Computação Gráfica

Aula 5: Sistema de Coordenadas

Momentos que Mudaram o Cinema: Jurassic Park

Moments That Changed The Movies: Jurassic Park
https://www.youtube.com/watch?v=KWsbcBvYqN8

Insper

Antes de Começarmos

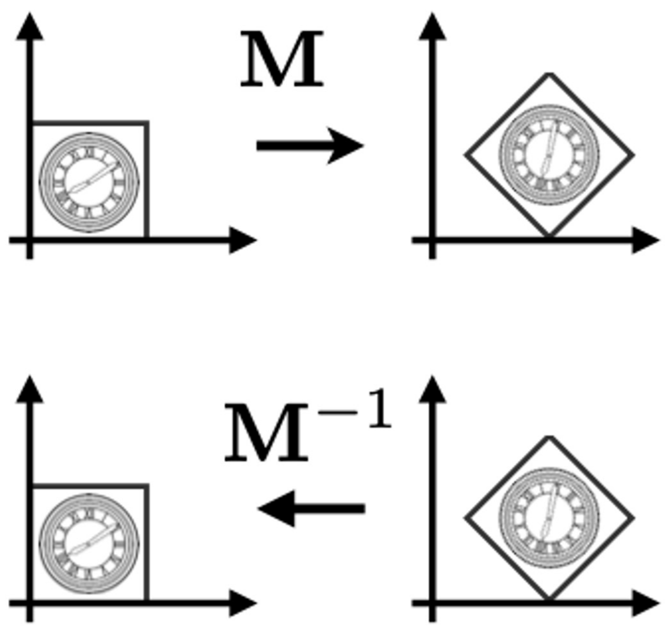
Conceitos matemáticos da aula de hoje:

- Matriz Inversa
- Mudança de Base / Mudança de Sistema de Coordenadas

Transformações Inversas

$$M^{-1}$$

M^{-1} é a transformada inversa de M, tanto no sentido algébrico, como geométrico.



Insper

Transformações Inversas

Se M é a matriz de uma transformação linear, então a matriz de sua transformação inversa é M^{-1} (matriz inversa de M).

Lembre que

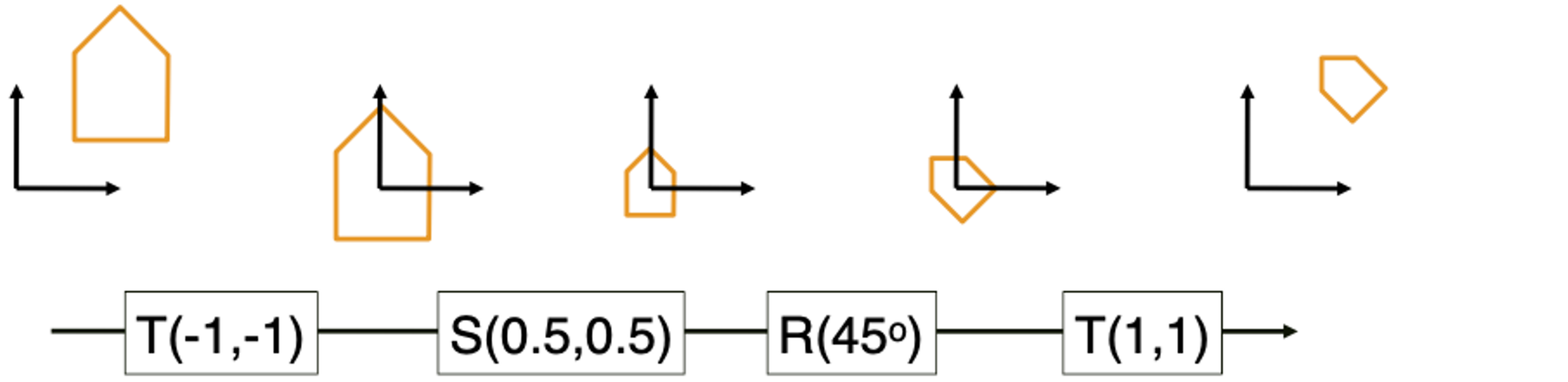
$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$$

sendo

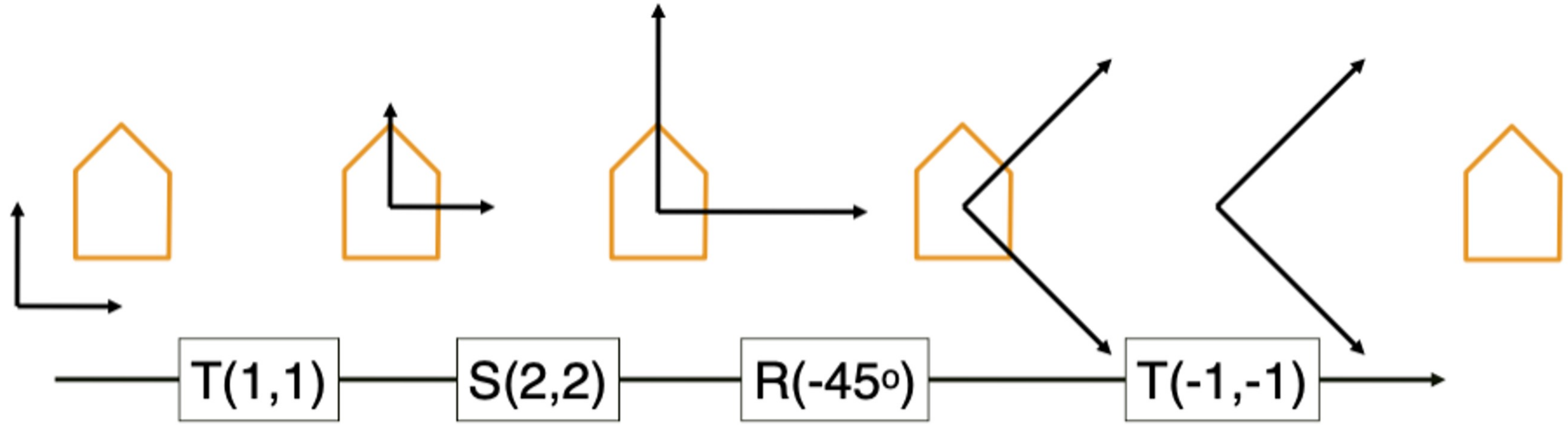
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Duas interpretações para uma transformação

Interpretação 1: transforme os pontos de objeto



Interpretação 2: transforme o sistema de coordenadas



Mudança de Base

Você se lembra que todo vetor do espaço pode ser escrito como combinação linear dos vetores i, j, k:

$$\vec{v} = \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath} + \gamma\hat{k}$$

Além disso, o conjunto B = {i, j, k} é **linearmente independente**, ou seja, não é possível escrever qualquer elemento desse conjunto como combinação linear dos outros dois.

Por esse motivo, dizemos que B é uma **base** do espaço V_3 dos vetores do espaço. Isso significa que B é o menor conjunto capaz de gerar todos os outros vetores do espaço por meio de combinações lineares.

Mudança de Base

Como B = {i, j, k} possui 3 elementos, dizemos que V_3 é um espaço de **dimensão** 3.

Considere o vetor v = 2i + 5j - 3k. Dizemos que a tripla ordenada (2, 5, -3) representa as **coordenadas** de v na base B, e podemos escrever:

$$\mathbf{v = (2, 5, -3)_B}$$

Note que as coordenadas de v são únicas, isto é, existe uma única maneira de escrever v como combinação linear dos vetores i, j, k.

Mudança de Sistema de Coordenadas

Importante: usando uma base, conseguimos representar todos os vetores do espaço.
E como representamos os pontos do espaço?

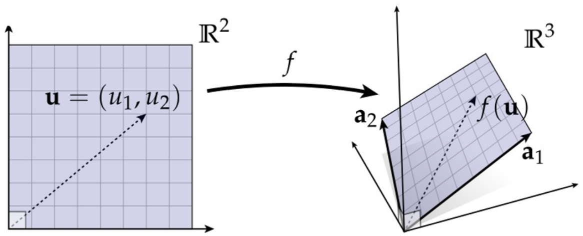
É preciso definir um ponto como origem. Assim, a união de um ponto O com uma base B, representada pelo par (O,B), é chamada de **sistema de coordenadas**.

Para realizar uma mudança de um sistema de coordenadas (O,B) para outro (O',B'), basta aplicar a translação que leva O' a O e, em seguida, utilizar a matriz de mudança da base B para B'.

