Übungsblatt № 5

Aufgabe 33: Kinokasse

Vor einer Kinokasse stehen $2n$ Personen, an von denen die eine Hälfte nur 10€ Scheine und die andere Hälfte nur 20€ Scheine hat. Der Eintritt kostet 10€ und die Kasse hat kein Wechselgeld. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen eine Kinokarte kaufen können, ohne dass der Kasse das Wechselgeld ausgeht?

Wir codieren die möglichen Anordnungen der Kunden als Worte der Länge $2n$ und setzen für Leute mit einem 20€ Schein „o“ und für Leute mit 10€ Schein ein „r“. Offensichtlich haben alle Worte gleich viele „o“'s und „r“'s. Da wir immer genauso viele 10€ Scheine wie 20€ Scheine brauchen, muss jedes Anfangsstück eines Wortes mindestens genauso viele „r“'s wie „o“'s enthalten. Es gibt daher genau $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ mögliche Reihenfolgen, die unsere Bedingung erfüllen. Für jede Reihenfolge gibt es genau $n! \cdot n!$ mögliche Permutationen der Personen. Insgesamt gibt es $(2n)!$ mögliche Reihenfolgen, daher ist die Wahrscheinlichkeit

$$C_n \cdot n! \cdot \frac{n!}{(2n)!} = \frac{n! \cdot n! \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot n! \cdot n! \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

Aufgabe 34: Triangulierungen

Eine Triangulierung eines konvexen n-Ecks ist eine Partition des n-Ecks in Dreiecke durch sich gegenseitig nicht schneidende Diagonalen. Sei T_n die Anzahl der Triangulierungen eines konvexen n-Ecks.

a) Stellen Sie alle Triangulierungen eines 4-Ecks bzw. eines 5-Ecks graphisch dar

b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 3$ mit $T_2 = 1$ gilt:

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} T_{n-k+2}$$

c) Wie hängt die Anzahl der Triangulierungen T_n mit den Catalanzahlen[1] C_n zusammen?

Zu a):

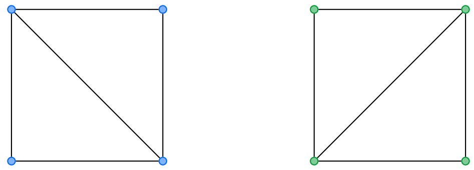

Abbildung 1: Alle Triangulierungen eines 4-Ecks

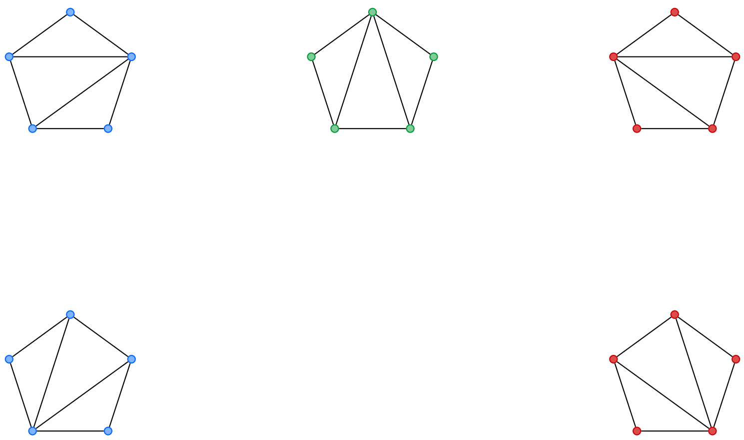

Abbildung 2: Alle Triangulierungen eines 5-Ecks

[1]Für die Catalanzahlen gilt $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ für alle $n \geq 0$.

