I- Suites arithmétiques

<u>1) Définition</u>

Exemple :
Considérons une suite numérique (un) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
u0 = 3,
u1 = 8,
u2 = 13,
u3 = 18.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
⎧u = 3
La suite est donc définie par : ⎨ 0
.
⎩un +1 = un + 5
Définition : Une suite (un) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : un+1 = un + r .
Le nombre r est appelé raison de la suite.
Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique
Vidéo https://youtu.be/YCokWYcBBOk
1) La suite (un) définie par : un = 7 − 9n est-elle arithmétique ?
2) La suite (vn) définie par : vn = n2 + 3 est-elle arithmétique ?
(
)
1) un+1 − un = 7 − 9 n + 1 − 7 + 9n = 7 − 9n − 9 − 7 + 9n = −9 .
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.
(un) est une suite arithmétique de raison -9.
(
)
2
2) vn+1 − vn = n + 1 + 3 − n2 − 3 = n2 + 2n + 1 + 3 − n2 − 3 = 2n + 1 .
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(vn) n'est pas une suite arithmétique.
Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA
Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr2
Propriété : (un) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u0.
Pour tout entier naturel n, on a : un = u0 + nr .
Démonstration :
La suite arithmétique (un) de raison r et de premier terme u0 vérifie la relation un+1 = un + r .
En calculant les premiers termes :
u1 = u0 + r
( )
u = u + r = (u + 2r) + r = u + 3r
u2 = u1 + r = u0 + r + r = u0 + 2r
3
2
0
0
…
un = un−1 + r = u0 + (n − 1)r + r = u0 + nr .
(
)
Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique
Vidéo https://youtu.be/iEuoMgBblz4
Considérons la suite arithmétique (un) tel que u5 = 7 et u9 = 19 .
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (un).

2) Exprimer u_n en fonction de n.
1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$
Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et
$u_9 = u_0 + 9r = 19$.
On soustrayant membre à membre, on obtient : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.
Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.
2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$
2) Variations
Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.
Exemple :
Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison
négative et égale à -4.
3) Représentation graphique
Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.
Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.
RÉSUMÉ
(u_n) une suite arithmétique
- de raison r
- de premier terme u_0.
Exemple :
$r = -0,5$ et $u_0 = 4$
$u_{n+1} = u_n - 0,5$
Définition$u_{n+1} = u_n + r$Propriété$u_n = u_0 + nr$$u_n = 4 - 0,5n$
VariationsSi $r > 0$: (u_n) est croissante.
Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.$r = -0,5 < 0$
La différence entre un terme et son
précédent est égale à -0,5.
La suite (u_n) est décroissante.
Remarque :
Représentation
Les points de la représentation
graphique
graphique sont alignés.

II. Suites géométriques
1) Définition
Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent
reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

Définition : Une suite (un) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que
pour tout entier n, on a : un+1 = q × un .
Le nombre q est appelé raison de la suite.
Méthode : Démontrer si une suite est géométrique
Vidéo https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ
La suite (un) définie par : un = 3× 5n est-elle géométrique ?
un+1 3× 5n+1 5n+1
=
= n = 5n+1−n = 5 .
un
3× 5n
5
Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
(un) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme u0 = 3× 50 = 3 .
Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.
On a ainsi :
u1 = 1,04 × 500 = 520
u2 = 1,04 × 520 = 540,80
u3 = 1,04 × 540,80 = 562, 432
De manière générale : un+1 = 1,04 × un avec u0 = 500
On peut également exprimer un en fonction de n : un = 500 × 1,04 n
Propriété : (un) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u0.
Pour tout entier naturel n, on a : un = u0 × q n .
Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr5
Démonstration :
La suite géométrique (un) de raison q et de premier terme u0 vérifie la relation
un+1 = q × un .
En calculant les premiers termes :
u1 = q × u0
(
)
u2 = q × u1 = q × q × u0 = q 2 × u0
(
)
u3 = q × u2 = q × q 2 × u0 = q 3 × u0
…
un = q × un−1 = q × q n−1u0 = q n × u0 .
(
)
Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique
Vidéo https://youtu.be/wUfleWpRr10
Considérons la suite géométrique (un) tel que u4 = 8 et u7 = 512 .
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (un).
Les termes de la suite sont de la forme un = q n × u0 .
Ainsi u4 = q 4 × u0 = 8 et
u7 = q 7 × u0 = 512 .
u7 q 7 × u0
u
512
Ainsi :
= 4
= q 3 et 7 =
= 64 donc q 3 = 64 .
u4 q × u0

