FONCTIONS POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

I- Définition

Une fonction polynôme de degré 2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où les coefficients a , b et c sont des réels donnés avec $a\neq 0$

Les appellations suivantes sont équivalentes
- Fonction du second degré.
- Fonction polynôme de degré 2
- Fonction polynôme du second degré

Exemples

$f(x)=2x^2-4x+7$ $\qquad$ $g(x)=\frac{1}{3}x^2-x-\frac{7}{2}$ $\qquad$ $h(x)=11-x^2$

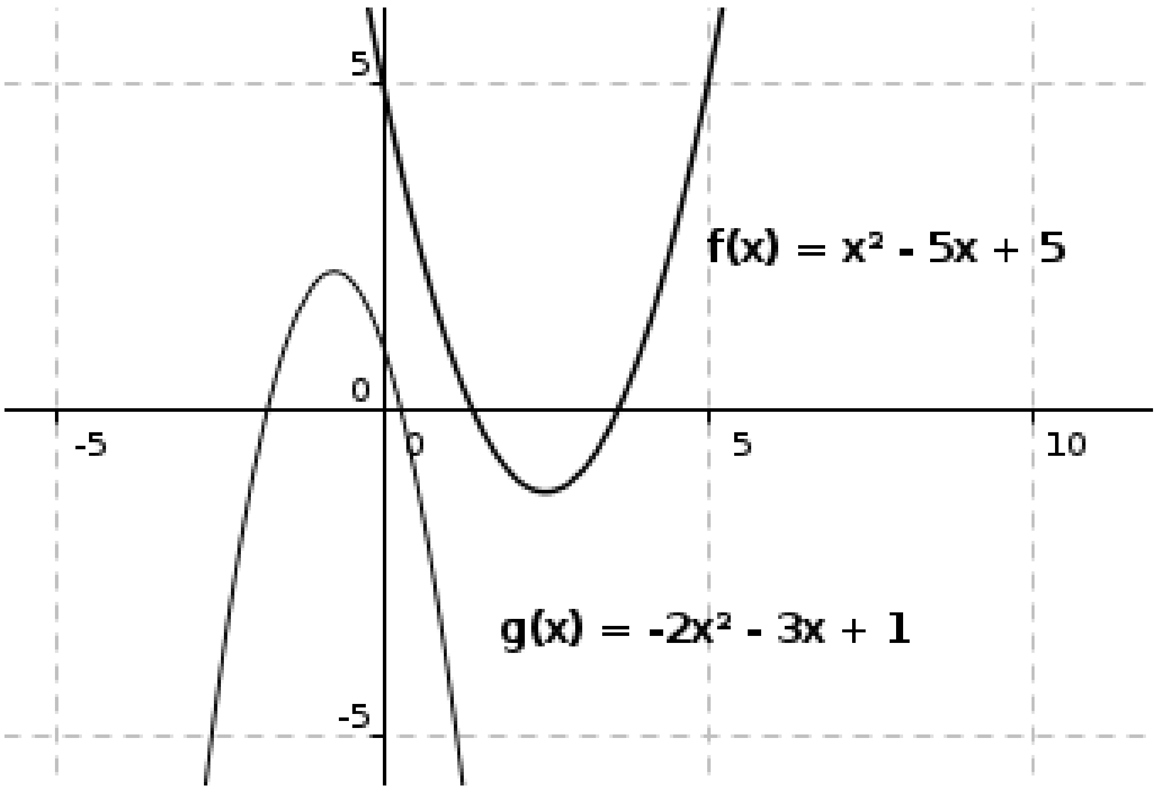
Les fonctions f , g et h ci-dessus sont des fonctions polynôme de degré 2.
La fonction carrée est une fonction polynôme de degré 2 particulière avec $a=1$, $b=0$ et $c=0$

$k(x)=(2x-7)(3-x)$
La fonction k est également une fonction du second degré mais sous sa forme factorisée.

$m(x)=3x-5$ n'est pas une fonction du second degré. C'est une fonction du premier degré (affine).

$n(x)=3x^4-5x^2-8$ n'est pas une fonction du second degré. C'est une fonction polynôme de degré 4.

La courbe représentative d'une fonction du second degré est une parabole.



II- Forme canonique

La fonction $f(x)=ax^2+bx+c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

où α **et** β sont deux nombres réels.

III- Variation et représentation

1- Forme canonique :

Toutes les fonctions polynômes de degré 2 sont représentés par une parabole.

