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ein einheitliches Vorzeichen hat. Daraus folgt aber, dass
$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
in $x = x_0$ das Vorzeichen ändert, bzw. dann natürlich auch $f(x) - f(x_0)$. Daraus folgt aber, dass f in x_0 kein lokales Extremum hat.

$\square$

7.2 Taylorreihen

Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. Wir wollen untersuchen, was mit $T_f^n(x;x_0)$ passiert, für $n \to \infty$. Wir stellen uns die Frage, ob $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_f^n(x;x_0)$ für gewisse x gilt.

Definition 7.17 (Taylorreihe)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ und $x_0 \in I$. Wir definieren die Taylorreihe von f als*
$$T_f(x;x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Bemerkung 7.18. *Bei der Taylorreihe handelt es sich um eine Potenzreihe, wir können also mittels der Cauchy-Hadamard Formel den Konvergenzradius ϱ bestimmen. Die Frage ist jedoch, ob $T_f(x;x_0) = f(x)$ gilt. Im allgemeinen nicht. Betrachten wir dazu das Beispiel mit*
$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$
Offenbar ist f glatt und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt aber $T_f(x;0) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, also $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) \neq T_f(x;0)$.

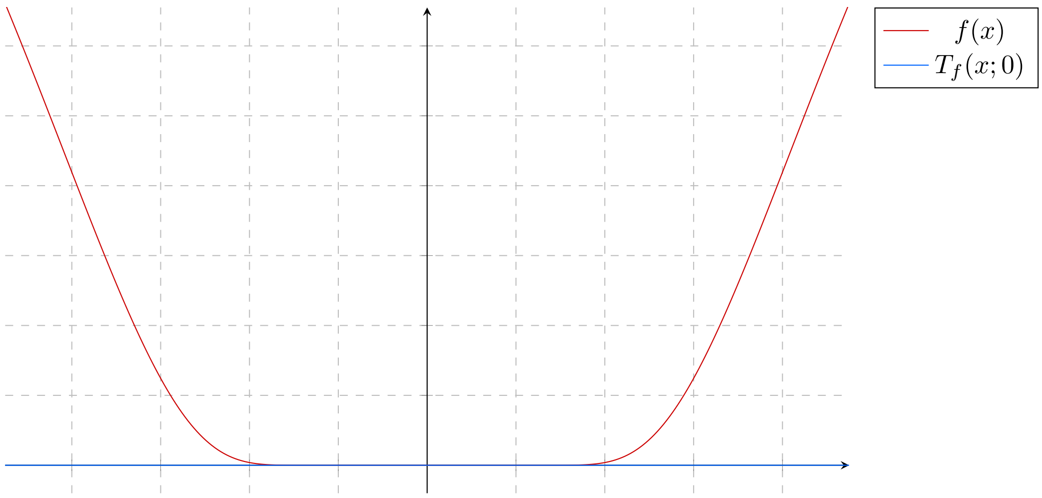


Abbildung 18: f und T_f

Satz 7.19 (Konvergenz von Ableitungen einer Funktionenfolge)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^1(I)^\mathbb{N}$ eine Funktionenfolge, sodass $g = \text{unif}\lim_{n\to\infty} f_n'$, und $f = \text{unif}\lim_{n\to\infty} f_n$, dann gilt $f \in \mathcal{C}^1(I)$ und $f' = g$.*

Beweis. Wir fixieren $x \in I$ und wählen $y \in I$ beliebig. Weil $f_n \in \mathcal{C}^1(I)$ gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II, dass

$$f_n(y) = f_n(x) + \int_x^y f_n' \, \mathrm{d}\xi.$$

Wir behaupten nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^y f_n' \, \mathrm{d}\xi = \int_x^y g \, \mathrm{d}\xi.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $n \geq N \implies \|f_n' - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{|y-x|+1}$. Daraus folgt

$$\left| \int_x^y f_n' \, \mathrm{d}\xi - \int_x^y g \, \mathrm{d}\xi \right| = \left| \int_x^y f_n' - g \, \mathrm{d}\xi \right| \leq \int_x^y |f_n' - g| \, \mathrm{d}\xi \leq \frac{\varepsilon}{|y-x|+1}|y-x| < \varepsilon.$$

Ferner gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, womit

$$f(y) = f(x) + \int_x^y g \, \mathrm{d}\xi.$$

Setzen wir

$$G(y) = \int_x^y g \, \mathrm{d}\xi$$

so ist G nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung I stetig differenzierbar auf I und es gilt $G' = g$, daher ist

$$f(y) - f(x) = G(y)$$

ebenfalls stetig differenzierbar auf I und es gilt $f'(y) = G'(y) = g(y)$. □

Bemerkung 7.20. *Angenommen $g = \operatorname{unif}\lim_{n\to\infty} f_n'$. Für ein $x \in I$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = a$. Wir definieren*

$$f(y) = a + \int_x^y g \, \mathrm{d}\xi.$$

Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen f, $f \in \mathcal{C}^1(I)$ und $f' = g$. Der Beweis geht analog zu Satz 7.19.

Satz 7.21 (Differenzierbarkeit einer Potenzreihe)**.** *Sei*

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit $\varrho > 0$. Dann hat die Potenzreihe

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0} \infty (k+1) a_{k+1} (x - x_0)^k$$

den selben Konvergenzradius. Ferner ist g stetig differenzierbar auf $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho) = I$ und es gilt $\forall x \in I : g'(x) = h(x)$.

Beweis. Für h ergibt sich mit der Cauchy-Hadamard Formel

$$\limsup_{k\to\infty} |k+1|^{\frac{1}{k}} \cdot |a_{k+1}|^{\frac{1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \left(|k+1|^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}} \cdot \left(|a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \left(|a_{k+1}|^{\frac{1}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{k}} = q.$$

Hernach gilt also $\varrho_g = \frac{1}{q} = \varrho_h$. Ist nun $J \subseteq I$ ein kompaktes Intervall, so gilt, dass die durch

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$$

festgelegte Funktionenfolge gleichmäßig gegen g auf J konvergiert. Ferner sind $g_n \in \mathcal{C}^1(J)$ und

$$g_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k (x - x_0)^{k-1}$$

konvergieren nach Satz 7.19 gleichmäßig gegen h. $\square$

Korollar 7.22. *Sei*

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$. Dann ist mit $I = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ $g \in \mathcal{C}^\infty(I)$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ hat $g^{(n)}$ den gleichen Konvergenzradius.

Beweis. Ergibt sich unmittelbar durch Induktion aus Satz 7.21. $\square$

Bemerkung 7.23. *Ist*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine Potenzreihe mit $\varrho > 0$, so folgt aus Korollar 7.22, dass

$$f^{(n)}(x_0) = a_n n! \iff a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Besitzt f also eine Potenzreihendarstellung, so stimmt diese mit ihrer Taylorreihe überein.