Zu b): Betrachten wir nun ein n-Eck, wählen wir zuerst zwei Punkte v_0 und v_1 aus, wobei diese eine Seite bilden. Ausgehend von v_1 suchen wir nun eine Ecke $v_k \in V \setminus \{v_0, v_1\}$ aus. Mit dieser bilden wir das Dreieck mit den Ecken v_0, v_1, v_k. Wir haben somit ein Dreieck und zwei Teile des n-Ecks bestimmt, wo wir rekursiv die Anzahl der Triangulierungen separat bestimmen können. Wir müssen nur herausfinden, wie viele Ecken die verbleibenden Teile jeweils haben. Wir zählen daher von v_1 bis v_k und stellen fest, dass das Polygon genau $k-2$ Ecken zwischen v_1 und v_k hat. Der eine Teil hat also genau k-Ecken und damit gibt es hier T_k Triangulierungen. Für den zweiten Teil zählen wir nun die Ecken von v_k bis v_0. Es gibt insgesamt n Ecken. Da wir $k+1$ Ecken $\{v_0, \ldots, v_k\}$ bereits für das Basisdreieck und den ersten Teil verwendet haben, gibt es noch $n-k-1$ übrige Ecken für den zweiten Teil, also ein $n-k+1$ Eck $\{v_0, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{n-1}\}$. Dieses hat also T_{n-k+1} Triangulierungen. Da wir beide Teile unabhängig voneinander triangulieren können, gibt es für ein festes k genau $T_k \cdot T_{n-k+1}$ Triangulierungen. Wir wählen v_k nun beliebig in $\{v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ aus und können die Anzahl der Triangulierungen einfach summieren:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k+1}$$

Vergleichen wir die Summanden, so folgt direkt auch die gewünschte Darstellung:

$$T_n = \sum_{k=3}^{n} T_{k-1} \cdot T_{n-k+2}$$

Zu c):

$$C_{n-2} = \sum_{k=1}^{n-2} C_{k-1}C_{n-k} = \sum_{k=2}^{n-1} C_k C_{n-k+1} = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1} = T_n$$

Die Umformung auf die Summe mit T_n folgt aus unserer Induktionsvoraussetzung, dass $C_{n-3} = T_{n-1}$, da $C_3 = 1$ und $T_1 = 1$.

Aufgabe 35

Sieben Mathematikstudenten fahren in die Ferien. Jeder von ihnen schreiben Ansichtskarten an drei seiner sechs Kollegen. Ist es möglich, dass jeder Student genau von denjenigen seiner Kollegen eine Karte bekommt, denen er geschrieben hat?

Wir identifizieren das Problem mit einem Graphen G. Sei V die Menge der Studenten. $\{v, w\} \in E$ genau dann wenn v an w eine Karte schreibt und w an v ebenfalls. Nach unserer Voraussetzung muss also jeder Knoten Grad 3 haben. Da wir aber 7 Knoten haben ist das nicht möglich.

Aufgabe 36

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. G ist ein Baum
2. G ist maximal azyklisch

$2 \implies 1$: Offensichtlich enthält G keinen Kreis. Wir brauchen also noch, dass G zusammenhängend ist. Seien $v, w \in V$ paarweise verschieden. Ist $\{v, w\} \in E$ so haben wir einen Weg von v nach w gefunden. Sei daher $e = \{v, w\} \in \{\{x, y\} | x, y \in V : x \neq y\} \setminus E$. Offensichtlich enthält $G' = (V, E \cup \{e\})$ einen Kreis C, da G maximal azyklisch ist. Dann gibt es aber einen Teilgraphen $\widetilde{C} \subseteq C$ der ein Pfad von v nach w ist. Somit ist G zusammenhängend.

$1 \implies 2$: Wir zeigen, dass es für $v, w \in V$ mit $v \neq w$ genau einen Weg von v nach w gibt. Gibt es Knoten $v, w \in V$ mit zwei verschiedenen Wegen von v nach w, so haben wir einen Kreis in G gefunden. Allerdings muss G per Definition azyklisch sein. Des weiteren ist G zusammenhängend, sprich von allen Knoten $v \in V$ gibt es einen Weg nach $w \in V \setminus \{v\}$.

Nehmen wir nun an, dass es $e = \{v, w\} \in E$ gibt, sodass $G - e$ zusammenhängend ist, dann gibt es einen $v - w$ Weg in $G - e$. Somit gibt es in G zwei Wege von v nach w, damit ist G nicht kreisfrei. Daher ist G sogar minimal zusammenhängend.

