RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

I-Effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des propriétés.

On donne un nom, exemple $P(n)$, à la propriété qu'on veut démontrer.
Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour $n \geq k$, on procède en trois étapes :
Étape 1 : Initialisation.
On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à dire que $P(n)$ est vraie pour $n = k$.

Étape 2 : Hérédité.
On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Étape 3 : Conclusion.
On rédige alors :
Comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

II- Formules algébriques

Exemple II-1 :

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $1+2+3+4+5+ \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple II-2 :
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $1+3+5+7+9+ \ldots + (2n-1) = n^2$

III-Propriétés sur des suites.

Exemple III-1 :
Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = U_n + 61$ et $U_0 = -267$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $U_n = -267 + 61n$

Exemple III-2:

Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = \frac{(n+1)}{n} U_n$ et $U_1 = 1$.

a) Démontrer par récurrence que $U_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.
b) Déduire que la suite (U_n) est strictement croissante.

Exemple III-3:
Soit (V_n) la suite définie par $V_{n+1} = V_n \times 1{,}45$ et $V_0 = 316$.
Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$. $V_n = 316 \times 1{,}45^n$.