

Übungsblatt № 4

Aufgabe 16

Berechne die Determinante der folgenden Matrix mit drei verschiedenen Methoden (Leibniz, Laplace, Zeilen- und Spaltenumformungen):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Da die Regel von Sarrus der Anwendung der Formel von Leibniz entspricht, können wir die Determinante direkt berechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ = 2 + 8 - 3 - 6 + 2 - 4 = 12 - 13 = -1$$

Für den Laplaceschen Entwicklungssatz wählen wir die erste Spalte:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ = 1(2 + 2) - 1(4 + 3) + 2(4 - 3) = 4 - 7 + 2 = -1$$

Und mit Zeilen- und Spaltenumformungen:

$$A \xrightarrow{z_2 - z_1, z_3 - 2z_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{z_3 - 5z_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1$$

Aufgabe 17

Die Zahlen 18270, 16128, 63042, 17304 und 17934 sind durch 42 teilbar. Zeige, dass auch die Determinante der folgenden Matrix durch 42 teilbar ist, ohne sie zu berechnen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Wir sehen, dass in den Zeilen der Matrix genau die Ziffern der gegebenen Zahlen stehen. Wir führen also Spaltenumformungen durch, sodass in einer Spalte die gegebenen Zahlen stehen:

$$A \xrightarrow{s_5 + (10s_4 + 10^2s_3 + 10^3s_2 + 10^4s_1)} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 & 18270 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 16128 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 63042 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 17304 \\ 1 & 7 & 9 & 3 & 17934 \end{bmatrix}$$

Entwickeln wir nun die Determinante nach der letzten Spalten, so erhalten wir eine Linearkombination der gegebenen Zahlen mit einem gemeinsamen Faktor 42. Diesen können wir herausheben, womit die Determinante von A wieder ein ganzzahliges Vielfaches von 42 ist, da wir in $\mathbb{Z}^{5 \times 5}$ arbeiten.

Aufgabe 18

Berechne den Eintrag $(A^{-1})_{4,3}$ der Inversen der folgenden Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wir können mittels der Kofaktoren direkt die Einträge der Inversen bestimmen:

$$(A^{-1})_{kl} = (-1)^{k+l} \det(A_{lk})$$

Dabei entsteht die Matrix A_{lk} durch streichen der l -ten Zeile und k -ten Spalte aus A :

$$A_{4,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz erhalten wir nun:

$$\det(A_{4,3}) = 0$$

Aufgabe 19

Berechne die Determinanten

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} & \text{b) } & \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_n \end{vmatrix} \\ \text{c) } & \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & * & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & \cdots & * \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Zu a):

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix} \\ & = (1+x)(xy^2 - y^2) + y^2 = xy^2 - y^2 + x^2y^2 - xy^2 + y^2 = x^2y^2 \end{aligned}$$

Zu c):

Wir entwickeln nach der ersten Zeile:

$$\det(C) = a_n \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & a_{n-2} & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

Wiederholen wir diesen Schritt noch $n - 1$ mal, erhalten wir:

$$\det(C) = \prod_{k=1}^n a_k$$