8 Mehrdimensionale Differentialrechnung

Anmerkung

Die originale Variante dieser Mitschrift hat für Vektoren eines beliebigen Vektorraumes V die Schreibweise $\boldsymbol{x}$ statt x verwendet. In dieser überarbeiteten Version sind nur noch Vektoren in $\mathbb{R}^n$ fett-geschrieben. Des weiteren wurden lineare Abbildungen $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ als A geschrieben. Hier wurde ebenfalls der Wechsel zu A gemacht, da A speziell für Matrizen verwendet wird.

Wir wollen nun die Differentialrechnung im normierten $\mathbb{R}^n$ erarbeiten, betrachten also Funktionen der Form $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Wir können auf $\mathbb{R}^n$ verschiedene Normen definieren, wie etwa die euklidische Norm, Manhattan Norm oder die Maximumsnorm. Wir haben bereits die grundlegenden Begriffe der Topologie des $\mathbb{R}^n$ in Abschnitt 5 erarbeitet. Das umfasst unter anderem Stetigkeit und Kompaktheit. Wir haben indessen auch die Operatornorm kennengelernt, welche als $\|A\| = \sup\{\|Av\|_W : \|v\|_V = 1\}$ für Operatoren $A\colon V \to W$ definiert ist.

Definition 8.1 (Raum der beschränkten linearen Operatoren)**.** *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume über $\mathbb{R}$. Wir setzen*

$$\mathcal{L}(V, W) = \{A\colon V \to W : A \text{ beschränkt und linear}\}$$

$\mathcal{L}(V, W)$ bildet einen normierten Vektorraum, da wir voraussetzen, dass alle $A \in \mathcal{L}(V, W)$ linear und beschränkt sind. Seien $A, B \in \mathcal{L}(V, W)$, $v, w \in V$ und $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&(\alpha A + \beta B)(\lambda v + \mu w) = \alpha A(\lambda v + \mu w) + \beta B(\lambda v + \mu w)\\ &= \alpha(\lambda Av + \mu Aw) + \beta(\lambda Bv + \mu Bw) = \lambda(\alpha A + \beta B)(v) + \mu(\alpha A + \beta B)(w).\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}&\|\alpha Av + \beta Bv\|_W \leq \|\alpha Av\|_W + \|\beta Bv\|_W = |\alpha| \cdot \|Av\|_W + |\beta| \cdot \|Bv\|_W\\ &\leq (|\alpha| \cdot \|A\| + |\beta| \cdot \|B\|)\|v\|_V\end{aligned}$$

Somit gilt auf $\mathcal{L}(V, W)$ die Dreiecksungleichung $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Definition 8.2 (Äquivalenz von Normen)**.** *Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ seien Normen auf V. Wir sagen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent, falls $m, M > 0$ existieren, sodass*

$$\forall v \in V : m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2.$$

Auf der Menge der Normen auf V ist die Äquivalenz eine Äquivalenzrelation:

- Reflexivität $1\|v\|_1 \leq \|v\|_1 \leq 1\|v\|_1$
- Symmetrie

$$\begin{aligned}&m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \implies \|v\|_2 \leq \frac{1}{m}\|v\|_1 \qquad \|v\|_1 \leq M\|v\|_2 \implies \|v\|_2 \geq \frac{1}{M}\|v\|_1\\ &\implies \frac{1}{M}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \frac{1}{m}\|v\|_1\end{aligned}$$

- Transitivität

$$\left.\begin{aligned}m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2\\ m'\|v\|_3 \leq \|v\|_2 \leq M'\|v\|_3\end{aligned}\right\}\forall v \in V$$

$$\underbrace{m \cdot m'}_{>0}\|v\|_3 \leq m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2 \leq \underbrace{M \cdot M'}_{>0}\|v\|_3 \qquad \forall v \in V$$

Bemerkung 8.3.

- *Äquivalente Normen erzeugen die gleichen konvergenten Folgen bzw. Cauchyfolgen*

- *Wenn V vollständig bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist, dann auch bezüglich $\|\cdot\|_2$*
- *Wenn V kompakt bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist, dann auch bezüglich $\|\cdot\|_2$*
- *Wenn $O \subseteq V$ offen in Bezug auf $\|\cdot\|_1$ ist, dann auch in Bezug auf $\|\cdot\|_2$*

Äquivalente Normen erzeugen indes auch identische Taylorreihen. Allgemein sind alle topologischen Eigenschaften in Bezug auf $\|\cdot\|_1$ äquivalent in Bezug auf $\|\cdot\|_2$, insbesondere also die Stetigkeit. Wir erinnern uns an die Maximumsnorm auf $V = \mathbb{R}^n$ mit $\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max\{|v_i| : 1 \leq i \leq n\}$

$$\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|_\infty < \varepsilon \iff \max\{|v_i - w_i| : 1 \leq i \leq n\} < \varepsilon \iff |v_i - w_i| < \varepsilon \qquad 1 \leq i \leq n$$

Sei $(\boldsymbol{v}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine mit Grenzwert $\boldsymbol{v}$ konvergente Folge in V bezüglich $\|\cdot\|\infty$, sprich $\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : k \geq K \implies \|\boldsymbol{v}^k - \boldsymbol{v}\|_\infty < \varepsilon$ was äquivalent ist zu $\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : k \geq K \implies |v_i^k - v_i| < \varepsilon$ für alle $1 \leq i \leq n$ bzw. $v_i = \lim_{k\to\infty} v_i^k$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wenn $(\boldsymbol{v}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert, dann konvergieren alle Komponenten $(v_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$.

Satz 8.4 (Heine-Borel)**.** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, dann ist K kompakt in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es sei $(O_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Da K beschränkt ist, gilt $\operatorname{diam}(K) = \sup_{x,y\in K} \|x - y\|_\infty = M < \infty$. Wir können also ein $s \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass

$$K \subseteq [-s, s]^n = W$$

gilt. Wir zerlegen W in 2^n abgeschlossene Teilwürfel mit der Kantenlänge $\frac{s}{2}$. Nach unserer Voraussetzung, dass es keine endliche Teilüberdeckung zu K gibt, gibt es einen Würfel W_1, sodass es zu $K \cap W_1$ ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung der O_i gibt. Wir wiederholen dieses Verfahren und teilen W_1 in 2^n Würfel der Kantenlänge $\frac{s}{4}$. Dadurch erzeugen wir also eine monoton fallende Folge $W_{k+1} \subseteq W_k$ von Würfeln, mit den Kantenlängen $\frac{s}{2^k}$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt nun, dass es zu keiner der Mengen $K \cap W_k$ eine endliche Teilüberdeckung der O_i gibt. In jeder Menge $K \cap W_k$ wählen wir nun ein $\boldsymbol{x}_k$. Nach unserer Konstruktion von W_k ist $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und besitzt somit in K einen Grenzwert $\boldsymbol{x}$. Ferner gibt es ein O_j mit $\boldsymbol{x} \in O_j$. Offenbar enthält O_j abzählbar viele $W_k \cap K$, was aber ein Widerspruch dazu ist, dass kein W_k eine endliche Teilüberdeckung der O_i besitzt. ☐

Wir folgern: $\mathbb{S}_\infty^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}$ nennen wir die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Diese ist beschränkt und abgeschlossen. Sei $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{S}_\infty^{n-1}$ und $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}$, $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig, womit $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$ gilt, somit ist $\mathbb{S}_\infty^{n-1}$ kompakt in $\mathbb{R}^n$.

