Blatt № 3

Aufgabe 7: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + 3y(x) = \sin(x) - \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

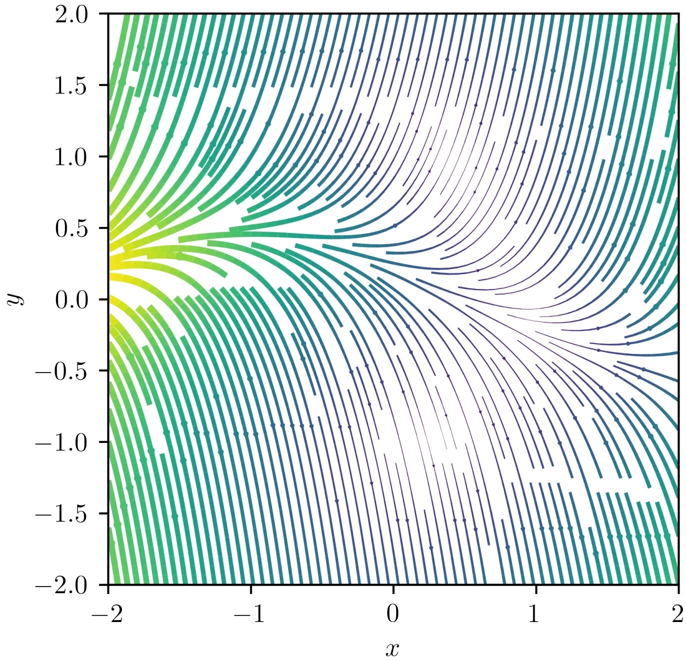

Abbildung 1: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Es handelt sich hierbei um eine lineare Differentialgleichung mit $g(x) = 3$, also $G(x) = 3x - x_0$. Damit erhalten wir direkt die folgende homogene Lösung y_h:

$$y_h(x) = \mathrm{e}^{-3x+x_0}$$

Die partikuläre Lösung erhalten wir durch Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = \int^x f(s)\mathrm{e}^{3(s-x)}\,\mathrm{d}s$$

Dabei gilt $f(s) = \sin(s) - \cos(s)$:

$$\begin{aligned}
\int \sin(s)\mathrm{e}^{\alpha s}\,\mathrm{d}s &= \int \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{s(\alpha+\mathrm{i})} - \mathrm{e}^{s(\alpha-\mathrm{i})})\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\alpha+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{s(\alpha+\mathrm{i})} - \frac{1}{\alpha-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{s(\alpha-\mathrm{i})}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha s}}{2\mathrm{i}}\left(\frac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - \alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{\alpha^2+1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha s}}{2\mathrm{i}(\alpha^2+1)}(2\alpha\mathrm{i}\sin(s) - 2\mathrm{i}\cos(s)) = \frac{\mathrm{e}^{3s}}{\alpha^2+1}(\alpha\sin(s) - \cos(s)) \\
\int \cos(s)\mathrm{e}^{\alpha s}\,\mathrm{d}s &= \int \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{s(\alpha+\mathrm{i})} + \mathrm{e}^{s(\alpha-\mathrm{i})})\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{s(\alpha+\mathrm{i})} + \frac{1}{\alpha-\mathrm{i}}\mathrm{e}^{s(\alpha-\mathrm{i})}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha s}}{2}\left(\frac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} + \alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}}{\alpha^2+1}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\alpha s}}{2(\alpha^2+1)}(2\alpha\cos(s) + 2\sin(s)) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha s}}{\alpha^2+1}(\alpha\cos(s) + \sin(s))
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$y_p(x) = \mathrm{e}^{-3x} \int^x \sin(s)\mathrm{e}^{3s} - \cos(s)\mathrm{e}^{3s} \,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{10}(3\sin(x) - \cos(x)) - \frac{1}{10}(3\cos(x) + \sin(x)) = \frac{\sin(x) - 2\cos(x)}{5}$$

Als allgemeine Lösung der Differentialgleichung also:

$$y(x) = c\mathrm{e}^{-3x-x_0} + \frac{\sin(x) - 2\cos(x)}{5}$$

Aufgabe 8: Bestimmung einer allgemeinen Lösung

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2 + \sin(x+y) + \sin(x+y)y' = 0$$

Hier liegt es nahe die Transformation $u(x) = y + x$ einzuführen, womit $u' = y' + 1$:

$$y' = -\frac{2}{\sin(u)} - 1 \Rightarrow u' = -\frac{2}{\sin(u)}$$

Sei $u \neq k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$. Trennung der Veränderlichen führt auf:

$$u' \sin(u) = -2 \Rightarrow \int^x u'(s)\sin(u(s)) \,\mathrm{d}s = -\int^x 2 \,\mathrm{d}s = -2x - 2c$$
$$\Rightarrow \int^u \sin(z) \,\mathrm{d}z = -2x + 2c \Leftrightarrow -\cos(u(x)) = -2x - 2c \Leftrightarrow \cos(u(x)) = 2x + 2c$$
$$\Rightarrow u(x) = \arccos(2x + 2c)$$

Da der Arkus-Cosinus nur auf $[-1, 1]$ definiert ist, muss $-1 \leq 2x + 2c \leq 1$ gelten, sprich $-\frac{1}{2} - c \leq x \leq \frac{1}{2} - c$. Da $y(x) = u(x) - x$ erhalten wir:

$$y(x) = \arccos(2x + c) - x$$

Für $u = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist die Differentialgleichung nicht erfüllt.