Mudança de Base

Eventualmente, podemos realizar mudanças do plano para o espaço:

$$f(\mathbf{u}) = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$$



Neste caso u1 e u2 são coordenadas (2D) e a1 e a2 vetores 3D

Os vetores da transformação podem ser codificados numa matriz

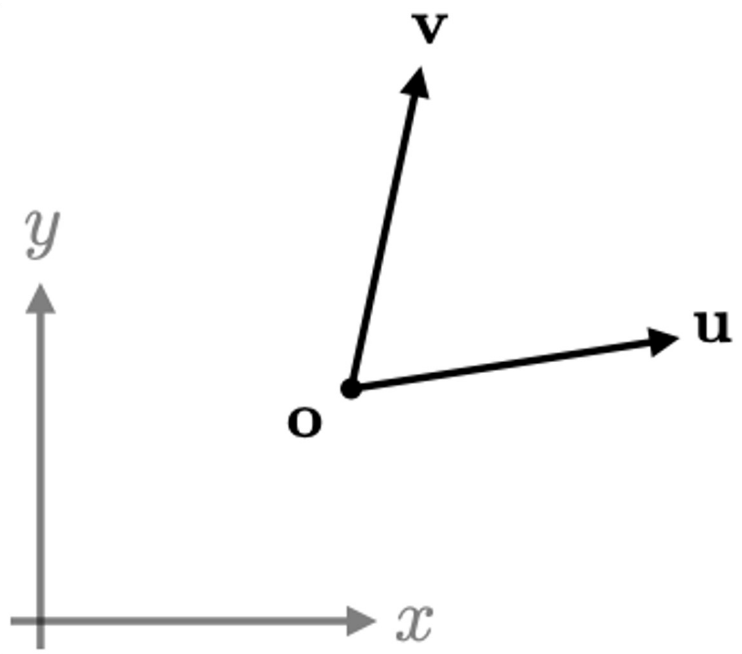
$$A := \begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix}$$

Uma multiplicação de matrizes vai realizar o cálculo desejado

$$\begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,x}u_1 + a_{2,x}u_2 \\ a_{1,y}u_1 + a_{2,y}u_2 \\ a_{1,z}u_1 + a_{2,x}u_2 \end{bmatrix} = u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$$

Sistema de Coordenadas

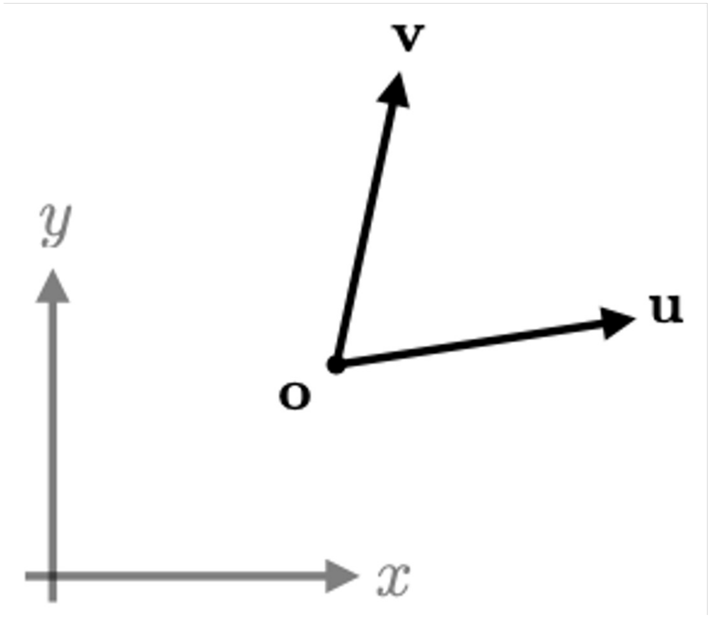
Um novo sistema de coordenadas é definido por uma origem (ponto) e um conjunto de eixos (vetores). Em geral usamos vetores unitários para definir o sistema de coordenadas.



Dadas as coordenadas no sistema de referência (o, u, v), qual é a transformação para as coordenadas em (x, y)?

Matriz de mudança de sistema de coordenadas

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & o_x \\ u_y & v_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



As colunas da matriz são definidas pelo sistema de referência nas coordenadas no mundo.

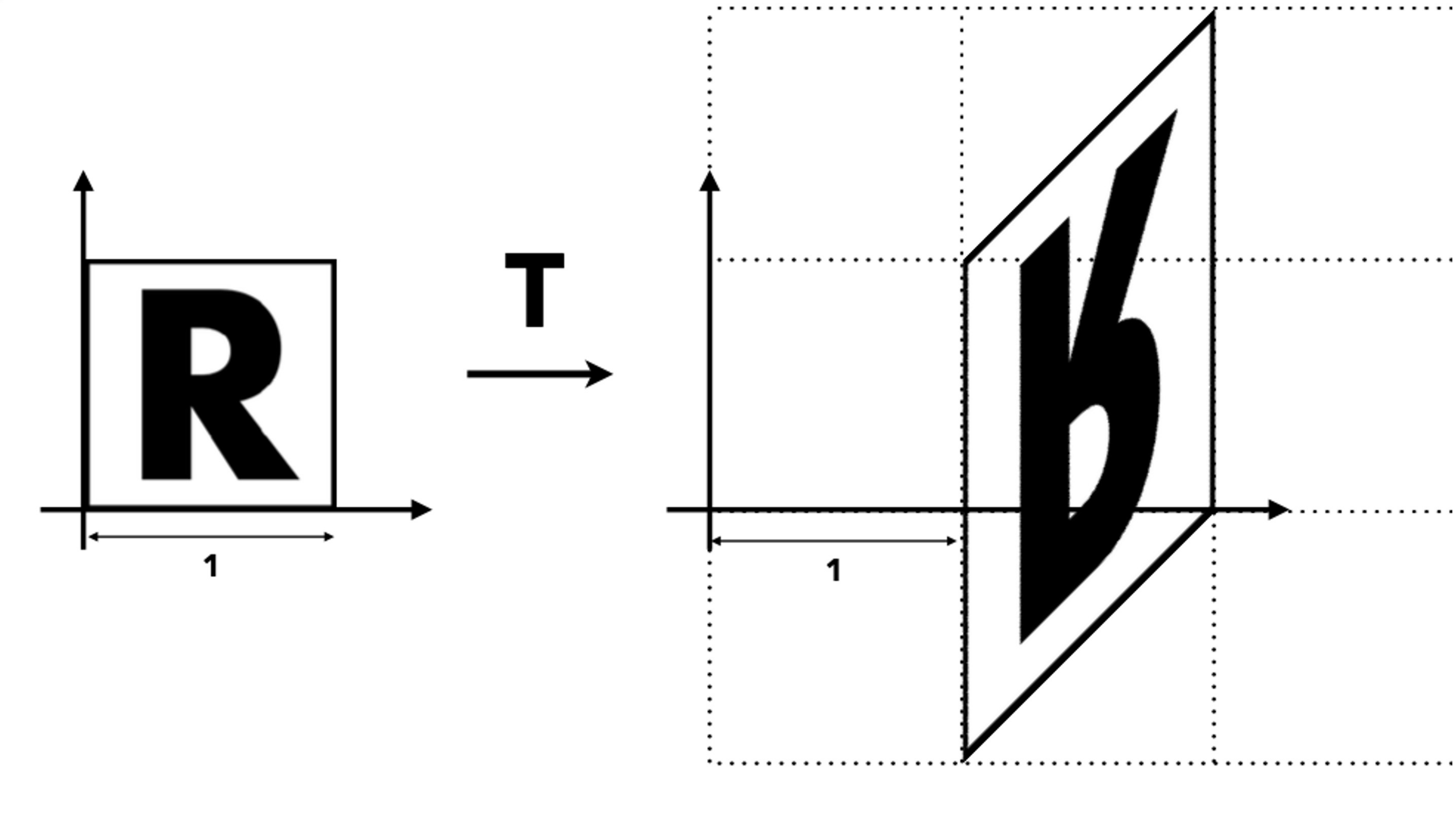
Mudança de base em 3D

Da mesma forma que podemos mudar de sistema de coordenadas em 2D, podemos mudar em 3D.

$$f(\mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{o}) = \begin{bmatrix} \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} & \mathrm{o} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{u}_x & \mathrm{v}_x & \mathrm{w}_x & \mathrm{o}_x \\ \mathrm{u}_y & \mathrm{v}_y & \mathrm{w}_y & \mathrm{o}_y \\ \mathrm{u}_z & \mathrm{v}_z & \mathrm{w}_z & \mathrm{o}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo

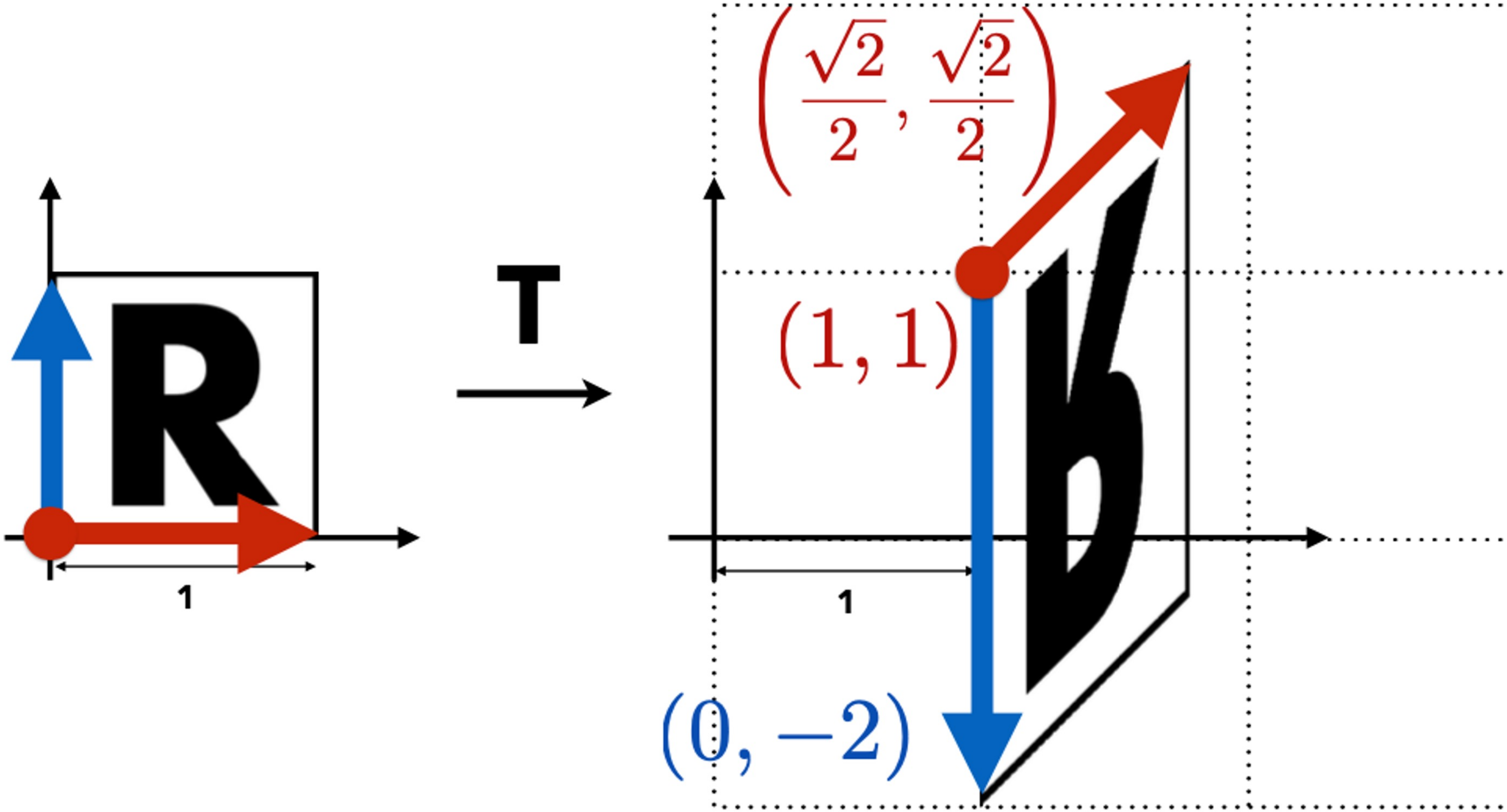
Escreva uma matriz T representando essa transformação:



Insper

Sistema de Coordenadas : Exemplo

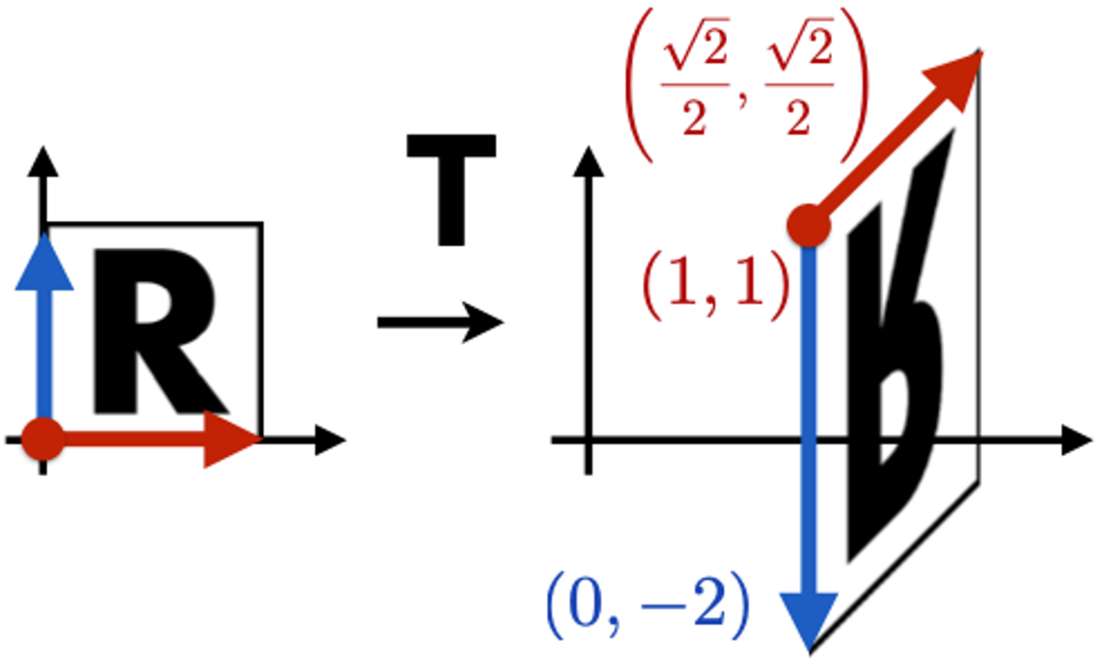
Escreva uma matriz T representando essa transformação:



Insper

Sistema de Coordenadas : Exemplo

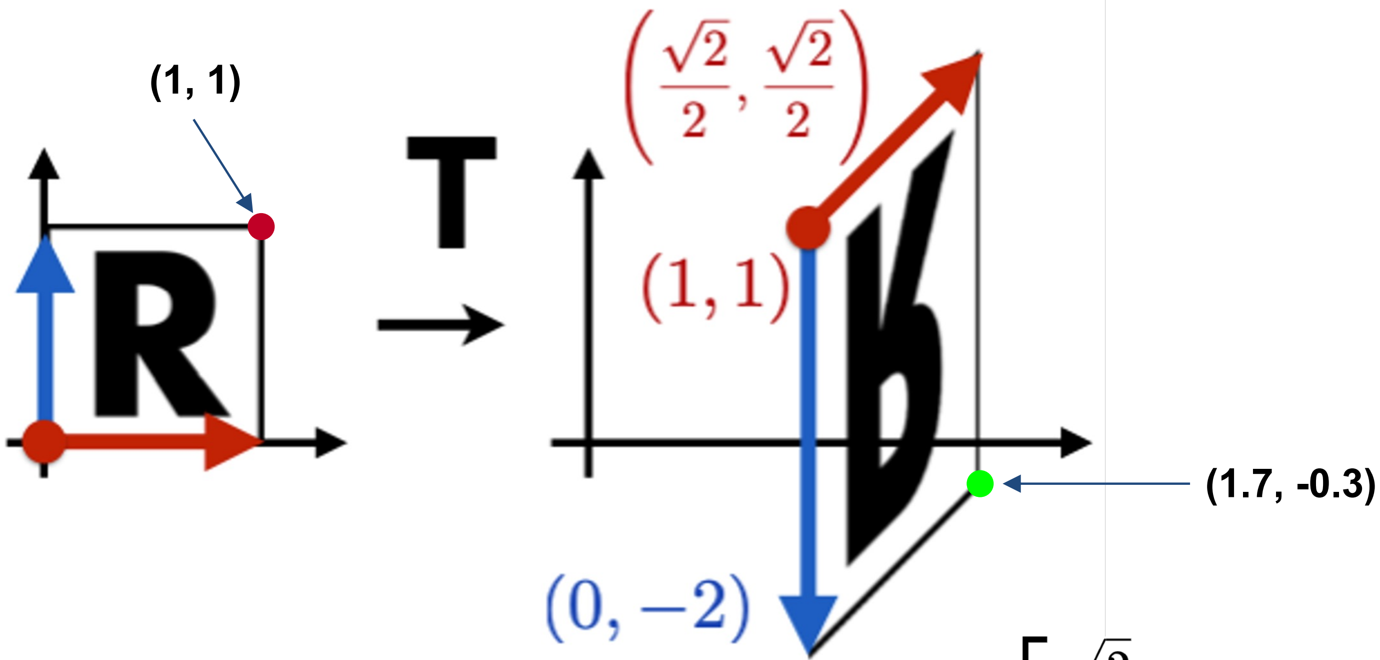
Escreva uma matriz T representando essa transformação:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

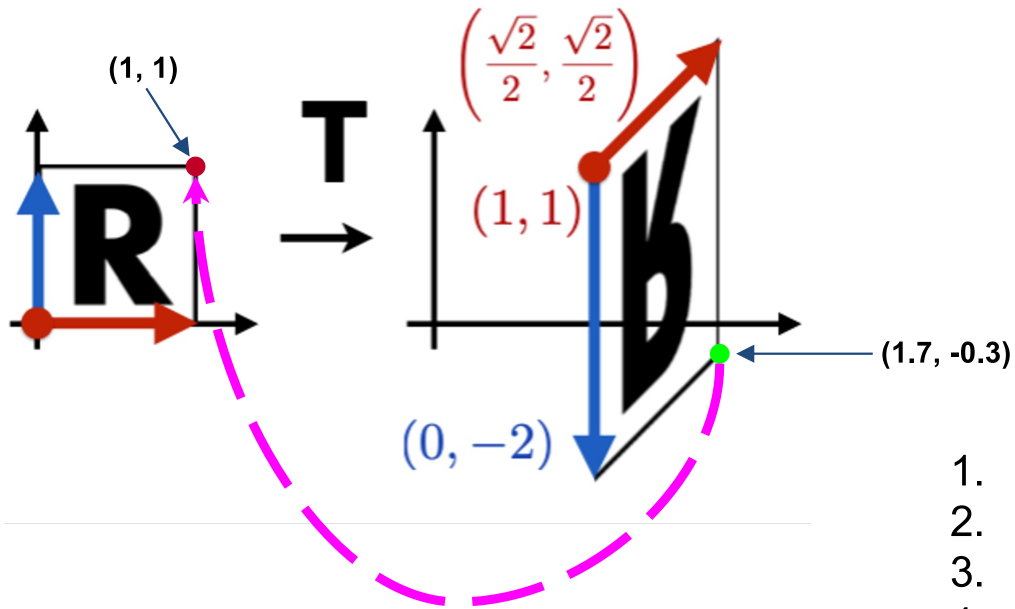
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo



$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo



E se quisermos fazer o Inverso?

