SUITES GÉOMÉTRIQUES (de raison strictement positive)

I- Définition

Une suite (U_n) est dite géométrique lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en multipliant toujours le même nombre q : $\boxed{U_{n+1}=qU_n}$ pour tout indice n .

Ce nombre r s'appelle la ***raison*** de la suite (U_n) .

M1 : comment vérifier qu'une suite (U_n) est géométrique ?

Après s'être assuré que (U_n) n'est jamais nul , on calcule, pour tout indice n , le rapport de deux termes consécutifs $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

- Si on obtient une quantité constante q , alors la suite est géométrique de raison q
- Si on obtient une quantité variable (dépendante de n), alors la suite n'est pas géométrique.

Variante (permettant d'éviter de raisonner avec un rapport et rendant les calculs moins lourds) : on montre qu'il existe un réel q tel que, pour tout indice n , on ait $U_{n+1}= qU_n$.

Exemples : les suites suivantes sont elles géométriques ?

1) $U_n=1{,}01^n$.

On a, pour tout indice n : $U_n\neq 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1{,}01^{n+1}}{1{,}01^n}=1{,}01$

La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $r=1.01$ et de premier $U_0=1$

Avec la variante de de M1, il suffit d'écrire que pour tout indice n :

$U_{n+1}=1{,}01^{n+1}=1{,}01\times 1{,}01^n=1{,}01\,U_n$

2) $U_n=n^2$, pour tout $n\geq 1$

On a, pour tout indice $n\geq 1$: $U_n\neq 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{(n+1)^2}{n^2}$

La suite (U_n) n'est pas une suite géométrique

.

M2 : comment calculer un terme quelconque d'une suite géométrique ?

On utilise l'une des relations suivantes :

$\boxed{U_n=q^n U_0}$ ou $\boxed{U_n=q^{n-p}U_p}$ (pour tous entiers p et n)

Exemples : Calculer U_7 dans les deux cas suivants :

1) $U_0=\frac{1}{4}$ et $q=2$: $U_7=U_0q^7=\frac{1}{4}\times 2^7=\frac{2^7}{2^2}=2^{7-2}=2^5=32$ $\boxed{U_7=32}$

2) $U_4=81$ et $q=\frac{1}{3}$ $U_7=U_pq^{7-4}=81\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{3^4}{3^3}=3^{4-3}=3$ $\boxed{U_7=3}$

SUITES GÉOMÉTRIQUES (de raison strictement positive)

M3 : comment calculer la somme S de N termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Si la raison $q \neq 1$, on utilise la relation suivante : $\boxed{S = P \times \frac{1-q^N}{1-q}}$ sinon $\boxed{S = P \times N}$

où N = nombre de termes de la somme, P = premier terme de la somme et q = raison de la suite.

Exemples : calculer les sommes suivantes :

1) $S = 1+2+4+8+16+ \ldots +4096$

C'est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

Se pose encore le problème du nombre de termes de cette somme. Pour cela, il suffit d'écrire les termes de la somme S à l'aide d'exposants :

$S = 2^0+2^1+2^2+2^3+ \ldots +2^{12}$ On en déduit que la somme S comporte 13 termes.

D'après M3, on obtient : $S = 1 \times \frac{1-2^{13}}{1-2} = \frac{1-2^{13}}{-1} = 2^{13}-1 = 8191$

$S = 8191$

2) $S = 1+x+x^2+x^3+x^4+ \ldots +x^n$

C'est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = x$.

$S = x^0+x+x^2+x^3+x^4+ \ldots +x^n$ On en déduit que la somme S comporte $n+1$ termes.

$S = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ **pour tout** $x \neq 1$ **sinon** $S = n+1$

Note : la formule de la somme de termes d'une suite géométrique (M3) prend parfois d'autres :

$S = U_0 + \ldots + U_n = U_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$, $S = U_1 + \ldots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ou plus généralement $\boxed{S = U_p + \ldots + U_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p}}{1-q}}$