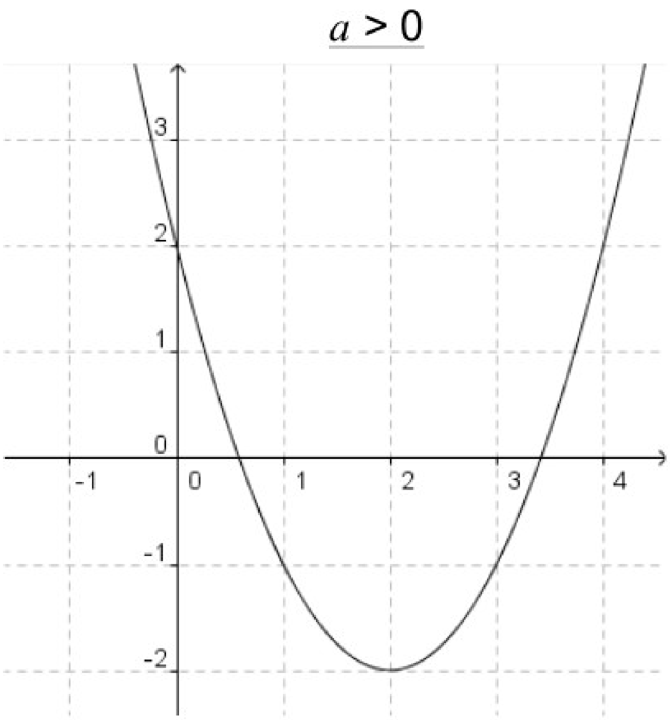
$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$

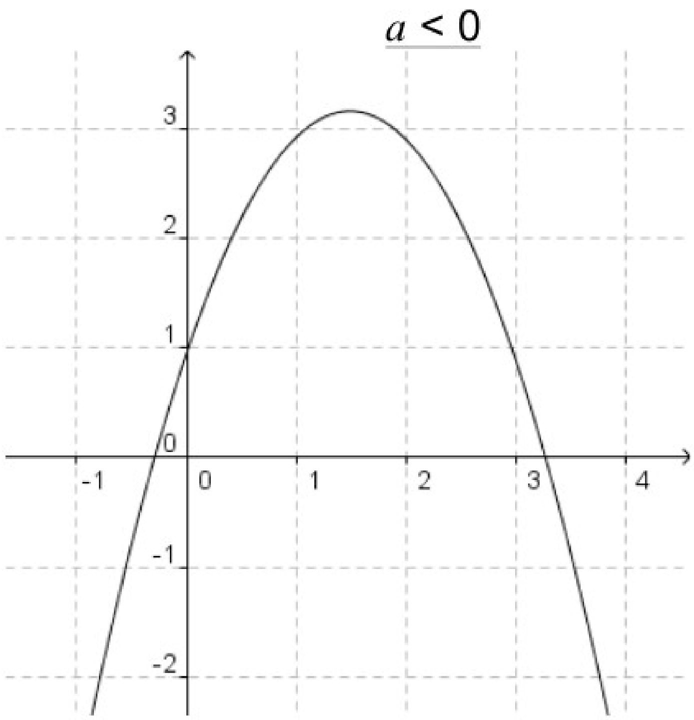
$$\boxed{\alpha=-\frac{b}{2a} \quad \textbf{et} \quad \beta=f(\alpha)}$$

2- Propriété :

-Si $a>0$ **(positif)** , f est d'abord décroissante puis croissante.
Elle admet un minimum pour $x=\alpha$ et ce minimum est égal à β .

-Si $a<0$ **(négatif)** , f est d'abord croissante puis décroissante.
Elle admet un maximum pour $x=\alpha$ et ce maximum est égal à β .





IV- Extremum (minimum / maximum)

La courbe représentative de f est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.
Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé le sommet de la parabole.

V- Équation du second degré.

Une équation du second degré est de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a , b et c sont des réels avec $a\neq 0$

VI- Résolution d'une équation du second degré.

Soit une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme ax^2+bx+c

VII- Discriminant du trinôme du second degré ax^2+bx+c

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- Si $\boxed{\Delta<0}$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution réelle.
- Si $\boxed{\Delta=0}$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une unique solution $\boxed{x_0=-\frac{b}{2a}}$
- Si $\boxed{\Delta>0}$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes

$$\boxed{x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2+x-2=0$
$a=1$, $b=1$ et $c=-2$ donc $\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=1+8=9$
$\Delta=9>0$, donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2\times1}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1 \qquad \boxed{\Rightarrow\ S=\{-2;1\}}$$

2) $-2x^2+x-1=0$
$a=-2$, $b=1$ et $c=-1$ donc $\Delta=1^2-4\times(-2)\times(-1)=1-8=-7$
$\Delta=-7<0$, donc l'équation n'admet pas de solution : $\boxed{\Rightarrow\ S=\emptyset}$

3) $4x^2+4x+1=0$
$a=4$, $b=4$ et $c=1$ donc $\Delta=4^2-4\times4\times1=16-16=0$
$\Delta=0$, donc l'équation admet une unique solution:

$$x_0=\frac{-4}{2\times4}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2} \qquad \boxed{\Rightarrow\ S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