Matriz Inversa

1. Calcule a determinante da matriz.
2. Transponha a matriz original.
3. Calcule o determinante de cada sub matriz.
4. Crie a matriz de cofatores.
5. Divida cada termo da matriz adjunta pela determinante.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

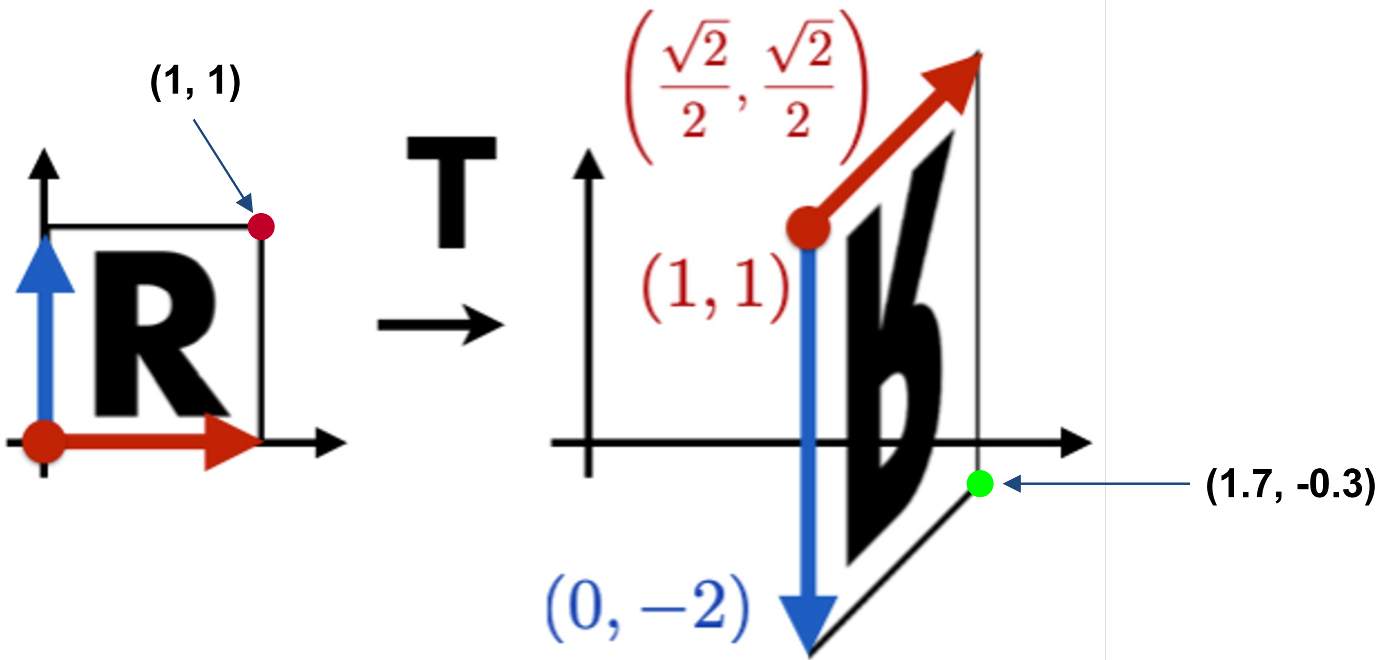
Insper

Sistema de Coordenadas : Exemplo

Vamos testar:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

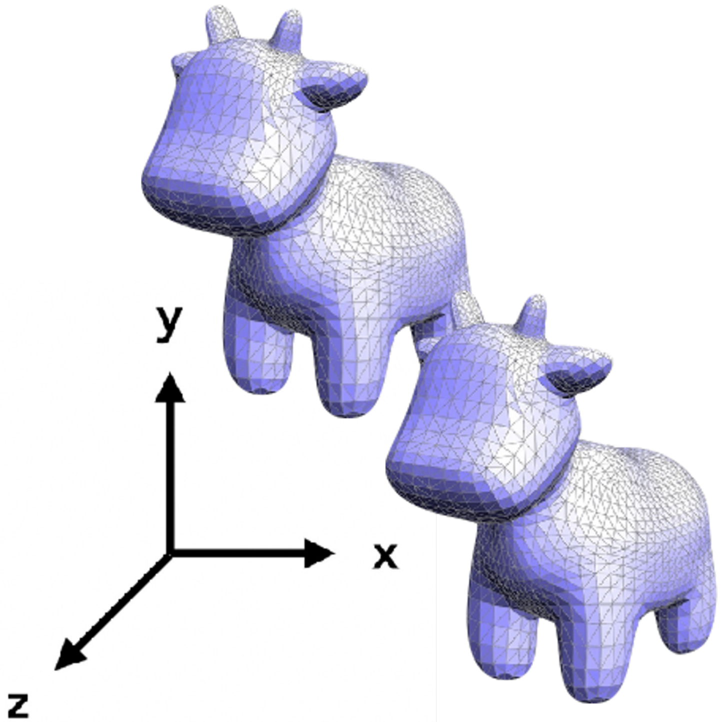
Sistema de Coordenadas : Exemplo

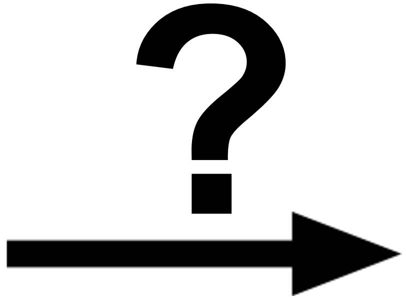


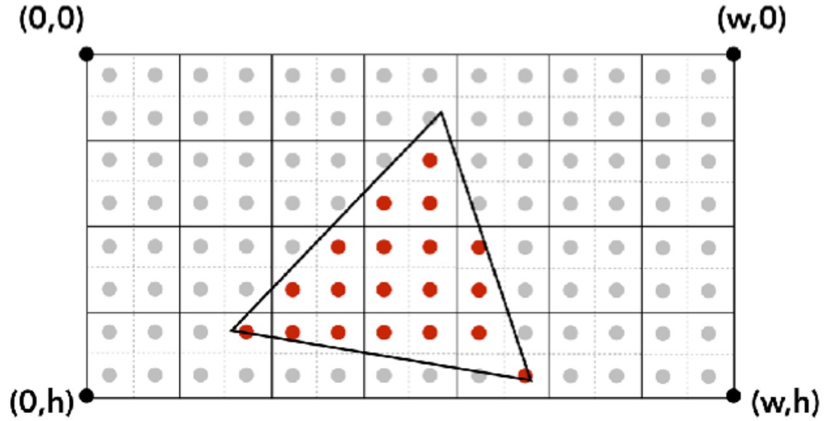
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Do espaço do mundo para o espaço da câmera (View)

Transformações para Visualização e Perspectiva







Modelando a cena em coordenadas do mundo 3D *(world Space)*

Rasterização em coordenadas da tela em 2D *(Screen Space)*

Espaço de Coordenadas da Câmera (View)

Usaremos esta convenção para o sistema de coordenadas padrão de câmera:

- câmera localizada na origem
- olhando pelo eixo z negativo
- o vetor vertical é o eixo y
- eixo x
  - ortogonal a y e z
  - apontando para direita

Insper

Espaço de Coordenadas da Câmera (View)

