Computação Gráfica

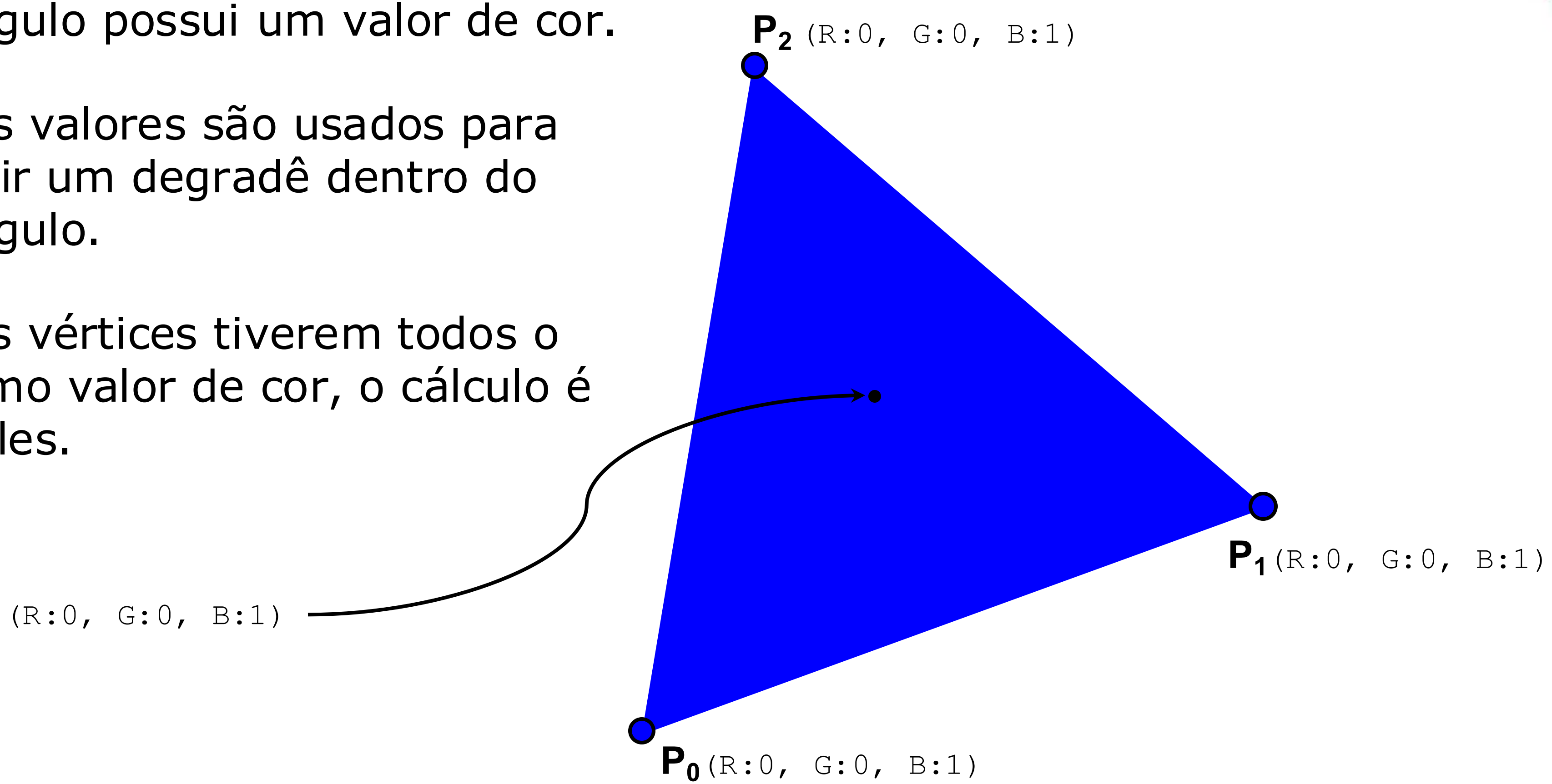
Aula 8: Interpolação em Triângulos

Desenhando Triângulos Coloridos

Vamos definir que cada vértice do triângulo possui um valor de cor.

Esses valores são usados para definir um degradê dentro do triângulo.

Se os vértices tiverem todos o mesmo valor de cor, o cálculo é simples.

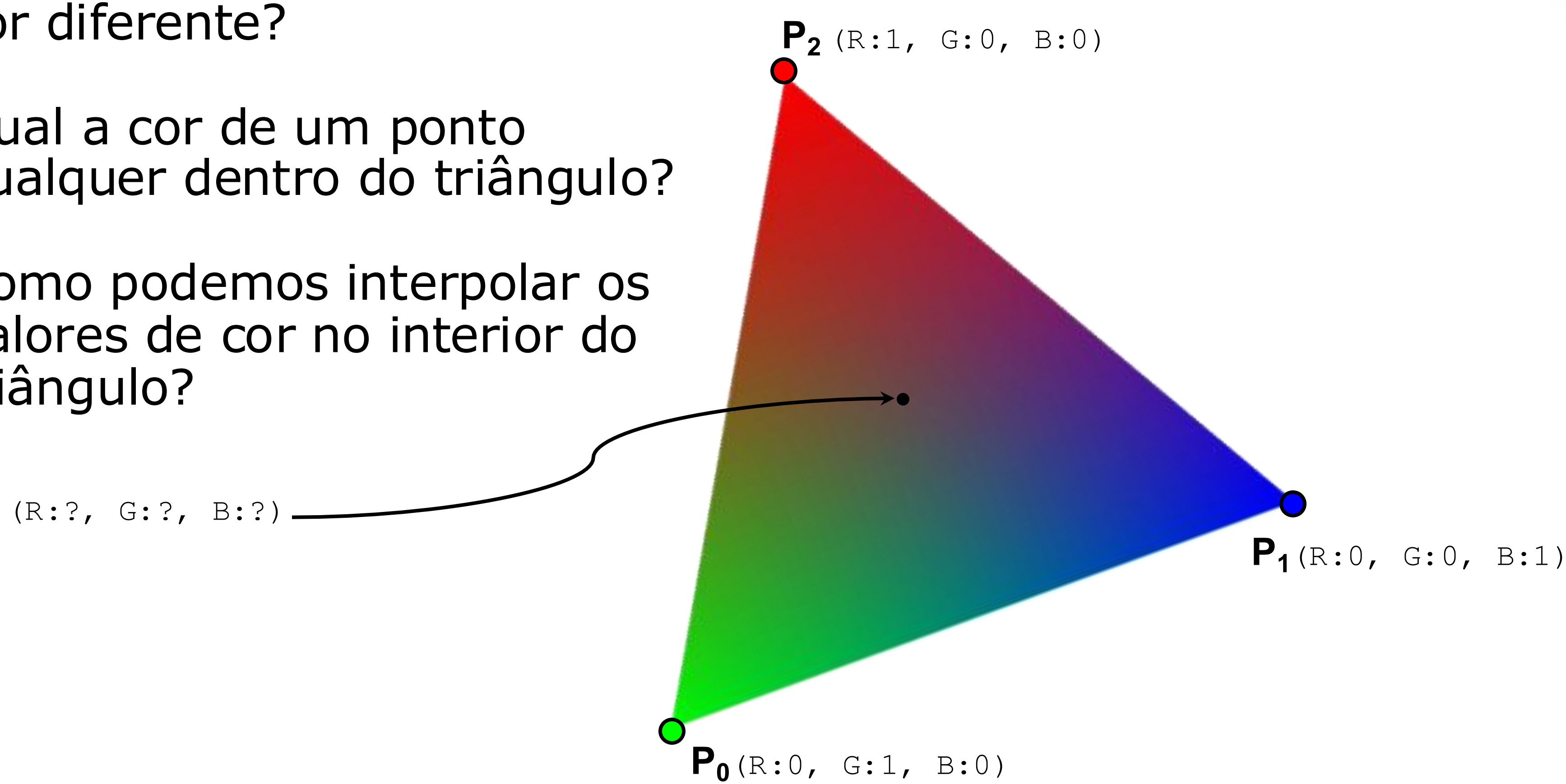


Desenhando Triângulos Coloridos

Mas e se cada vértice tiver uma cor diferente?

Qual a cor de um ponto qualquer dentro do triângulo?

Como podemos interpolar os valores de cor no interior do triângulo?



Interpolação no interior de Triângulos

Por que queremos interpolar?

Para encontrar valores dentro de um triângulo que variam suavemente a partir dos valores definidos nos vértices.

Um belo degrade ☺

O que queremos interpolar?

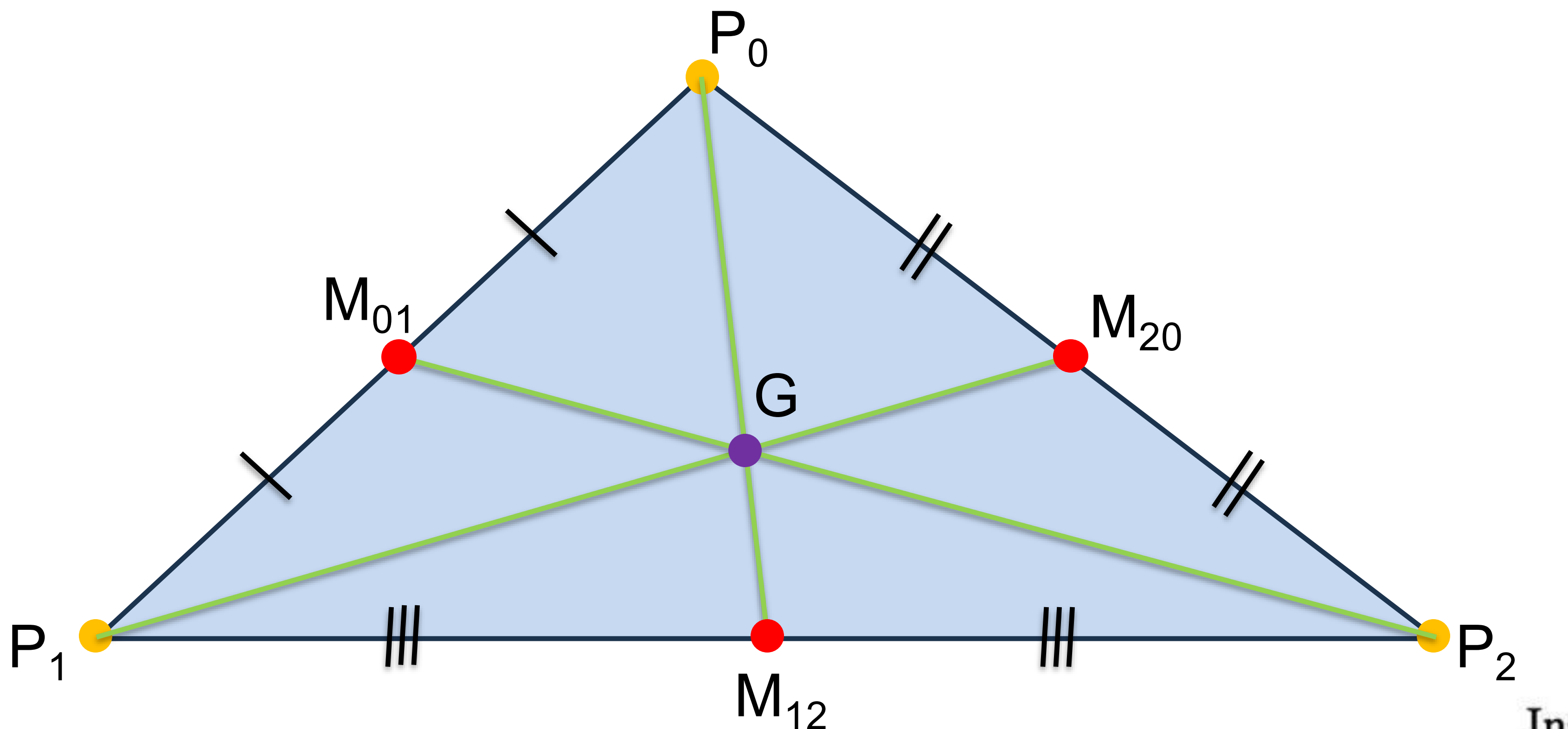
Cores, Coordenadas de textura, Vetores normais, ...

Como podemos fazer a interpolação?

Usando **Coordenadas baricêntricas**

Definição de Baricentro

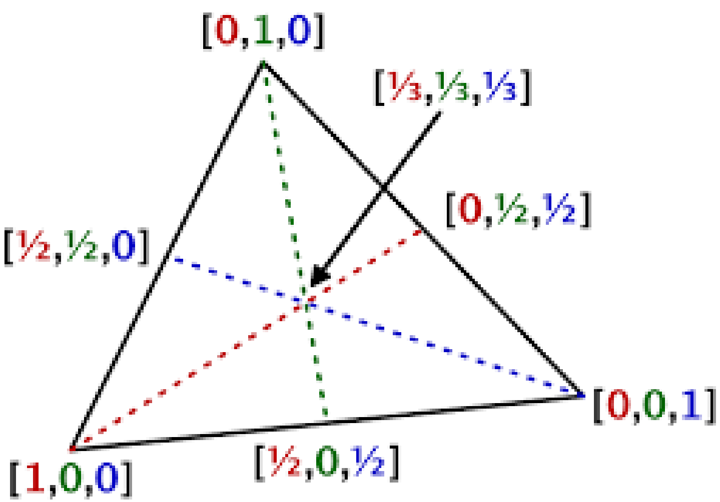
O baricentro é determinado pelo encontro das medianas de um triângulo.



