Übungsblatt 5

Beispiel 5.2. Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = 2x + 1$$
$$f_2(x) = \frac{1+x}{1+|x|}$$
$$f_3(x) = \lfloor x \rfloor$$

Es sollen jeweils die Bildmenge, Injektivität und Surjektivität als Bijektivität und die Umkehrabbildung untersucht werden. Zuletzt soll eine schöne Skizze angefertigt werden.

Wir beginnen mit f_1. Da sowohl Multiplikation als auch die Addition auf $\mathbb{R}$ abgeschlossen sind, können wir f_1 für alle $x \in \mathbb{R}$ bestimmen. Die Bildmenge von f_1 ist $\mathbb{R}$, da:

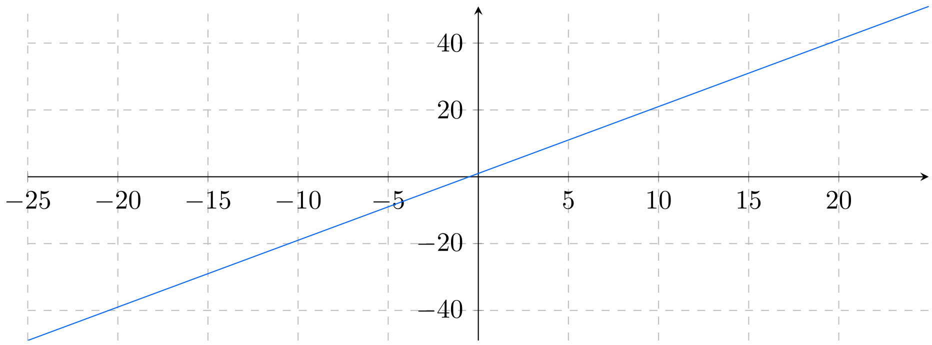
$$y \in \mathbb{R}\colon f_1(x) = y \Leftrightarrow y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Wir können also für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}$ ein $x \in \mathbb{R}$ finden, sodass $f(x) = y$. Damit haben wir bereits gezeigt, dass f_1 surjektiv ist. f_1 ist ebenfalls injektiv:

$$f_1(x_1) = f_1(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Somit ist f_1 injektiv und surjektiv. Damit existiert eine Umkehrabbildung f_1^{-1}, da f_1 bijektiv ist:

$$y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2} = f_1^{-1}(y)$$



Für den Bildbereich von f_2 müssen wir eine Fallunterscheidung machen. Für $x \geq 0$ gilt:

$$f_2(x) = \frac{1+x}{1+x} = 1$$

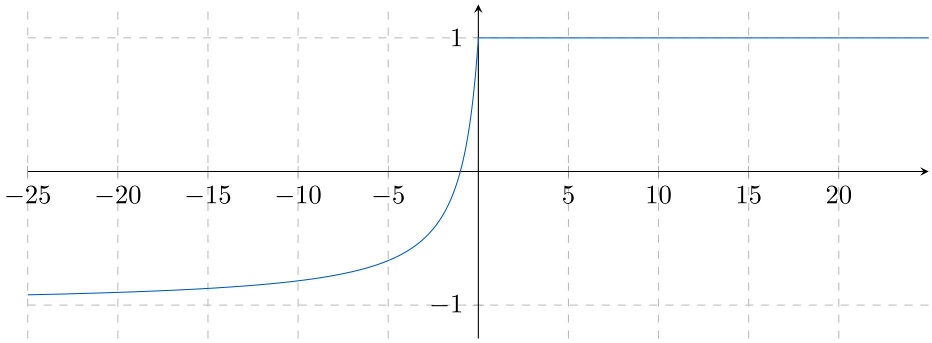
Für $x < 0$ gilt:

$$f_2(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

Für sehr kleine x wird sich f_2 dem Wert -1 annähern:

