BACCALAURÉAT BLANC de **MATHÉMATIQUE**S

Épreuve du samedi 9 avril 2022

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices autorisées sont les suivantes :

- les calculatrices non programmables sans mémoire alphanumérique ;
- les calculatrices avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui disposent d'une fonctionnalité « mode examen »

  Les calculatrices devront être mises en mode examen lorsque le professeur le demandera

Le sujet comporte 4 exercices.

Le candidat doit traiter **3 exercices au choix** parmi ceux qui sont proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Exercice 1 (7 points)

Thème principal : géométrie dans l'espace

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les points :
A de coordonnées (2 ; 0 ; 0), B de coordonnées (0; 3; 0) et C de coordonnées (0; 0; 1).

➤ **Les parties A et B sont indépendantes.**

Partie A :

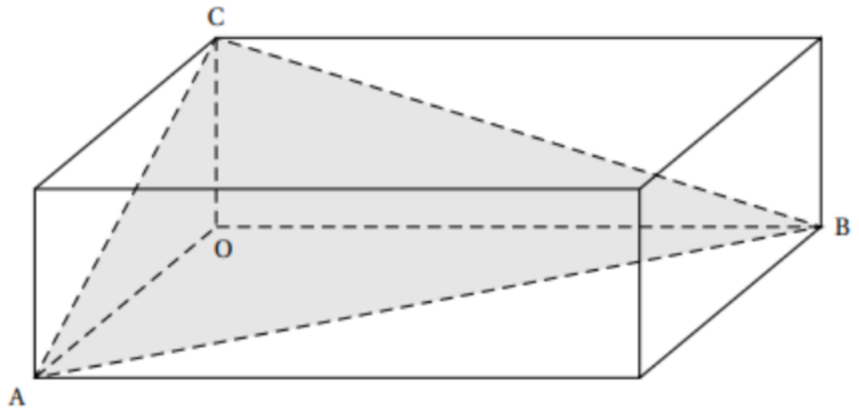
1. Δ est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Le point K a pour coordonnées (5; 10; 2).
Le point K appartient-il à la droite Δ ?

2. On appelle M le milieu de [BC]. Calculer les coordonnées de M.

3. N est le milieu de [AB]. On admet que N a pour coordonnées (1; 1,5; 0).
Démontrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

Partie B :



L'objectif de cette partie est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49} ; \frac{12}{49} ; \frac{36}{49}\right)$.

c. Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}\, h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 2 (7 points)

Thème principal : suites

Dans un département, l'office national des eaux et forêt s'inquiète de la baisse de la population d'un type d'oiseaux.
Il décide donc de fermer la chasse (en provoquant la colère des chasseurs) et d'étudier la population de ces oiseaux.
Au début de l'étude, on estime à 10 000 le nombre de ces oiseaux.
Chaque année, on perd 20 % des individus, on décide donc d'en introduire c milliers chaque année.
On notera u_0 le nombre de ces oiseaux (<u>en milliers</u>) estimé au début de l'étude.

On estime l'espèce en danger lorsque sa population descend en dessous de 6000 individus et que l'on peut autoriser la chasse lorsqu'elle compte au moins 20 000 individus.

On a donc : $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + c$.

<u>Partie A</u>

<u>Dans cette partie A seulement</u>, on introduit 1 millier d'individus chaque année donc $c = 1$.
On a pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$.

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

2. En déduire les variations de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) converge.

4. Recopier et compléter en langage python l'algorithme suivant qui détermine au bout de combien d'année(s) l'espèce sera considérée en danger. Quelle valeur renvoie l'algorithme ?

```
u = 10
n = 0
while .... >=6:
    u =……....
    n =…..........
print (n)
```

<u>Partie B</u>

On décide donc d'introduire plus de nouveaux individus chaque année. On décide d'en introduire 3 milliers (donc $c = 3$).
Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 3$.

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par : $v_n = u_n - 15$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Montrer que $u_n = 15 - 9 \times 0{,}8^n$.

4. Déterminer la valeur du plus petit entier n tel que $u_n > 13$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Pourra-t-on de nouveau autoriser la chasse ?

Exercice 3 (7 points)

Thème principal : fonction exponentielle, études de fonctions

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.

a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. a. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet exactement deux solutions dans $]0;+\infty[$.

b. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.

On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

a. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

c. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.

On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

On rappelle que deux droites (non parallèles à l'axe des ordonnées) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.

d. En déduire qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Exercice 4 (7 points)

Thème principal : probabilités

Un jeu se déroule en deux temps :

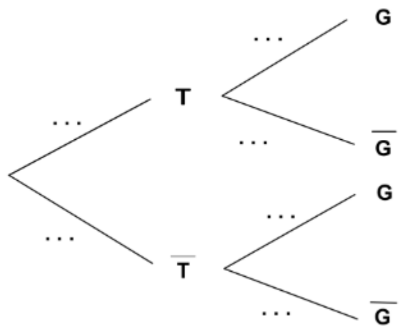
- Un tirage au sort sélectionne 10 % des participants. Ces candidats doivent ensuite participer à un jeu TV à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement gagnants d'un lot.
- Si un joueur n'est pas sélectionné par tirage au sort, on lui présente une urne contenant 8 boules bleues et 2 boules jaunes indiscernables au toucher. Il prend une boule au hasard parmi les 10 boules. Il gagne un lot si la boule est jaune, il perd si la boule est bleue.

Partie 1

On choisit au hasard un joueur. On notera :

- T l'événement « le candidat a été sélectionné par tirage au sort » ;
- G l'événement « le candidat gagne un lot » ;
- $\overline{T}$ et $\overline{G}$ les événements contraires des événements T et G respectivement.

1. **Recopier et compléter** l'arbre pondéré ci-contre qui modélise la situation étudiée.



2. Calculer la probabilité que le joueur soit sélectionné par tirage au sort et gagne un lot.

3. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à 0,24.

4. On choisit au hasard un gagnant d'un lot. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été sélectionné par tirage au sort ?

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième.

1. On admet que la probabilité pour un joueur de gagner est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept joueurs choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les gagnants parmi les sept joueurs.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept joueurs gagne.

c. Calculer la probabilité qu'au moins un des sept joueurs gagnent.

d. Calculer la probabilité qu'au plus trois des sept joueurs gagnent.

e. Calculer E(X). Interpréter ce résultat.

2. **Bonus :** Un village présente n joueurs, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un joueur de ce village de gagner est 0,24 et que les résultats des joueurs sont indépendants les uns des autres.

a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun joueur de ce village ne gagne.

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un joueur de ce village gagne est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?