Raisonnement par récurrence (Exercice 1)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ ...\ + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) Initialisation

Pour $n=1$ **, on a** $S_1 = 1^2 = 1$ **et** $\frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \frac{1\times 2(2+1)}{6} = \frac{2\times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

La propriété est donc vraie au rang $n_0 = 1$.

2) Hérédité

Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k , c'est-à dire: $S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ ...\ + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (Hypothèse de récurrence)

montrons alors que $S_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ ...\ + k^2 + (k+1)^2 = S_k + (k+1)^2$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ donc

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \quad \textbf{(1)}$$

On voulait montrer que $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Développons $(k+2)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 4k + 6 = 2k^2 + 7k + 6$ et en revenant sur l'expression **(1)** , nous obtenons $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

L'hérédité est donc démontré.

3) Conclusion

La propriété est vérifié pour $n=1$, l'hérédité est démontré pour tout entier $k \geq 1$, la propriété est donc vraie, c'est-à dire :

pour $n \geq 1$ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ ...\ + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Raisonnement par récurrence (Exercice 2)

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+a)^n \geq 1+na$.

1) Initialisation
Pour $n=0$ **, on a** $(1+a)^0=1$ **et** $1+0\times a=1$
La propriété est donc vraie au rang $n_0=0$.

2) Hérédité
Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang k , c'est-à dire: $(1+a)^k \geq 1+ka$ (Hypothèse de récurrence)

$(1+a)^{k+1}=(1+a)(1+a)^k$
or d'après l'hypothèse de récurrence $(1+a)^k \geq 1+ka$ donc
$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka)$

$(1+a)^{k+1} \geq 1+ka+a+ka^2$

$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a+ka^2$
or $ka^2 \geq 0$ donc $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a$
L'hérédité est donc démontré.

3) Conclusion
La propriété est vérifié pour $n=0$, l'hérédité est démontré pour tout entier $k \geq 0$, la propriété est donc vraie, c'est-à dire : Pour $a \in \mathbb{R}^+$ $(1+a)^n \geq 1+na$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Raisonnement par récurrence (Exercice 3)

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ ... \ + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1) Initialisation

Pour $n=1$ **, on a** $S_1 = 1^3 = 1$ **et** $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \times 2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

La propriété est donc vraie au rang $n_0 = 0$.

2) Hérédité

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang k , c'est-à dire: $S_k = \sum_{i=1}^{k} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ ... \ + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (Hypothèse de récurrence)

montrons alors que $S_{k+1} = \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$$S_{k+1} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ ... \ + k^3 + (k+1)^3 = S_k + (k+1)^3$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence $S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ donc

$$S_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$S_{k+1} = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4}$$

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

L'hérédité est donc démontré.

3) Conclusion

La propriété est vérifié pour $n=1$, l'hérédité est démontré pour tout entier $k \geq 1$, la propriété est donc vraie, c'est-à dire :

Pour $n \geq 1$ $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ ... \ + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Raisonnement par récurrence (Exercice 4)

On considère la suite (u_n) définie par (u_n): $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n} \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

On veut donc démonter que $u_n \leq u_{n+1}$

1) Initialisation

Pour $n=0$ **, on a** $u_0=1$ **et** $u_1=\sqrt{1+u_0}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

On a bien $u_0 \leq u_1$ **, l**a propriété est donc vraie au rang $n_0=0$.

2) Hérédité

Supposons qu'il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang k , c'est-à dire: $u_k \leq u_{k+1}$ (Hypothèse de récurrence)

montrons alors que $u_{k+1} \leq u_{k+2}$

$u_k \leq u_{k+1}$

$1+u_k \leq 1+u_{k+1}$

$\sqrt{1+u_k} \leq \sqrt{1+u_{k+1}}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante.

$u_{k+1} \leq u_{k+2}$

L'hérédité est donc démontré.

3) Conclusion

La propriété est vérifié pour $n=0$, l'hérédité est démontré pour tout entier $k\geq 0$, la propriété est donc vraie, c'est-à dire :

Pour $n\geq 0$ $u_n \leq u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est bien croissante.

Raisonnement par récurrence (Exercice 5)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est un multiple de 9 .

1) Initialisation

Pour $n = 0$, on a $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et 0 est un multiple de 9 .
La propriété est donc vraie au rang $n_0 = 0$

2) Hérédité

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ telle que la propriété soit vraie, c'est-à dire:
$10^k - 1$ est un multiple de 9 , autrement dit, il existe un entier p tel que
$10^k - 1 = 9p$ soit $10^k = 9p + 1$ (Hypothèse de récurrence)

$10^{k+1} - 1 = 10 \times 10^k - 1$
donc d'après l'hypothèse de récurrence :
$10^{k+1} - 1 = 10(9p + 1) - 1$
$10^{k+1} - 1 = 9 \times 10p + 10 - 1$
$10^{k+1} - 1 = 9 \times 10p + 9$
$10^{k+1} - 1 = 9(10p + 1)$ est bien un multiple de 9
L'hérédité est donc démontré.

3) Conclusion

La propriété est vérifié pour $n = 0$, l'hérédité est démontré pour tout entier $k \geq 0$, la propriété est donc vraie, c'est-à dire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est un multiple de 9 .