

## Übungsblatt 7

**Beispiel 7.1.** Folgendes ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Wir führen einen Induktionsbeweis und wählen für die Induktionsbasis  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k(k+1) &= 1(1+1) = 2 \\ \frac{1}{3} \cdot 1(1+1)(1+2) &= 2\end{aligned}$$

Damit können wir die Induktionsvoraussetzung annehmen:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Und die Induktionsvoraussetzung aufstellen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$$

Zuletzt führen wir den Induktionsschritt durch:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) &= (n+1)(n+2) + \sum_{k=1}^n k(k+1) = (n+1)(n+2) + \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2) \left( \frac{1}{3}n + 1 \right) = (n+1)(n+2) \frac{1}{3}(n+3) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)\end{aligned}$$

**Beispiel 7.2.** Zu zeigen ist, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $6 | n^3 - n$ . Wir beginnen für unsere Induktionsbasis mit  $n = 1$ :

$$1^3 - 1 = 0$$

6 teilt 0, somit können wir unsere Induktionsvoraussetzung annehmen:

$$n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$$

Und die Induktionsbehauptung aufstellen:

$$(n+1)^3 - n - 1 \equiv 0 \pmod{6}$$

Zuletzt führen wir den Induktionsschritt aus:

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n(n+1)$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass  $n^3 - n$  durch 6 teilbar ist. Wir untersuchen nun noch  $3n(n+1)$ . Wenn  $n$  gerade ist, dann können wir  $3n$  in  $2 \cdot 3 \frac{n}{2}$  aufteilen. Da  $2 \cdot 3 = 6$  ist  $3n(n+1)$  für gerade  $n$  durch 6 teilbar. Ist  $n$  ungerade, so ist  $n+1$  gerade, und wir können  $3(n+1)$  in  $2 \cdot 3 \frac{n+1}{2}$  aufteilen. Somit ist  $3n(n+1)$  durch 6 teilbar. Zuletzt prüfen wir, ob  $(n^3 - n) + 3n(n+1)$  durch 6 teilbar ist. Wir wissen, dass beide Summanden  $a = n^3 - n$  und  $b = 3n(n+1)$  durch 6 teilbar sind. Damit gilt:

$$a + b = 6 \left( \frac{a}{6} + \frac{b}{6} \right)$$

Somit ist  $(n^3 - n) + 3n(n+1) = (n+1)^3 - n - 1$  durch 6 teilbar.

**Beispiel 7.3.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist rekursiv definiert:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

Zu zeigen ist, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  explizit durch  $a_n = \frac{n+1}{n}$  dargestellt wird. Wir beginnen mit der Induktionsbasis für  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ \frac{1+1}{1} &= 2 \end{aligned}$$

Damit können wir unsere Induktionsvoraussetzung annehmen:

$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

Und unsere Induktionsbehauptung aufstellen:

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

Zuletzt führen wir den Induktionsschritt aus:

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

Somit ist die Aussage  $a_n = \frac{n+1}{n}$  bewiesen.

**Beispiel 7.4.** Wir betrachten die Erweiterung  $R = \{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Wir sollen zeigen, dass für  $r, s \in R$  gilt:  $r + s \in R$  und  $r \cdot s \in R$ .

$$\begin{aligned} r &= a_r + \sqrt{2}b_r & s &= a_s + \sqrt{2}b_s \\ r + s &= a_r + a_s + \sqrt{2}b_r + \sqrt{2}b_s = \underbrace{(a_r + a_s)}_{=a_t} + \sqrt{2} \underbrace{b_r + b_s}_{=b_t} = a_t + \sqrt{2}b_t \end{aligned}$$

Da die Addition auf  $\mathbb{Q}$  abgeschlossen ist, gilt  $t = a_t + \sqrt{2}b_t \in R$ . Somit ist  $+$  auf  $R$  abgeschlossen.

$$r \cdot s = (a_r + \sqrt{2}b_r)(a_s + \sqrt{2}b_s) = a_r a_s + \sqrt{2}a_r b_s + \sqrt{2}a_s b_r + \sqrt{2}^2 b_r b_s = a_r a_s + 2b_r b_s + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r)$$

Da die Multiplikation auf  $\mathbb{Q}$  abgeschlossen ist, gilt  $(a_r a_s + 2b_r b_s) + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r) \in R$ , womit  $+$  auf  $R$  abgeschlossen ist.