Satz 8.5 (Normäquivalenz auf $\mathbb{R}^n$)**.** *Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

Beweis. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wir zeigen, dass $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ ist. Da die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, folgt aus der Transitivität, dass beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

a Wir zeigen zuerst $\|\boldsymbol{x}\| \leq M\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Sei $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ die kanonische Basis auf $\mathbb{R}^n$ und $M' = \max\{\|\boldsymbol{e}_i\| : 1 \leq i \leq n\} > 0$:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{e}_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \underbrace{\|\boldsymbol{e}_i\|}_{\leq M'} \leq M' \sum_{i=1}^n |x_i|$$
$$\leq M' \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{x}\| = \underbrace{M'n}_{=M} \cdot \|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

b Weiter zeigen wir $\|\boldsymbol{x}\| \geq m\|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Wir betrachten $\nu\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\nu(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Wir behaupten, dass ν stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist. Dazu verwenden wir das Folgenkriterium. Sei $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}\| = 0$, sprich $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{x}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}\| \leq \lim_{k\to\infty} M'n\|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}\|_\infty = M'n \lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}\| = 0$$
$$\implies |\nu(\boldsymbol{x}^k) - \nu(\boldsymbol{x})| = |\|\boldsymbol{x}^k\| - \|\boldsymbol{x}\|| \leq \|\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Somit ist ν stetig auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Da S_∞^{n-1} kompakt ist, ist $\nu\colon S_\infty^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig, sprich ν nimmt auf S_∞^{n-1} ein Minimum an:

$$m = \min\{\nu(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in S_\infty^{n-1}\}$$

Weil $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ und $\forall \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$ folgt $m > 0$, womit $\forall \boldsymbol{x} \in S_\infty^{n-1} : m \leq \|\boldsymbol{x}\|$ für alle $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$. Sei $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, dann ist $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|_\infty}\boldsymbol{z}$ und es folgt

$$m \leq \|\boldsymbol{x}\| = \left\| \frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|_\infty}\boldsymbol{z} \right\| = \frac{\|\boldsymbol{z}\|}{\|\boldsymbol{z}\|_\infty}$$

Also gilt für alle $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, dass $m\|\boldsymbol{z}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{z}\|$. Somit gilt $\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : m\|\boldsymbol{z}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{z}\|$, da $0 \leq 0$, womit $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent sind.

□

Wenn $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ also bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen $\boldsymbol{x}$ konvergiert, dann konvergiert $(\boldsymbol{x}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\boldsymbol{x}$ in Bezug auf eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 8.6. *Seien U, V, W normierte Räume und $A \in \mathcal{L}(U, V)$ sowie $B \in \mathcal{L}(V, W)$ beschränkt lineare Abbildungen, dann ist $B \circ B : U \to W$ beschränkt linear und es gilt $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.*

Beweis. Da A, B linear sind, ist auch $B \circ A$ linear. Sei weiters $x \in U$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\|A \circ Ax\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \implies \|B \circ A\| = \min\{m \geq 0 : \|B \circ Ax\| \leq \|x\|\} \\ &\implies \|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

□

Lemma 8.7 (Beschränktheit in Bild- und Urbildraum)**.** *Sei* $\mathrm{A}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *linear, dann ist* A *beschränkt bezüglich $\|\cdot\|$ im Bild- und Urbildraum.*

Beweis. Sei $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ die Matrixdarstellung von A bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} &y_i = (\mathrm{A}\boldsymbol{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \\ &|y_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max\{|x_j| : j = 1, \dots, n\} = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_\infty \\ &\underbrace{\max\{|y_i| : i = 1, \dots, m\}}_{=\|\boldsymbol{y}\|=\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|} \leq \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, m\right\} \cdot \|\boldsymbol{x}\|_\infty \\ &\implies \|\mathrm{A}\| \leq \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, m\right\} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.8. *Es gilt*

$$\|\mathrm{A}\| = \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, m\right\}.$$

Das ist natürlich analog zu Definition 5.32 mit

$$\|\mathrm{A}\| = \min\{m \geq 0 : \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_W \leq m\|\boldsymbol{x}\|_V, \forall \boldsymbol{x} \in V\}$$

Wenn A *linear ist, gilt außerdem*

$$\|\mathrm{A}\| = \sup\{\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_W : \|\boldsymbol{x}\|_V = 1\}$$

Wir wollen diesen Umstand noch kurz beweisen. Sei $m' = \sup\{\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_W : \|\boldsymbol{x}\|_V = 1\} < \infty$. *Sei* $\boldsymbol{y} \in V$ *mit* $\boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$. *Wir wählen* $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|_V}\boldsymbol{y}$, *dann folgt direkt* $\|\boldsymbol{x}\|_V = 1$.

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\| &= \left\|\mathrm{A}\frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|_V}\boldsymbol{y}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{y}\|_V}\cdot\|\mathrm{A}\boldsymbol{y}\| \leq m' \\
&\implies \|\mathrm{A}\boldsymbol{y}\|_W \leq m'\|\boldsymbol{y}\|_V \\
\boldsymbol{y} = \mathbf{0} &\implies \|\mathrm{A}\boldsymbol{x}\|_W = \|\mathbf{0}\|_W = 0 \leq m'\|\boldsymbol{y}\|_W = 0 \\
&\implies \|\mathrm{A}\| \leq m'
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ *beliebig,* $\varepsilon < m'$ *und* $m' = \sup\{\|\mathrm{A}\boldsymbol{v}\|_W : \|\boldsymbol{v}\|_V = 1\} > 0$, *dann existiert* $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in V$ *mit* $\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|V = 1$, *sodass* $\|\mathrm{A}\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_W \geq m' - \varepsilon$, *womit* $m' - \varepsilon \notin \{m \geq 0 : \|\mathrm{A}\boldsymbol{v}\|_W \leq m\|\boldsymbol{v}\|_V\}$, *sprich* $m' - \varepsilon$ *ist eine untere Schranke dieser Menge. Somit folgt* $\|\mathrm{A}\| = \min\{m \geq 0 : \|\mathrm{A}\boldsymbol{v}\|_W \leq m\|\boldsymbol{v}\|_V\}$. *Da* $\forall\varepsilon > 0 : \|\mathrm{A}\| \geq m' - \varepsilon \implies \|\mathrm{A}\| \geq m'$. *Falls* $m' = 0$ *folgt für* $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$*:*

$$\begin{aligned}
\left\|\mathrm{A}\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|_V}\boldsymbol{v}\right\|_W = 0 &\implies \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|_V}\|\mathrm{Av}\|_W = 0 \\
&\implies \|\mathrm{A}\boldsymbol{v}\|_W = 0 \implies \mathrm{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\forall v \in V \setminus \{\mathbf{0}\} \\
\mathrm{A} = 0 &\implies \|\mathrm{A}\| = 0
\end{aligned}$$

Bemerkung 8.9. *Sei* $A \in \mathcal{L}(V, W)$ *und* $x, y \in V$, *dann gilt*

$$\|Ax - Ay\|_W = \|A(x - y)\|_W \leq \|A\| \cdot \|x - y\|_V.$$

Sprich A *ist Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante* $\|A\|$.