Insper

Coordenadas Baricêntricas

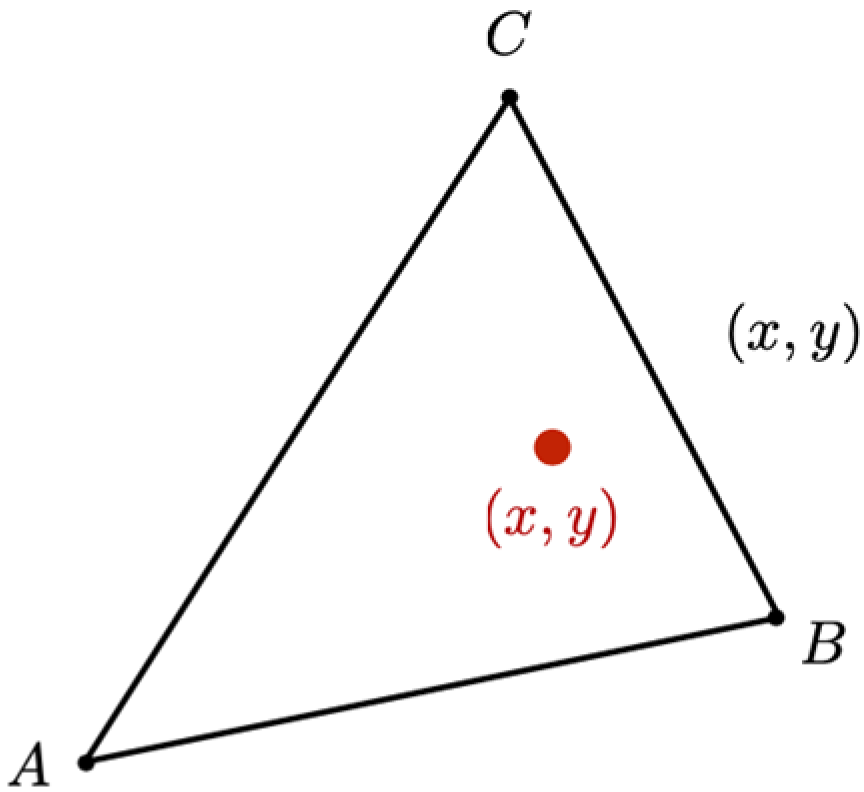
Usando coordenadas baricêntricas para interpolar dados ou atributos dos vértices para o interior do triângulo.



Insper

Coordenadas Baricêntricas

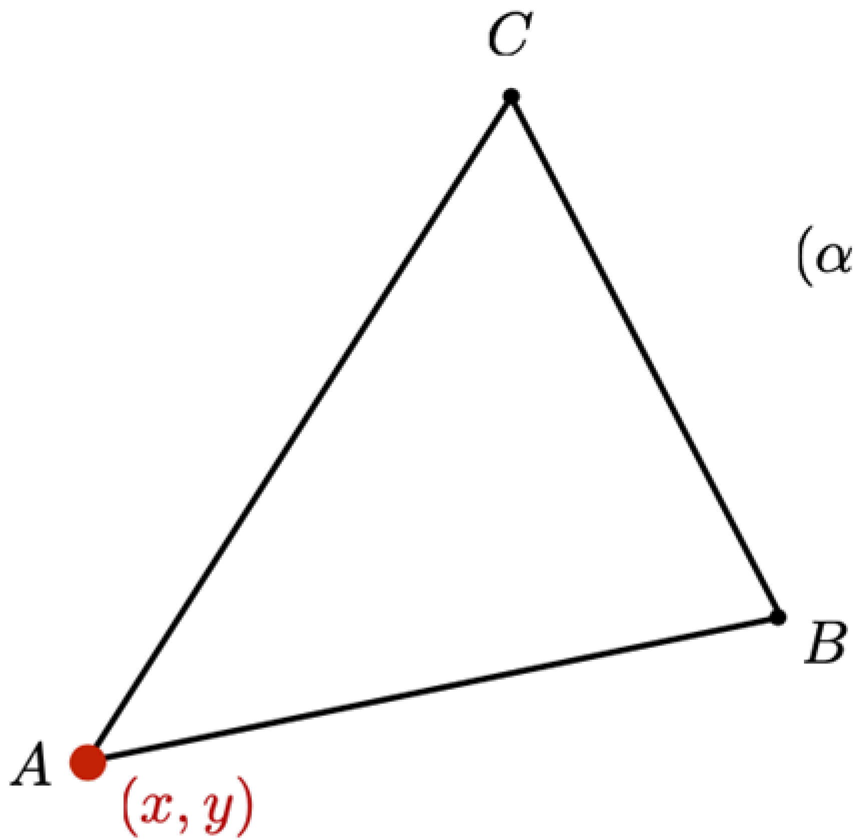
Um sistema de coordenadas para triângulos (α, β, γ)



$$(x, y) = \alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C$$

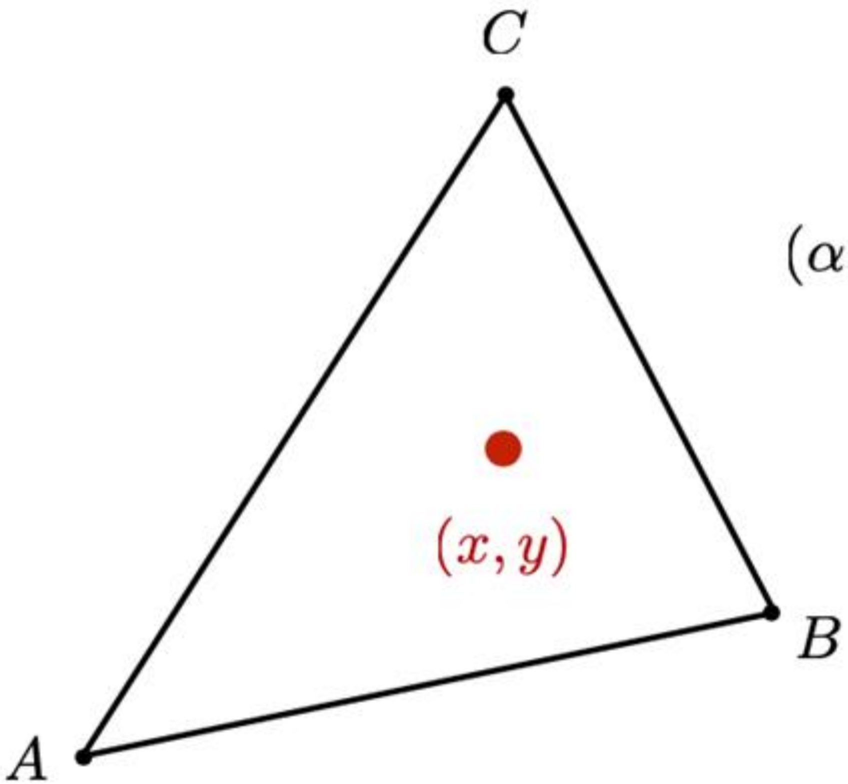
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Coordenadas Baricêntricas - Exemplo



$$
\begin{aligned}
(\alpha, \beta, \gamma) &= (1, 0, 0) \\
(x, y) &= \alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C \\
&= A
\end{aligned}
$$

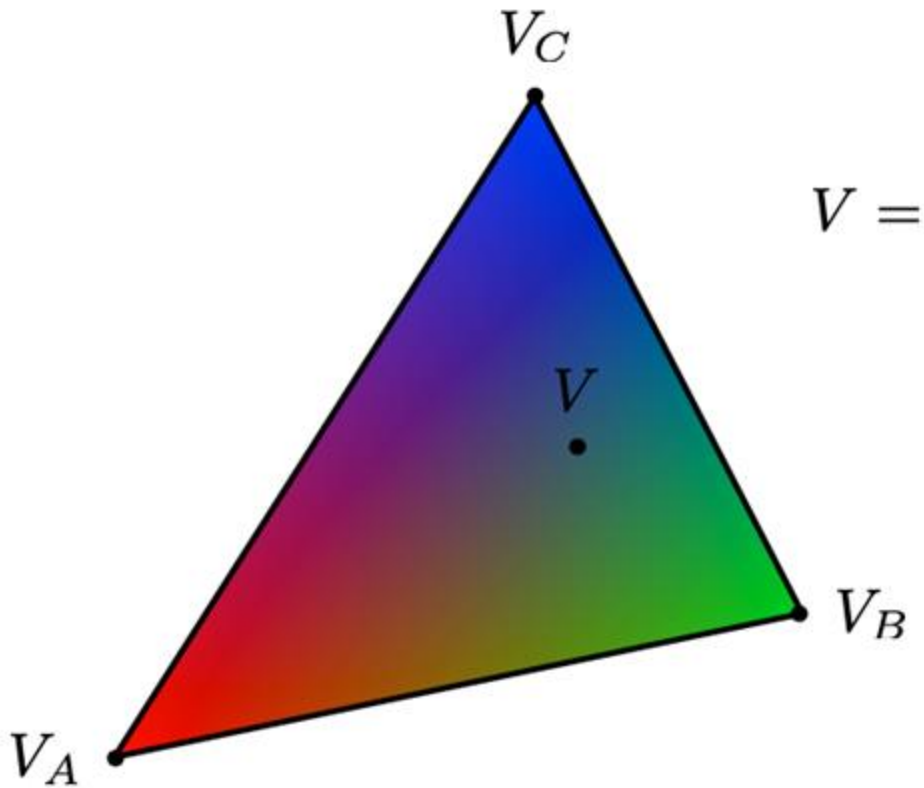
Coordenadas Baricêntricas - Exemplo



$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$
$$(x, y) = \tfrac{1}{3}\,A + \tfrac{1}{3}\,B + \tfrac{1}{3}\,C$$

Insper

Interpolação Linear Pelo Triângulo



$$V = \alpha V_A + \beta V_B + \gamma V_C$$

V_A, V_B, V_C podem ser posições, coordenadas de textura, cores, vetores normais, atributos de materiais ...

Insper

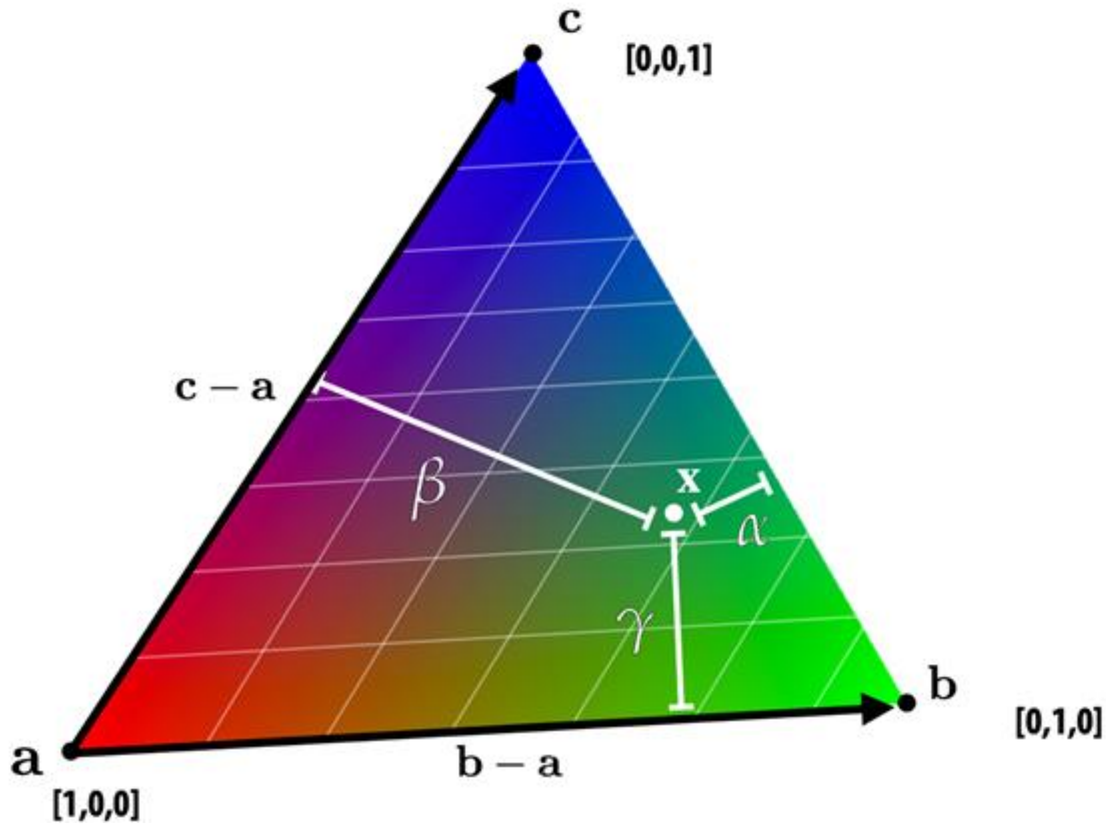
Propostas de cálculos das coordenadas

Ponto de vista geométrico de:

- distâncias proporcionais
- áreas proporcionais

Coordenadas Baricêntricas (1ª opção)

Ponto de vista geométrico de distâncias proporcionais



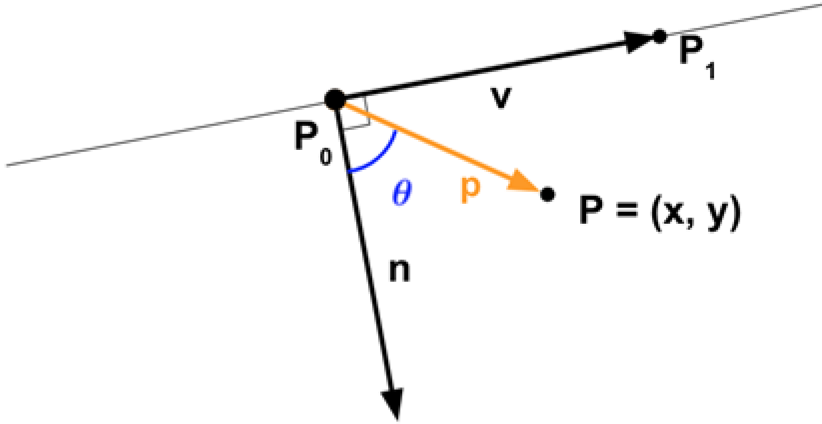
Insper

Lembrando: Equação da Reta

$$L(x, y) = p \bullet n = (x - x_0\,;\, y - y_0) \bullet (y_1 - y_0\,;\, -(x_1 - x_0))$$

$$= (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0)$$

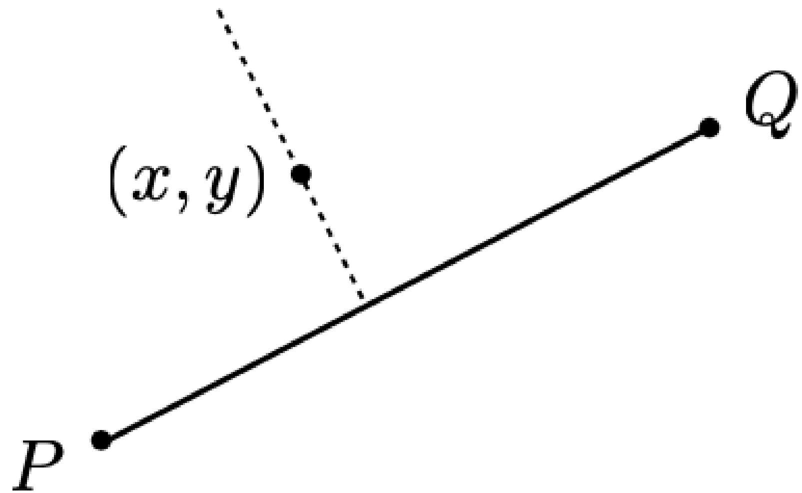
$$= (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$



Calculando as Coordenadas Baricêntricas

$L_{PQ}(x, y)$ é a distância do ponto (x,y) até a linha PQ.

$$L_{PQ}(x, y) = (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$

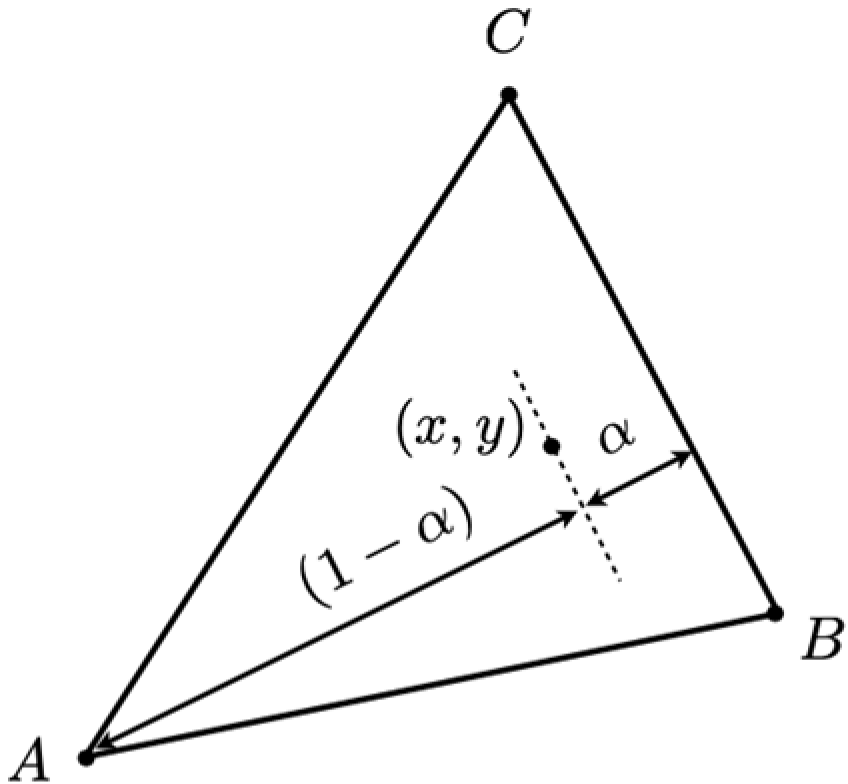


Obs: Cuidado com os sinais, lembre-se de que nas coordenadas da tela o Y aponta para baixo então seus cálculos podem ficar com valores invertidos.

Insper

Coordenadas Baricêntricas

Ponto de vista geométrico – distâncias proporcionais

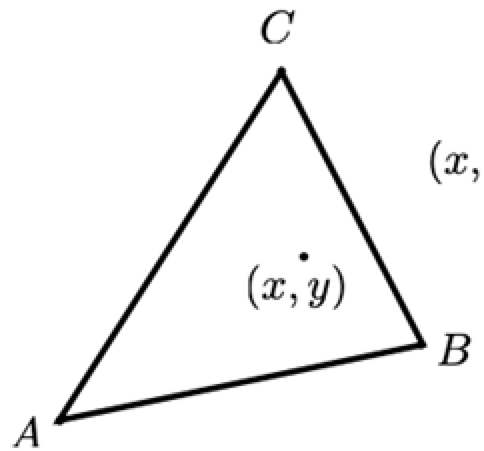


$$\alpha = \frac{L_{BC}(x, y)}{L_{BC}(x_A, y_A)}$$

Construções similares para as outras coordenadas

Insper

Fórmulas das Coordenadas Baricêntricas



$$(x, y) = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

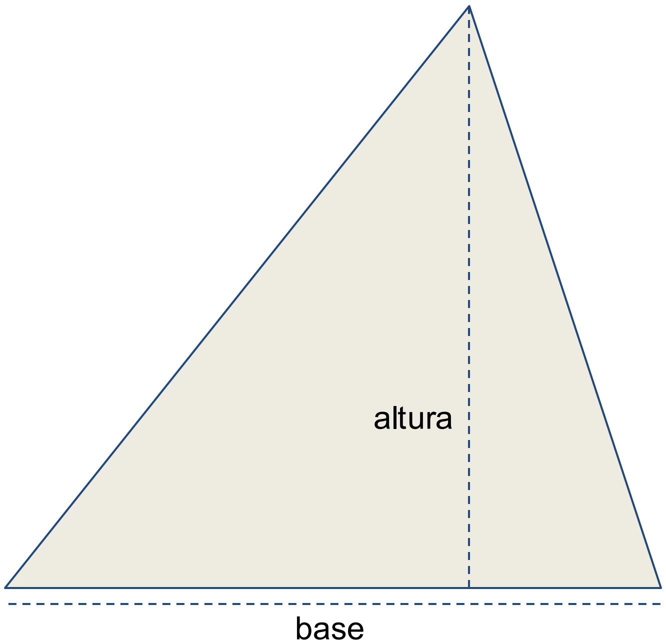
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

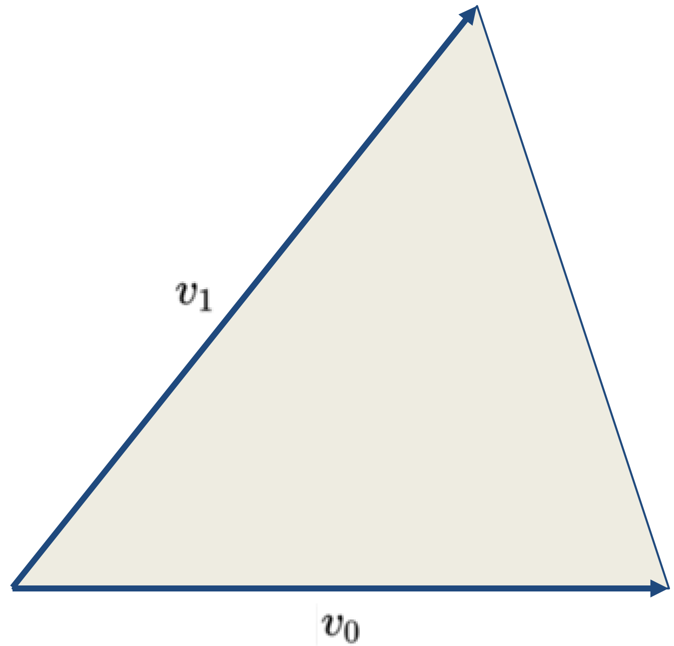
$$\alpha = \frac{-(x - x_B)(y_C - y_B) + (y - y_B)(x_C - x_B)}{-(x_A - x_B)(y_C - y_B) + (y_A - y_B)(x_C - x_B)}$$

$$\beta = \frac{-(x - x_C)(y_A - y_C) + (y - y_C)(x_A - x_C)}{-(x_B - x_C)(y_A - y_C) + (y_B - y_C)(x_A - x_C)}$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

Relembrando Área de um triângulo





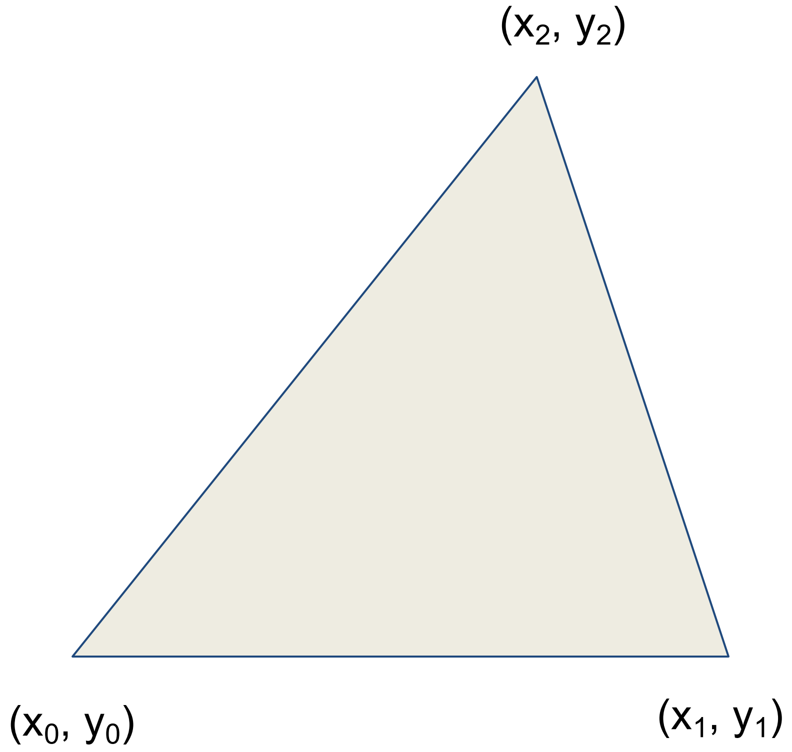
$$\text{area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

$$\text{area} = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{2}$$

Insper

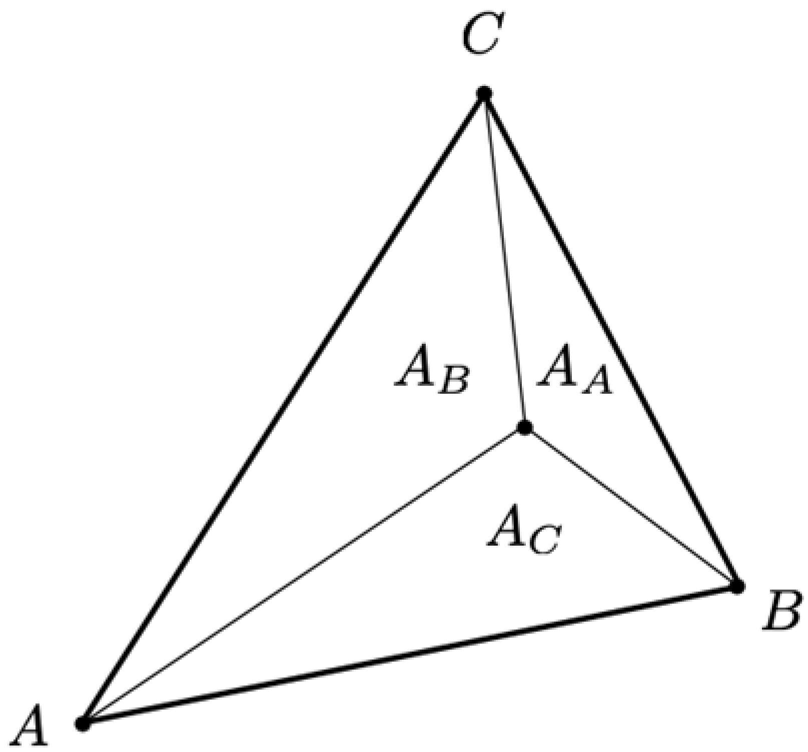
Relembrando Área do Triângulo

$$\text{Area} = |x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)| \,/\, 2$$