VIII-Factorisation d'un trinôme du second degré

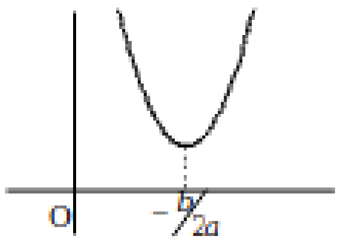
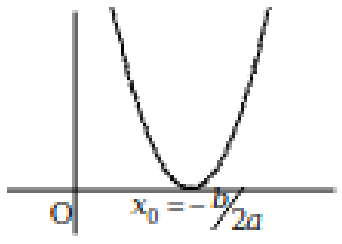
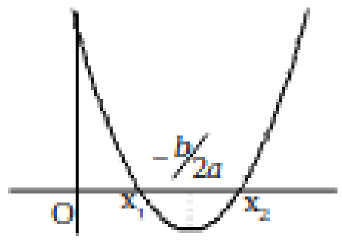
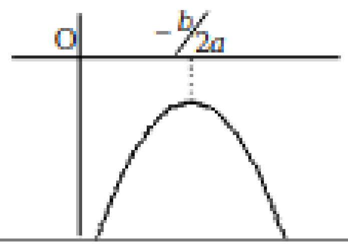
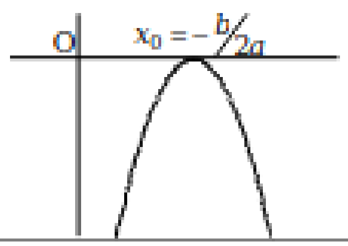
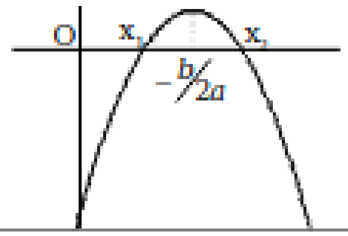
$f(x)=ax^2+bx+c$

- Si $\boxed{\Delta<0}$: Le trinôme n'admet pas de racine, donc il n'existe pas de forme factorisée.
- Si $\boxed{\Delta=0}$: Pour tout x réel on a $f(x)=a(x-x_0)^2$
- Si $\boxed{\Delta>0}$: Pour tout x réel on a $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

IX-Signe d’un trinôme du second degré

IV) Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

Théorème : Soit la fonction polynôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$ et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Conséquence graphique	La parabole $\mathscr{C}_f$ qui représente f ne coupe pas l’axe des abscisses.	La parabole $\mathscr{C}_f$ qui représente f est tangente en un point et un seul à l’axe des abscisses.	La parabole $\mathscr{C}_f$ qui représente f coupe l’axe des abscisses en deux points d’abscisses respectives x_1 et x_2.
$a > 0$ Parabole $\mathscr{C}_f$ tournée vers le haut			
Equation $f(x) = 0$	Pas de solution	Une solution double x_0	Deux solutions distinctes x_1 et x_2
Signe de f(x)	x : $-\infty$ … $+\infty$ Signe de f(x) : +	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ Signe de f(x) : + 0 +	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ Signe de f(x) : + 0 − 0 +
$a < 0$ Parabole $\mathscr{C}_f$ tournée vers le bas			
Equation $f(x) = 0$	Pas de solution	Une solution double x_0	Deux solutions distinctes x_1 et x_2
Signe de f(x)	x : $-\infty$ … $+\infty$ Signe de f(x) : −	x : $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ Signe de f(x) : − 0 −	x : $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ Signe de f(x) : − 0 + 0 −

***X-Démonstration des formules de la forme canonique* :**

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$$f(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \qquad \textbf{(1)}$$

On constate que $\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)$ est le début de l'une identité remarquable de type $(A+B)^2 = A^2+2ABx+B^2$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2} \qquad \textbf{(2)}$$

En remplaçant $x^2+\frac{b}{a}x$ de l'expression **(1)** par sa valeur dans l'expression **(2)** , on obtient

$$f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c \text{ soit } \iff f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)+c$$

$$\iff f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c$$

$$\iff f(x)=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\left(-\frac{b^2}{4a}+c\right)$$

En posant $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{b^2}{4a}+c$, on a $\boxed{f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta \text{ et } \beta=f(\alpha)}$

XI-Démonstration de formule du discriminant:

$$ax^2+bx+c=0$$

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$ Factorisation de a et on obtient un produit nul avec $a\neq 0$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ **(1)**

On constate le début de l'une identité remarquable :

$(x+\alpha)^2 = x^2+2\alpha x+\alpha^2$ avec $2\alpha=\frac{b}{a}$ donc $\alpha=\frac{b}{2a}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$$

$x^2+\frac{b}{a}x=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}$ **(2)**

En remplaçant $x^2+\frac{b}{a}x$ de l'expression **(1)** par sa valeur dans l'expression **(2)** , on obtient

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$ soit $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}$$

Posons $\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{(2a)^2} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\sqrt{\Delta}^2}{(2a)^2}$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Leftrightarrow x=\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où $\boxed{S=\begin{cases} x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}}$