u_4
8
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi q = 3 64 = 4
Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $4^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 =$
1
.
32
2) Variations
Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0 > 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
Pour $u_0 < 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:
$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = u_0 q^n (q - 1)$.
- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/vLshnJqW-64
La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.
Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.
RÉSUMÉ
-
-
(u_n) une suite géométrique
de raison q
de premier terme u_0.
Définition $u_{n+1} = q \times u_n$
Propriété $u_n = u_0 \times q^n$
Exemple :
$q = 2$ et $u_0 = -4$
$u_{n+1} = 2 \times u_n$
Le rapport entre un terme et son
précédent est égal à 2.
$u_n = -4 \times 2^n$
Pour $u_0 > 0$:
Variations
Si $q > 1$: (u_n) est croissante.
Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante.
Pour $u_0 < 0$:
$u_0 = -4 < 0$
$q = 2 > 1$
La suite (u_n) est décroissante.
Si $q > 1$: (u_n) est décroissante.
Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.
Remarque :
Représentation
Si $q < 0$: la suite géométrique
graphique
n'est ni croissante ni décroissante.

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr7
III. Sommes de termes consécutifs
1) Cas d'une suite arithmétique
Propriété : n est un entier naturel non nul alors on a : 1 + 2 + 3 + ... + n =
(
)
n n +1
2
Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite arithmétique
de raison 1 et de premier terme 1.
Démonstration :
1
+
+
n
+
(n+1)
+
2
n-1
(n+1)
+
+
+
3
n-2
(n+1)
+ … +
+ … +
+ … +
n-1
2
(n+1)
+
+
+
n
1
(n+1)
= n x (n+1)
(
) ( )
n (n + 1)
et donc : 1 + 2 + 3 + ... + n =
.
donc : 2 × 1 + 2 + 3 + ... + n = n n + 1
2
Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique
Vidéo https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs
Vidéo https://youtu.be/iSfevWwk8e4
Calculer les sommes S1 et S2 suivantes :
S1 = 1 + 2 + 3 + ... + 348
S2 = 33 + 36 + 39 + ... + 267
S1 = 1 + 2 + 3 + ... + 348
348 × 349
2
= 60726

=
S2 = 33+ 36 + 39 + ...+ 267
= 3× (11+ 12 + ...+ 89)
(
= 3× (1+ 2 + ...+ 89) − (1+ 2 + ...+ 10)
)
⎛ 89 × 90 10 × 11⎞
= 3× ⎜
−
2 ⎜⎟
⎝ 2
= 11850
Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr8

Une anecdote relate comment le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune Gauss impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, Gauss a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

2) Cas d'une suite géométrique
Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :
1 − q n+1
2
n
1 + q + q + ... + q =
1− q
Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.
Démonstration :
S = 1 + q + q 2 + ... + q n
q × S = q + q 2 + q 3 + ... + q n+1
Ainsi :
S − q × S = 1 + q + q 2 + ... + q n − q + q 2 + q 3 + ... + q n+1
(
) (
)
S − q × S = 1 − q n+1
(
)
S × 1 − q = 1 − q n+1
S=
1− q
1− q
n+1
Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique
Vidéo https://youtu.be/eSDrE1phUXY
Calculer la somme S suivante :
S = 1 + 3 + 32 + ... + 313
S = 1 + 3 + 32 + ... + 313
1 − 314
=
= 2391484
1− 3

Hors du cadre de la classe,