Coordenadas Baricêntricas (2ª opção)

Ponto de vista geométrico de áreas proporcionais



$$\alpha = \frac{A_A}{A_A + A_B + A_C}$$

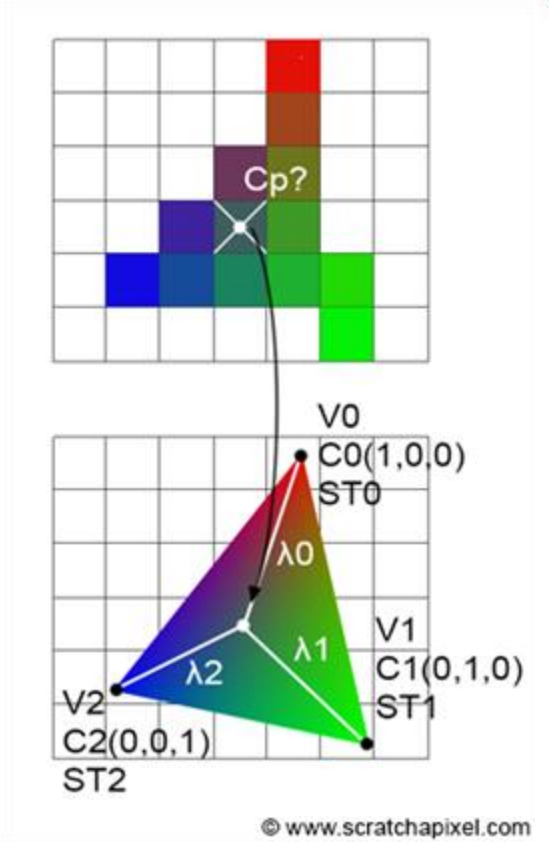
$$\beta = \frac{A_B}{A_A + A_B + A_C}$$

$$\gamma = \frac{A_C}{A_A + A_B + A_C}$$

Obs: Essa abordagem tem vantagens se você já estiver usando produtos vetoriais nos seus cálculos.

Processo de Rasterização

- O triângulo é projetado na tela, ou seja, os vértices do triângulo são convertidos do espaço da câmera (3D) para o espaço da tela (2D).
- Se um pixel se encontra dentro do triângulo, as coordenadas baricêntricas desse pixel são calculadas para interpolar os valores dos vértices e identificar o valor do pixel.



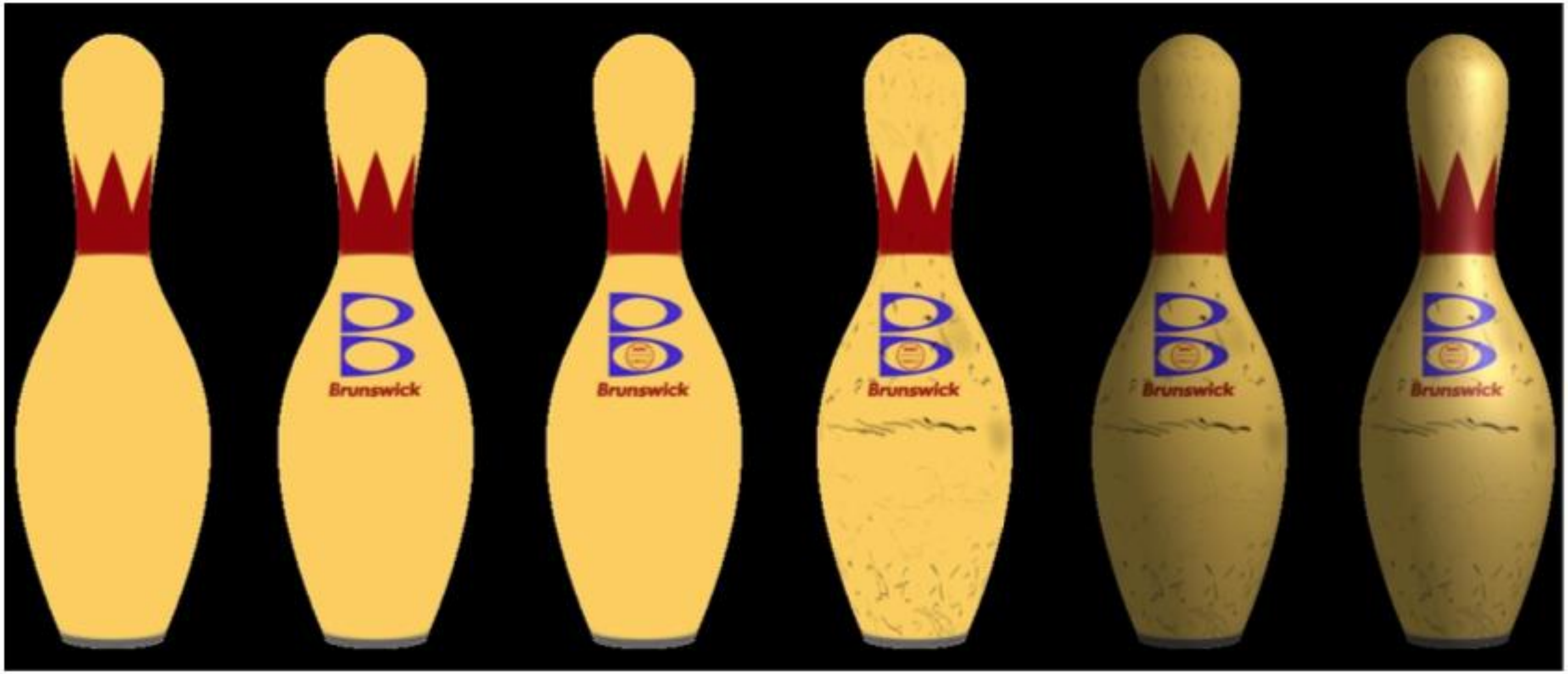
Mapeamento de Texturas

padrão na bola

padrão na madeira

Insper

Realismos das Superfícies



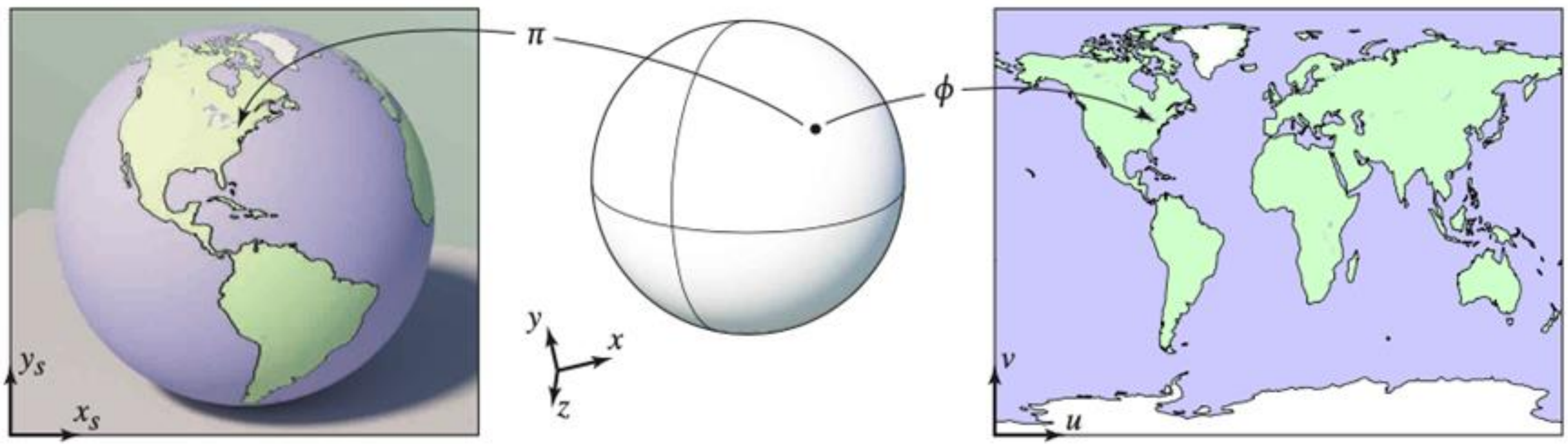
Chan et al.

- Adiciona detalhes sem aumentar a complexidade geométrica
- Se aplica uma imagem na geometria ou se pinta proceduralmente

Três Espaços

As superfícies habitam o espaço 3D do mundo

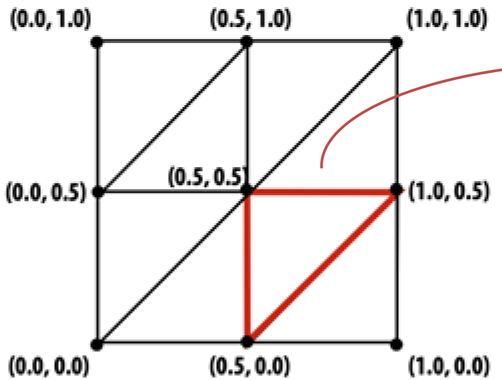
Cada ponto das superfícies 3D também tem uma posição onde fica na tela 2D e na textura 2D.



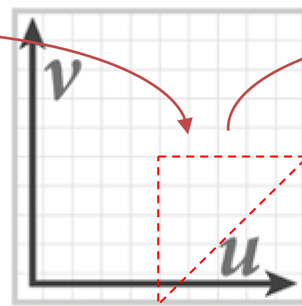
Espaço da Tela | **Espaço do Mundo** | **Espaço da Textura**

Coordenadas de Textura

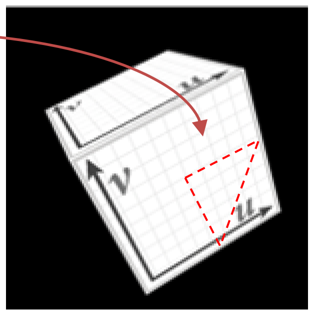
As coordenadas de Textura definem um mapeamento das coordenadas nas superfícies (pontos 3D no triângulo) para coordenadas de textura (pontos 2D na imagem).



Oito triângulos (uma face de um cubo) com parâmetros de superfície fornecida como coordenadas de textura por vértice.



As coordenadas de textura são definidas num espaço normalizado $[0,1]^2$. Localização do triângulo destacado no espaço de textura mostrado em vermelho.