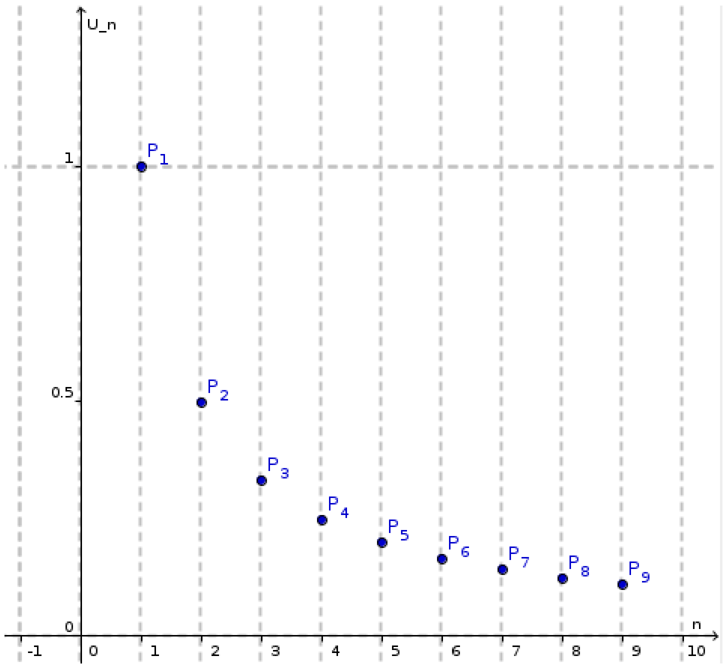
SUITES GÉOMÉTRIQUES (de raison strictement positive)

II- Représentation graphique d'une suite.

1. Définition

On se place dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La représentation graphique d'une suite (U_n) est l'ensemble des points de coordonnées $(n;U_n)$.

Exemple : Soit (U_n) la suite définie par $U_n=\frac{1}{n}$ **pour tout** $n>0$



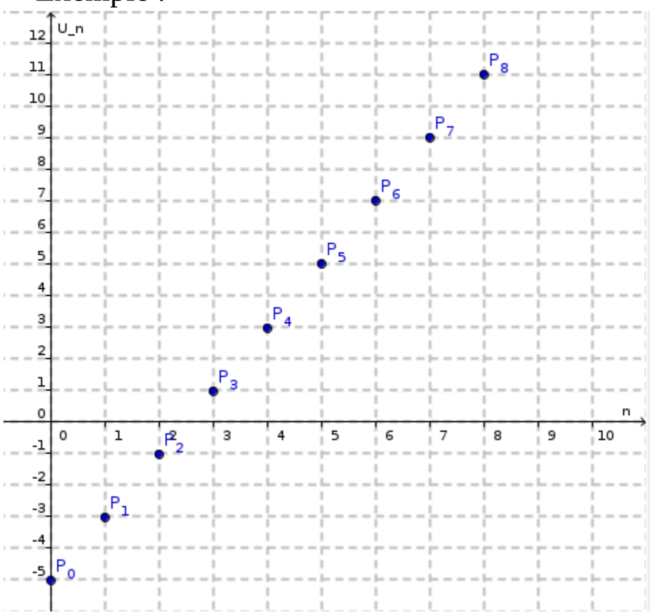
Sa représentation graphique est l'ensemble des points isolés

$P_1(1;1)$, $P_2(2;\frac{1}{2})$, $P_3(3;\frac{1}{3})$, ... ,

2. Théorème

Si (U_n) est une suite arithmétique, alors sa représentation graphique est constituée de points alignés.

Exemple :



La représentation graphique de la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0=-5$ et de raison $r=2$

La fonction associée à la suite (U_n) est une fonction affine définie par $f(n)=rn+U_0$ soit $f(n)=2n-5$

Ainsi les points de coordonnées $(n;U_n)$ sont situés sur la droite d'équation $U_n=rn+U_0$.

SUITES GÉOMÉTRIQUES (de raison strictement positive)

III- Sens de variation ou monotonie.

1. Définition

Soit (U_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite (U_n) est :

· croissante (à partir du rang n_0) lorsque $U_n \leq U_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$.

· décroissante (à partir du rang n_0) lorsque $U_n \geq U_{n+1}$ pour tout entier $n \geq n_0$

· monotone (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante (à partir du rang n_0)

· stationnaire (à partir du rang n_0) lorsque $U_n = U_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

· constante si stationnaire et définie à partir du rang n_0 .

On définit la stricte croissance (ou décroissance) à l'aide de l'inégalité stricte $U_n < U_{n+1}$ ($U_n > U_{n+1}$).

Notation : les intervalles d'entiers sont souvent notés à l'aide de crochets doubles.

Par exemple : $[\![2;5]\!] = \{2;3;4;5\}$

Si bien qu'on pourra écrire, par exemple, qu'une suite est croissante sur $[U_0;+\infty[$.

M3 : Comment vérifier qu'une suite est croissante (décroissante) ?

On calcule, pour tout indice n , la différence de deux termes consécutifs $U_{n+1} - U_n$. Si on obtient une quantité positive, alors la suite (U_n) est croissante. Si on obtient une quantité négative, alors la suite (U_n) est décroissante.