Definition 8.10. *Sei* $O \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $\boldsymbol{x}_0 \in O$ *und* $f\colon O \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}$, *wir definieren*

$$f = o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^k) \qquad k \in \mathbb{N}$$

falls $r\colon O \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}$ *existiert mit* $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} r(\boldsymbol{x}) = 0$ *und* $f(\boldsymbol{x}) = r(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^k$ *für* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$.
Wir sagen $f = \mathcal{O}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^k)$, *falls* $r\colon O \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}$ *und* $\varepsilon > 0$ *existieren, sodass* $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0) \subseteq O$ *und* $r\big|_{\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)\setminus\{\boldsymbol{x}_0\}}$ *beschränkt ist und* $f(\boldsymbol{x}) = r(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^k$ *für* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$.

Definition 8.11 (Frechét-Differenzierbarkeit)**.** *Sei* $f\colon O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, O *offen in* $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$. *Wir sagen* f *ist Frechét differenzierbar in* $\boldsymbol{x}_0$, *falls* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *existiert, sodass*

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})\|_{\mathbb{R}^m} = o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^n}) \tag{D}$$

Wir nennen $f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ *die best-mögliche linear-affine Approximation an* f *in* $\boldsymbol{x}_0$ *und bezeichnen*

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = R_F^2(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x}_0)$$

Lemma 8.12 (Existenz der Matrix A)**.** *Sei* $f\colon O \to \mathbb{R}^m$ *in* $\boldsymbol{x}_0 \in O$ *differenzierbar, dann ist* A *aus Definition 8.11 eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ linear, die Gleichung (D) erfüllen. Sei $\varrho > 0$, sodass $\mathcal{B}_\varrho(\boldsymbol{x}_o) \subseteq O$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit

$\|\boldsymbol{v}\| < \varrho$ und $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Sei weiters $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v} \in \mathcal{B}_\varrho(\boldsymbol{x}_0)$ mit $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{R}^m})\|(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} \\
&= \| - f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{B}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} \\
&\leq \| \underbrace{-(f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0 - \mathrm{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))}_{=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o\|_{\mathbb{R}^n})} \|_{\mathbb{R}^m} + \| \underbrace{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_o) - \mathrm{B}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o)}_{=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o\|_{\mathbb{R}^n})} \|_{\mathbb{R}^m} \\
&= o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^n}) = r(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^n} = r(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\implies \left\|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|_{\mathbb{R}^n}}\boldsymbol{v}\right\|_{\mathbb{R}^m} = r(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Sei $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $\|\boldsymbol{w}\| = 1$ und $\boldsymbol{v}_\varepsilon = \varepsilon\boldsymbol{w}$ für $\varepsilon < \varrho$, somit $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varrho(\boldsymbol{x}_0) \implies \boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon \in \mathcal{B}_\varrho(\boldsymbol{x}_0)$.

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\| = \varepsilon &\implies \boldsymbol{v}_\varepsilon = \|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|\boldsymbol{w} \iff \boldsymbol{w} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|}\boldsymbol{v}_\varepsilon \\
\|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\boldsymbol{w}\| &= \left\|(\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{1}{\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|}\boldsymbol{v}_\varepsilon\right\| = o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\boldsymbol{w}$ ist unabhängig von ε, womit folgt $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{w}\|_{\mathbb{R}^n} = 1$. Sei $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und $\boldsymbol{w} = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}^n}}\boldsymbol{u}$, dann folgt

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\boldsymbol{w} = (\mathrm{A}-\mathrm{B})\frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|_{\mathbb{R}^n}}\boldsymbol{u} = 0 \implies \forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\} : \mathrm{A}\boldsymbol{u} = \mathrm{B}\boldsymbol{u} \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}$$

□

Definition 8.13 (Fortsetzung). *Die durch Gleichung (D) eindeutig bestimmte lineare Abbildung* A *schreiben wir als*

$$\mathrm{A} = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)$$

und nennen $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ *die Frechét-Ableitung von* f *in* $\boldsymbol{x}_0$.

Lemma 8.14 (Stetigkeit aus Differenzierbarkeit). *Sei* $f\colon O \to \mathbb{R}^m$ *differenzierbar in* $\boldsymbol{x}_0 \in O$ *und* O *offen, dann ist* f *stetig in* $\boldsymbol{x}_0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| = \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\| \\
&\leq \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\| + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\| \\
&= r(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\| \leq r(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\| \cdot \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| \\
&= \underbrace{(r(\boldsymbol{x}) + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\|)}_{\substack{\text{beschränkt in einer} \\ \text{Umgebung von } \boldsymbol{x}_0}} \underbrace{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}_{\overset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}{\longrightarrow} 0} \\
&\implies \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| = 0
\end{aligned}$$

Somit ist f stetig in $\boldsymbol{x}_0$. □

Lemma 8.15 (Linearität der Frechét-Ableitung). *Seien* $f, g\colon O \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0 \in O$ *und* O *offen, sowie* f *und* g *differenzierbar in* $\boldsymbol{x}_0$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dann gelten*

1. λf *ist differenzierbar in* $\boldsymbol{x}_0$ *und* $\mathrm{d}(\lambda f)(\boldsymbol{x}_0) = \lambda \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$
2. $f + g$ *ist differenzierbar in* $\boldsymbol{x}_0$ *und* $\mathrm{d}(f+g)(\boldsymbol{x}_0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)$

Die Ableitung wirkt als lineare Abbildung auf einem passenden Vektorraum von differenzierbaren Funktionen.

Beweis.