Wir nehmen nun an, dass G einen Kreis C enthält. Ist e eine Kante von C, so ist $G - e$ zusammenhängend. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass G minimal zusammenhängend ist. Sei nun $e = \{v, w\} \notin E$. Da G

zusammenhängend ist, gibt es einen $v - w$ Weg in G. Daraus folgt aber direkt, dass $G + e$ einen Kreis enthält, was ein Widerspruch dazu ist, dass G ein Baum ist.

Aufgabe 37: Grade in Bäumen

a) Als Gradfolge eines Graphen bezeichnet man die aufsteigende sortierte Folge seiner Knotengrade. Die Gradfolge eines Baums sei $1, \dots, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Wie viele Blätter besitzt der Baum?
b) Bestimmen Sie alle Bäume mit n Knoten, die genau 2 Blätter besitzen
c) Zeigen Sie: Ein Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ hat genau

$$2 + \sum_{\substack{v \in V \\ \deg(v) \geq 3}} (\deg(v) - 2)$$

viele Blätter.

Zu a): Wir wollen ausgehend von der Gradfolge einen Baum konstruieren. Wir beginnen daher mit einem Wurzelelement v_0. Dieses soll unserer Folge zufolge den Grad 7 haben. Wir führen also $v_1, \dots, v_7$ ein und fügen je eine Kante zu v_0 hinzu. Wir haben jetzt 7 Blätter. Eines dieser Blätter soll nun Grad 6 haben. Wir können keine weiteren Kanten einfügen, da G sonst nicht azyklisch ist. Wir fügen also $v_8, \dots, v_{12}$ hinzu und verbinden sie mit v_7 durch eine Kante. Das Schema ist also sehr klar. Für jedes $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ fügen wir $k - 1$ Knoten hinzu und erhalten $n_k = n_{k+1} - 3 + k$ Blätter. Mit $n_7 = 7$ folgt somit direkt, dass $n_6 = 10$, was auch der Fall ist. Daher gibt es insgesamt 17 Blätter.

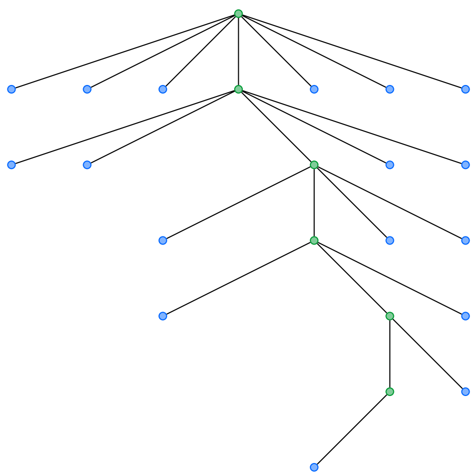

Abbildung 3: Ein Baum mit der gegebenen Gradfolge

Zu b): Sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, dann ist $P_n = (V, E)$ mit $E = \{(v_i, v_{i+1}) | i = 1, \dots, n - 1\}$. P_n ist ein Baum, der zwei Blätter hat. Da wir keine weiteren Modifikationen an E vornehmen können, ohne die Baumstruktur von P_n zu missachten gibt es keinen anderen Baum mit n Knoten, der nur zwei Blätter hat.

Zu c): Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $V = \{v_1, v_2\}$ hat T keine Knoten mit Grad 3, somit ist die Summe leer und es bleibt einfach 2 als Anzahl der Blätter. Im Induktionsschritt machen wir eine Fallunterscheidung. Wir hängen das neue Blatt v_n an einem bestehenden Knoten w. Gilt $\deg w = 1$, also ist w ein Blatt, so ändert sich die Anzahl der Blätter von T nicht. w ist zwar kein Blatt mehr, dafür kommt v_n als neues hinzu. Für $\deg w = 2$ gilt in $T + v$ dann $\deg w = 3$. Die Summe ist dann aber:

$$2 + \sum_{\substack{v \in V \\ \deg(v) \geq 3}} (\deg(v) - 2) = 2 + \underbrace{(\deg(w) - 2)}_{=1} + \sum_{\substack{v \in V \setminus \{w\} \\ \deg(v) \geq 3}} (\deg(v) - 2)$$

Wir sehen, dass es also genau 1 Blatt mehr gibt. Gilt zuletzt $\deg(w) \geq 3$ so folgt $\deg_{T+v_n}(w) = \deg_T(w) + 1$, also gibt es auch in diesem Fall genau ein Blatt mehr.