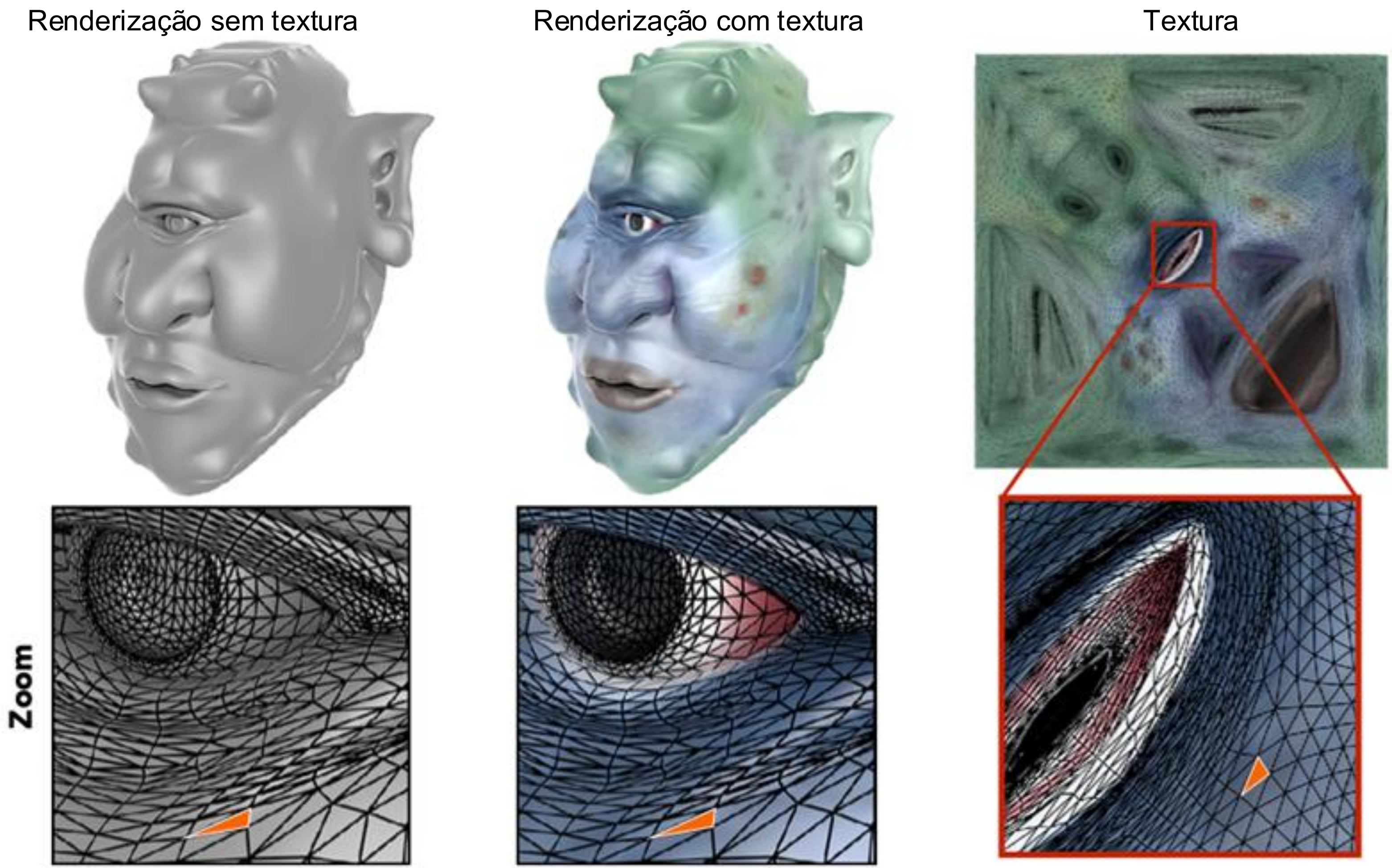


Resultado final renderizado (cubo inteiro mostrado). Localização do triângulo após a projeção na tela mostrada em vermelho.

Mapeamento das coordenadas de textura.

https://www.wikiwand.com/en/Texture_mapping

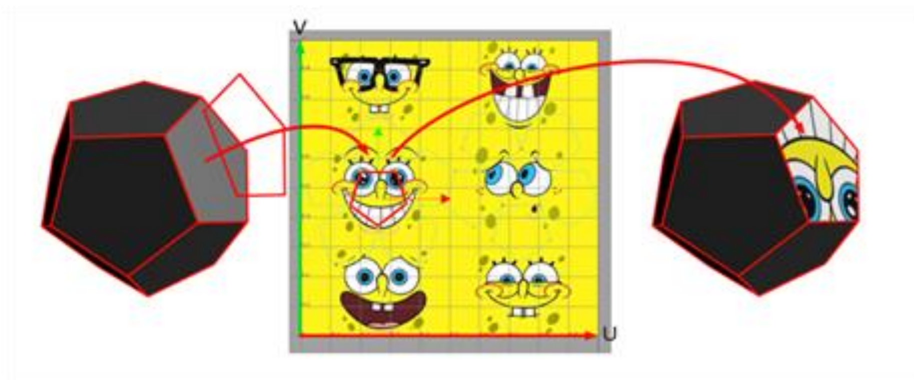
Textura Aplicada na Superfície

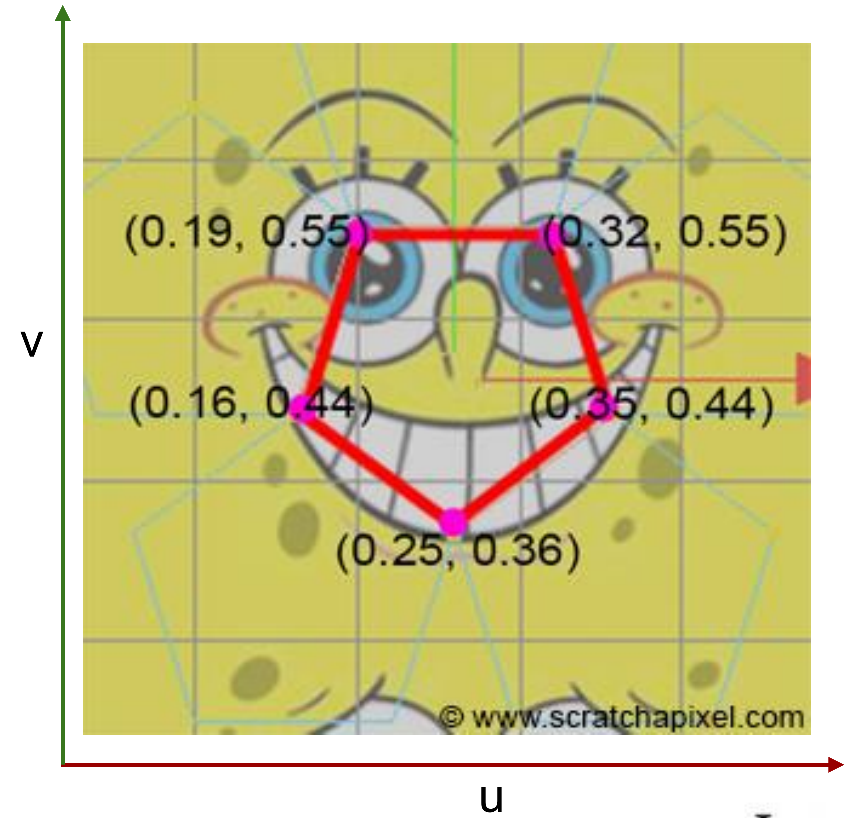


Cada triângulo "copia" um pedaço da textura para a superfície.

UV Layout

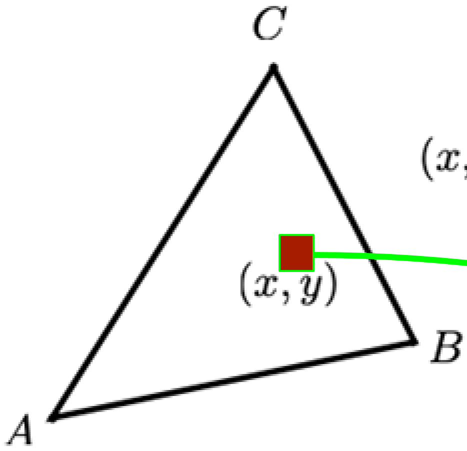
O processo pelo qual as faces são dispostas na superfície da textura é chamado de layout UV.





Operação de Mapeamento de Textura

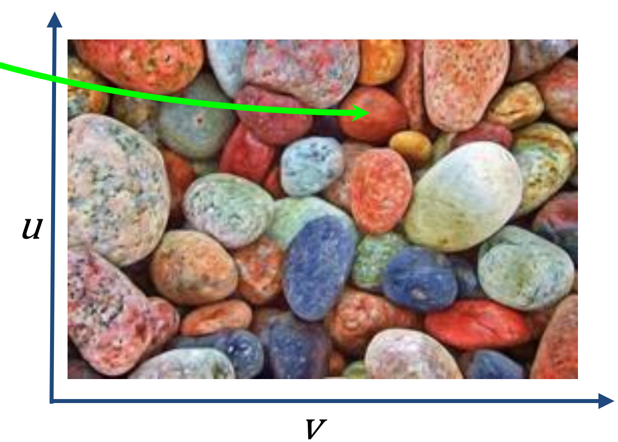
Ao rasterizar a tela no ponto(x, y) identificar o peso das coordenadas:



$$(x,y) = \alpha\, A + \beta\, B + \gamma\, C$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

Os valores das coordenadas de textura são dois (u, v) que são definidos em cada vértice do triângulo.

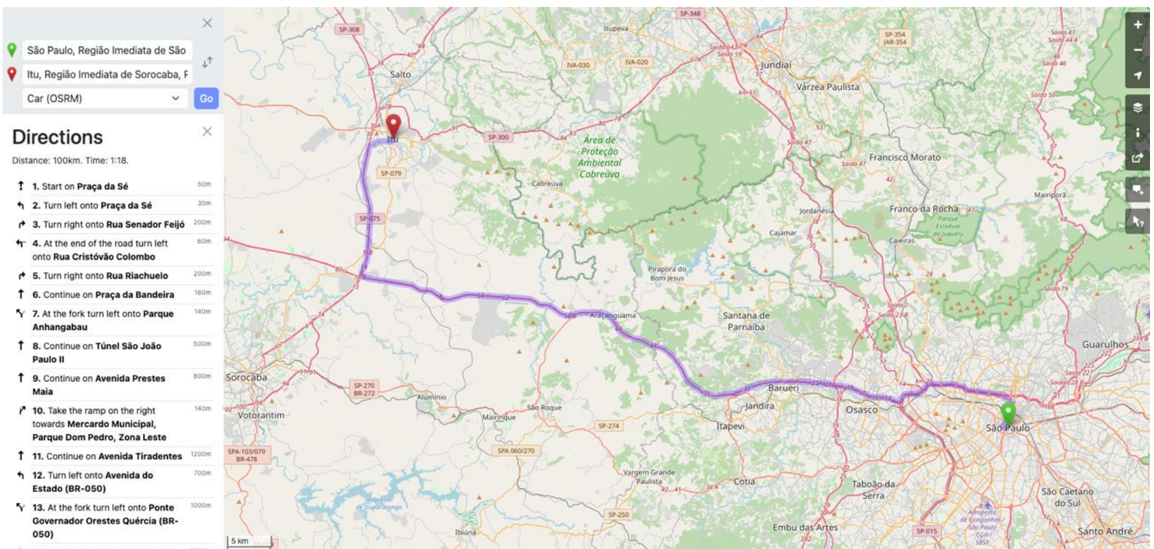
Use as mesmas interpolações para identifica o valor da coordenada de textura em (x, y) para valores (u, v)



Avaliar o valor da cor na textura nas coordenadas (u, v) da textura.

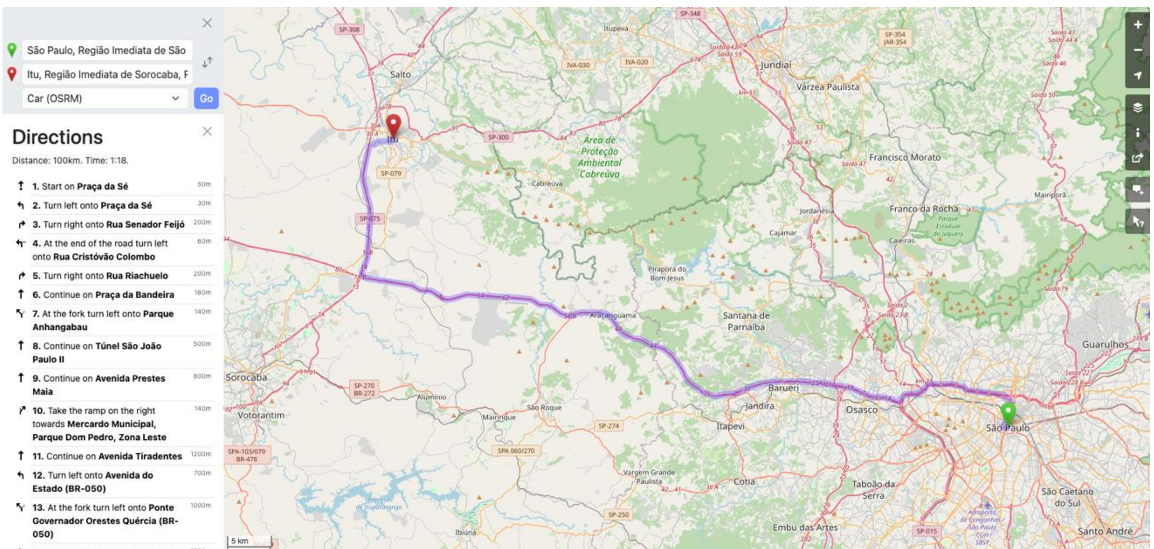
Médias

Prof. Luciano e Fabio Orfali foram até Itú ver o grande orelhão da cidade. A distância é de ~100 km, assim eles dividiram ½ a ½ a condução para a ida.



Médias

O prof. Luciano dirigiu a 100 km/h até Araçariguama que fica a 50 km de São Paulo, já o prof. Fabio dirigiu o restante a 125 km/h.



Fazendo as contas: São Paulo -> Itú

São Paulo até Araçariguama
- 50 km de São Paulo
- 100 km/h

Araçariguama até Itú
- 50 km
- 125 km/h

Qual foi a velocidade média desse percurso?

$$v = \frac{100 + 125}{2} = \cancel{112.5\ \text{km/h}}\ ?$$

Refazendo as contas: São Paulo -> Itú

Foram:

- 50 km a 100 km/h = 0.5h
- 50 km a 125 km/h = 0.4h

Tempo total = 0.9h

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Usando a fórmula de velocidade:

100 / 0.9 ≈ $\boxed{\text{111,1 km/h}}$

Problema: Como a distância está fixa, o que realmente influenciou a velocidade média é o tempo gasto em cada parte do trajeto, que está no denominador, não a distância.