$$\frac{1+x}{1-x} > -1 \Leftrightarrow 1 + x > x - 1 \Leftrightarrow 1 > -1$$

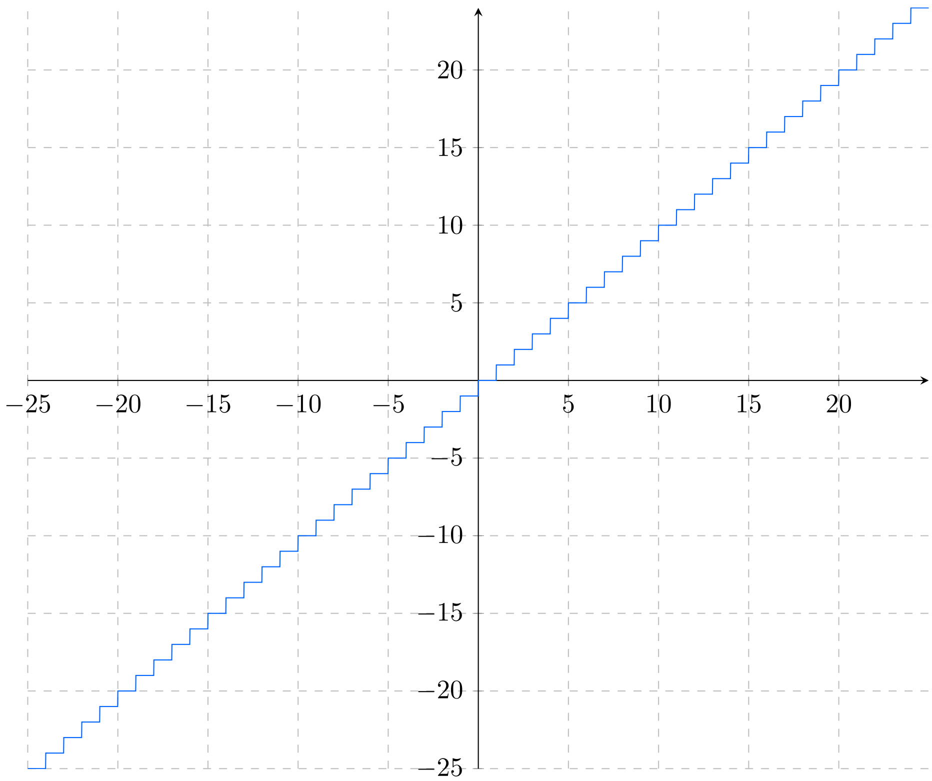
Das ist eine wahre Aussage, somit ist f_2 für $x < 0$ durch -1 beschränkt. Unsere Bildmenge ist somit $(-1, 1]$. Da f_2 eine Abbildung der Form $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, ist f_2 nicht surjektiv. Zusätzlich ist f_2 auch nicht injektiv, da $\forall x \in \mathbb{R}_0^+$, also $x \geq 0$ gilt $f_2(x) = 1$. Es gilt also $f_2(x_1) = f_2(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$, aber $x_1 \neq x_2$. Somit ist f_2 nicht surjektiv und nicht injektiv, somit ist f_2 nicht bijektiv und es gibt keine Umkehrabbildung $f_2^{-1}(x)$.



Da die Floorfunktion als jene größte ganze Zahl $\lfloor x \rfloor$ definiert ist, für die gilt $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, ist der Bildbereich von f_3 die Menge der ganzen Zahlen. Damit ist f_3 nicht surjektiv. Weiter ist f_3 nicht injektiv. Sei $k \in \mathbb{Z}$. So gilt $\forall x \in [k, k+1)$:

$$f_3(x_1) = f_3(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$$

Damit ist f_3 nicht bijektiv und es existiert auch keine Umkehrabbildung f_3^{-1}.



Beispiel 5.4. Sei $f : A \to B$ und $M \subseteq A$ und $N \subseteq B$. Zu zeigen sind:

$$M \subseteq f^{-1}(f(M))$$
$$N \supseteq f(f^{-1}(N))$$

Wir beginnen mit der ersten Aussage. $f^{-1}(f(M)) = \{x \colon f(x) \in f(M)\}$. Sei $x \in M$. Dann gilt $f(x) \in f(M)$. Daraus folgt aber, dass $x \in f^{-1}(f(M))$ gilt. Somit $\forall x \in \colon x \in f^{-1}(f(M)) \Leftrightarrow M \subseteq f^{-1}(f(M))$.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist eine nicht injektive Funktion f. Hier gilt dann $\exists x, y \in A \colon x \neq y \colon f(x) = f(y)$. Wenn $x \in M$ und $y \notin M$, dann gilt aber $y \in f^{-1}(f(M))$. Somit gilt $M \subset f^{-1}(f(M))$, da $\forall x \in M \colon x \in f^{-1}(f(M)) \wedge \exists y \in A \colon y \notin M \colon y \in f^{-1}(f(M))$.

Weiter mit der zweiten Aussage. Wir wissen $f(f^{-1}(N)) = \{f(x) \colon x \in f^{-1}(N)\}$. Daraus folgt, dass $x \in f(f^{-1}(N)) \Rightarrow x \in N$. Somit $N \supseteq f(f^{-1}(N))$.

Ein Beispiel für eine echte Inklusion:

$$
\begin{aligned}
&A = \{1,2,3\} \quad B = \{1,2,3,4\} \\
&N = B \\
&f : 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 3 \\
&\Rightarrow f^{-1}(N) = \{1,2,3\} \Rightarrow f(f^{-1}(N)) = \{1,2,3\} \subset N
\end{aligned}
$$

Beispiel 5.5. Sei A eine nicht leere Menge und $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge. Zu zeigen ist, dass es keine surjektive Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ gibt. Sei $M\{x \in A \colon x \notin f(x)\} \subseteq A$. Sei f eine surjektive Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$, so muss gelten $\forall y \in \mathcal{P}(A) \colon \exists a \in A \colon f(a) = y$. Sei $x \in A$. Liegt $x \in M$, so folgt daraus, dass $x \notin M$. Das ist ein Widerspruch, somit kann f nicht surjektiv sein.