Fonctions composées

I- Composée de deux fonctions

1) Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x-3}$.
La fonction f est la composée de deux fonctions u et v telles que :

$$f : x \xrightarrow{u} x-3 \xrightarrow{v} \sqrt{x-3}$$

$u(x)=x-3$ et $v(x)=\sqrt{x}$
On dit que la fonction f est la composée de u par v et on note :
$f(x)=v\circ u(x)=v(u(x))=\sqrt{x-3}$

2) Définition : On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v\circ u$ définie par :
$v\circ u(x)=v(u(x))$

3) Méthode :

a) Identifier la composée de deux fonctions
On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
Identifier la composée de deux fonctions dans la fonction f .
Dans la fonction f , on reconnaît la fonction inverse et la fonction carré.
Si on pose $u(x)=x^2$ et $v(x)=\dfrac{1}{x}$
alors $f(x)=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{u(x)}=v(u(x))=v\circ u(x)$
La fonction f est la composée de la fonction carré par la fonction inverse.

b) Composer deux fonctions
Les fonctions u et v sont définies par : $u(x)=x^2+x$ et $v(x)=\dfrac{x}{x+1}$
Exprimer la fonction $v\circ u$ et $u\circ v$ en fonction de x

$$v\circ u(x)=v(u(x))=\frac{(x^2+x)}{(x^2+x)+1}=\frac{x^2+x}{x^2+x+1} \qquad u\circ v(x)=u(v(x))=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

II- Formule de dérivation d'une fonction composée

1) Cas particuliers de fonctions composées.

Fonction	Dérivée
u^n avec $n\in\mathbb{Z}^*$	$nu'u^{n-1}$
e^u	$u'e^u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$

Déterminer les dérivées des fonctions définies par :
a) $f(x)=(2x^2+3x-3)^4$
b) $g(x)=2e^{\frac{1}{x}}$

Fonctions composées

2) Cas général de fonctions composées.

$v(u(x))' = u'(x) \times v'(u(x))$ ou encore $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$

Déterminer la dérivée de la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

III- Asymptote horizontale

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ **avec** $a \in \mathbb{R}$

La droite d'équation $y = a$ est une asymptote horizontale au voisinage de $\pm\infty$

IV- Asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ **avec** $a \in \mathbb{R}$

La droite d 'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f , représentative de f .

V- Théorème de comparaison

1) Théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)

I *est l'intervalle dont la borne de droite est* $+\infty$.

f, g, h *sont trois fonctions définies sur* I *telles que* $\forall x \in I \ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} h(x) = l \ (l \in \mathbb{R})$ *, alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x) = l$

Ce théorème est admis sans démonstration et reste vrai si x *tend vers* $-\infty$ *ou* x *tend vers* a *avec* $(a \in \mathbb{R})$

2) S'il existe un réel A *tel que pour tout* $x \geq A$ *, on a* $f(x) \geq g(x)$ *et si* $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x) = +\infty$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) S'il existe un réel A tel que pour tout $x \leq A$ *, on a* $f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim\limits_{n \to -\infty} g(x) = -\infty$,

alors $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = -\infty$

VI- Étude d'une fonctions

a) Domaine de définition (recherche de valeurs interdites)
- Division par zéro
- Racine carré de nombre négatif
- ln d'un nombre négatif (à voir plus tard)

b) Limites aux bornes du domaine de définition.
c) Dérivabilité
d) Variation (dérivée , …)
e) Les asymptotes
f) Représentation graphique d'une fonction.