Média Harmônica

Necessária quando lidamos com taxas ou razões.

$$\bar{h} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Restrições:

- **Valores Não Nulos**: A média harmônica não pode ser calculada se um dos valores da amostra for zero;
- **Valores Positivos**: Embora a média harmônica possa tecnicamente ser calculada com valores negativos, seu uso faz mais sentido com valores positivos.

Conferindo as contas: São Paulo -> Itú

São Paulo até Araçariguama
- 50 km de São Paulo
- 100 km/h

Araçariguama até Itú
- 50 km
- 125 km/h

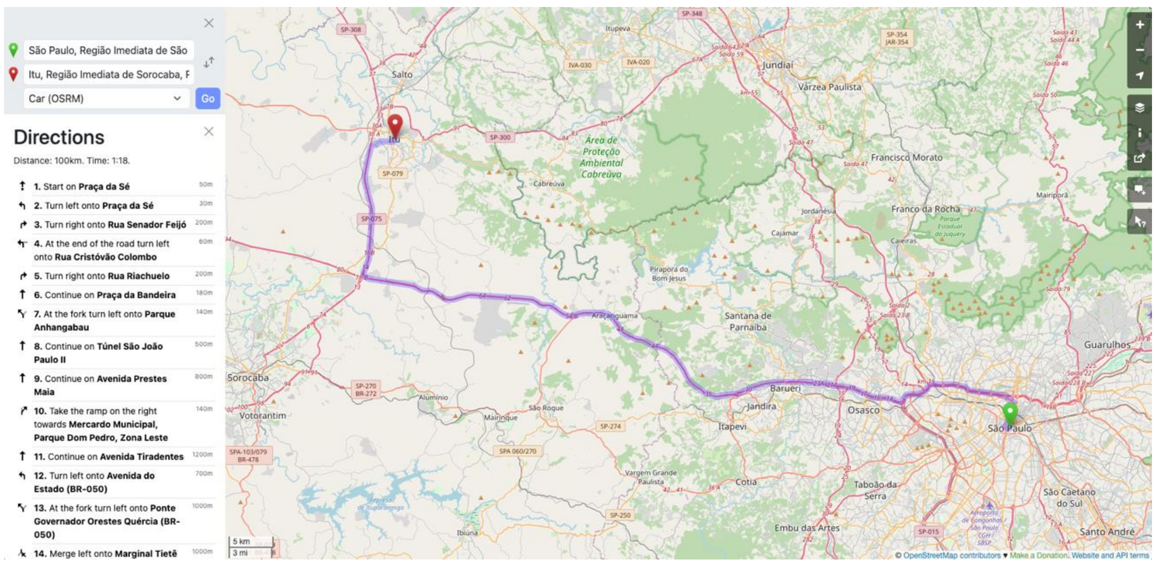
Qual foi a velocidade média desse percurso?

$$v = \frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{125}} = \frac{2}{0.01 + 0.008} = \frac{2}{0.018} \approx 111.1$$

A velocidade média da ida foi de $\boxed{111.1 \text{ km/h}}$

Médias

Na volta o prof. Luciano dirigiu novamente a 100 km/h até Osasco (80 km) e o prof. Fabio dirigiu o restante (20km) a 125 km/h. Qual foi a velocidade média nesse caso?



Insper

Média Harmônica Ponderada

Com um conjunto de pesos w_i associados ao conjunto de valores x_i a média harmônica ponderada é definida por:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}}$$

Fazendo as contas: Itú -> São Paulo

$$v = \frac{100}{\frac{80}{100} + \frac{20}{125}}$$

$$v = \frac{1}{\frac{0.8}{100} + \frac{0.2}{125}}$$

$$v = \frac{1}{0.008 + 0.0016} = \frac{1}{0.0096} \approx 104.167$$

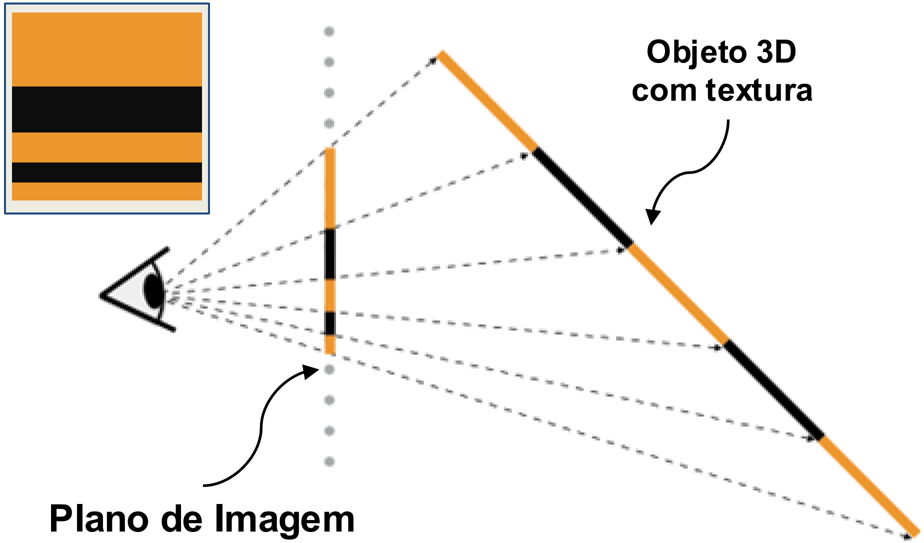
A velocidade média da volta foi de $\boxed{104.167 \text{ km/h}}$

Já vamos usar essas fórmulas para resolver um problema em Computação Gráfica

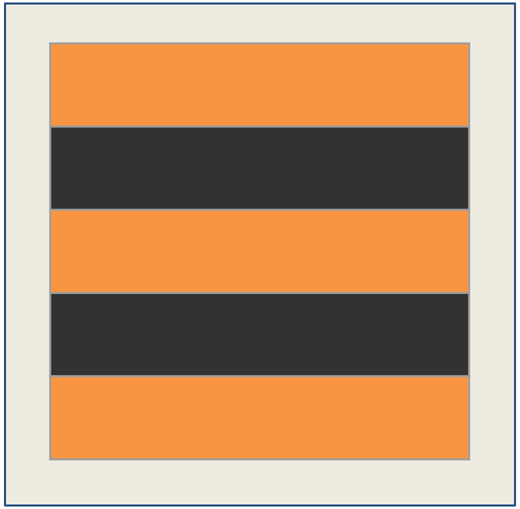
Projeções Perspectivas Cria Não Linearidades

Uma interpolação no espaço da tela (2D) não é a mesma de no espaço da câmera (3D).

A imagem deveria ser:



Porém se não tratarmos corretamente a imagem fica:

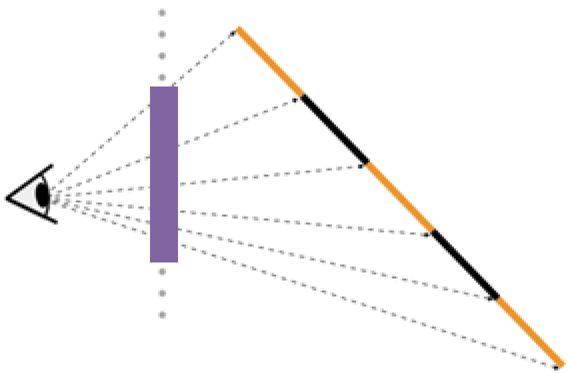


Uma interpolação linear nas coordenadas do mundo precisa de uma interpolação não linear quando transferida para as coordenadas da tela!

Projeções Perspectivas Cria Não Linearidades

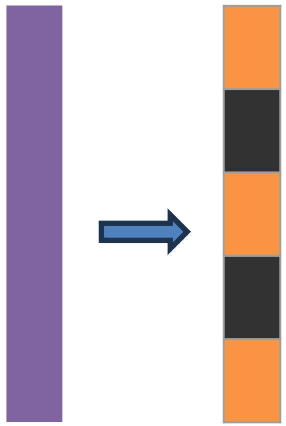
O problema está na simplificação que podemos ter com a projeção, onde projetamos e tratamos o triângulo da tela como se fosse paralelo ao plano da imagem.

1ª fase



Projeção da geometria

2ª fase

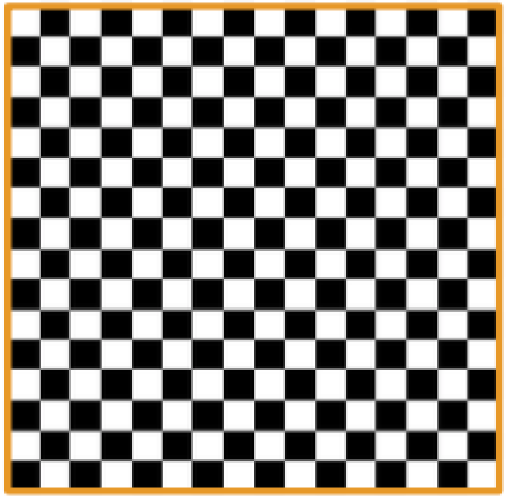


Calcular textura pela geometria projetada

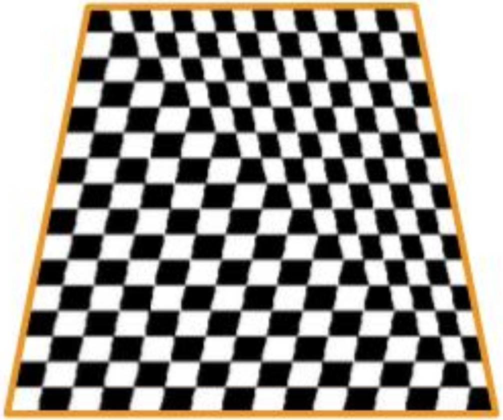
ou seja, precisamos usar o X, Y e Z para fazer as contas de interpolação, mesmo em 2D.

Mas mesmo assim outros problemas podem acontecer!

Projeção Perspectiva e Interpolação



Textura



Plano inclinado com uma projeção perspectiva

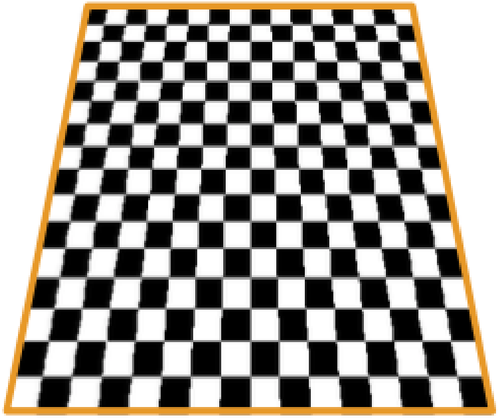
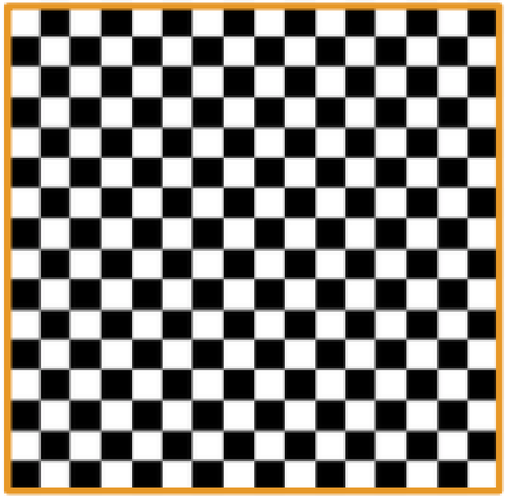


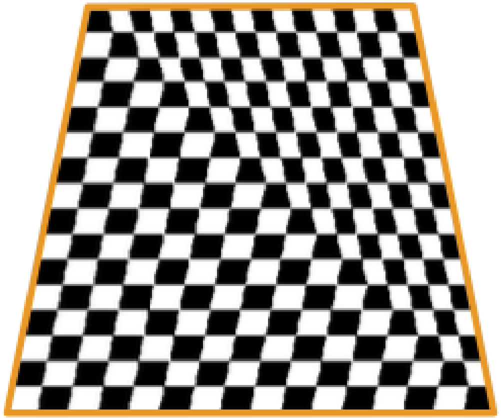
Imagem correta

O que está errado?