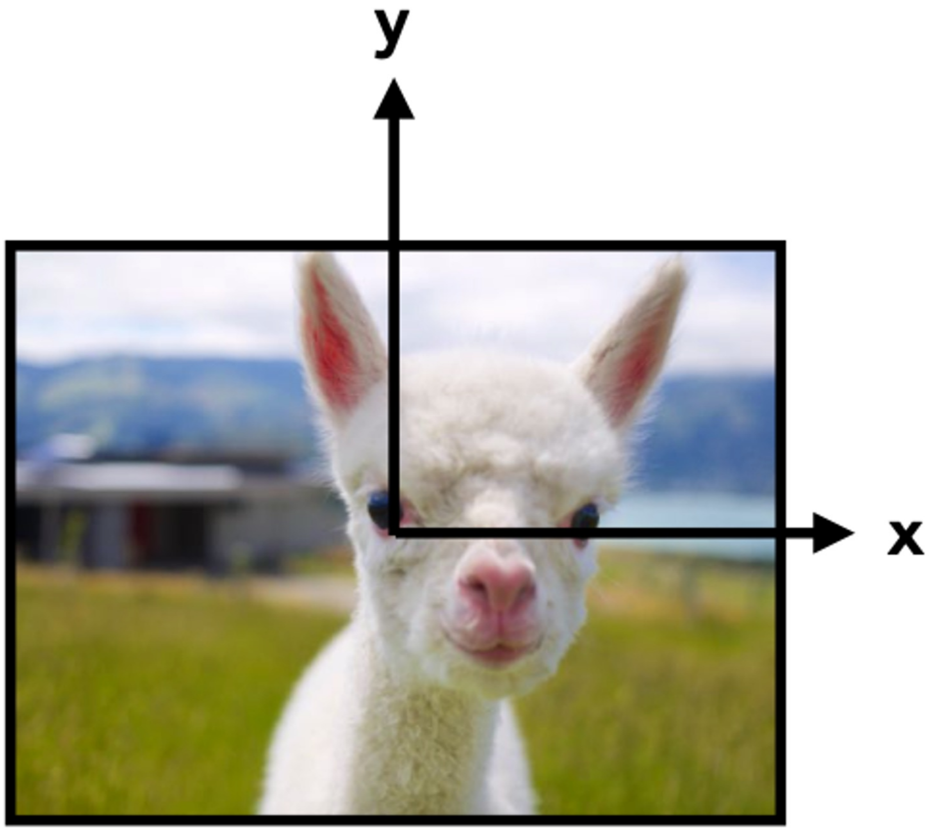


Imagem Resultante

(eixo z como se estivesse saindo da tela)

Considere uma câmera apontando para o mundo

Insper

Considere uma câmera apontando para o mundo

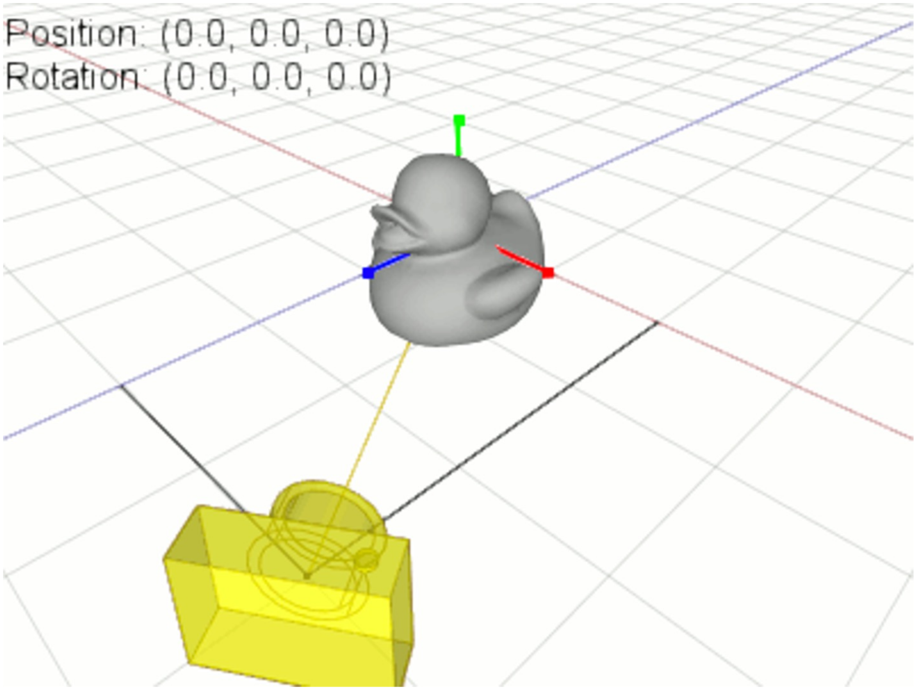
Função LookAt:

- **Entrada**: at, up, eye : fornecidos em coordenadas do espaço do mundo (3D)
- **Saída**: matriz de transformação do espaço do mundo para o espaço da câmera

Insper

Função "LookAt"

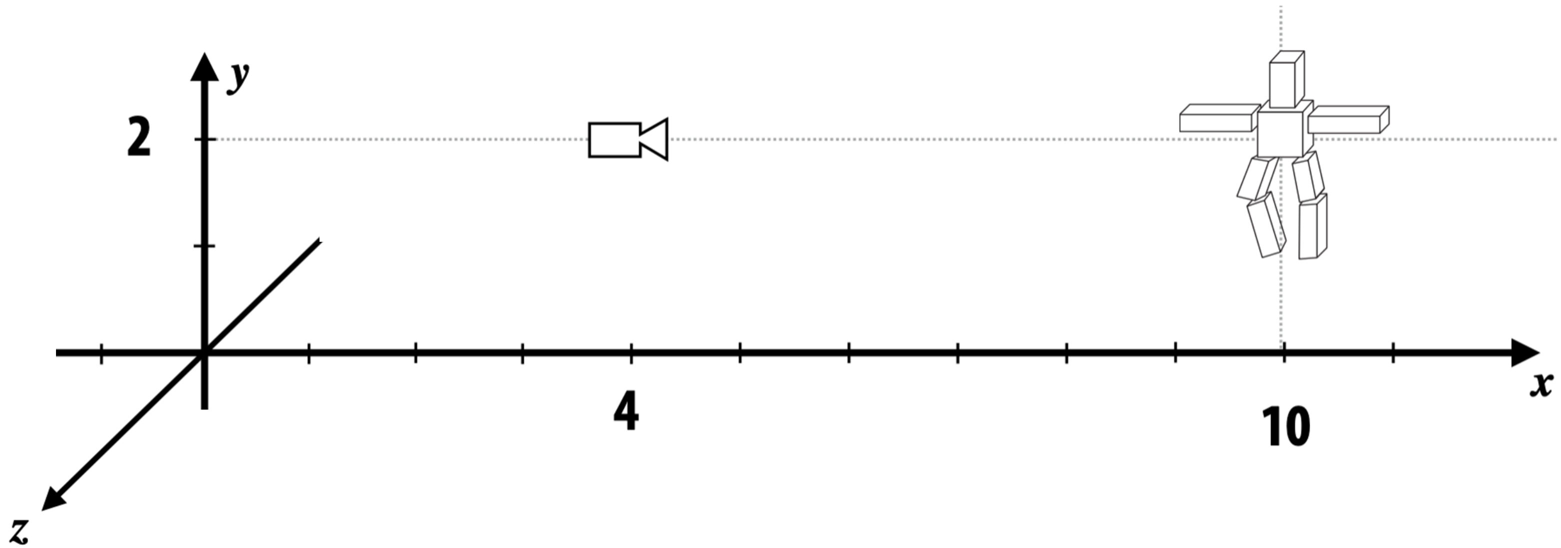
A função LookAt cria uma matriz de visualização (LookAt Matrix) que transforma vértices do espaço do mundo para o espaço da câmera (View).



http://www.songho.ca/opengl/gl_camera.html

Exemplo: Transformação Simples de Câmera

Considere um objeto posicionado no mundo.
Considere a câmera na posição (4, 2, 0), olhando pelo eixo X.



Quais transformações no sistema de coordenadas são necessárias para colocar a câmera na origem vendo pelo eixo –Z?

- Transladar os vértices do objeto por (-4, -2, 0), para fazer a câmera na origem.
- Rotacionar os vértices do objeto por pi/2 no eixo Y, para fazer a câmera olhar por –Z.

* A conveniência de fazer essa mudança de sistema de coordenadas ficará logo clara!

