### ZOOM SUR… les tableaux de variation

Lorsqu'on dresse le tableau de variation d'une fonction, il ne faut pas oublier de mentionner les valeurs des limites. Ces valeurs doivent par ailleurs être justifiées, même si ce n'est pas demandé explicitement dans l'énoncé.

**94** 40 min

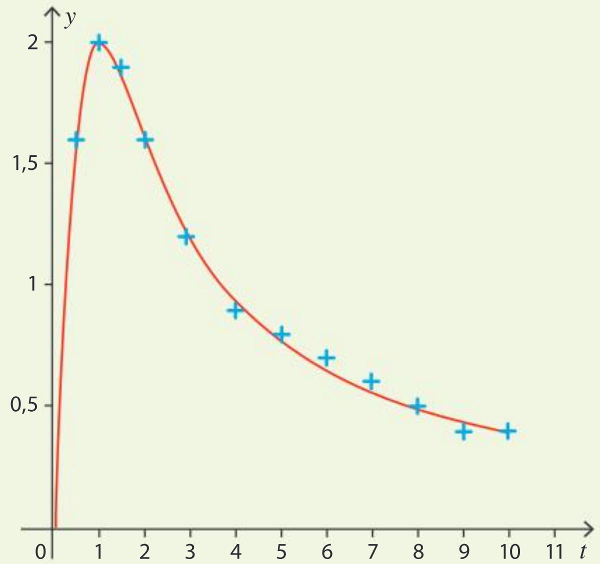
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation. Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

| Temps en h | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentration en $mg \cdot L^{-1}$ | 1,6 | 2 | 1,9 | 1,6 | 1,2 | 0,9 |

| Temps en h | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Concentration en $mg \cdot L^{-1}$ | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0,4 | 0,4 |

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction $g$, définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $g(t) = \frac{4t}{t+1}$.

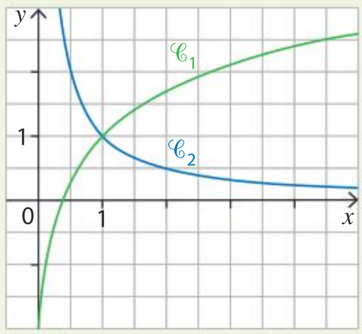
Lorsque $t$ représente le temps écoulé, en heure, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en $mg \cdot L^{-1}$ de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction $g$.




**1.** Par lecture graphique, donner sans justification :
**a.** les variations de la fonction $g$ sur [0 ; 10] ;
**b.** la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
**c.** l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 $mg \cdot L^{-1}$.
**2. a.** Déterminer la dérivée $g'(t)$ de la fonction $g$.
**b.** En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.
**3.** Déterminer la limite de la fonction $g$ en $+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?
**4.** On définit la CMI (concentration minimale inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au-dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier. La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 $mg \cdot L^{-1}$. Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile, c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.
**5.** ALGO Écrire un algorithme en langage naturel qui détermine le nombre d'heures nécessaires pour que la concentration de l'antibiotique étudié soit inférieure à 0,01 $mg \cdot L^{-1}$.

**95** 15 min QCM

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions $f_1$ et $f_2$ définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.




On sait que :
- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$ ;
- la fonction $f_2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ ;
- la fonction $f_1$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ ;
- la limite, quand $x$ tend vers $+\infty$, de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des questions suivantes, donner la seule réponse exacte sans justifier.

**1.** La limite, quand $x$ tend vers 0, de $f_2(x)$ est :
a) 0 b) $+\infty$ c) on ne peut pas conclure.

**2.** La limite, quand $x$ tend vers $+\infty$, de $f_2(x)$ est :
a) 0 b) 0,2 c) on ne peut pas conclure.

**3.** Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

a)

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_2(x) - f_1(x)$ | ‖ | + | |

b)

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_2(x) - f_1(x)$ | ‖ | − | |

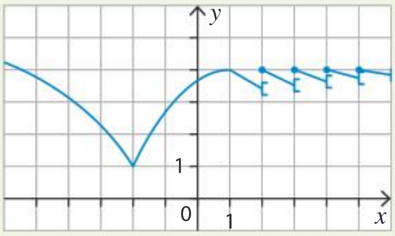
c)

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(x) - f_1(x)$ | ‖ | + | 0 | − | |

**96** 25 min VRAI OU FAUX

Indiquer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

**1.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et représentée par la courbe ci-dessous.




On a $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

**2.** Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$.
On suppose que, quel que soit le réel $x$, on a :

- $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ ;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$.

Alors $g(x)$ admet une limite quand $x$ tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5.

**3.** Si, pour tout réel $x$, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant 1$, alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

**4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{2x} - e^{x} - 2x\right) = +\infty$

**5.** La courbe de la fonction $x \mapsto x^2 e^{-x}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote.

**97** 15 min

On définit la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

**1.** Dresser le tableau de signes de la fonction tangente.

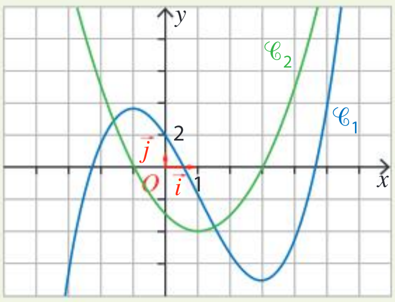
**2.** En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x)$.