Projeção Perspectiva e Interpolação



Textura



Interpolação baricêntrica de coordenadas de textura diretamente no espaço da tela (2D) sem a coordenada Z ajustada

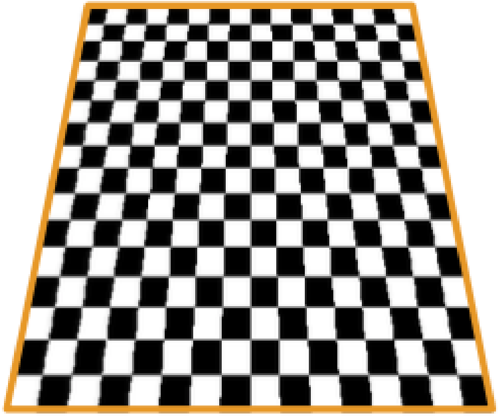
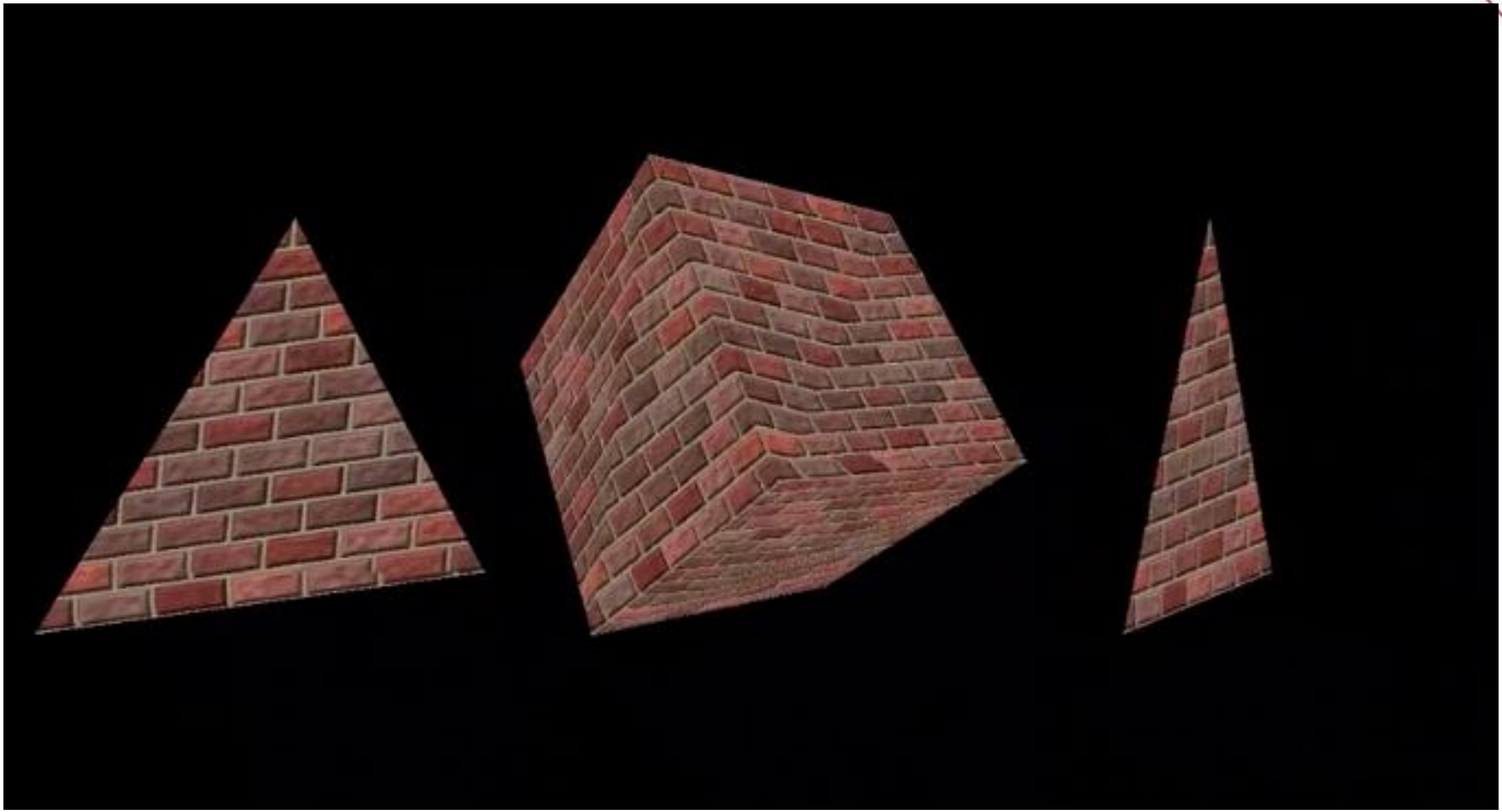


Imagem correta

Insper

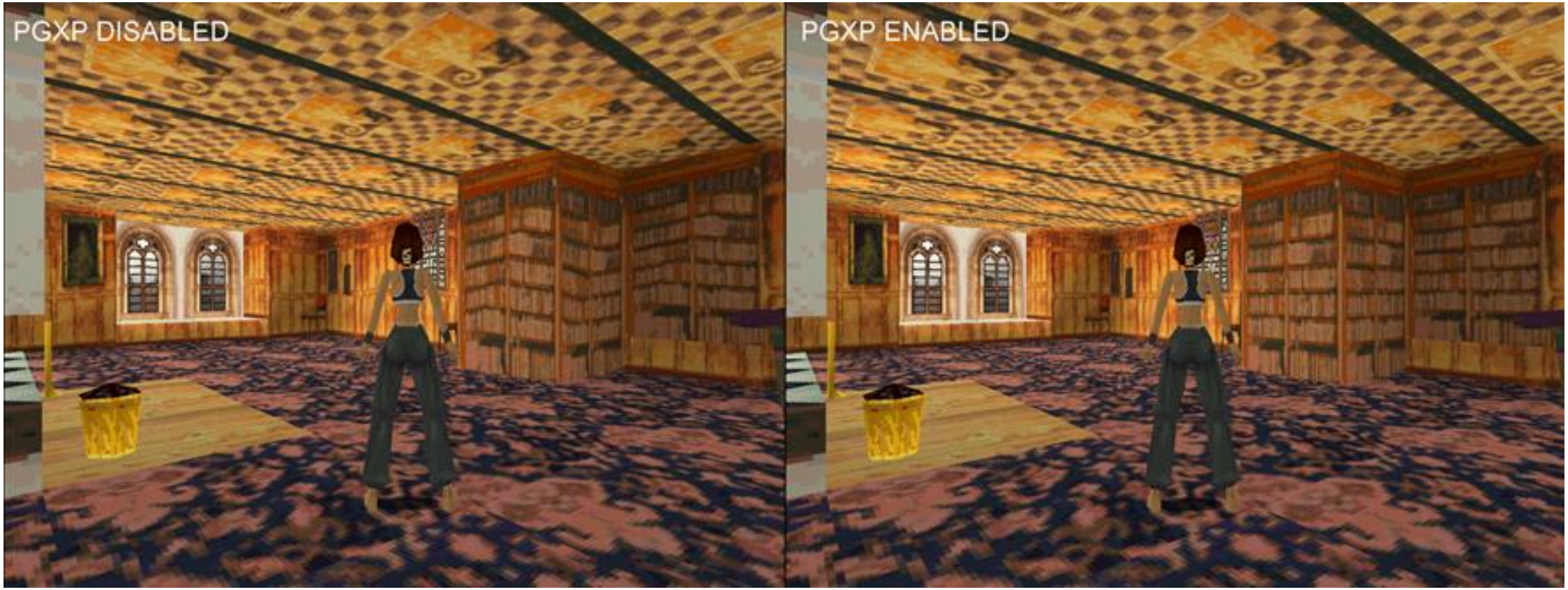
Mapeamento de texturas Afim



https://www.reddit.com/r/GraphicsProgramming/comments/fhvrhl/learning_3d_graphics_implemented_affine_texture/

PlayStation 1

O PS1 não tinha texturas corrigidas pela perspectiva. Hoje o PGXP (Parallel / Precision Geometry Transform Pipeline) é um aprimoramento para a emulação do PlayStation que produz texturas em geometrias 3D com a correção necessária.



Insper

Matriz de Transformação Perspectiva (Z)

Vamos entender o que acontece com o um ponto Z (3D) quando ele é projetado no espaço 2D.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{near}{right} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{near}{top} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{far+near}{far-near} & \frac{-2far*near}{far-near} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

troquei near e far
para inverter sinal

$$Z' = Z \cdot \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}}$$

$$w' = -Z$$

$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{Z'}{w'} = \frac{Z \cdot \frac{\text{far}+\text{near}}{\text{near}-\text{far}} + \frac{2\cdot\text{far}\cdot\text{near}}{\text{near}-\text{far}}}{-Z} = \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}} \cdot \frac{1}{-Z}$$

Insper

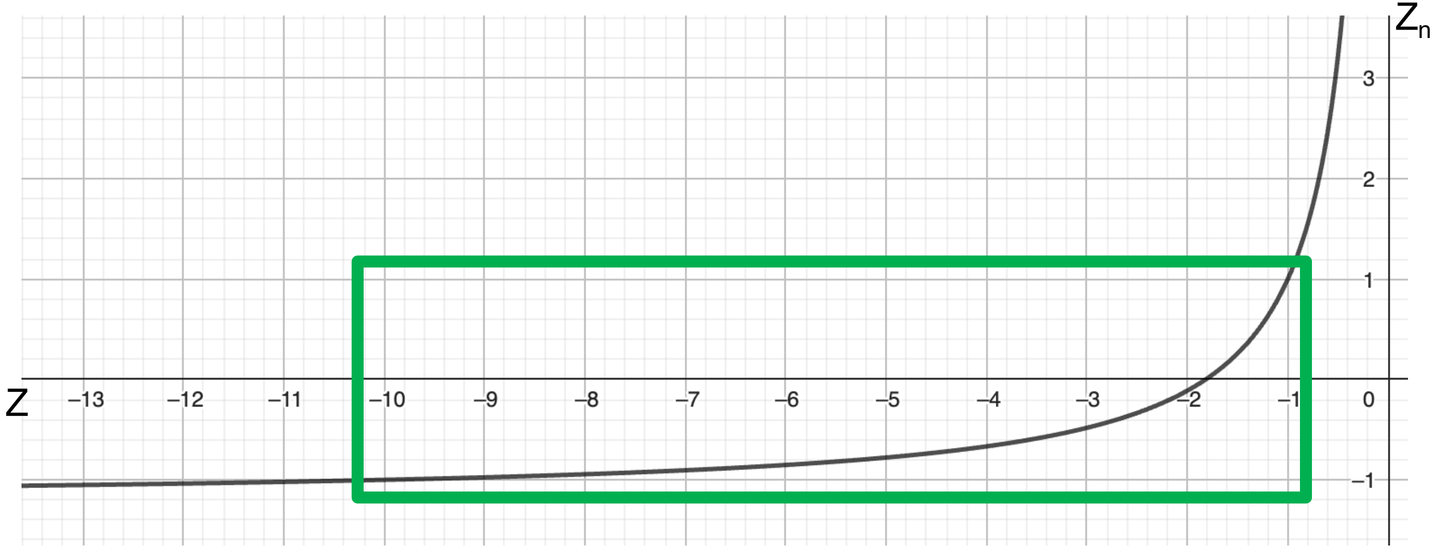
Matriz de Transformação Perspectiva (Z)

$$Z_{\text{normalizado}} = \frac{\text{far} + \text{near}}{\text{near} - \text{far}} + \frac{2 \cdot \text{far} \cdot \text{near}}{\text{near} - \text{far}} \cdot \frac{1}{-Z}$$

Por exemplo: Se, near = 1 (-1) e far = 10 (-10)

$$Z_n = -\frac{11}{9} - \frac{20}{9 \cdot Z}$$

Ou seja, embora a função de projeção preserve a ordenação da coordenada de profundidade (Z), essa transformação não é linear.



Isso é uma função racional que gera uma hipérbole

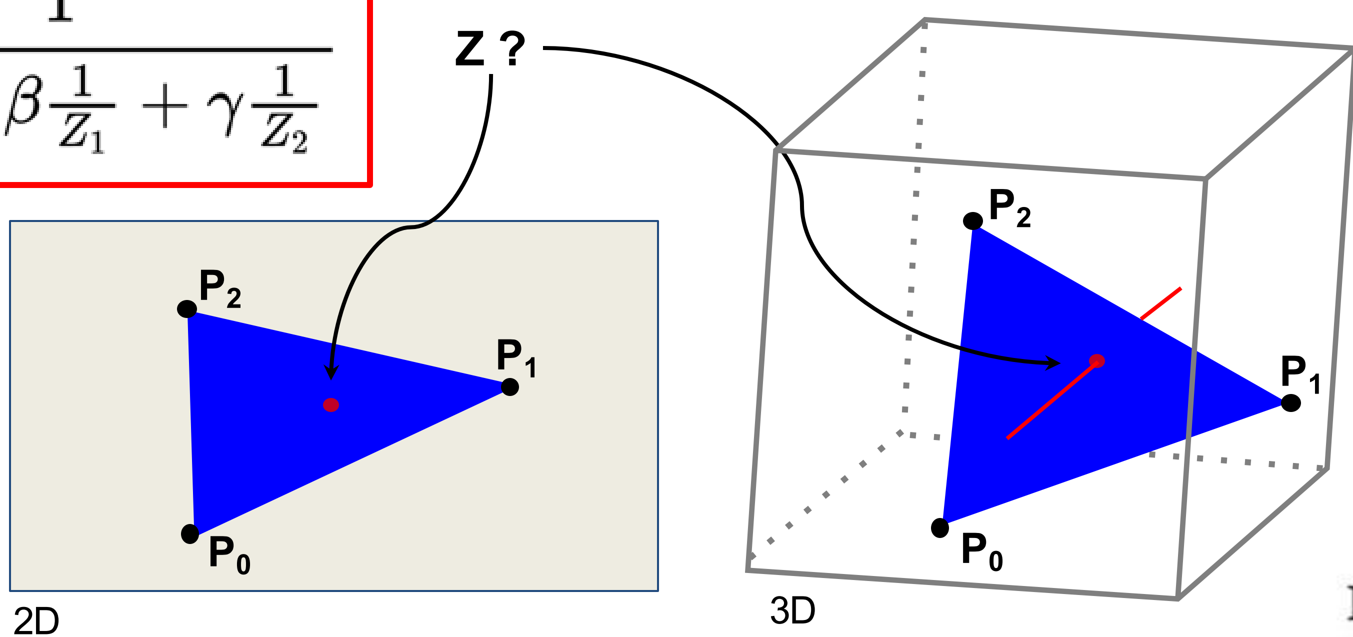
Insper

Calculando o Z no interior do triângulo

Assim, utilizamos o valor Z dos vértices no espaço da câmera para calcular o Z projetado* do ponto amostrado, por meio da média harmônica ponderada das coordenadas baricêntricas com pesos α, β e γ.