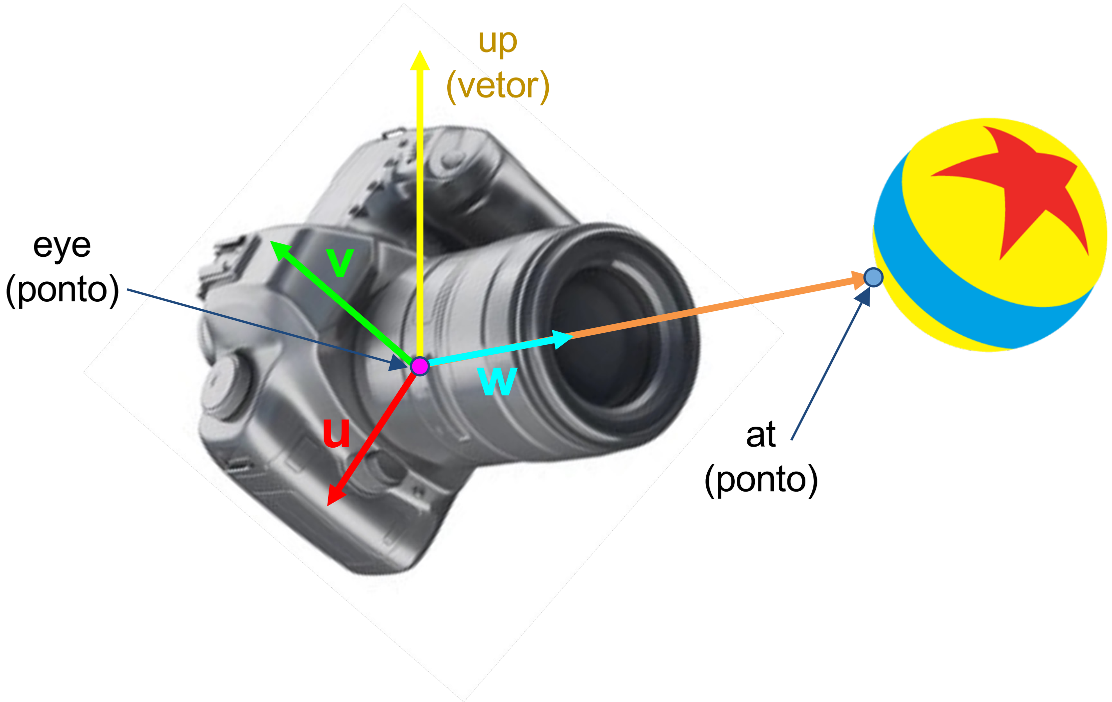
Insper

Identificando coordenadas ortonormais

$$w = \frac{\text{at - eye}}{|\text{at - eye}|}$$

$$u = \frac{w \times \text{up}}{|w \times \text{up}|}$$

$$v = \frac{u \times w}{|u \times w|}$$



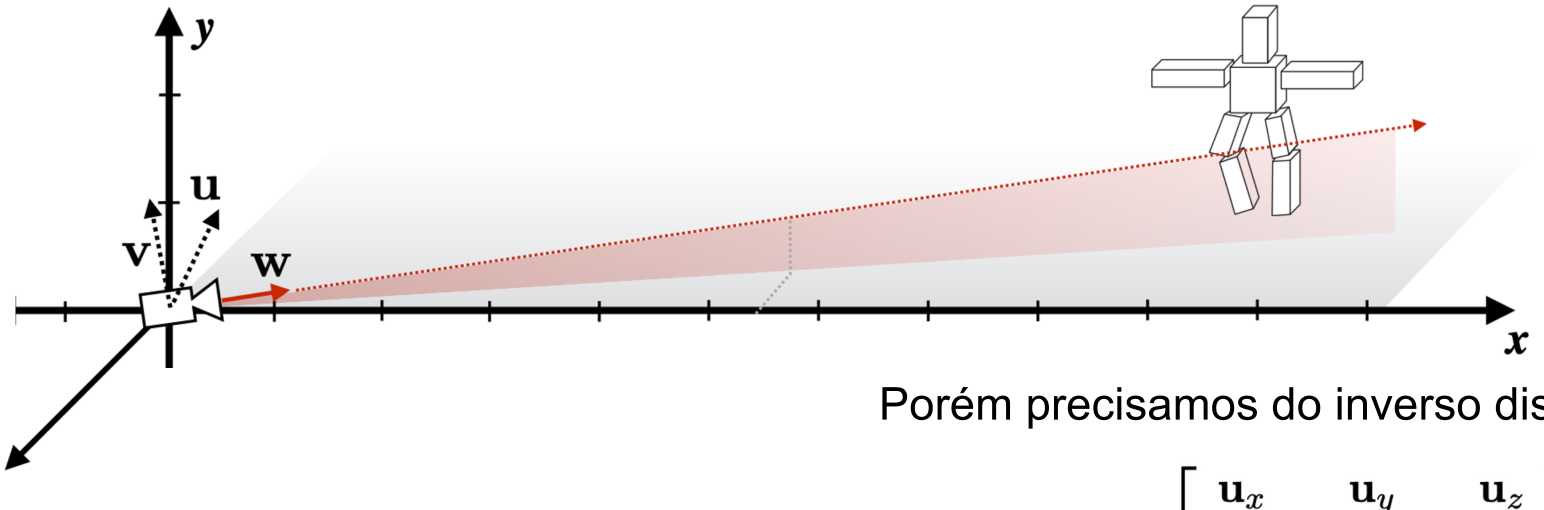
X é o produto vetorial

Insper

Câmera olhando para uma direção qualquer

Considere a câmera na origem olhando para uma direção w.

Qual transformação no sistema de coordenadas que rotaciona a câmera para estar olhando pelo eixo –Z?



Use uma base ortonormal para o W

A matriz de rotação R, mapeia o eixo x para u, o eixo y para v e o eixo z para -w

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{v}_x & -\mathbf{w}_x \\ \mathbf{u}_y & \mathbf{v}_y & -\mathbf{w}_y \\ \mathbf{u}_z & \mathbf{v}_z & -\mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

Porém precisamos do inverso disso:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \\ -\mathbf{w}_x & -\mathbf{w}_y & -\mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

Isso é mesmo a matriz inversa?

$$\mathbf{R}^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & -\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} & -\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{R}^T\mathbf{w} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} & -\mathbf{w}\cdot\mathbf{w}\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$$

Insper

Transformação de "Look-At"

A matriz do espaço da câmera para o espaço do mundo é uma mudança do sistema de coordenadas para o espaço (u, v, -w, e)

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & e_x \\ u_y & v_y & -w_y & e_y \\ u_z & v_z & -w_z & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação de "look-at" é o inverso da matriz acima:

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & e_x \\ u_y & v_y & -w_y & e_y \\ u_z & v_z & -w_z & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ -w_x & -w_y & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Inversa de Bases Ortogonais

2 Matrizes ortogonais

Dada uma matriz quadrada M sua *transposta*, denotada M^t, é uma matriz cujas linhas são as colunas de M, ou seja, se $M = (a_{i,j})$ e $M^t = (b_{i,j})$ se verifica $b_{j,i} = a_{i,j}$.

Definição 1 (Matriz ortogonal). *Uma matriz M é* ortogonal *se é inversível e $M^{-1} = M^t$, ou seja,*

$$MM^t = M^tM = Id.$$

Observe que se M é ortogonal então sua transposta também é ortogonal (veja que $(M^t)^{-1} = M$). Portanto, a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Propriedade 2.1. *Uma matriz ortogonal é uma matriz cujas colunas (ou linhas) formam uma base ortonormal (de fato, isto é uma definição geométrica alternativa de matriz ortogonal).*

Prova: Para simplificar a notação veremos a afirmação para matrizes 2×2. Seja M uma matriz ortogonal cujos vetores coluna são $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.

$$Id = M^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a + b\,b & a\,c + b\,d \\ a\,c + b\,d & c\,c + d\,d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$u \cdot u = v \cdot v = 1, \quad u \cdot v = 0,$$

e u e v formam uma base ortonormal. □

De fato, o argumento anterior mostra o seguinte:

Propriedade 2.2. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.*

Multiplicando MM^t, v. obterá a mesma afirmação para os vetores linha:

Propriedade 2.3. *Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores linha formam uma base ortonormal.*

Observação 1. *O fato anterior implica que a matriz de uma rotação ou de um espelhamento (na base canônica) é uma matriz ortogonal. Também implica que a matriz de uma projeção não é ortogonal (em nenhuma base).*

Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^{T}$).

Fonte: http://www.mat.puc-rio.br/cursos/MAT1200/roteiros//aula21b.pdf

Insper

Inversas do produto de duas matrizes

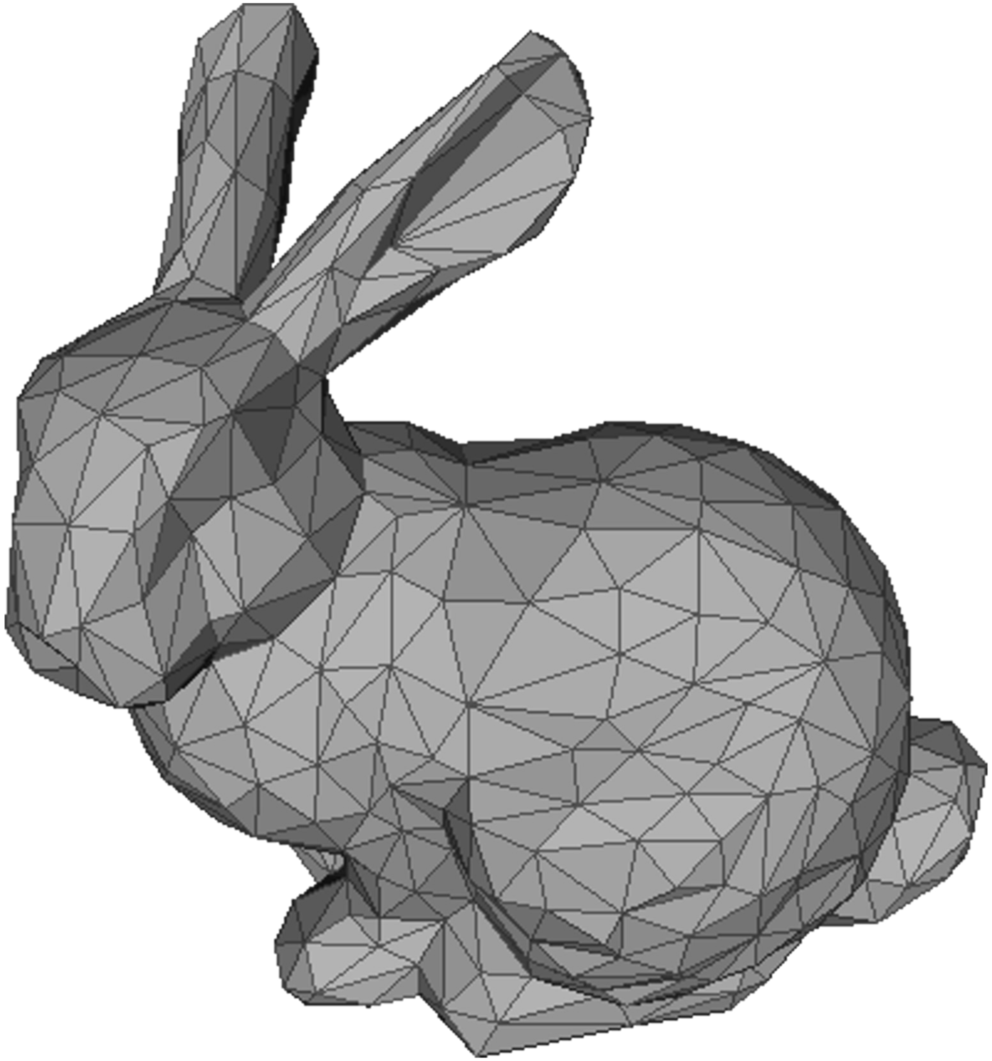
A inversa do produto de A por B é igual ao produto das matrizes inversa de B pela inversa de A

