

Übungsblatt № 2

Aufgabe 12

Die Felder eines 3×7 Schachbretts werden beliebig mit den Farben rot und blau gefärbt. Zeigen Sie, dass es immer ein Rechteck, mindestens 2×2 Felder groß, gibt, dessen Eckfelder einheitlich gefärbt sind.

Aufgabe 14

Wie viele natürliche Zahlen, welche kleiner oder gleich als 10^6 sind, die weder von der Form x^2 noch x^3 , noch x^5 für $x \in \mathbb{N}$ sind?

Wir arbeiten mit den Mengen $A_k = \{x \in \mathbb{N} : x^k \leq 10^6\}$. Wir wollen bestimmen, wie viele Zahlen in $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5$ enthalten sind. Dazu bestimmen wir zunächst $|A_k|$. Wir wissen:

$$\left(10^{\frac{6}{k}}\right)^k = 10^6$$

Da aber $10^{\frac{6}{k}}$ nicht zwingenderweise eine natürlich Zahl ist, nehmen wir

$$A_k = \left\{1^k, \dots, \left\lfloor 10^{\frac{6}{k}} \right\rfloor^k\right\}$$

Ergo folgt $|A_k| = \left\lfloor 10^{\frac{6}{k}} \right\rfloor$. Abschließend brauchen wir $|A_2 \cap A_5|$, $|A_3 \cap A_5|$, $|A_2 \cap A_3|$ und $|A_2 \cap A_3 \cap A_5|$.

Wir suchen nun jene $x \in A_2$, sodass $x^5 \leq 10^6$:

$$x^5 = (y^2)^5 = y^{10} \leq 10^6$$