Übungsblatt № 11

Aufgabe 48

Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 & 3 \\ -15 & -9 & 4 & -5 \\ 15 & 9 & 4 & -5 \\ 12 & 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie, wenn möglich, eine Matrix B, sodass $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

Die Eigenwerte λ_i der Matrix A lösen die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \\ &\chi_A(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 1) \\ &\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i \end{aligned}$$

λ_1 hat zweifache algebraische Vielfachheit. Über $\mathbb{R}$ hat $\chi_A(\lambda) = 0$ nur die zweifache Lösung λ_0, somit können wir nur Rechts-Eigenvektoren für λ_1 finden. Ein Rechts-Eigenvektor $\mathbf{v}_i$ löst die Gleichung $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$:

$$\begin{aligned} &A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i = \lambda_i I \mathbf{v}_i \\ \Leftrightarrow\ &(A - \lambda I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Wir lösen also das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 9-\lambda_0 & 6 & -2 & 3 & 0 \\ -15 & -9-\lambda_0 & 4 & -5 & 0 \\ 15 & 9 & 4-\lambda_0 & -5 & 0 \\ 12 & 6 & -4 & 4-\lambda_0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$