ZOOM SUR… le raisonnement par récurrence

Comme il n'est pas toujours spécifié dans un sujet de bac qu'il faut utiliser le raisonnement par récurrence, il faut avoir ce raisonnement à l'esprit lorsqu'on demande de démontrer une propriété qui dépend d'un entier naturel n.

La rédaction est très importante : il faut bien vérifier l'initialisation de la propriété pour une première valeur de n (0 ou 1 souvent), puis vérifier l'hérédité. On conclut sur le fait que la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout entier naturel n supérieur au rang où l'on a initialisé.

78 20 min

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$. On considère également la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.

1. Voici un extrait d'une feuille de tableur.
Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules B3 et C2 puis copiées vers le bas afin d'afficher les termes des suites (u_n) et (v_n) ?

	A	B	C
1	n	u_n	v_n
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	

2. Conjecturer la nature de la suite (v_n) puis une expression de v_n en fonction de l'entier n uniquement. Conjecturer ensuite une expression de u_n en fonction de l'entier n uniquement.

3. Démontrer que l'expression conjecturée pour u_n en fonction de n est vraie pour tout entier naturel n, en utilisant un raisonnement par récurrence.

79 15 min

En mars 2020, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2021 avant que Max ne la taille ?

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2020 + n)$. Ainsi, $h_0 = 80$.

a. Donner l'expression de h_{n+1} en fonction de h_n.

b. Démontrer par récurrence que la suite (h_n) est croissante.

80 20 min

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a. CALCULATRICE À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau suivant (arrondir les valeurs de u_n à 10^{-2}).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

b. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n non nul et en déduire une démonstration de la conjecture faite à la question **1.b**.

81 40 min ALGO PYTHON

1. On considère le programme suivant, écrit en Python.

```python
from math import sqrt
def exbac(a,b,N):
    u=a
    v=b
    n=0
    while n<N:
        n=n+1
        u=(a+b)/2
        v=sqrt((a**2+b**2)/2)
        a=u
        b=v
    return u,v
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer ce qu'affiche l'instruction exbac(4,9,2), saisie dans la console.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Les valeurs de u et v seront arrondies au millième.

2. Dans cette question et la suivante, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$ et on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^{\,2} + v_n^{\,2}}{2}}.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}^{\,2} - u_{n+1}^{\,2} = \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer $v_{n+1}^{\,2}$ et $v_n^{\,2}$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

82 30 min ALGO PYTHON

Partie A

On considère le script suivant écrit en Python.

```python
def liste_termes_u(p):
    L=[5]
    for k in range(1,p+1):
        L.append(0.5*L[-1]+0.5*(k-1)-1.5)
    return L
```

Qu'obtient-on si l'on entre l'instruction liste_termes_u(2) dans la console ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Après avoir saisi dans la console l'instruction liste_termes_u(4) on obtient : [5,1.0,-0.5,-0.75,-0.375].
Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

4. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

83 40 min

Une plateforme propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un de type B. On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

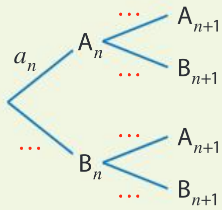
- si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de 0,8 ;
- si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de 0,7.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les événements :

- A_n : « la n-ième partie est une partie de type A » ;
- B_n : « la n-ième partie est une partie de type B » ;

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3.$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1]. La suite (a_n) est donc définie par $a_1 = a$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

3. Étude du cas général

Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle [0 ; 1]. On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

c. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B.
Quelle devrait être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?

84 30 min

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 3^n + n - 1.$$

c. Calculer $\sum_{k=0}^{100} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_{100}$.

On rappelle que, pour tout entier naturel n :

$1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et, pour $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

d. ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui calcule la somme ci-dessus.

Consolider ses acquis

85 Étude de deux suites

On considère deux suites :
- (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}3x + 2$.
- (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = g(v_n)$, où g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

Questions Va piano

1. a. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
b. À l'aide du tableur de la calculatrice, émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n), puis la démontrer par récurrence.
2. a. Montrer que g est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
b. Montrer par récurrence que $v_n > 0$ pour tout entier naturel n.
c. À l'aide du tableur de la calculatrice, émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite (v_n), puis le démontrer par récurrence.

Questions Moderato

1. a. Démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 0$ pour tout entier naturel n.
b. Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur leurs ensembles de définition.
c. Étudier, en utilisant un raisonnement par récurrence, le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
2. Pour une suite du type $u_{n+1} = h(u_n)$, où h est une fonction croissante, quel est le lien entre le sens de variation de la fonction h et le sens de variation de la suite (u_n) ?

Questions Allegro

1. Étudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
2. Pour une suite du type $u_{n+1} = h(u_n)$, le sens de variation de h donne-t-il le sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Que peut-on dire de la monotonie d'une suite du type $u_{n+1} = h(u_n)$, où h est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$?

Se préparer aux études supérieures

86 Récurrence linéaire d'ordre 2

Approfondissement

On dit qu'une suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si elle vérifie une relation de récurrence du type :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (1)$$

où a et b sont des réels donnés.

La donnée des deux premiers termes u_0 et u_1 définit une unique suite vérifiant la relation (1).

1. Montrer qu'une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q non nulle vérifie la relation (1) si et seulement si q est solution de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.

Cette équation est appelée équation caractéristique de la suite linéaire d'ordre 2.

2. On admet le théorème suivant.

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$.

- **Cas $\Delta > 0$.** L'équation caractéristique possède dans ce cas deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2.
(u_n) vérifie (1) si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$.
- **Cas $\Delta = 0$.** L'équation caractéristique possède une solution double réelle, notée x_0.
(u_n) vérifie (1) si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu)x_0^n$.
- **Cas $\Delta < 0$.** Ce cas nécessite l'utilisation des nombres complexes.

a. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = -15 \ \text{ et } \ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n.$$

Déterminer une formule explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

b. Soit la suite (F_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \ \text{ et } \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

appelée suite de Fibonacci, du nom du mathématicien italien du XIIIe siècle.

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n).$$

où φ est le nombre d'or $\left(\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\varphi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Montrer ensuite que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \frac{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}\right)^n}.$$

- Conjecturer la valeur du rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.