*Embora a projeção envolva apenas X e Y, o Z permanece como uma dimensão válida.

$$\boxed{Z = \frac{1}{\alpha\frac{1}{Z_0} + \beta\frac{1}{Z_1} + \gamma\frac{1}{Z_2}}}$$



Insper

Média Harmônica Ponderada

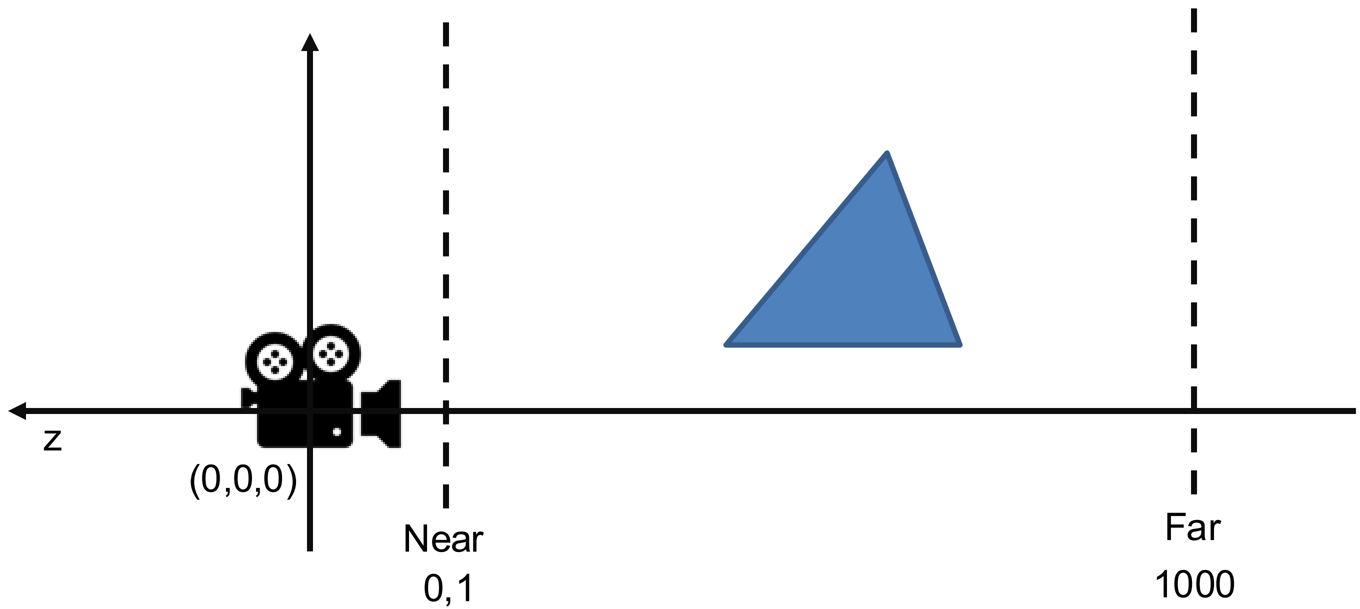
Faça os cálculos com os valores de **Z no espaço da câmera (view)**

- não use NDC

Use os valores positivos (inverta o sinal da coordenada Z)

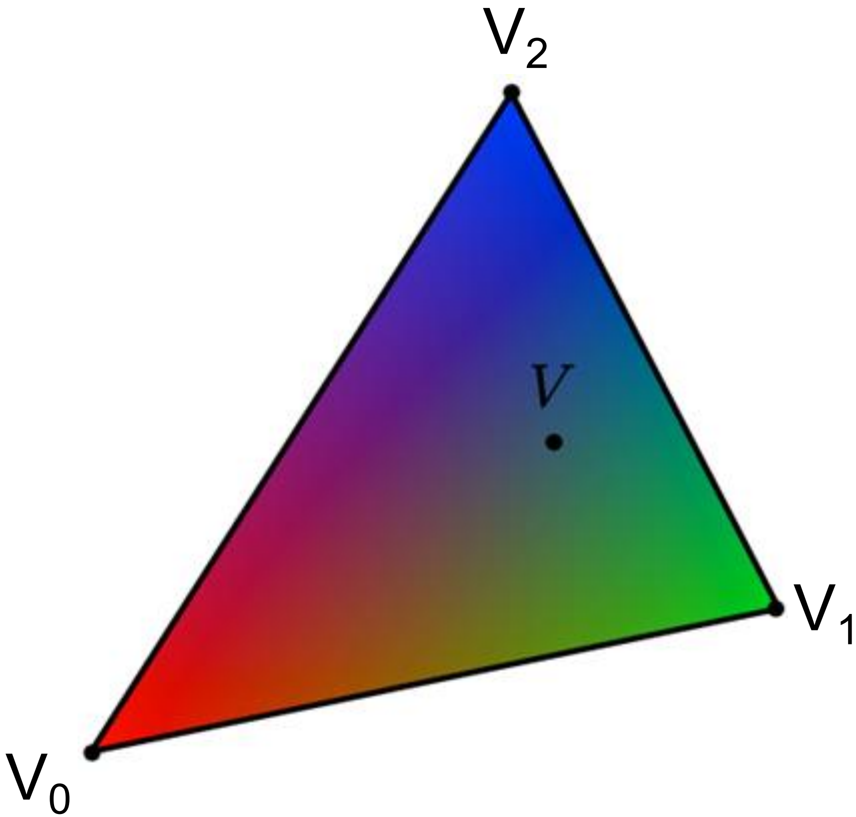
Por causa do *Near* os valores serão sempre maiores que zero

- podemos usar tranquilamente média harmônica



Insper

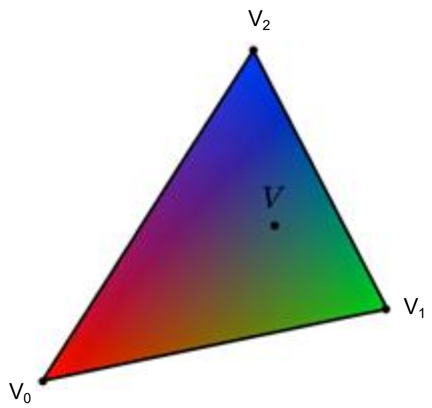
Interpolação <u>não linear</u> em Z pelo Triângulo



$V = ?$

Representação Conceitual da Interpolação

Usar agora o Z dividindo o parâmetro que se deseja interpolar.
E depois multiplica o Z do ponto sendo amostrado.



$$\boxed{V = Z \cdot \left(\alpha \frac{V_0}{Z_0} + \beta \frac{V_1}{Z_1} + \gamma \frac{V_2}{Z_2} \right)}$$

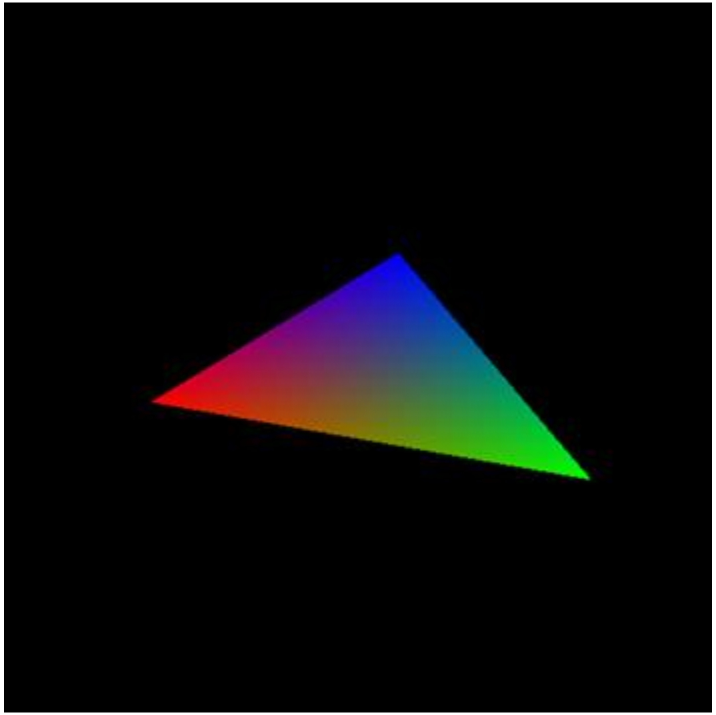
As coordenadas baricêntricas projetadas no espaço da tela não são transformações afim. Já se forem interpoladas com a divisão do valor de Z são transformações afim.

Cuidado: o Z a ser usado é do espaço da câmera, não use o Z do NDC!

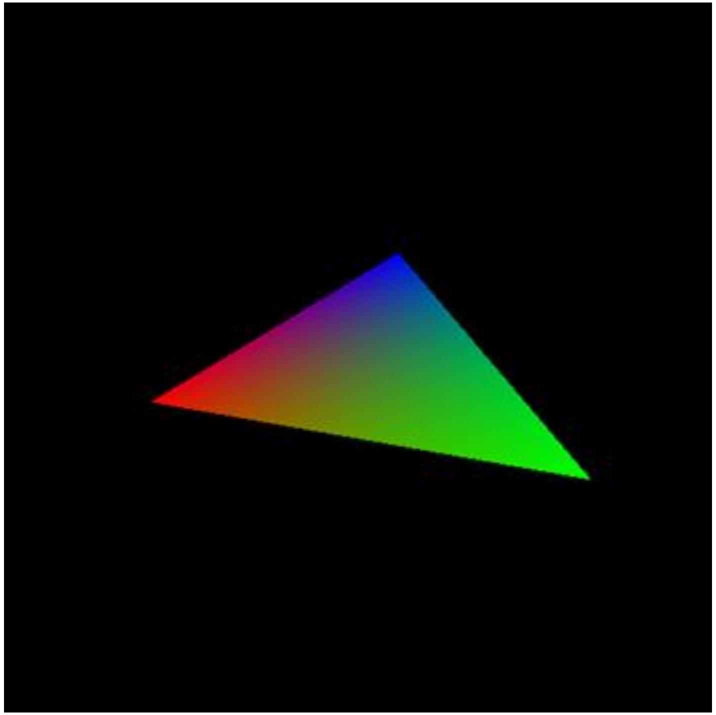
Insper

Diferença no resultado quando usada o Z

Interpolação Baricêntrica 2D



Interpolação Baricêntrica 3D



Mais informações em: https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/rasterization-practical-implementation/visibility-problem-depth-buffer-depth-interpolation.html

https://www.scratchapixel.com/lessons/3d-basic-rendering/rasterization-practical-implementation/perspective-correct-interpolation-vertex-attributes

Próxima Aula

Veremos em mais detalhes como mapear as texturas para os triângulos. A proposta é a mesma da cor, porém usaremos as coordenadas (u, v) de textura.

Uma equação mais simples (que pode ser optimizada) é:

$$u = \frac{\alpha \frac{u_0}{z_0} + \beta \frac{u_1}{z_1} + \gamma \frac{u_2}{z_2}}{\alpha \frac{1}{z_0} + \beta \frac{1}{z_1} + \gamma \frac{1}{z_2}}$$

$$v = \frac{\alpha \frac{v_0}{z_0} + \beta \frac{v_1}{z_1} + \gamma \frac{v_2}{z_2}}{\alpha \frac{1}{z_0} + \beta \frac{1}{z_1} + \gamma \frac{1}{z_2}}$$

Equação que a maioria das placas de vídeo e APIs gráficas (como OpenGL e DirectX) resolvem o problema para renderizar texturas de forma realista.

ATIVIDADE:

Acesse o notebook no site da disciplina.

Crie uma cópia para você e realize todos os exercícios.

Voltamos em 30 minutos?

Insper

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali
<fabioO1@insper.edu.br>