Weiters prüfen wir, ob  $(R, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring ist. Wir beginnen damit, ob  $(R, +)$  eine abelsche Gruppe ist. Seien  $r, s, t \in R$ :

$$\begin{aligned} \text{Assoziativität: } (r+s)+t &= (a_r + a_s + \sqrt{2}(b_r + b_s)) + a_t + \sqrt{2}b_t = a_r + a_s + a_t + \sqrt{2}(b_r + b_s + b_t) \\ &= a_r + \sqrt{2}b_r + (a_s + a_t + \sqrt{2}(b_s + b_t)) = r + (s+t) \end{aligned}$$

$$\text{Kommutativität: } r+s = a_r + \sqrt{2}b_r + a_s + \sqrt{2}b_s = a_s + \sqrt{2}b_s + a_r + \sqrt{2}b_r = s+r$$

$$\text{neutrales Element: wähle } 0_R = 0 + \sqrt{2} \cdot 0$$

$$\Rightarrow r + 0_R = a_r + \sqrt{2}b_r + 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = a_r + 0 + \sqrt{2}b_r + \sqrt{2} \cdot 0 = a_r + \sqrt{2}b_r = r$$

$$\text{inverses Element: wähle } -r = -a_r - \sqrt{2}b_r$$

$$\Rightarrow r + (-r) = a_r - a_r + \sqrt{2}b_r - \sqrt{2}b_r = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0_R$$

$(R, +)$  ist also eine abelsche Gruppe. Damit  $(R, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring ist, müssen wir noch prüfen, ob  $(R, \cdot)$  zumindest eine abelsche Halbgruppe ist.

$$\begin{aligned} \text{Assoziativität: } (r \cdot s) \cdot t &= (a_r a_s + 2b_r b_s + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r))(a_t + \sqrt{2}b_t) \\ &= a_r a_s a_t + 2a_t b_r b_s + \sqrt{2}(a_r a_t b_s + a_s a_t b_r) + \sqrt{2}a_r a_s b_t + 2\sqrt{2}b_r b_s b_t + 2(a_r b_s b_t + a_s b_r b_t) \\ r \cdot (s \cdot t) &= (a_r + \sqrt{2}b_r)(a_s a_t + 2b_s b_t + \sqrt{2}(a_s b_t + a_t b_s)) \\ &= a_r a_s a_t + 2a_r b_s b_t + \sqrt{2}(a_r a_s b_t + a_r a_t b_s) + \sqrt{2}a_s a_t b_r + 2\sqrt{2}b_r b_s b_t + 2(a_s b_r b_t + a_t b_r b_s) \\ &= r \cdot (s \cdot t) \end{aligned}$$

$$r \cdot s = a_r a_s + 2b_r b_s$$

Damit ist  $\cdot$  ist assoziativ und kommutativ auf  $R$ , somit ist  $(R, \cdot)$  eine abelsche Halbgruppe. Zuletzt müssen wir prüfen, ob ein Distributivgesetz erfüllt ist (eines reicht, da wir gezeigt haben, dass  $\cdot$  abelsch ist). Es seien  $r, s, t \in R$ :

$$\begin{aligned} (r+s) \cdot t &= (a_r + a_s + \sqrt{2}(b_r + b_s))(a_t + \sqrt{2}b_t) = a_t(a_r + a_s) + \sqrt{2}a_t(b_r + b_s) + \sqrt{2}b_t(a_r + a_s) + \sqrt{2}^2 b_t(b_r + b_s) \\ &= a_r(a_t + \sqrt{2}b_t) + \sqrt{2}b_r(a_t + \sqrt{2}b_t) + a_s(a_t + \sqrt{2}b_t) + \sqrt{2}b_s(a_t + \sqrt{2}b_t) = r \cdot t + s \cdot t \end{aligned}$$

