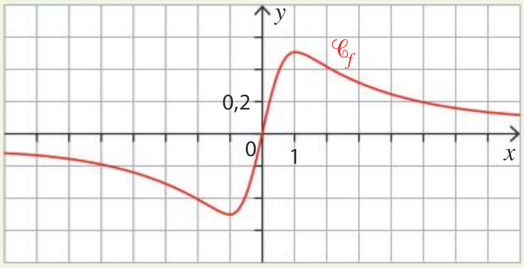
ZOOM SUR… les lectures graphiques

L'un des exercices proposés à l'épreuve du bac peut contenir une ou plusieurs lectures graphiques pour lesquelles il faut identifier une fonction et/ou sa dérivée, puis déterminer graphiquement la convexité de la fonction.

84 QCM 15 min

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée de f'.

Donner, sans justifier, l'unique bonne réponse à chacune des questions suivantes.

1. Le nombre de solutions dans [–7 ; 7] de l'équation $f'(x) = 0$ est :

a 0 b 1 c 2 d 3

2. Une valeur approchée à 10^{-1} de la solution de l'équation $f(x) = -0{,}3$ sur l'intervalle [–1 ; 6] est :

a –3 b –0,3 c 0,3 d 3

3. Le nombre de points d'inflexion dans [–7 ; 7] de $\mathscr{C}_f$ est :

a 0 b 1 c 2 d 3

4. La fonction f'' est positive sur :

a [0 ; +∞[

b [–1 ; 1]

c [–2 ; 0]

d [0 ; 2]

85 15 min

Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labélisés « bio ».

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C, définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle [0 ; 10], le coût marginal (c'est-à-dire l'accroissement du coût de production pour la production d'une unité supplémentaire) est donné par la fonction $C_m = C'$, où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour 600 paniers vendus.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C.

a. Déterminer l'expression de $C''(x)$.

b. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\,;a]$ inclus dans [0 ; 10] sur lequel la fonction C est convexe.

c. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

86 50 min

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.

Cette longueur est modélisée par la fonction f, définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = 10e^{u(x)}\,;$$

où u est la fonction définie sur [0 ; +∞[par :

$$u(x) = -e^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur [0 ; +∞[et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que, pour tout x positif, on a :

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur [0 ; +∞[.

2. a. Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur [0 ; +∞[et on note f'' la fonction dérivée de f'. Enfin, on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}\,u(x)e^{u(x)}(1+u(x)).$$

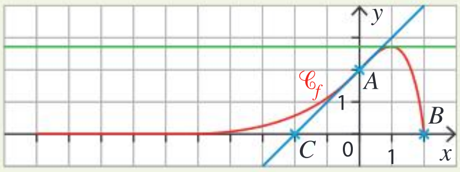
a. Déterminer les variations de f' sur [0 ; +∞[.

b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

87 30 min

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [–10 ; 2].
On a placé les points $A(0 ; 2)$, $B(2 ; 0)$ et $C(-2 ; 0)$.
On dispose des renseignements suivants.
- Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.
1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle [–10 ; 2].
5. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle [–10 ; 2].
6. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe et celui sur lequel elle est concave.

Partie B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.
On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle [–10 ; 2] par :
$$f(x) = (2 - x)e^x.$$
1. a. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
b. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre x appartenant à l'intervalle [–10 ; 2].
c. En déduire la valeur de $f'(1)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [–10 ; 2].
b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle [–10 ; 2], puis donner une valeur approchée au centième de chacune de ces solutions.
4. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant :

Utiliser le résultat du logiciel pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle [–10 ; 2].

88 ALGO 30 min

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant. Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 20] par :
$$f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)e^{-0{,}5t} + 0{,}03.$$
On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].
Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

x	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	–	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
a. Calculer $f(20)$.
b. Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %.
a. Justifier qu'il existe un unique instant T satisfaisant cette condition.
b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
    t ← t + p
    V ← (0,8t + 0,2) e^(−0,5t) + 0,03
```

Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'algorithme ?
Que représente cette valeur dans le contexte de l'exercice ?

Consolider ses fondamentaux

89 Étudier la convexité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x-1}$.

Questions Va piano

1. CALCULATRICE Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de la fonction f.
2. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction f semble-t-elle concave ? convexe ?
3. Conjecturer graphiquement les éventuels points d'inflexion. En donner les coordonnées.

Questions Moderato

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
2. Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire sur quels intervalles la fonction f est concave, puis sur quels intervalles elle est convexe.

Questions Allegro

1. Déterminer la fonction dérivée seconde f'' de la fonction f.
2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire le(s) point(s) d'inflexion de la courbe représentative de f.

Se préparer aux études supérieures

90 Équation fonctionnelle

Approfondissement

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante, appelée équation fonctionnelle :

pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Partie A. Analyse

Soit g une fonction vérifiant les hypothèses précédentes.

1. Démontrer que $g(0) = 0$ et que g est impaire.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$g(n) = n\alpha, \text{ où } \alpha = g(1).$$

b. En déduire que, pour tout entier relatif k :

$$g(k) = k\alpha.$$

3. Déduire de la question **2** et de l'équation fonctionnelle que, pour tout nombre rationnel q :

$$g(q) = q\alpha.$$

4. Dans cette question, on admet que, pour tout réel x, il existe une suite de nombres rationnels convergeant vers x.

On dit alors que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite de nombres rationnels convergeant vers x_0.

a. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n) = g(x_0)$.

b. En déduire que $g(x_0) = \alpha x_0$.

c. En déduire la nature de la fonction g.

Partie B. Synthèse

Démontrer que les fonctions linéaires vérifient l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, puis conclure.

91 Prolongement par continuité

Approfondissement

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3+x+2}{x^3+1}$.

1. Justifier que f est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

2. CALCULATRICE LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE Tracer la courbe représentative de f sur l'écran d'une calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de géométrie .

3. a. Montrer que, pour tout réel x différent de -1 :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

b. Montrer que f admet une limite finie en -1.

c. En déduire que f peut être « prolongée » en une fonction $\tilde{f}$, définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x différent de -1, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Préciser alors la valeur que l'on doit attribuer à $\tilde{f}(-1)$ pour que $\tilde{f}$ soit continue sur $\mathbb{R}$.

92 Dérivée n-ième

Approfondissement

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{3x}$ définie sur $\mathbb{R}$. On admet que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

Par exemple, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

1. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$f^{(n)}(x) = (9x^2 + 6nx + n(n-1))\,3^{n-2} e^{3x}.$$

3. Vérifier que cette formule est aussi vraie pour $n = 1$ et $n = 0$.