

## FONCTIONS POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

### I- Définition

Une fonction polynôme de degré 2 est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x)=ax^2+bx+c$  où les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels donnés avec  $a \neq 0$

Les appellations suivantes sont équivalentes

- Fonction du second degré.
- Fonction polynôme de degré 2
- Fonction polynôme du second degré

Exemples

$$f(x)=2x^2-4x+7 \qquad g(x)=\frac{1}{3}x^2-x-\frac{7}{2} \qquad h(x)=11-x^2$$

Les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  ci-dessus sont des fonctions polynôme de degré 2.

La fonction carrée est une fonction polynôme de degré 2 particulière avec  $a=1$ ,  $b=0$  et  $c=0$

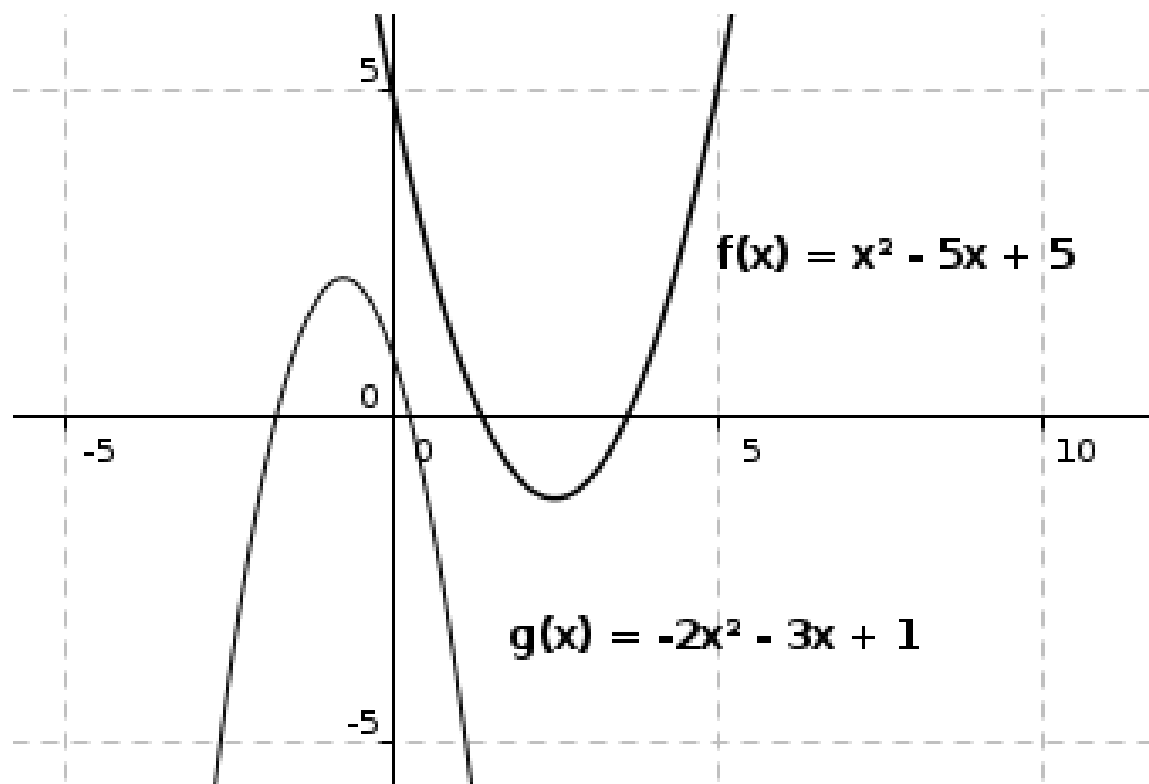
$$k(x)=(2x-7)(3-x)$$

La fonction  $k$  est également une fonction du second degré mais sous sa forme factorisée.

$m(x)=3x-5$  n'est pas une fonction du second degré. C'est une fonction du premier degré (affine).

$n(x)=3x^4-5x^2-8$  n'est pas une fonction du second degré. C'est une fonction polynôme de degré 4.

La courbe représentative d'une fonction du second degré est une parabole.



## II- Forme canonique

La fonction  $f(x)=ax^2+bx+c$  peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres réels.

