I- Définition

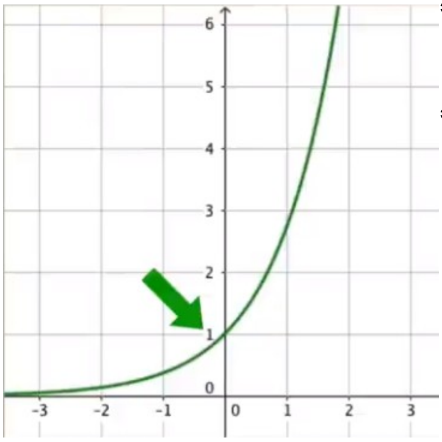
Théorème: Il existe une unique fonction f *, dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* $f'=f$ *et* $f(0)=1$ *.*

On appelle *<u>fonction exponentielle</u>* *l'unique fonction dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$f'=f$ *et* $f(0)=1$ *. On la note* exp *.*

<u>*Conséquence*</u>*:* $exp(0)=1$

II- Étude.



* La fonction exp est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$

$(exp\,x)'=exp\,x$

* La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{n \to -\infty} \exp x = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp x = +\infty$

* Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(\exp x)'$	+
$\exp x$	0 ↗ $+\infty$

III- Propriétés.

a) Relation fonctionnelle : $\exp(x+y)=(\exp x)(\exp y)$

b) $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp x}$

c) $\exp(x-y)=\dfrac{\exp x}{\exp y}$

d) $\exp(nx)=(\exp x)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

IV- Le nombre e .

1) Définition

L'image de 1 par la fonction $\exp$ est noté e . On a ainsi $\exp 1=e$

$e \simeq 2.718281828459045...$ et $\pi \simeq 3.141592653589793...$ sont des nombres irrationnelles.

$$\exp(x)=\exp(x \times 1)=(\exp(1))^x=e^x$$

d'où $\exp(x)=e^x$

Avec la notation de la fonction exponentielle avec le nombre e , on a:

a) $e^0=1$ **et** $e^1=e$

b) $e^x>0$ **et** $(e^x)'=e^x$

c) $e^{x+y}=e^x e^y$, $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$, $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$, $(e^x)^n=e^{nx}$ **, avec** $n \in \mathbb{N}$

d) $\lim\limits_{n \to -\infty} e^x = 0$ **et** $\lim\limits_{n \to +\infty} e^x = +\infty$

La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d’équation y = 0 en $-\infty$ ***Attention, la fonction exponentielle n’admet pas d’asymptote en*** $+\infty$

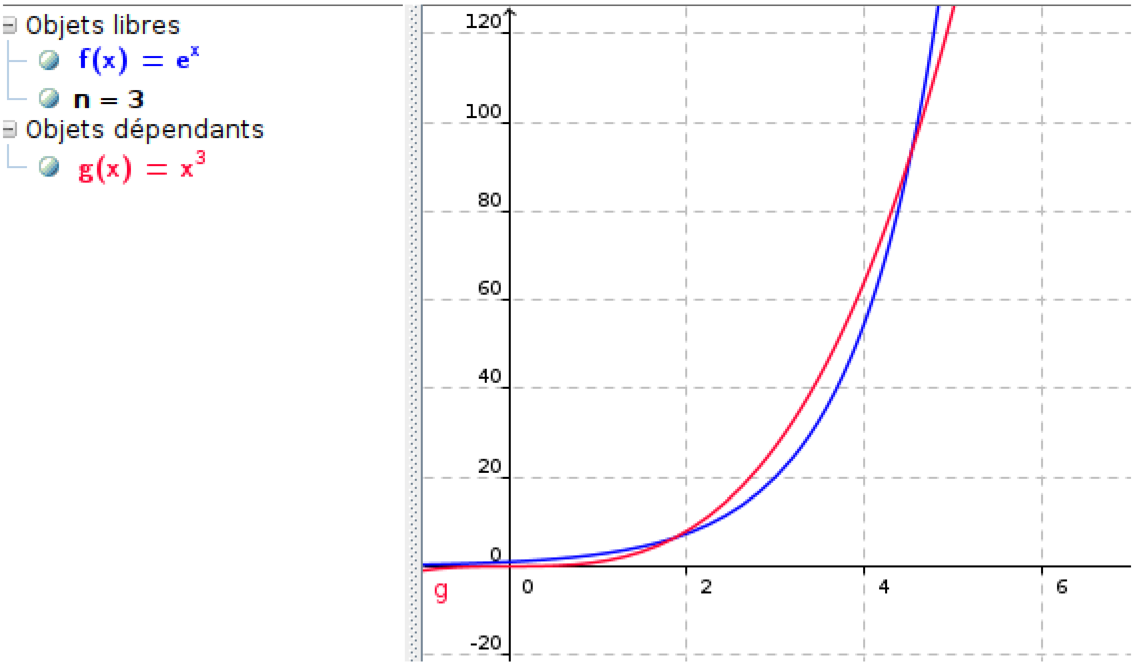
e) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

f) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

V- Croissances comparées.

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ **et pour tout entier** n $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to -\infty} x e^x = 0$ **et pour tout entier** n $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n e^x = 0$



$$\lim_{n \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

VI- Fonction e^u **.**

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

Les fonctions $u(x)$ est $e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.