1.

$$\begin{aligned}&\|\lambda f(\boldsymbol{x})-\lambda f(\boldsymbol{x}_0)-\lambda \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\| = |\lambda|\cdot\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\\&=|\lambda|\cdot o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}&\|(f+g)(\boldsymbol{x})-(f+g)(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\\&\le\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|+\|g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\\&=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)+o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)=r_f(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|+r_g(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\\&=\underbrace{(r_f(\boldsymbol{x})+r_g(\boldsymbol{x}))}_{\overset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}{\longrightarrow}\mathbf{0}}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)\end{aligned}$$

□

Satz 8.16 (Kettenregel in mehreren Dimensionen)**.** *Sei $f\colon O\to\mathbb{R}^m$ und $O\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, f differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0\in O$. Sei $\boldsymbol{y}_0=f(\boldsymbol{x}_0)\in U\subseteq\mathbb{R}^m$ und $g\colon U\to\mathbb{R}^l$, U offen und g differenzierbar in $\boldsymbol{y}_0$, dann gilt:*

$$g\circ f\colon O\to\mathbb{R}^l$$

ist differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$ mit der Ableitung

$$\underbrace{\mathrm{d}(g\circ f)(\boldsymbol{x}_0)}_{\in\mathbb{R}^{l\times n}}=\underbrace{\mathrm{d}g(f(\boldsymbol{x_0}))}_{\in\mathbb{R}^{l\times m}}\cdot\underbrace{\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$$

Beweis. Wir zeigen: $\|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{y}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)\cdot\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^l}=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^n})$

$$\begin{aligned}&\|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{y}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)\cdot\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^l}\\&=\|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{y}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)(\underbrace{f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)}_{=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0})+\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)\cdot(f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0))\|_{\mathbb{R}^l}\\&\le\underbrace{\|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{y}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\|_{\mathbb{R}^l}}_{=I}+\underbrace{\underbrace{\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)\|}_{\text{Operatornorm}}\cdot\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}}^m}_{=II}\\&II=\|\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)\|\cdot\underbrace{\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m}}_{=r_{II}(\boldsymbol{x})\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\\&r_{II}(\boldsymbol{x})\overset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}{\longrightarrow}0\implies II=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)\\&I=\|g(\boldsymbol{y})-g(\boldsymbol{y}_0)-\mathrm{d}g(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\|_{\mathbb{R}^l}=r_I(\boldsymbol{y})\cdot\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|_{\mathbb{R}^n}\overset{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0}{\longrightarrow}0\\&r_I(\boldsymbol{y})=r_I(f(\boldsymbol{x}))=\tilde{r}_I(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Da f differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$ ist, ist f stetig in $\boldsymbol{x}_0$ mit $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\tilde{r}_I=0$

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\|=\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)\|\le\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)-\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|+\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\|\\&\le|r_{II}(\boldsymbol{x})|\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|+\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\|\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^n}=(|r_{II}(\boldsymbol{x})|+\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\|)\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\\&\le M\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\forall\boldsymbol{x}\in O,\quad\text{wobei }\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|\text{ hinreichend klein}\\&I\le|\tilde{r}(\boldsymbol{x})|\cdot M\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)\qquad\implies I+II=o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|)\end{aligned}$$

□

Lemma 8.17 (Abschätzung durch Frechét-Ableitung)**.** *Sei $f\colon O\to\mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$, dann existiert ein $\delta>0$, sodass $\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{B}_\delta(\boldsymbol{x}_0)\cap O$ gilt, dass*

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)\|\le(1+\|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\|)\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} &\leq \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} \\ &\leq |r(\boldsymbol{x})| \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|_{\mathbb{R}^m} + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x})\| \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = *\end{aligned}$$

Wähle $\delta > 0$ so, dass $\forall \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$ und $\boldsymbol{x} \in O$ gilt, dass $|r(\boldsymbol{x})| \leq 1$:

$$* \leq (1 + \|\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\|) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|$$

□

Definition 8.18 (Ableitungsfunktion)**.** *Sei $f\colon O \subseteq \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir sagen f ist differenzierbar auf O, falls $\forall \boldsymbol{x} \in O$ gilt, dass f in $\boldsymbol{x}$ differenzierbar ist. Wir betrachten:*

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}) & \text{„Ableitungsfunktion“} & \\ O \subseteq \mathbb{R}^n \to & \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}_{\substack{\text{normierter Vektorraum} \\ \text{mit Operatornorm}}} & \simeq \mathbb{R}^{m \times n} \end{array}$$

Wir sagen f ist stetig differenzierbar auf O falls $\boldsymbol{x} \mapsto \mathrm{d}f(\boldsymbol{x})$ stetig auf O mit Werten in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist.

Wir wollen nun untersuchen, wie man $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ tatsächlich berechnen kann. Wir betrachten daher zuerst $f\colon O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Wir sagen, dass f von n Variablen $x_1, \dots, x_n$ abhängt. Sei $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in O$, dann existiert $r > 0$ sodass

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ \xi \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

auch in O liegt für $\xi \in \mathcal{B}_r(x_i)$. Wir betrachten nun $g_i(\xi) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$ mit $g_i\colon \mathcal{B}_r(x_i) \to \mathbb{R}$. Falls g_i im Punkt x_i differenzierbar ist, so nennen wir

$$g_i'(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

die partielle Ableitung von f nach x_i im Punkt $\boldsymbol{x}$. Wir verwenden unterschiedliche Notationen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = \partial_{x_i} f$$

Die partielle Ableitung von f in $\boldsymbol{x}$ wird berechnet, indem man die Variablen x_k für $k \neq i$ als Konstante betrachtet und f als nur von x_i abhängig gesehen und differenziert wird. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 \cos(x_3) - x_1 x_2 \frac{1}{x_3^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2x_1 \cos(x_3) - x_2 \frac{1}{x_3^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= -x_1 \frac{1}{x_3^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= -x_1^2 \sin(x_3) + x_1 x_2 \frac{2}{x_3^3} \end{aligned}$$

Noch eine kleine Bemerkung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(\boldsymbol{x})) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}))$$

Definition 8.19 (Richtungsableitung bzw. Gateaux-Ableitung)**.** *Sei $f\colon O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$. Wir betrachten für $\boldsymbol{x} \in O$:*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})\right)$$

Falls dieser Grenzwert existiert nennen wir $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ die Richtungsableitung von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ in Richtung $\boldsymbol{v}$, dabei ist $\boldsymbol{v}$ die „Richtung“ der Ableitung. Wir nennen $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$ auch die Gateaux-Ableitung von f in Richtung $\boldsymbol{v}$. Für $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_i$ gilt natürlich $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Für allgemeinere Funktionen $f\colon O \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

mit den Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \qquad \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v}) \end{bmatrix}$$

sofern die entsprechenden Grenzwerte existieren.

Können wir $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{v})$ mit $\mathrm{d}f$ in Zusammenhang setzen?

