Blatt № 8

Aufgabe 22: Inhomogenes System

Man bestimme die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$y_1'(x) = (3x-1)y_1(x) - (1-x)y_2(x) + xe^{x^2}$$
$$y_2'(x) = -(x+2)y_1(x) + (x-2)y_2(x) - e^{x^2}$$

Wir bestimmen die homogene Lösung wie in Aufgabe 19:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-1 & x-1 \\ -x-2 & x-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Wir wählen den Ansatz $y_1 = -y_2$, und erhalten damit $y_1' = 2xy_1$ und $y_2' = 2xy_2$. Unter der Annahme, dass $y_1 \neq 0$, erhalten wir:

$$\int^x \frac{y_1'(s)\,\mathrm{d}s}{y_1(s)} = \int^x 2s\,\mathrm{d}s \Rightarrow y_{11} = y_1(x)ce^{x^2}$$

Für $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach unserer Annahme ist $y_{21} = y_2 = -ce^{x^2}$ und damit $y_2'(x) = -2xce^{x^2} = 2xy_2(x)$. Wir setzen nun $c = 1$ und erhalten als Lösung des Systems:

$$\begin{bmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{x^2} \\ -e^{x^2} \end{bmatrix}$$

Wir wenden nun das Reduktionsverfahren von D'Alembert an, um eine weitere Lösung der homogenen Gleichung zu finden. Sei $y_{11} \neq 0$, dann wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_2(x) &= \begin{bmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \end{bmatrix} = \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}(x) = \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ z_2(x) \end{bmatrix} \\
&\phi_2'(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1'(x) + \boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{y}_2'(x) = \mathrm{A}(x)\boldsymbol{y}_2(x) \\
&= \mathrm{A}(x)\phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \mathrm{A}(x)\boldsymbol{z}(x)
\end{aligned}$$

Es gilt $\boldsymbol{y}_1'(x) = \mathrm{A}(x)\boldsymbol{y}_1(x)$, also folgt:

$$\phi_2'(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \phi_2(x)\mathrm{A}(x)\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}'(x) = \mathrm{A}(x)\phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \mathrm{A}(x)\boldsymbol{z}(x)$$

Das System reduziert sich zu $\phi_2'(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}'(x) = \mathrm{A}(x)\boldsymbol{z}(x)$:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \phi_2'(x)y_{11}(x) \\ \phi_2'(x)y_{21}(x) + z_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}(x)z_2(x) \\ a_{22}(x)z_2(x) \end{bmatrix} \\
&\phi_2'(x) = \frac{a_{12}(x)}{y_{11}(x)}z_2(x) \\
&\Rightarrow a_{12}(x)\frac{y_{21}(x)}{y_{11}(x)}z_(x) + z_2'(x) = a_{22}(x)z_2(x) \\
&\Rightarrow z_2'(x) = \left(a_{22}(x) - a_{12}(x)\frac{y_{21}(x)}{y_{11}(x)}\right)z_2(x) \\
&\Leftrightarrow z_2'(x) = \left((x-2) - (x-1)\frac{-e^{x^2}}{e^{x^2}}\right)z_2(x) = (2x-3)z_2(x)
\end{aligned}$$

Diese lineare Gleichung hat die allgemeine Lösung $z_2(x) = c_z e^{x^2-3x}$ für $c_z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir wählen $c_z = 1$ um ϕ zu bestimmen:

$$\phi_2'(x) = \frac{a_{12}(x)}{y_{11}(x)}z_2(x) = \frac{x-1}{e^{x^2}}e^{x^2-3x} = (x-1)e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \phi_2(x) = \int^x (s-1)\mathrm{e}^{-3s}\,\mathrm{d}s \frac{(2-3x)\mathrm{e}^{-3x}}{9} + \hat{c}$$

mit $\hat{c} \in \mathbb{R}$. Wir wählen $\hat{c} = 0$. Mit gefundenen ϕ_2 und $\boldsymbol{z}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_2(x) &= \phi_2(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{z}(x)\\ &= \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{x^2}\\ -\mathrm{e}^{x^2}\end{bmatrix}\frac{(2-3x)\mathrm{e}^{-3x}}{9} + \begin{bmatrix}0\\ \mathrm{e}^{x^2-3x}\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\mathrm{e}^{x^2-3x}\begin{bmatrix}-3x+2\\ 3x+7\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung ist nun gegeben durch:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\mathrm{e}^{x^2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} + \frac{c_2}{9}\mathrm{e}^{x^2-3x}\begin{bmatrix}-3x+2\\ 3x+7\end{bmatrix}$$

Die beiden Lösungen $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ bilden ein Fundamentalsystem, somit ist die Fundamentalmatrix $\mathrm{Y}(x) = \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1(x) & \boldsymbol{y}_2(x)\end{bmatrix}$ regulär:

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(x) &= \mathrm{e}^{x^2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}(-3x+2)\\ -1 & \frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}(3x+7)\end{bmatrix}\\ W(x) &= \det(\mathrm{Y}(x)) = \mathrm{e}^{2x^2}\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{9}(3x+7-2x+2) = \mathrm{e}^{2x^2-3x}\end{aligned}$$

Es gilt also $W(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Da wir durch $\int \mathrm{Y}^{-1}(s)\,\mathrm{d}s$ die Stammfunktion von e^{-x^2} finden müssten, führen wir stattdessen die Variation der konstanten durch. Wir wählen den Ansatz $\boldsymbol{y}_p(x) = \mathrm{Y}(x)\boldsymbol{u}(x)$. Setzen wir in die Differentialgleichung ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}_p'(x) = \mathrm{Y}'(x)\boldsymbol{u}(x) + \mathrm{Y}(x)\boldsymbol{u}'(x) = \mathrm{Y}'(x)\boldsymbol{u}(x) + \mathrm{A}(x)\mathrm{Y}(x)\boldsymbol{u}(x) + \boldsymbol{g}(x)\\ &\Leftrightarrow (\mathrm{Y}'(x) - \mathrm{A}(x)\mathrm{Y}(x))\boldsymbol{u}(x) + \mathrm{Y}(x)\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{g}(x)\\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{u}'(x) = \mathrm{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{g}(x)\\ &\mathrm{Y}^{-1}(x) = \mathrm{e}^{3x-x^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}(3x+7) & -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x}(-3x+2)\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ &\Rightarrow \mathrm{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{g}(x) = \begin{bmatrix}\frac{3x^2+4x+2}{9}\\ (x-1)\mathrm{e}^{3x}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1'(x)\\ u_2'(x)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}u_1(x) &= \frac{1}{9}\int^x 3s^2+4s+2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{9}\left(x^3+2x^2+2x\right) + c_1\\ u_2(x) &= \int^x (s-1)\mathrm{e}^{3s}\,\mathrm{d}s = \frac{3x-4}{9}\mathrm{e}^{3x} + c_2\end{aligned}$$

Wir wählen $c_1 = c_2 = 0$, und erhalten:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(x) &= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}x^3+2x^2+2x\\ (3x-4)\mathrm{e}^{3x}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{y}_p(x) &= \mathrm{Y}(x)\boldsymbol{u}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{81}\begin{bmatrix}9x^3+9x^2+36x-8\\ -9x^3-9x^2-9x-28\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\mathrm{e}^{x^1}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} + c_2\frac{\mathrm{e}^{x^2-3x}}{9}\begin{bmatrix}-3x+2\\ 3x+7\end{bmatrix} + \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{81}\begin{bmatrix}9x^3+9x+36x-8\\ -9x^3-9x^2-9x-28\end{bmatrix}$$

Aufgabe 23

Für die Lösung des Anfangswertproblems

$$u''(t) + \nu^2 u(t) = f(t)$$

Für $t > 0$ mit $u(0) = u'(0) = 0$ und $\nu > 0$, leite man eine allgemeine Darstellung her. Hierfür betrachte man ein äquivalentes System erster Ordnung.

Wir setzen $y_1(t) = u(t)$ und $y_2(t) = u'(t)$, und erhalten damit das System:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Es handelt such um ein inhomogenes System mit konstanten Koeffizienten, wir wollen also die Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ der Systemmatrix A bestimmen:

$$\begin{aligned} &\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^2 + \nu^2 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\nu \\ &\ker(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I}) = \ker \begin{bmatrix} \nu^2 & \mathrm{i}\nu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \mathrm{i}\nu x_1 \\ &\Rightarrow \ker(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I}) = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\nu \end{bmatrix}, t \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Da $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$ folgt

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\nu \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{u}_2 = \overline{\boldsymbol{u}_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\nu \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist dann:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_h(t) &= c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 (t-t_0)} \boldsymbol{u}_1 + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 (t-t_0)} \boldsymbol{u}_2 \\ &= c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\nu \end{bmatrix} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu(t-t-0)} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\nu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eine reelle Lösung des System ist:

$$\boldsymbol{y}_h(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(\nu(t-t_0)) \\ -\nu \sin(\nu(t-t_0)) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(\nu(t-t_0)) \\ \nu \cos(\nu(t-t_0)) \end{bmatrix}$$

Wir führen die Koordinatentransformation $x = \nu(t - t_0)$ ein, dann ist die Wronski-Determinante gegeben als:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\nu \sin(x) & \nu \cos(x) \end{vmatrix} = \nu(\cos^2(x) + \sin^2(x)) = \nu > 0$$

Die Fundamentalmatrix Y ist also regulär für beliebige $t > 0$:

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\nu \sin(x) & \nu \cos(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{Y}^{-1}(x) = \frac{1}{\nu} \begin{bmatrix} \nu \cos(x) & -\sin(x) \\ \nu \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

Es folgt nun:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}_p(t) = \mathrm{Y}(t) \int_0^x \mathrm{Y}^{-1}(s) \boldsymbol{g}(s) \, \mathrm{d}s = \frac{1}{\nu} \mathrm{Y}(t) \int_0^x \begin{bmatrix} \nu \cos(x) & -\sin(x) \\ \nu \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f(s) \end{bmatrix} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\nu} \mathrm{Y}(t) \int_0^t f(s) \begin{bmatrix} -\sin(\nu s) \\ \cos(\nu s) \end{bmatrix} \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Somit ist die allgemeine Lösung des Systems gegeben als:

$$\boldsymbol{y}(t) = c_1 \begin{bmatrix} \cos(\nu t) \\ -\nu \sin(\nu t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(\nu t) \\ \nu \cos(\nu t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\nu} \mathrm{Y}(t) \int_0^t f(s) \begin{bmatrix} -\sin(\nu s) \\ \cos(\nu s) \end{bmatrix} \, \mathrm{d}s$$

Für u folgt dann:

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t) + \frac{1}{\nu} \int_0^t f(s)(-\cos(\nu t) \sin(\nu s) + \sin(\nu t) \cos(\nu s)) \, \mathrm{d}s \\ &= c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t) + \frac{1}{\nu} \int_0^t f(s) \sin(\nu(t-s)) \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Wir wissen, dass u_p eine Lösung der Differentialgleichung ist und die Anfangsbedingung erfüllt, es folgt also:

$$u(0) = u_h(0) + u_p(0) = u_h(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_1 = 0$$
$$u'(0) = u_h'(0) + u_p'(0) = u_h'(0) = c_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$u(t) = \frac{1}{\nu}\int_0^t f(s)\sin(\nu(t-s))\,\mathrm{d}s$$

Aufgabe 24

Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems:

$$\boldsymbol{w}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(x) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4\cos(2x) \end{bmatrix}$$

Da es sich um ein System mit konstanten Koeffizienten handelt, ermitteln wir die Eigenvektoren von A:

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \lambda^2 + 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}$$

Es folgt:

$$\ker(\mathrm{A} - \lambda_1 \mathrm{I}) = \ker \begin{bmatrix} -2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \end{bmatrix}\right)$$
$$\Rightarrow \ker(\mathrm{A} - \lambda_2 \mathrm{I}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{bmatrix}\right)$$

Wir wählen nun $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \end{bmatrix}^T$. Für reelle Lösungen erhalten wir:

$$\boldsymbol{u}_1(x) = \begin{bmatrix} \cos(2x) \\ -2\sin(2x) \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{u}_2(x) = \begin{bmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) \end{bmatrix}$$

Somit ist eine allgemeine reelle Lösung des Systems:

$$\boldsymbol{w}_h(x) = c_1 \boldsymbol{u}_1(x) + c_2 \boldsymbol{u}_2(x)$$

Wir betrachten nun die Wronski-Determinante:

$$\mathrm{Y}(x) = \begin{bmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow W(x) = 2$$
$$\Rightarrow \mathrm{Y}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos(2x) & -\sin(2x) \\ 2\sin(2x) & \cos(2x) \end{bmatrix}$$
$$\mathrm{Y}^{-1}(x)\begin{bmatrix} 0 \\ 4\cos(x) \end{bmatrix} = 2\cos(x)\begin{bmatrix} -\sin(2x) \\ \cos(2x) \end{bmatrix}$$
$$\int^x \mathrm{Y}^{-1}(s)\boldsymbol{g}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4\cos^3(x) \\ 3\sin(x) + \sin(3x) \end{bmatrix}$$

Wir erhalten somit die folgende partikuläre Lösung:

$$\boldsymbol{w}_p(x) = \frac{1}{3}\mathrm{Y}(x)\begin{bmatrix} 4\cos^3(x) \\ 3\sin(x) + \sin(3x) \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4\cos^3(x)\cos(2x) + \sin(2x)(3\sin(x) + \sin(3x)) \\ -8\cos^3(x)\sin(2x) + 2\cos(x)(3\sin(x) + \sin(3x)) \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist damit gegeben durch:

$$\boldsymbol{w}(x) = c_1\boldsymbol{u}_1(x) + c_2\boldsymbol{u}_2(x) + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4\cos^3(x)\cos(2x) + \sin(2x)(3\sin(x) + \sin(3x)) \\ -8\cos^3(x)\sin(2x) + 2\cos(x)(3\sin(x) + \sin(3x)) \end{bmatrix}$$