Somit ist  $(R, +, \cdot)$  ein kommutativer Ring. Damit  $(R, +, \cdot)$  ein Körper ist, muss  $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe sein. Wir müssen also noch prüfen, ob es in  $(R \setminus \{0_R\}, \cdot)$  ein neutrales Element 1 gibt und zu jedem  $r \in R \setminus \{0\}$  ein inverses Element  $r^{-1}$ . Wir beginnen damit, zu zeigen das  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  immer noch abgeschlossen ist. Seien  $r, s \in R$  mit  $r \neq 0_R$ :

$$\begin{aligned} r \cdot s &= a_r a_s + 2b_r b_s + \sqrt{2}(a_r b_s + a_s b_r) = 0 + \sqrt{2} \cdot 0 \\ \Rightarrow s &= 0 + \sqrt{2} \cdot 0 = 0_R \end{aligned}$$

Da  $r \cdot s$  also nur für  $s = 0_R$  gleich  $0_R$  ist, ist  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  also immer noch abgeschlossen und erbt die Eigenschaften von  $(R, \cdot)$ . Wir suchen zuerst ein neutrales Element:

$$\text{wähle } : 1_R = 1 \Rightarrow r \cdot 1 = (a_r + \sqrt{2}b_r) \cdot 1 = a_r \cdot + \sqrt{2}b_r \cdot 1 = a_r + \sqrt{2}b_r = r$$

Damit ist  $(R, +, \cdot)$  also zumindest ein Ring mit 1. Als letztes prüfen wir, ob es inverse Elemente in  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  gibt. Sei  $r \in R \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \text{wähle: } r^{-1} &= \frac{1}{a_r + \sqrt{2}b_r} = \frac{a_r - \sqrt{2}b_r}{(a_r + \sqrt{2}b_r)(a_r - \sqrt{2}b_r)} = \frac{a_r - \sqrt{2}b_r}{a_r^2 - 2b_r^2 + \sqrt{2}a_r b_r - \sqrt{2}a_r b_r} = \frac{a_r - \sqrt{2}b_r}{a_r^2 + 2b_r^2} \\ r \cdot r^{-1} &= \frac{a_r^2 - \sqrt{2}a_r b_r + \sqrt{2}a_r b_r - 2b_r^2}{a_r^2 - 2b_r^2} = \frac{a_r^2 - 2b_r^2}{a_r^2 - 2b_r^2} = 1_R \end{aligned}$$

Somit ist  $(R \setminus \{0\}, \cdot)$  eine abelsche Gruppe, womit  $(R, +, \cdot)$  ein Körper ist.

**Beispiel 7.5.** Zu zeigen ist, dass es keinen endlichen geordneten Körper gibt. Sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein endlicher geordneter Körper mit  $1 > 0$ . Wir wissen, dass für endliche Gruppen  $(G, \circ)$  gilt:

$$\forall x \in G: x^n = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n \text{ mal}} = e$$

Wobei  $e$  das neutrale Element in  $G$  ist. Wir betrachten nun  $(\mathbb{K}, +)$ . Da  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper ist, handelt es sich hierbei um eine abelsche Gruppe mit neutralen Element 0 und es gilt:  $0 < 1$ . Wir wissen das  $0, 1 \in \mathbb{K}$ , da  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein Körper ist. Da  $(\mathbb{K}, +)$  eine endliche abelsche Gruppe ist, gilt nun  $1^n = 0$ . Das führt aber auf einen Widerspruch:

$$0 < 1 < 1^n = 0$$

Somit kann  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  kein endlicher Körper sein.