Aufgabe 38: Komplement von Bäumen

Bestimmen Sie alle Bäume, deren Komplement nicht zusammenhängend ist.

Ein Baum hat genau $n-1$ Kanten. Da der vollständige Graph $\binom{n}{2}$ Kanten hat, folgt somit

$$|E'| = \frac{n(n-1)}{2} - n + 1 = \frac{n^2 - n - 2n + 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Wir wollen herausfinden, wann $|E'| \geq n$ gilt. Da für $n = 5$ folgt $|E'| = 6$ führen wir einen Induktionsbeweis für $n \geq 5$. Die Basis haben wir gerade Bewiesen, es bleibt der Induktionsschritt $n-1 \to n$:

$$\begin{aligned}
&n = n - 1 + 1 \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} \leq \frac{n^2 - n}{2} \\
&n^2 - 3n + 4 \leq n^2 - n \iff -2n + 4 \leq 0
\end{aligned}$$

Die Ungleichung stimmt, da $-2n \leq -10$ für $n \geq 5$. Somit gibt es ab 5 Kanten keine Bäume mehr, deren Komplement nicht zusammenhängend ist, da es mehr Kanten als Knoten im Komplement gibt. Wir untersuchen also nur Bäume mit 4 oder weniger Kanten. Für einen Knoten ist das Komplement gleich dem Blatt. Mit zwei Knoten gibt es nur den Pfad P_2, dessen Komplement nicht zusammenhängend ist. Für drei Knoten ist auch nur P_3 ein Baum, dessen Komplement nicht zusammenhängend ist.

Abbildung 4: Der Baum P_3 (links) und sein Komplement (rechts)

Mit vier Knoten gibt es 20 Bäume. Unter Isomorphie zerfallen sie aber in zwei Restklassen, P_4 und $K_{3,1}$, wobei $K_{3,1}$ ein bipartiter Graph ist.

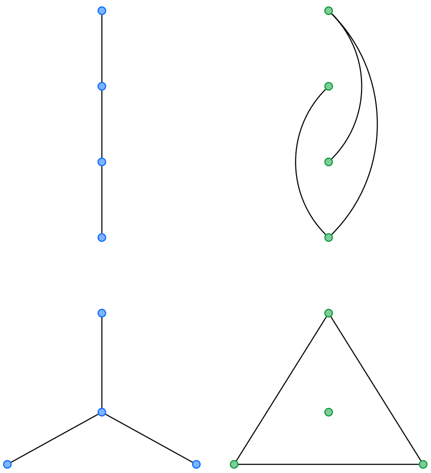

Abbildung 5: Repräsentanten der Restklassen der Bäume mit 4 Knoten (links) und deren Komplemente (rechts)

Offensichtlich ist nur $K_{3,1}^c$ nicht zusammenhängend.

Aufgabe 39

Sei T ein Baum mit n Knoten, in dem kein Knoten Grad 2 hat. Zeigen Sie, dass für die Länge d eines längsten Pfades in T die Ungleichung $d \leq \frac{n}{2}$ gilt.

Ein Pfad der Länge d hat d Kanten, also $d + 1$ Knoten, somit $d - 1$ innere Knoten, wobei jeder dieser inneren Knoten mit einen Knoten außerhalb von P_d eine Kante formt. Da T kreisfrei ist, sind das alles verschiedenen Knoten:

$$(d + 1) + (d - 1) \leq n \iff 2d \leq n \iff d \leq \frac{n}{2}$$