**3.** Même question avec $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$.

**98** 25 min

**Partie A. Étude graphique**

Les courbes représentatives d'une fonction $f$ et de sa fonction dérivée $f'$ sont données ci-dessous.




- Associer chaque courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ à la fonction qu'elle représente. Justifier.

**Partie B. Constructions**

Dans cette partie, chacun des tracés sera brièvement expliqué.

**1.** Construire une courbe pouvant représenter une fonction $g$ vérifiant toutes les conditions suivantes :

- $g$ est dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ ;
- l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3 ; 3]$ ;
- les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$ sont différentes.

**2.** Construire une courbe pouvant représenter une fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions indiquées dans le tableau suivant.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-h(x)$ | $-\infty$ | ↗ | | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

**99** 40 min

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier des suites $(u_n)$ définies par un premier terme positif ou nul $u_0$ et vérifiant, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**1. Étude de propriétés de la fonction $f$**

**a.** Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$.
Dresser son tableau de variation.

**b.** Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
On note $\alpha$ la solution.

**c.** Montrer que, si $x$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
De même, montrer que, si $x$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

**2. Étude de la suite $(u_n)$ pour $u_0 = 0$**

Dans cette question, on considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

**a.** Représenter graphiquement les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point $A_0$ de coordonnées $(u_0 ; 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de $A_0$ les points $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite $(u_n)$ ?

**b.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

**c.** En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**3. Étude des suites $(u_n)$ selon les valeurs du réel positif ou nul $u_0$**

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite $(u_n)$ suivant les valeurs du réel positif ou nul $u_0$ ?

DIFFÉRENCIATION

# Exercices AP

## Consolider ses acquis

**100** **Limite d'une fonction**

On considère la fonction définie sur $]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x-10}{x-3}$.

### Questions Va piano

On donne le tableau de signes de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**1. a.** Retrouver dans le tableau que, pour $x$ proche de 3 par valeur inférieure, $f(x)$ est positif.

**b.** En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)$.

**2.** Procéder de même pour $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$.

**3.** Que peut-on dire de la droite d'équation $x=3$ ?

### Questions Moderato

**1.** Étudier le signe de :

$$n(x)=x^2-3x-10,$$

puis celui de :

$$d(x)=x-3.$$

**2.** En déduire l'étude du signe de la fonction $f$.

**3.** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=+\infty$.

**4.** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=-\infty$.

**5.** Conclure quant à la présence d'une asymptote verticale.

### Questions Allegro

**1. a.** Déterminer les limites de la fonction $f$ en 3.

**b.** Que peut-on en conclure graphiquement pour la courbe de la fonction $f$ ?

**2.** Dresser le tableau de variation de $f$.

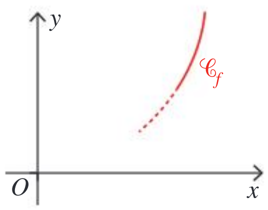
**3.** Écrire $f(x)$ sous la forme $x-3+\dfrac{cx+d}{x-3}$, où $c$ et $d$ sont des constantes réelles.

**4.** La droite d'équation $y=x-3$ est-elle asymptote oblique à la courbe de $f$ ?

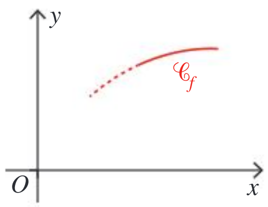
## Se préparer aux études supérieures

**101** **Branche infinie** Approfondissement

Lorsqu'une fonction $f$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, on dit que la courbe de $f$ présente une branche parabolique de direction $(Oy)$.




Lorsqu'une fonction $f$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, on dit que la courbe de $f$ présente une branche parabolique de direction $(Ox)$.




Préciser si les courbes des fonctions suivantes présentent une branche parabolique de direction $(Ox)$ ou $(Oy)$.

**1.** $x\mapsto\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}$

**2.** $x\mapsto x-\dfrac{x^3}{3}$

**3.** $x\mapsto x^2+\cos(x)$

**4.** $x\mapsto\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$

**102** **Développement limité**

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1.

**1.** Déterminer la limite, lorsque $x$ tend vers 0, de la fonction $\varepsilon_n$ définie, pour tout réel $x\neq 0$, par :

$$\varepsilon_n(x)=\frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x}-\left(1+x+\ldots+x^n\right)\right].$$

**2.** Montrer que, pour tout $x\neq 1$ :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^n+x^n\varepsilon_n(x).$$

$1+x+\ldots+x^n$ s'appelle le développement limité à l'ordre $n$ de $\dfrac{1}{1-x}$ pour $x$ proche de 0.

De façon générale, un développement limité d'une fonction $f$ en un point est une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point.

**3. a.** Écrire le développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ pour $x$ proche de 0 à l'ordre 3.

**b.** CALCULATRICE En utilisant ce développement limité, donner une valeur approchée de $\dfrac{1}{0,9}$ et vérifier avec la valeur de $\dfrac{1}{0,9}$ obtenue avec la calculatrice.

**4.** Reprendre la question **3** en travaillant avec un développement limité à l'ordre 1, puis à l'ordre 2.

Les développements limités sont très utilisés en sciences physiques, où l'on assimile certaines fonctions à leur approximation polynomiale, l'erreur commise étant prise en compte dans les calculs.