$$(T \cdot R)^{-1} = R^{-1} \cdot T^{-1}$$

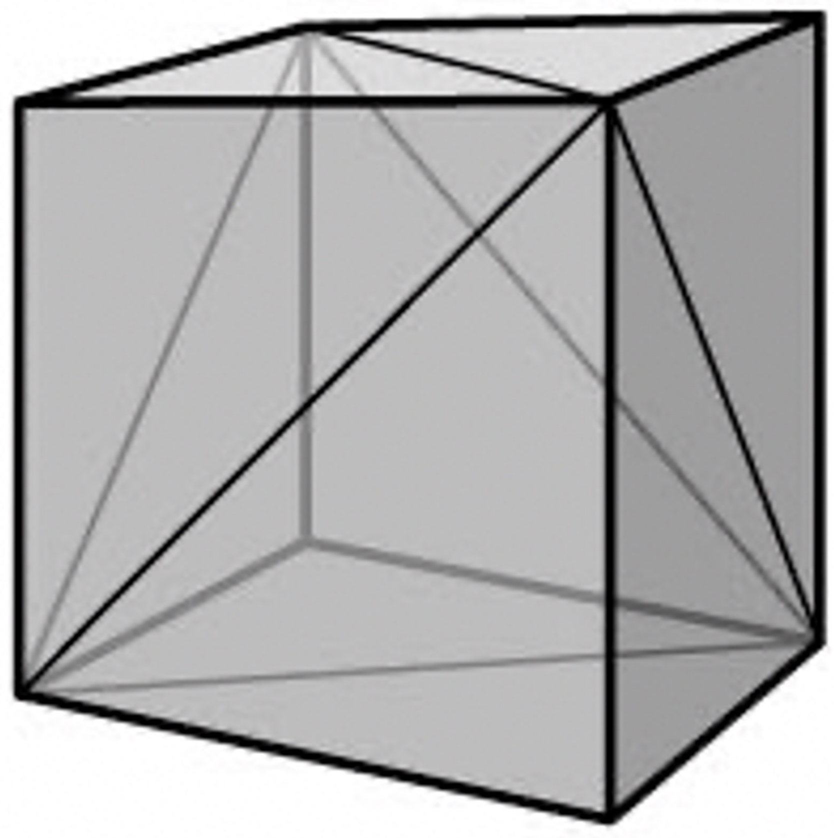
Computação Gráfica

Malhas Poligonais

Malha de Triângulos



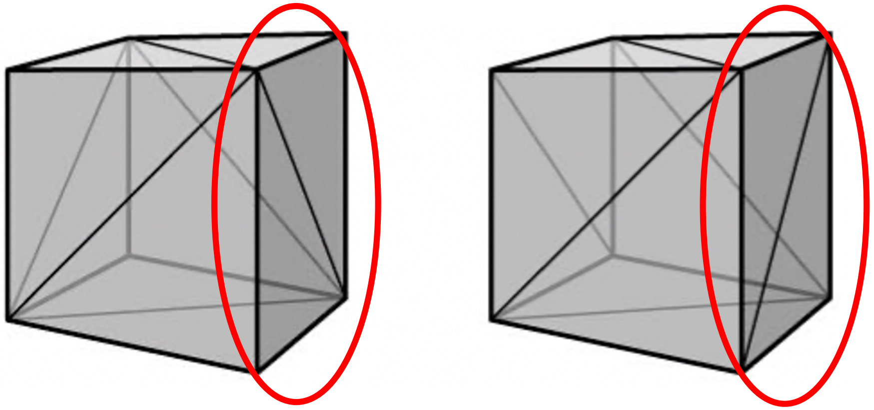
Pequena Malha de Triângulos



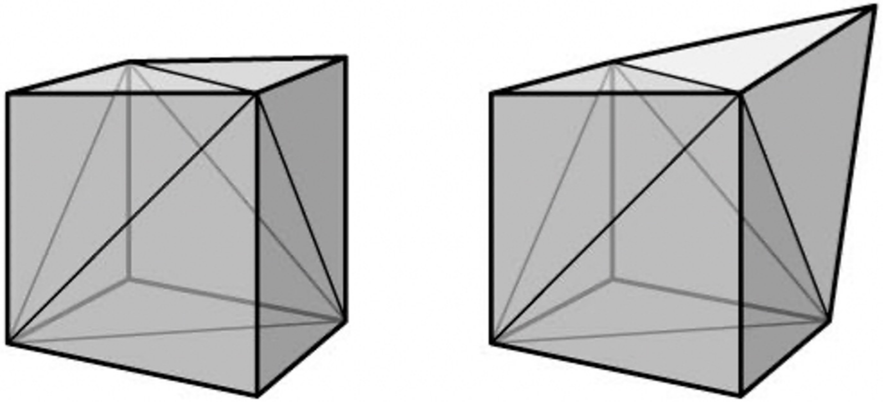
8 vértices, 12 triângulos

Topologia versus Geometria

Mesma geometria, diferente topologia da malha

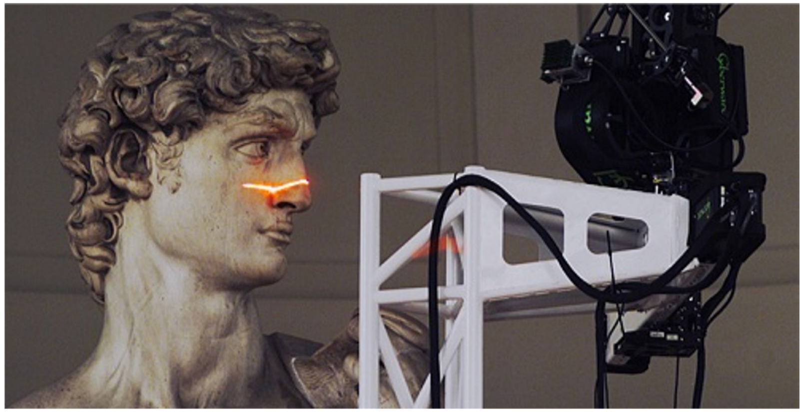


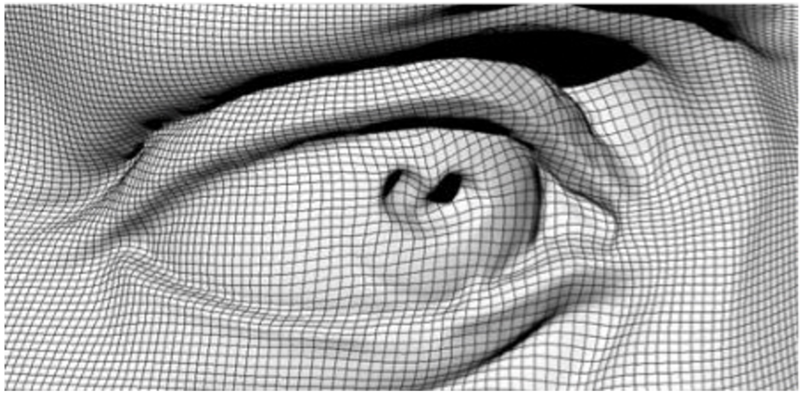
Mesma topologia, diferente geometria



Grande Malha de Trângulos

David
Digital Michelangelo Project
28.184.526 vértices
56.230.343 triângulos



