8 Übungsblatt

Beispiel 8.1. *Zu zeigen ist, dass* $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lemma 1
Sei $p \in \mathbb{N}$ mit p^3 gerade. Dann ist p gerade.

Beweis. Wenn p ungerade ist, muss daraus folgen, dass p^3 ungerade ist. Wenn p ungerade, dann $\exists k \in \mathbb{N}\colon p = 2k+1$, womit:

$$(2k+1)^3 = 8k^3 + 6k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 3k^2 + 3k) + 1$$

Da $4k^3 + 3k^2 + 3k \in \mathbb{N}$ ist $2(4k^3 + 3k^2 + 3k)$ gerade und p^3 ungerade. $\square$

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen sei $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$, so gibt es $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$, sodass:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$$

Damit gilt:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^3}{q^3} \Leftrightarrow 2q^3 = p^3$$

Daraus folgt, dass p^3 eine gerade Zahl ist. Da p^3 gerade ist nach Lemma 1 auch p gerade. Es gibt also eine Zahl $k \in \mathbb{N}\colon p = 2k$, womit:

$$2q^3 = 8k^3 \Leftrightarrow q^3 = 4k^3 = 2(2k^3)$$

Somit ist q^3 gerade, womit q gerade ist. Es gibt also eine Zahl $l \in \mathbb{N}\colon q = 2l$. Daraus folgt aber:

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} = \frac{2k}{2l}$$

p und q können also nicht $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ haben, was ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung ist. Somit ist $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

Beispiel 8.2. *Zu zeigen ist, dass die folgenden Intervalle für* $n \in \mathbb{N}$ *eine Intervallschachtelung bilden:*

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = [a_n, b_n]$$

Wenn I_n ein Intervallschachtelung bilden, dann gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$ und $\forall \varepsilon > 0\colon \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}\colon |b_n - a_n| < \varepsilon$. Damit für zwei Intervalle $[a,b]$ und $[c,d]$ $[c,d] \subseteq [a,b]$ gilt, muss $a \leq c$ und $b \geq d$ gelten. In diesem Fall muss also $a_{n+1} \geq a_n$ und $b_{n+1} \leq b_n$ gelten:

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geq a_n &\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n+1 \geq n \\ b_{n+1} \leq b_n &\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n+1 \geq n \end{aligned}$$

Sei weiters $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$:

$$|b_n - a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}$$

Damit bilden I_n eine Intervallschachtelung. Der Durchschnitt

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

ist $\{0\}$, da $-\frac{1}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, da $-\frac{1}{n} \leq 0 \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow -1 \leq 0 \leq 1$. Sei weiters $\varepsilon \in \mathbb{R} \colon \varepsilon \neq 0$. Der Durchschnitt I ist genau dann $\{0\}$, wenn $\exists k \in \mathbb{N} \colon \varepsilon \notin I_k$. Wir wollen also zeigen, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $|\varepsilon| > \frac{1}{n}$:

$$|\varepsilon| > \frac{1}{k} \Leftrightarrow k > \frac{1}{|\varepsilon|}, \text{ wähle: } k = \left\lceil \frac{1}{|\varepsilon|} \right\rceil$$

Da wir für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ finden können mit dem $\varepsilon \notin I_k$ ist $I = \{0\}$.

Beispiel 8.3. *Zu zeigen ist, dass die folgenden Intervalle für $n \in \mathbb{N}$ eine Intervallschachtelung bilden:*

$$I_n = \left[1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}, 1\right] = [a_n, 1]$$

Lemma 2
Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt $2n^2 \geq 1$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 1$ ist $2 \cdot 1^2 = 2 \geq 1$. Daraus folgt die Induktionsvoraussetzung $2n^2 \geq 1$. Wir stellen $2(n+1)^2 \geq 1$ als Induktionsbehauptung auf und führen den Induktionsschritt:

$$2(n+1)^2 \geq 2n^2 \geq 1$$

□

Lemma 3
Sei $n \in \mathbb{N}$, so gilt $2n \geq 1$.

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 1$ gilt $2 \cdot 1 = 2 \geq 1$. Daraus folgt die Induktionsvoraussetzung $2n \geq 1$. Wir stellen $2(n+1) \geq 1$ als Induktionsbehauptung auf und führen den Induktionsschritt aus:

$$2(n+1) = 2n + 2 \geq 2n \geq 1$$

□

Wir müssen wieder zeigen, dass $a_{n+1} \geq a_n$, da $1 \geq 1$, damit I_n eine Intervallschachtelung bilden:

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2 - 2(n+1) + 1}{(n+1)^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1}{(n+1)^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{n^2}{(n+1)^2} \geq \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{(n^2 - 2n + 1)(n^2 + 2n + 1)}{n^2} \\
&n^2 \geq \frac{(n^2+1)^2 - 4n^2}{n^2} \Leftrightarrow n^4 \geq n^4 + 2n^2 + 1 - 4n^2 \Leftrightarrow 0 \geq -2n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 \geq 1
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2 folgt $a_{n+1} \geq a_n$. Weiters sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
|b_n - a_n| < \varepsilon &\Leftrightarrow \left|1 - 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \frac{2n-1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n^2} < \frac{2n}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Für $n > \frac{2}{\varepsilon}$ ist $|b_n - a_n| < \varepsilon$ erfüllt. Somit bilden I_n eine Intervallschachtelung. Der Durchschnitt

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

ist 1, da:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq 1 \leq 1$$

Wir müssen zeigen, dass $a_n \leq 1$:

$$1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2} \leq 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \leq n^2 \Leftrightarrow -2n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2n \geq 1$$

Mit Lemma 3 ist $a_n \leq 1$. Sei weiters $\varepsilon \in [0,1)$. Wenn $\exists k \in \mathbb{N}\colon \varepsilon \notin I_k$, dann ist $I = \{1\}$. Für $\varepsilon \in [0,1]^C$ gilt $\varepsilon \notin I_1$. Wir wollen zeigen, dass $\exists k \in \mathbb{N}\colon \varepsilon < a_k$:

$$\varepsilon < a_k \Leftrightarrow \varepsilon < 1 - \frac{2}{k} < 1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}$$
$$\varepsilon < 1 - \frac{2}{k} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon > \frac{2}{k} \Leftrightarrow k\frac{1}{1-\varepsilon} < \frac{k}{2} \Leftrightarrow k > \frac{2}{1-\varepsilon},\ \text{wähle: } k = \left\lceil \frac{2}{1-\varepsilon} \right\rceil$$