Lemma 8.20 (Ableitung linear affiner Funktionen)**.** *Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear affin, sprich $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{0}$ mit $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, dann ist φ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathrm{A}$*

Beweis.

$$\begin{aligned} \|\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x}_0) - \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} &= \|\mathrm{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} - \mathrm{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{b} - \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} \\ &= \|\mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) - \mathrm{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)\|_{\mathbb{R}^m} = 0 = o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|) \end{aligned}$$

□

Lemma 8.21 (Berechnung der Richtungsableitung)**.** *Sei $f\colon O \to \mathbb{R}^m$ mit $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\boldsymbol{x}_0 \in O$. Sei weiters f differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$, dann existieren in $\boldsymbol{x}_0$ alle Richtungsableitungen $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{v})$ für $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und es gilt:*

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{v}) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}$$

Beweis. Sei $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, wir legen $l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}\colon \mathcal{B}_\varepsilon(0) \to O \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei O offen ist und $\boldsymbol{x}_0$ mit $l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(h) = \boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}$ fest, dabei ist $l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}$ linear affin und $l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(0) = \boldsymbol{x}_0$, weiters gilt natürlich $\mathrm{d}l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(0) = \boldsymbol{v}$. Wir betrachten nun $f\colon O \to \mathbb{R}^m$ mit $\boldsymbol{x}_0 \in O$ und f differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$ mit Frechét-Ableitung $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$. Wir wählen ε hinreichend klein, sodass für

$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ gilt $l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(\mathcal{B}_\varepsilon(0)) \subseteq O$. Nach der Kettenregel folgt daher:

$$\mathrm{d}(f \circ l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}})(0) = \mathrm{d}f(\underbrace{l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(0)}_{=\boldsymbol{x}_0}) \cdot \mathrm{d}l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(0) = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v}$$

$$f \circ l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}}(h) = f(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) \end{bmatrix}$$

$$(f \circ l_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{v}})'(0) = \begin{bmatrix} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f_1(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - f_1(\boldsymbol{x}_0)) \\ \vdots \\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f_m(\boldsymbol{x}_0 + h\boldsymbol{v}) - f_m(\boldsymbol{x}_0)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_m(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{v}) \end{bmatrix} = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{v})$$

□

Zur Anwendung. Sei $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Matrixdarstellung der Ableitung bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_i = [\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)]_i = \mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \partial_{x_i} f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_i} f_m(\boldsymbol{x}_0) \end{bmatrix}$$

Es gilt also, falls f in $\boldsymbol{x}_0$ Frechét-differenzierbar ist, existieren alle partiellen Ableitungen von f in $\boldsymbol{x}_0$ und es gilt:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Wir nennen $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$ die Jacobi-Matrix von f.

Lemma 8.22 (Bestimmung der Frechét-Ableitung durch die Jacobi-Matrix)**.** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\boldsymbol{x}_0 \in O$ und $f\colon O \to \mathbb{R}^m$ sei differenzierbar in $\boldsymbol{x}_0$, dann ist die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\mathrm{d}f(\boldsymbol{x}_0)$ bezüglich der kanonischen Basis gegeben durch die Jacobi-Matrix von f in $\boldsymbol{x}_0$.*

Können wir von der Existenz der partiellen Ableitungen auf die Differenzierbarkeit von f in $\boldsymbol{x}_0$ schließen? Nein. Betrachten wir dazu ein Gegenbeispiel.

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Bestimmen wir die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{2x_1 x_2^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_1^2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}) = \lim_{x_1\to 0} \frac{1}{x_1}(\underbrace{f(x_1, 0)}_{=0} - \underbrace{f(0,0)}_{=0}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{0}) = \lim_{x_2\to 0} \frac{1}{x_2}(\underbrace{f(0, x_2)}_{=0} - \underbrace{f(0,0)}_{=0}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sprich wenn f differenzierbar wäre, müsste $\mathrm{d}f(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, dann wäre jede Richtungsableitung

$$\mathrm{d}f(\mathbf{0}_2^T, \boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_2^T \boldsymbol{v} = 0$$

Bestimmen wir $\mathrm{d}f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v})$ für $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$ „manuell“ erhalten wir jedoch:

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\underbrace{f(h,h)}_{=\frac{h^3}{2h^2}} - \underbrace{f(\boldsymbol{0})}_{=0}) = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{2h^3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Die partiellen Ableitungen sind nicht alle stetig im Nullpunkt.

Satz 8.23 (Zusammenhang: Existenz partieller Ableitungen und Differenzierbarkeit)**.** *Sei $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon O \to \mathbb{R}^m$ sei stetig auf o und $\forall \boldsymbol{x} \in O$ mögen sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ für $j = 1,\dots,n$ existieren. Außerdem sollen alle partiellen Ableitungen stetige Funktionen auf O sein, sprich $\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon O \to \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})$ ist stetig auf O. Dann ist f stetig differenzierbar auf O und $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}$.*

Beweis. Idee: Wir nähern uns dem Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in O$ an entlang von Strecken parallel zu den Koordinatenachsen. Sei $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix}x_1^0 & \cdots & x_n^0\end{bmatrix}^T$ und $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^T$. Wir definieren Zwischenpunkte:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{x}_0 \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix}x_1 & x_2^0 & \cdots & x_n^0\end{bmatrix}^T, \cdots, \boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{x}\\
&\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \boldsymbol{\xi}_k + (x_{k+1} - x_{k+1}^0)\boldsymbol{e}_{k+1}\\
&\varphi_k(t) = f(\boldsymbol{\xi}_k + t(x_{k+1} - x_{k+1}^0)\boldsymbol{e}_{k+1})\\
&\varphi_k(0) = f(\boldsymbol{\xi}_k)\\
&\varphi_k(1) = f(\boldsymbol{\xi}_{k+1})\\
&\varphi_k'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(\boldsymbol{\xi}_k + (t+h)(x_{k+1} - x_{k+1}^0)\boldsymbol{e}_{k+1}) - f(\boldsymbol{\xi}_k + t(x_{k+1} - x_{k+1}^0)\boldsymbol{e}_{k+1}))\\
&= \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(\boldsymbol{\xi}_k + t(x_{k+1} - x_{k+1}^0)\boldsymbol{e}_{k+1})(x_{k+1} - x_{k+1}^0)
\end{aligned}$$

Somit ist φ_k stetig differenzierbar in jeder Komponente

$$\varphi_k(t) = \begin{bmatrix}\varphi_{1,k}(t)\\ \vdots \\ \varphi_{m,k}(t)\end{bmatrix}$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daher

$$\varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \int_0^1 \varphi_k'(t)\;\mathrm{d}t = \begin{bmatrix}\int_0^1 \varphi_{1,k}'(t)\;\mathrm{d}t\\ \vdots \\ \int_0^1 \varphi_{m,k}'(t)\;\mathrm{d}t\end{bmatrix}$$

Wir zeigen nun

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|}\cdot\left\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\right\| = 0$$