## III- Variation et représentation

### 1- Forme canonique :

Toutes les fonctions polynômes de degré 2 sont représentées par une parabole.

$$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$$

$$\alpha=-\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta=f(\alpha)$$

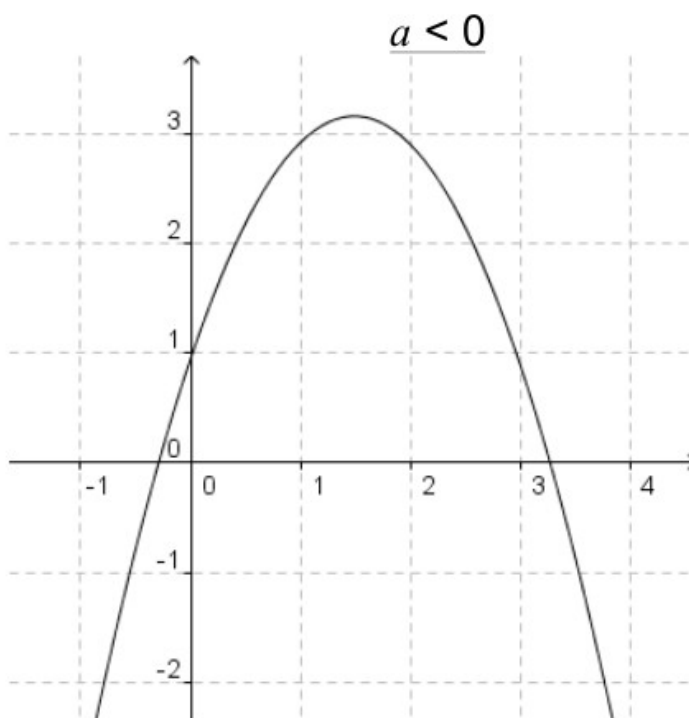
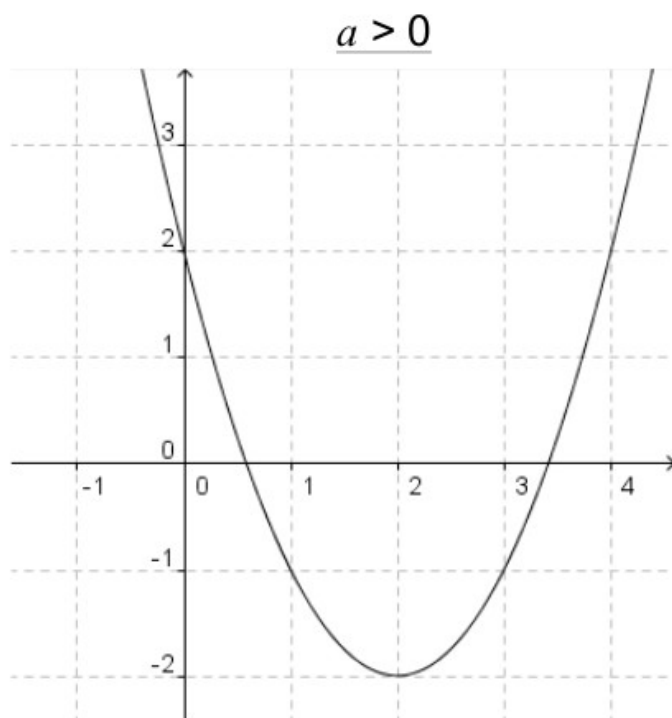
### 2- Propriété :

-Si  $a>0$  (positif) ,  $f$  est d'abord décroissante puis croissante.

Elle admet un minimum pour  $x=\alpha$  et ce minimum est égal à  $\beta$  .

-Si  $a<0$  (négatif) ,  $f$  est d'abord croissante puis décroissante.

Elle admet un maximum pour  $x=\alpha$  et ce maximum est égal à  $\beta$  .



## IV- Extremum ( minimum / maximum )

La courbe représentative de  $f$  est une parabole qui admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.

Le point de la courbe qui correspond au maximum ou au minimum est appelé le sommet de la parabole.

### V- Équation du second degré.

Une équation du second degré est de la forme  $ax^2+bx+c=0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels avec  $a \neq 0$

### VI- Résolution d'une équation du second degré.

Soit une équation du second degré  $ax^2+bx+c=0$

Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme  $ax^2+bx+c$

### VII- Discriminant du trinôme du second degré $ax^2+bx+c$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si  $\Delta < 0$  : L'équation  $ax^2+bx+c=0$  n'admet pas de solution réelle.

