Exercice 1: (4 points)(4,8)

a) $-x^2+7x+6$

$a=-1$, $b=7$ et $c=6$ (0,15)

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{7}{2\times(-1)}=-\dfrac{7}{(-2)}$ $\quad\alpha=\dfrac{7}{2}$ (0,15)

$\beta=-\alpha^2+7\alpha+6$

$$\beta=-\left(\frac{7}{2}\right)^2+7\left(\frac{7}{2}\right)+6=\left(\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}+7\right)+6=\left(\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}+\frac{14}{2}\right)+6=\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{-7+14}{2}\right)+6=\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)+6$$

$\beta=\dfrac{49}{4}+6=\dfrac{49}{4}+\dfrac{24}{4}=\dfrac{49+24}{4}$ $\quad\beta=\dfrac{73}{4}$ (0,45)

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$

$-x^2+7x+6=-1\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{73}{4}$

$\boxed{-x^2+7x+6=-\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{73}{4}}$ (0,45)

b) x^2+6x-8

$a=1$, $b=6$ et $c=-8$ (0,15)

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{6}{2\times1}=-\dfrac{6}{2}$ $\quad\alpha=-3$ (0,15)

$\beta=-\alpha^2+7\alpha+6$

$\beta=(-3)^2+6(-3)-8$

$\beta=9-18-8$ $\quad\beta=-17$ (0,45)

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$

$x^2+6x-8=1(x-(-3))^2+(-17)$

$\boxed{x^2+6x-8=(x+3)^2-17}$ (0,45)

c) $-3x^2+7x+1$

$a=-3$, $b=7$ et $c=1$ (0,15)

$\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{7}{2\times(-3)}=-\dfrac{7}{(-6)}$ $\quad\alpha=\dfrac{7}{6}$ (0,15)

$\beta=-\alpha^2+7\alpha+6$

$$\beta=-3\left(\frac{7}{6}\right)^2+7\left(\frac{7}{6}\right)+1=\left(\frac{7}{6}\right)\left(-3\left(\frac{7}{6}\right)+7\right)+1=\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{-21}{6}+7\right)+1=\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{-21}{6}+\frac{42}{6}\right)+1=\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{-21+42}{6}\right)+1$$

$\beta=\left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\dfrac{21}{6}\right)+1=\left(\dfrac{7}{6}\right)\left(\dfrac{7}{2}\right)+1=\dfrac{49}{12}+1=\dfrac{49}{12}+\dfrac{12}{12}=\dfrac{49+12}{12}$ $\quad\beta=\dfrac{61}{12}$ (0,45)

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$

$\boxed{-3x^2+7x+1=-3\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{61}{12}}$ (0,45)

d) $(2x-1)^2+3$

Cette expression ressemble déjà à une forme canonique.
Bien qu'en développant d'abord puis utilisés les formule , on trouvera la solution, nous allons faire autrement.

$$(2x-1)^2+3=\left(2x-2\times\frac{1}{2}\right)^2+3=\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$$ **(0,75)**

$\boxed{(2x-1)^2+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)+3}$ **(0,45) N.B : avec les formules, on trouvera** $\alpha=\frac{1}{2}$ **et** $\beta=3$

ou

$(2x-1)^2+3=(4x^2-4x+1)+3=4x^2-4x+4$

$a=4$, $b=-4$ et $c=4$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\times4}=\frac{1}{2}$ $\quad\alpha=\frac{1}{2}$ **(0,15)**

$\beta=4\alpha^2-4\alpha+4$

$\beta=4\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)+4=4\left(\frac{1}{4}\right)-2+4=1-2+4=3$ $\quad\beta=3$ **(0,45)**

$\beta=\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{21}{6}\right)+1=\left(\frac{7}{6}\right)\left(\frac{7}{2}\right)+1=\frac{49}{12}+1=\frac{49}{12}+\frac{12}{12}=\frac{49+12}{12}$ $\quad\beta=\frac{61}{12}$ **(0,45)**