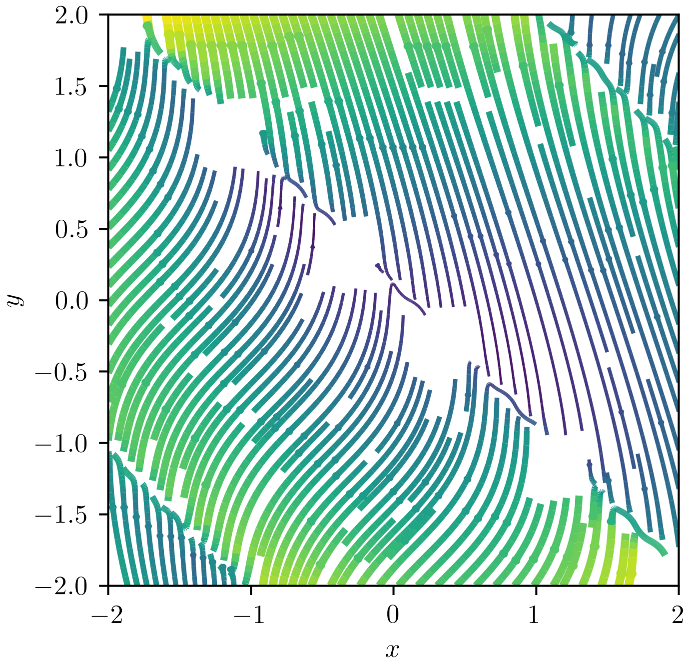

Abbildung 2: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung

Alternativ können wir die Gleichung auch als exakte Differentialgleichung betrachten. Sei dazu $g(x,y) = 2 + \sin(x+y)$ und $h(x,y) = \sin(x+y)$, dann gilt $\partial_y g = \partial_x h = \cos(x+y)$. Somit ist die Gleichung exakt, und wir können eine Stammfunktion $F(x,y)$ finden, sodass $\partial_x F = g$ und $\partial_y F = h$:

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = \int 2 + \sin(x+y)\,\mathrm{d}x \\
&= 2x - \cos(x+y) - c \\
&\varphi(y) = \int h(x,y) - \sin(x+y)\,\mathrm{d}y = 0 \\
&\Rightarrow F(x,y) = 2x - \cos(x+y) + 2c \stackrel{!}{=} \alpha
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen können wir die Gleichung $F = \alpha$ nach y auflösen:

$$\begin{aligned}
&2x - 2\cos(x+y) - c = \alpha \Leftrightarrow \cos(x+y) = 2x - c' \Leftrightarrow x + y = \arccos(2x - c') \\
&\Rightarrow y(x) = \arccos(2x - c') - x
\end{aligned}$$

Aufgabe 9: Exakte Differentialgleichung

Man bestimme alle Funktionen $f(x)$, sodass die Differentialgleichung

$$y^2\cos(x) + yfy' = 0$$

exakt ist. Für diese Funktionen bestimme man die implizit gegebene Lösung der Differentialgleichung.

Wir sehen, dass $g(x,y) = y^2\cos(x)$ und $h(x,y) = yf$. Unter der Annahme, dass $y(x)$ stetig differenzierbar ist und $y \neq 0$ bestimmen wir:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y\cos(x) \stackrel{!}{=} \frac{\partial h}{\partial x} = f'y$$

Das führt uns auf die folgende lineare Differentialgleichung in f:

$$f'y = 2y\cos(x) \Leftrightarrow f'(x) = 2\cos(x) \Rightarrow f(x) = 2\sin(x) + 2c$$

Damit folgt $\frac{\partial h}{\partial x} = 2y\cos(x) = \frac{\partial g}{\partial y}$, somit erhalten wir die folgende exakte Differentialgleichung:

$$y^2\cos(x) + y(2\sin(x) + 2c)y' = 0$$

Wir beginnen mit der Bestimmung eines Skalarfeldes $F(x,y)$:

$$\begin{aligned}
&F(x,y) = \int g(x,y)\,\mathrm{d}x + \varphi(y) = y^2\sin(x) + \varphi(y) \\
&\varphi(y) = \int h(x,y) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\int g(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y = \int 2y\sin(x) + 2yc - 2y\sin(x)\,\mathrm{d}x = cy^2 + d \\
&\Rightarrow F(x,y) = y^2(\sin(x) + c) + d
\end{aligned}$$

Prüfen wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= y^2\cos(x) = g(x,y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 2y(\sin(x) + c) = h(x,y)
\end{aligned}$$

Wir haben also die folgende implizite Lösungskurve füf y:

$$y^2(\sin(x) + c) = \alpha \in \mathbb{R}$$