Wir wählen in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die $\|\cdot\|_\infty$ Norm:

$$
\begin{aligned}
* &= \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty} \cdot \left\| \underbrace{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)}_{=\sum_{k=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_k) - f(\boldsymbol{\xi}_{k-1})} - \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^0) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right\| \\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty} \cdot \left\| \sum_{k=1}^n f(\boldsymbol{\xi}_k) - f(\boldsymbol{\xi}_{k-1}) - (x_k - x_k^0)\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right\| \\
&= \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty} \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k)(x_k - x_k^0) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0)(x_k - x_k^0)\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty} \sum_{k=1}^n \left\| \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right)(x_k - x_k^0)\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \frac{1}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty} \sum_{k=1}^n \underbrace{|x_k - x_k^0|}_{\leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty} \int_0^1 \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right\| \,\mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=1}^n \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right\| : 0 \leq t \leq 1 \right\}
\end{aligned}
$$

$$\|\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x}_0\|_\infty \leq \max\{|x_i - x_i^0| : i = 1, \ldots, k\} \leq \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|_\infty$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, und δ_k so gewählt, dass

$$\|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta_k \implies \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right\| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Für $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| < \delta_k$ folgt

$$\|\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k - \boldsymbol{x}_0\| < \delta_k \implies \max \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{\xi}_{k-1} + t(x_k - x_k^0)\boldsymbol{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \right\| : 0 \leq t \leq 1 \right\} < \frac{\varepsilon}{n}$$

Für $\delta = \min\{\delta_k, k = 1, \ldots, n\}$ und $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\| < \delta$ gilt also

$$* \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

$\square$

9 Symbolindex

9.1 Gängige Ableitungen und Stammfunktionen

Wir legen $\Omega = \omega x + \varphi$ fest.

f	f'	F
$A\sin(\omega x + \varphi)$	$\omega A\cos(\Omega)$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\Omega)$
$A\cos(\omega x + \varphi)$	$-\omega A\sin(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\sin(\Omega)$
$A\tan(\omega x + \varphi)$	$\omega A\sec^2(\Omega)$	$-\frac{A}{\omega}\ln(\cos(\Omega))$
$A\cot(\omega x + \varphi)$	$-\omega A\csc^2(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\ln(\sin(\Omega))$
$A\sec(\omega x + \varphi)$	$A\omega\tan(\Omega)\sec(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\ln\left(-\cot\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)$
$A\csc(\omega x + \varphi)$	$-A\omega\cot(\Omega)\csc(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\ln\left(\tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)$
$A\arcsin(\omega x + \varphi)$	$A\omega(1-\Omega^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{A}{\omega}\left(\sqrt{1-\Omega^2} + \Omega\arcsin(\Omega)\right)$
$A\arccos(\omega x + \varphi)$	$-A\omega(1-\Omega^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{A}{\omega}\left(\omega x\arccos(\Omega) - \sqrt{1-\Omega^2} + \varphi\arcsin(\Omega)\right)$
$A\arctan(\omega x + \varphi)$	$x(1+\Omega^2)^{-1}$	$-\frac{A}{2\omega}\left(\ln(1+\Omega^2) - 2\Omega\arctan(\omega)\right)$
$A\mathrm{arccot}(\omega x + \varphi)$	$-\omega(1+\Omega^1)^{-1}$	$\frac{A}{2\omega}\left(\ln(1+\Omega^2) - 2\varphi\arctan(\Omega) + 2\omega x\mathrm{arccot}(\Omega)\right)$
$A\mathrm{arcsec}(\omega x + \varphi)$	$\omega(\Omega^2\sqrt{1-\Omega^{-2}})^{-1}$	
$A\mathrm{arccsc}(\omega x + \varphi)$	$-\omega(\Omega^2\sqrt{1-\Omega^{-2}})^{-1}$	

Tabelle 2: Liste der gängigen trigonometrischen Funktionen, deren Ableitungen und Stammfunktionen

f	f'	F
$A\sinh(\omega x + \varphi)$	$\omega A\cosh(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\cosh(\Omega)$
$A\cosh(\omega x + \varphi)$	$\omega A\sinh(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\sinh(\Omega)$
$A\tanh(\omega x + \varphi)$	$\omega A\mathrm{sech}^2(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\ln(\cosh(\Omega))$
$A\coth(\omega x + \varphi)$	$-\omega A\mathrm{csch}^2(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\ln(\sinh(\Omega))$
$A\mathrm{sech}(\omega x + \varphi)$	$-\omega A\tanh(\Omega)\mathrm{sech}(\Omega)$	$\frac{2A}{\omega}\arctan\left(\tanh\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)$
$A\mathrm{csch}(\omega x + \varphi)$	$-\omega A\coth(\Omega)\mathrm{csch}(\Omega)$	$\frac{A}{\omega}\ln\left(\tanh\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right)$
$A\mathrm{Arsinh}(\omega x + \varphi)$	$A\omega(1+\Omega^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{A}{\omega}\left(\Omega\mathrm{Arsinh}(\Omega) - \sqrt{1+\Omega^2}\right)$
$A\mathrm{Arcosh}(\omega x + \varphi)$	$A\omega(\Omega^2-1)^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{A}{\omega}\left(-\sqrt{\Omega^2-1} + 2\varphi\mathrm{Arsinh}\left(\frac{\sqrt{\Omega-1}}{\sqrt{2}}\right) + \omega x\mathrm{Arcosh}(\Omega)\right)$
$A\mathrm{Artanh}(\omega x + \varphi)$	$A\omega(1-\Omega^2)^{-1}$	$\frac{A}{2\omega}\left((\varphi+1)\ln(1+\Omega) - (\varphi-1)\ln(1-\Omega) + 2\omega x\mathrm{Artanh}(\Omega)\right)$
$A\mathrm{Arcoth}(\omega x + \varphi)$	$A\omega(1-\Omega^2)^{-1}$	$\frac{A}{2\omega}\left((\varphi+1)\ln(1+\Omega) - (\varphi-1)\ln(1-\Omega) + 2\omega x\mathrm{Arcoth}(\Omega)\right)$

Tabelle 3: Liste der gängigen hyperbolischen Funktionen, deren Ableitungen und Stammfunktionen

Allgemein gilt $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$ und insbesondere $\omega \neq 0$.

f	f'	F
$\beta(x+x_0)^\alpha$	$\beta\alpha(x-x_0)^{\alpha-1}$	$(x-x_0)^{\alpha+1}\frac{\beta}{\alpha+1}$
$\beta\alpha^{\gamma x+\varphi}$	$\beta\gamma\ln(\alpha)\alpha^{\gamma x+\varphi}$	$\frac{\beta}{\gamma\ln(\alpha)}\alpha^{\gamma x+\varphi}$
$\beta\ln(\alpha x+\varphi)$	$\alpha\beta\frac{1}{\alpha x+\varphi}$	$\beta\left(\left(\frac{\varphi}{\alpha}+x\right)\ln(\alpha x+\varphi)-x\right)$

Tabelle 4: Liste gängiger Funktionen, deren Ableitungen und Stammfunktionen

Hierbei gilt $\alpha, \beta, \gamma, \varphi \in \mathbb{R}$ und insbesondere $\alpha > 0$.