$\boxed{(2x-1)^2+3=4\left(x-\frac{1}{2}\right)+3}$ **(0,45)**

Exercice 2 : (4 points)(4.8)

a) $-x^2-7x+6=0$

$a=-1$, $b=-7$ et $c=6$ (0,15)

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times(-1)\times6=49+24$

$\Delta=73>0$ (0,15) donc l'équation admet deux solutions distinctes (0,15)

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)-\sqrt{73}}{2\times(-1)}=\frac{7-\sqrt{73}}{-2}=\frac{-7+\sqrt{73}}{2}$$ (0,15)

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7)+\sqrt{73}}{2\times(-1)}=\frac{7+\sqrt{73}}{-2}=-\frac{-7-\sqrt{73}}{2}$$ (0,15)

$$\boxed{S=\left\{\frac{-7-\sqrt{73}}{2}\ ;\frac{-7+\sqrt{73}}{2}\right\}}$$ (0,45)

b) $x^2-6x-8=0$

$a=1$, $b=-6$ et $c=-8$ (0,15)

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times(-8)=36+32$

$\Delta=68>0$ (0,15) donc l'équation admet deux solutions distinctes (0,15)

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)-\sqrt{68}}{2\times1}=\frac{6-\sqrt{68}}{2}=\frac{6-\sqrt{4\times17}}{2}=\frac{6-2\sqrt{17}}{2}=\frac{2(3-2\sqrt{17})}{2}=3-2\sqrt{17}$$ (0,15)

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-6)+\sqrt{68}}{2\times1}=\frac{6+\sqrt{68}}{2}=\frac{6+\sqrt{4\times17}}{2}=\frac{6+2\sqrt{17}}{2}=\frac{2(3+2\sqrt{17})}{2}=3+2\sqrt{17}$$ (0,15)

$$\boxed{S=\{3-2\sqrt{17}\ ;3+2\sqrt{17}\}}$$ (0,45)

c) $-3x^2+7x-1$

$a=-3$, $b=7$ et $c=-1$ (0,15)

$\Delta=b^2-4ac=(7)^2-4\times(-3)\times(-1)=49-12$

$\Delta=37>0$ (0,15) donc l'équation admet deux solutions distinctes (0,15)

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7-\sqrt{37}}{2\times(-3)}=\frac{7+\sqrt{37}}{6}$$ (0,15)

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7+\sqrt{37}}{2\times(-3)}=\frac{7-\sqrt{37}}{6}$$ (0,15)

$$\boxed{S=\left\{\frac{7-\sqrt{37}}{6}\ ;\frac{7+\sqrt{37}}{6}\right\}}$$ (0,45)

d) $(2x-1)^2+3(x^2+3)=0$

$(2x)^2-2\times2x\times1+1^2+3x^2+9=0$

$4x^2-4x+1+3x^2+9=0$

$7x^2-4x+10=0$ (0,3)

$a=7$, $b=-4$ et $c=10$ (0,15)

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times7\times10=16-280$

$\Delta=-264<0$ (0,15) donc l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ (0,15)

$\boxed{S=\emptyset}$ (0,45)

Exercice 3 : (2 points)(2.9)

a) Calculer U_1 , U_2 et U_3

D'après l'énoncé, $U_{n+1}=U_n-\frac{5}{2}$ et $U_0=3$, donc

$U_1=U_0-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}=\frac{6}{2}-\frac{5}{2}=\frac{6-5}{2}=\frac{1}{2}$ $U_1=\frac{1}{2}$ **(0,5)**

$U_2=U_1-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=\frac{1-5}{2}=-\frac{4}{2}=-2$ $U_2=-2$ **(0,5)**

$U_3=U_2-\frac{5}{2}=-2-\frac{5}{2}=-\frac{4}{2}-\frac{5}{2}=\frac{-4-5}{2}=-\frac{9}{2}$ $U_3=-\frac{9}{2}$ **(0,5)**

b) Définir (U_n) sous sa forme explicite.

