SUITES ARITHMÉTIQUES

I- Définition

Une suite (U_n) est dite arithmétique lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r : $U_{n+1}=U_n+r$ pour tout indice n.

Ce nombre r s'appelle la ***raison*** de la suite (U_n).

M1 : comment vérifier qu'une suite (U_n) est arithmétique ?

On calcule, pour tout indice n, la différence de deux termes consécutifs u $U_{n+1}-U_n$.

Si obtient une quantité constante r, alors la suite est arithmétique de raison r Si on obtient une quantité variable (dépendante de n), alors la suite n'est pas arithmétique.

Exemples : les suites suivantes sont elles arithmétiques ?

1) $U_n=3n-2$ Pour tout indice n, on a :

$$U_{n+1}-U_n=(3(n+1)-2)-(3n-2)$$
$$U_{n+1}-U_n=3n+3-2-3n+2$$
$$\boxed{U_{n+1}-U_n=3}$$

La suite (U_n) est arithmétique de raison $r=3$ .et de premier terme $U_0=-2$

2) $U_n=n^2+1$ Pour tout indice n, on a :

$$U_{n+1}-U_n=((n+1)^2+1)-(n^2+1)$$
$$U_{n+1}-U_n=(n^2+2n+1+1)-(n^2+1)$$
$$U_{n+1}-U_n=n^2+2n+2-n^2-1$$
$$\boxed{U_{n+1}-U_n=2n+1}$$

La suite (U_n) n'est arithmétique.

.

M2 : comment calculer un terme quelconque d'une suite arithmétique ?

On utilise l'une des relations suivantes :

$\boxed{U_n=U_0+nr}$ ou $\boxed{U_n=U_p+(n-p)r}$ (pour tous entiers p et n)

Exemples : Calculer U_{26} dans les deux cas suivants :

1) $U_0=6$ et $r=5$: $U_n=U_0+(n-0)r$

$$\Rightarrow U_{26}=6+(26-0)\times 5=136$$
$$\boxed{U_{26}=136}$$

2) $U_{10}=3$ et $r=-2$: $U_n=U_{10}+(n-10)r$

$$\Rightarrow U_{26}=3+(26-10)\times(-2)=3+16\times(-2)$$
$$\boxed{U_{26}=-29}$$

SUITES ARITHMÉTIQUES

M3 : comment calculer la somme S de N termes consécutifs d'une suite arithmétique ?

On utilise la relation suivante : $\boxed{S=\frac{N(P+D)}{2}}$ **et** $\boxed{N=\frac{P-D}{r}+1}$

où **N** = nombre de termes de la somme, **P** = premier terme de la somme et **D** = dernier terme de la somme.

Exemples : calculer les sommes suivantes :
1) S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ... + 99
On cherche la somme de termes d'une suite arithmétique de raison r $r=2$ et de premier terme $U_1=1$.
Mais combien de termes comporte cette somme ?
Notons $U_n=99$ où n désigne le nombre de termes de la somme.
D'après M2 ($U_n=U_p+(n-p)r$) , on a $U_n=U_1+(n-1)r$.
C'est-à-dire : $99=1+(n-1)2=1+2n-2=2n-1 \Leftrightarrow 2n=100 \Leftrightarrow n=50$
Il y a donc 50 termes dans cette somme.
Ce qui donne, d'après M3 : $S=\frac{50(1+99)}{2}=2500$

2) S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n.
Somme des n termes d'une suite arithmétique de raison $r=1$, de premier terme $P=1$ et de dernier terme $D=n$, d'où : $S=\frac{n(1+n)}{2}$