9.2 Begriffe und Symbole

	Logik, Mengen und Operationen	
$\forall$	Allquantor	
$\exists$	Existenzquantor	
$\neg$	Negation	$\neg A$
$\wedge$	Konjunktion (logisches Und)	$A \wedge B$
$\vee$	Disjunktion (logisches inklusives Oder)	$A \vee B$
$\rightarrow$	Subjunktion (Folgerung)	$A \rightarrow B$
$\leftrightarrow$	Bijunktion	$A \leftrightarrow B$
$\implies$	Implikation	$A \implies B$
$\iff$	Äquivalenz	$A \iff B$
M, D, I, J	Mengen	
$\emptyset$	leere Menge	$\{\}$
$\cup$	Vereinigung von Mengen	$M_1 \cup M_2 = \{m\colon (m \in M_1) \vee (m \in M_2)\}$
$\cap$	Durchschnitt von Mengen	$M_1 \cap M_2 = \{m\colon (m_\in M_1) \wedge (m \in M_2)\}$
$\setminus$	Differenz von Mengen	$M_1 \setminus M_2 = \{m \in M_1 : m \notin M_2\}$
$\triangle$	Symmetrische Differenz	$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$
$\times$	kartesisches Produkt	$M_1 \times M_2 = \{(m_1, m_2) \vert m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$
$\subseteq$	Inklusion	$M \subseteq N \iff \forall m \in M : m \in N$
$\subset$	strikte Inklusion	$M \subset N \iff M \subseteq N \wedge \exists n \in N : n \notin M$
$\mathcal{P}(M)$	Potenzmenge von M	$\{N\colon N \subseteq M\}$
$\vert M\vert$	Mächtigkeit, Anzahl der Elemente	

Tabelle 5: Symbole aus der Mengentheorie

Zahlenmengen und Vektorräume

$\mathbb{K}$,$\mathbb{F}$	Körper	
$\mathbb{K}_0$		$\mathbb{K} \cup \{0\}$
$\mathbb{K}^-$	Menge der negativen Zahlen in $\mathbb{K}$	
$\mathbb{K}^+$	Menge der positive Zahlen in $\mathbb{K}$	
$\mathbb{K}_0^+$		$\mathbb{K}^+ \cup \{0\}$
$\mathbb{K}_0^-$		$\mathbb{K}^- \cup \{0\}$
$\mathbb{K}_k$, $\mathbb{K}/k\mathbb{K}$	Menge der Restklassen modulo k	$\{[0]_k, \dots, [k-1]_k\}$
$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\aleph_0$	Anzahl der natürlichen Zahlen	$\aleph_0 = \lvert\mathbb{N}\rvert = \lvert\mathbb{Z}\rvert = \lvert\mathbb{Q}\rvert$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen	$\mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen	$\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{I}$	irrationale Zahlen	
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen	$\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$
$\mathbb{P}$	Primzahlen	$\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
$\mathbb{K}_n[x]$	Polynome über $\mathbb{K}$ mit höchstens Grad n	$\{\sum_{k=0}^{n} a_0 x^k \mid a_k \in \mathbb{K}\}$
$\mathcal{T}(I)$	Treppenfunktionen auf I	
$\mathscr{R}(I)$	Regelfunktionen auf I	
$\mathcal{B}(I)$	Beschränkte Funktionen auf I	
$\mathbb{K}^n$	Vektorraum der n-dimensionalen Vektoren	$\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K}\}$
$\mathbb{K}^{m\times n}$	Raum der $m \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$	
V, W	Vektorräume	
U	Unterraum	
$\mathcal{B}$	Basis	
$L(\mathcal{B})$	Lineare Hülle, Span	$L(\mathcal{B}) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{b}_i\}$
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{s}$	Vektoren	
$\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{K}$	Matrizen	
$\lvert\cdot\rvert$	Absolutbetrag	
$\lVert\cdot\rVert$	Norm	
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	Standardskalarprodukt	$\boldsymbol{v}^T \mathrm{I} \boldsymbol{u}$
$\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathrm{A}$	Skalarprodukt bezüglich A	$\boldsymbol{v}^T \mathrm{A} \boldsymbol{u}$
I_n	Einheitsmatrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$	

Tabelle 6: Symbole für Zahlenkörper und Vektorräume

A	α	Alpha	B	β	Beta
Γ	γ	Gamma	Δ	δ	Delta
E	ε	Epsilon	Z	ζ	Zeta
H	η	Eta	Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota	K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda	M	μ	My
N	ν	Ny	Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron	Π	π	Pi
P	ϱ, ϱ	Rho	Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau	Υ	υ	Ypsilon
Φ	φ, φ	Phi	X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi	Ω	ω	Omega

Tabelle 7: Griechisches Alphabet

	Name	Definition		Name	Definition
sin	Sinus	$\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$	sinh	Sinus hyperbolicus	$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})$
cos	Cosinus	$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$	cosh	Cosinus hyperbolicus	$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$
tan	Tangens	$\frac{\sin}{\cos}$	tanh	Tangens hyperbolicus	$\frac{\sinh}{\cosh}$
cot	Cotangens	$\frac{\cos}{\sin}$	coth	Cotangens hyperbolicus	$\frac{\cosh}{\sinh}$
sec	Secans	$\frac{1}{\cos}$	sech	Secans hyperbolicus	$\frac{1}{\cosh}$
csc	Cosecans	$\frac{1}{\sin}$	csch	Cosecans hyperbolicus	$\frac{1}{\sinh}$
arcsin	Arcus Sinus	$\sin^{-1}$	Arsinh	Area Sinus hyperbolicus	$\sinh^{-1}$
arccos	Arcus Cosinus	$\cos^{-1}$	Arcosh	Area Cosinus hyperbolicus	$\cosh^{-1}$
arctan	Arcus Tangens	$\tan^{-1}$	Artanh	Area Tangens hyperbolicus	$\tanh^{-1}$
arccot	Arcus Cotangens	$\cot^{-1}$	Arcoth	Area Cotangens hyperbolicus	$\coth^{-1}$
arcsec	Arcus Secans	$\sec^{-1}$	Arsech	Area Secans hyperbolicus	sech^{-1}
arccsc	Arcus Cosecans	$\csc^{-1}$	Arcsch	Area Cosecans hyperbolicus	csch^{-1}
sinc	Sinus cardinalis (normiert)	$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$	si	Sinus cardinalis	$\frac{\sin(x)}{x}$
Si	Integralsinus	$\int \mathrm{si}(x)\,\mathrm{d}x$	Li	Integrallogarithmus	$\int \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
exp	Exponentialfunktion	e^{x}	ln	Logarithmus naturalis	$\exp^{-1}$

Tabelle 8: Trigonometrische und Hyperbolische Funktionen, sowie Exponential- und Logarithmusfunktionen

Index