D'après l'énoncé, $U_{n+1}=U_n-\frac{5}{2}$ et $U_0=3$, d'où $U_{n+1}-U_n=U_n-\frac{5}{2}-U_n=-\frac{5}{2}$

La (U_n) est une suite arithmétique de raison $r=-\frac{5}{2}$ et de premier terme $r=3$ (0,7)

On peut donc appliquer la formule du terme générale d'une suite arithmétique, soit

$U_n=U_0+nr=3+n\left(-\frac{5}{2}\right)=3-\frac{5}{2}n$

$\boxed{U_n=3-\frac{5n}{2}}$ **(0,7)**

Exercice 4 : (2 points)(2.9)

a) Calculer V_2 , V_3 et V_4 . D'après l'énoncé, $V_{n+1}=-\frac{5}{2}V_n$ et $V_1=3$, donc

$V_2=-\frac{5}{2}V_1=-\frac{5}{2}\times 3=-\frac{15}{2}$ $\boxed{V_2=-\frac{15}{2}=-7.5}$ (0,5)

$V_3=-\frac{5}{2}V_2=-\frac{5}{2}(-\frac{15}{2})=\frac{75}{4}$ $\boxed{V_3=\frac{75}{4}=18.75}$ (0,5)

$V_4=-\frac{5}{2}V_3=-\frac{5}{2}\times\frac{75}{4}=-\frac{375}{8}$ $\boxed{V_4=-\frac{375}{8}=-46.875}$ (0,5)

b) Forme explicite de la suite (V_n)

D'après l'énoncé, $V_{n+1}=-\frac{5}{2}V_n$ et $V_1=3$

La (V_n) est une suite géométrique de raison $q=-\frac{5}{2}$ et de premier terme $V_1=3$ (0,7)

On peut donc appliquer la formule du terme générale d'une suite géométrique, soit

$V_n=V_p+q^{n-p}=V_1(-\frac{5}{2})^{n-1}=3\left(-\frac{5}{2}\right)^{n-1}$

$\boxed{V_n=3\left(-\frac{5}{2}\right)^{n-1}}$ (0,7)

Exercice 5 : (4 points)(4)

1) Calculer p pour que la suite (A_n) soit une suite géométrique.

D'après l'énoncé, $A_n = S_n + p$, donc $A_{n+1} = S_{n+1} + p$

or et encore d'après l'énoncé, $\begin{cases} S_0 = 10 \\ S_{n+1} = 0{,}8\, S_n + 3 \end{cases}$

En remplaçant S_{n+1} par sa valeur , on obtient $A_{n+1} = 0{,}8\, S_n + 3 + p$

$A_n = S_n + p \Leftrightarrow S_n = A_n - p$, d'où $A_{n+1} = 0{,}8(A_n - p) + 3 + p = 0{,}8\, A_n - 0{,}8\, p + 3 + p$

$A_{n+1} = 0{,}8\, A_n + (-0{,}8\, p + 3 + p)$ (1)

Pour que la suite (A_n) soit une suite géométrique, il faut qu'elle soit de la forme $A_{n+1} = q\, A_n$

donc il faut que $(-0{,}8\, p + 3 + p) = 0$ (0,5) c'est-à dire $0{,}2\, p = -3 \Leftrightarrow p = -\dfrac{3}{0.2} = -15$

$\boxed{p = -15}$ (0,5)

2) Exprimer A_n , puis S_n en fonction de n .

- Calcul de A_n

(A_n) est une suite géométrique de raison $q = 0.8$ et de premier terme

$A_0 = S_0 + (-15) = 10 - 15 = -5$

d'où $A_n = A_0\, q^n = -5\,(0.8)^n$

$\boxed{A_n = -5\,(0.8)^n}$ (1)

- Calcul de S_n

$S_n = A_n + 15$ **donc,**

$\boxed{S_n = -5\,(0{,}8)^n + 15}$ (1)