- Si  $\Delta = 0$  : L'équation  $ax^2+bx+c=0$  admet une unique solution  $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si  $\Delta > 0$  : L'équation  $ax^2+bx+c=0$  admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemples : Résoudre les équations suivantes :

1)  $x^2+x-2=0$

$a=1, b=1$  et  $c=-2$  donc  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1+8=9$

$\Delta = 9 > 0$ , donc l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 - 3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow S = \{-2; 1\}$$

2)  $-2x^2+x-1=0$

$a=-2, b=1$  et  $c=-1$  donc  $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1-8=-7$

$\Delta = -7 < 0$ , donc l'équation n'admet pas de solution :  $\Rightarrow S = \emptyset$

3)  $4x^2+4x+1=0$

$a=4, b=4$  et  $c=1$  donc  $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16-16=0$

$\Delta = 0$ , donc l'équation admet une unique solution:

$$x_0 = \frac{-4}{2 \times 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow S = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

### VIII-Factorisation d'un trinôme du second degré

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

- Si  $\Delta < 0$  : Le trinôme n'admet pas de racine, donc il n'existe pas de forme factorisée.

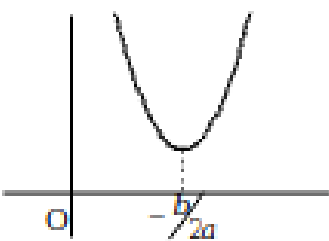
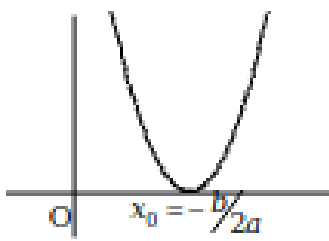
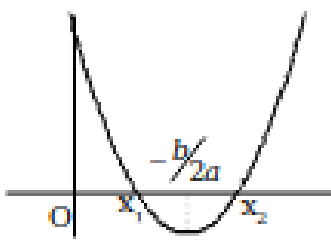
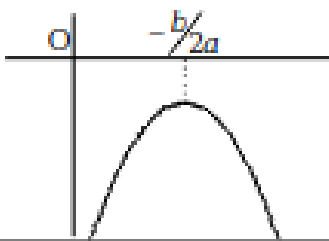
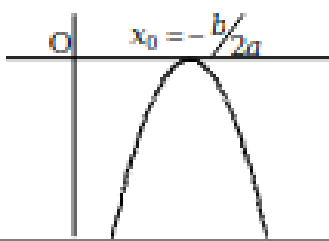
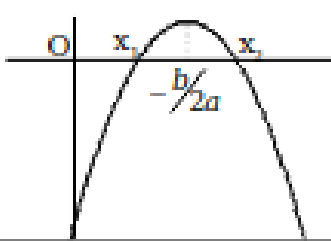
- Si  $\Delta = 0$  : Pour tout  $x$  réel on a  $f(x) = a(x-x_0)^2$

- Si  $\Delta > 0$  : Pour tout  $x$  réel on a  $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

# IX-Signe d'un trinôme du second degré

## IV) Signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$

**Théorème :** Soit la fonction polynôme  $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ , où  $a \neq 0$  et  $\mathscr{C}$ , la représentation graphique de  $f$  dans un repère.

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																									
Conséquence graphique	La parabole $\mathscr{C}$ , qui représente $f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.	La parabole $\mathscr{C}$ , qui représente $f$ est tangente en un point et un seul à l'axe des abscisses .	La parabole $\mathscr{C}$ , qui représente $f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives $x_1$ et $x_2$ .																									
$a > 0$																												
Parabole $\mathscr{C}$ , tournée vers le haut																												
Equation $f(x) = 0$	Pas de solution	Une solution double $x_0$	Deux solutions distinctes $x_1$ et $x_2$																									
Signe de $f(x)$	<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de <math>f(x)</math></td><td colspan="2">+</td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	+		<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de <math>f(x)</math></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	+	0	+	<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de <math>f(x)</math></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+
$x$	$-\infty$	$+\infty$																										
Signe de $f(x)$	+																											
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$																									
Signe de $f(x)$	+	0	+																									
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																								
Signe de $f(x)$	+	0	-	0	+																							
$a < 0$																												
Parabole $\mathscr{C}$ , tournée vers le bas																												
Equation $f(x) = 0$	Pas de solution	Une solution double $x_0$	Deux solutions distinctes $x_1$ et $x_2$																									
Signe de $f(x)$	<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de <math>f(x)</math></td><td colspan="2">-</td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	-		<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de <math>f(x)</math></td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	-	0	-	<table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td>Signe de <math>f(x)</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	Signe de $f(x)$	-	0	+	0	-
$x$	$-\infty$	$+\infty$																										
Signe de $f(x)$	-																											
$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$																									
Signe de $f(x)$	-	0	-																									
$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$																								
Signe de $f(x)$	-	0	+	0	-																							