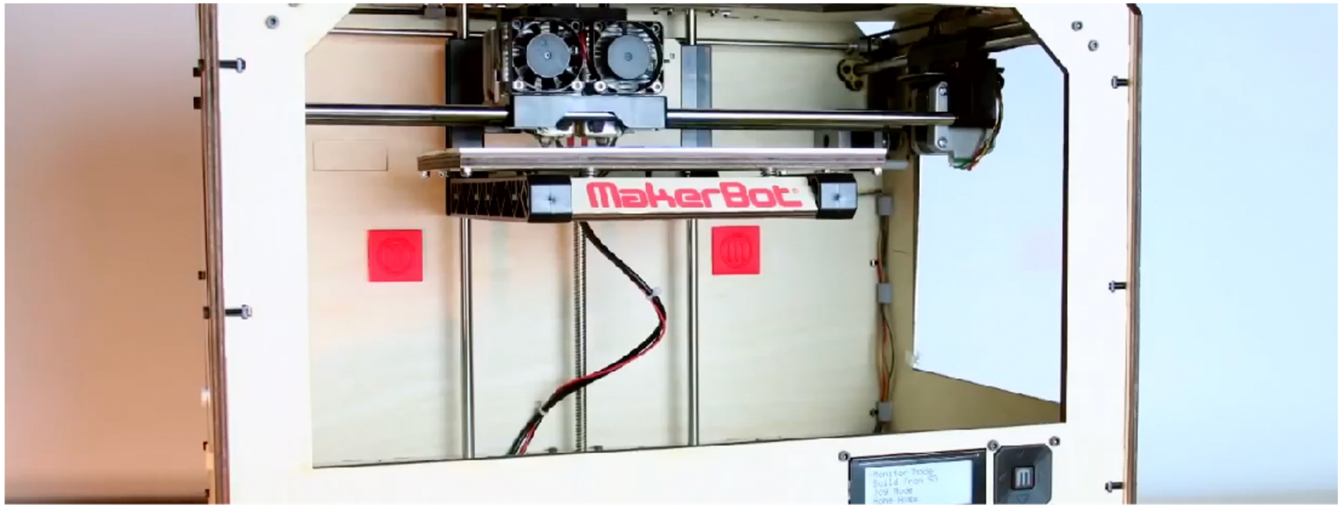


Malha Gigantesca de Triângulos

Insper

Processamento Digital de Geometria

Scanner 3D

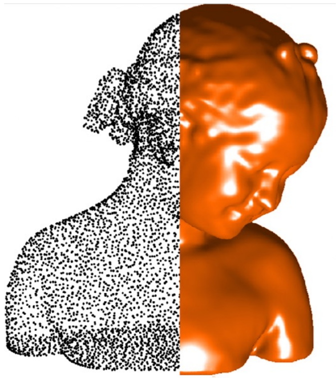


Impressão 3D

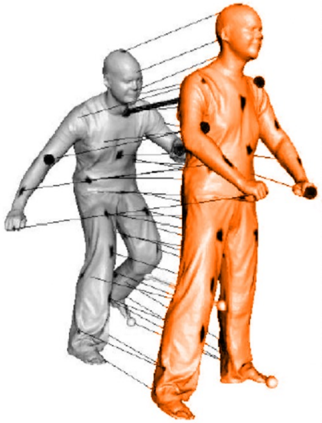
Pipeline de Processamento Geométrico

Escaneamento → Processamento → Impressão

Mais Tarefas de Processamento Geométrico

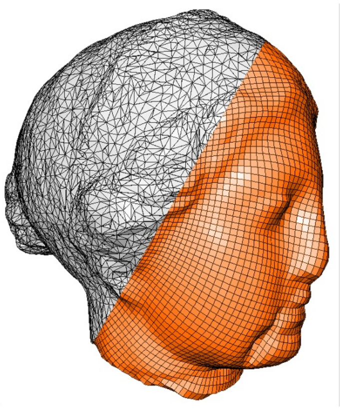


Reconstrução 3D



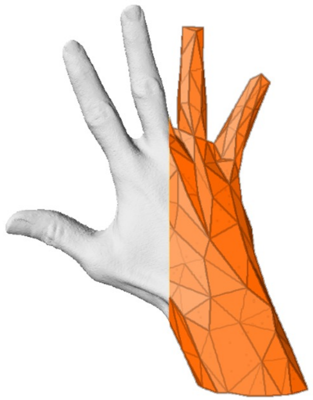
Analise de Formas

Filtragem



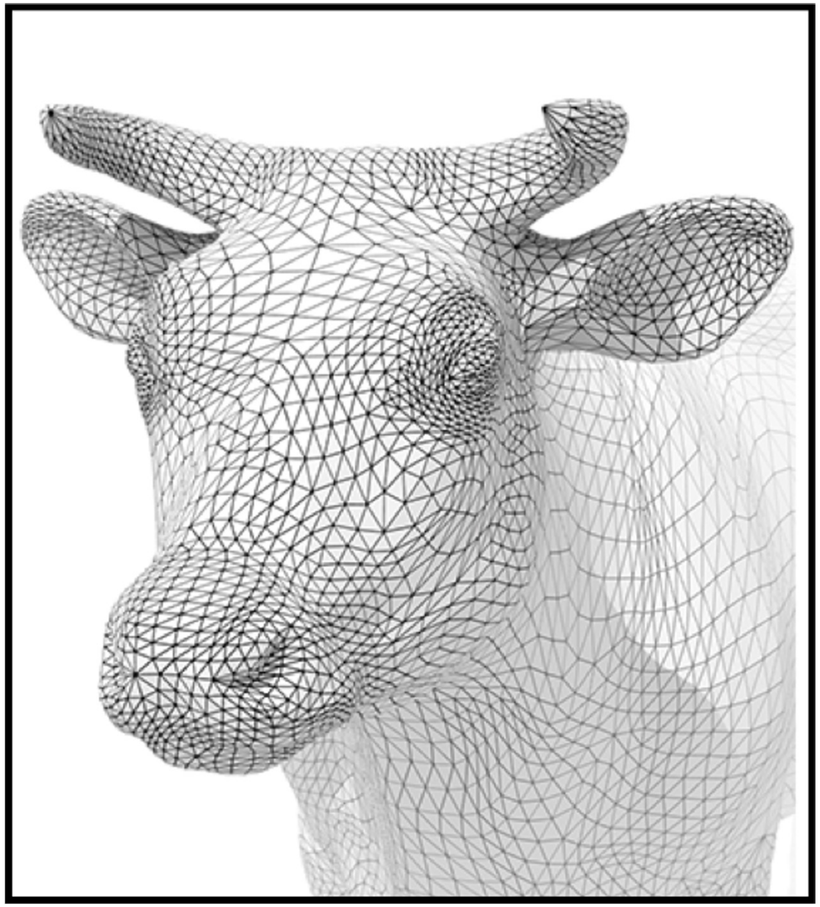
Remeshing

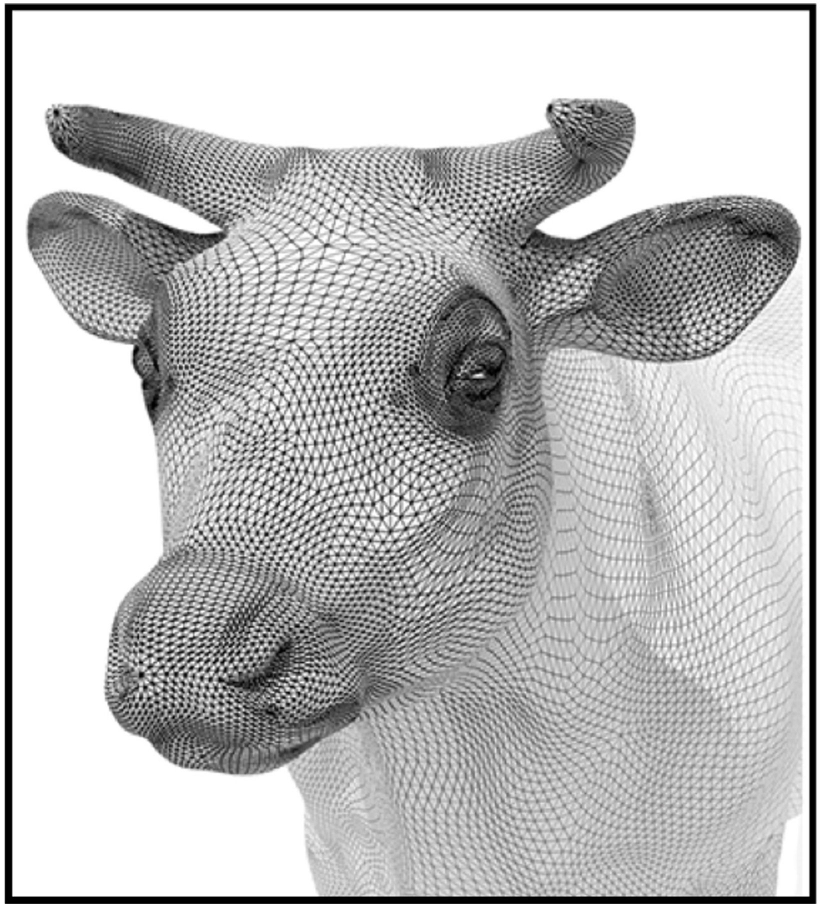
Parametrização



Compressão

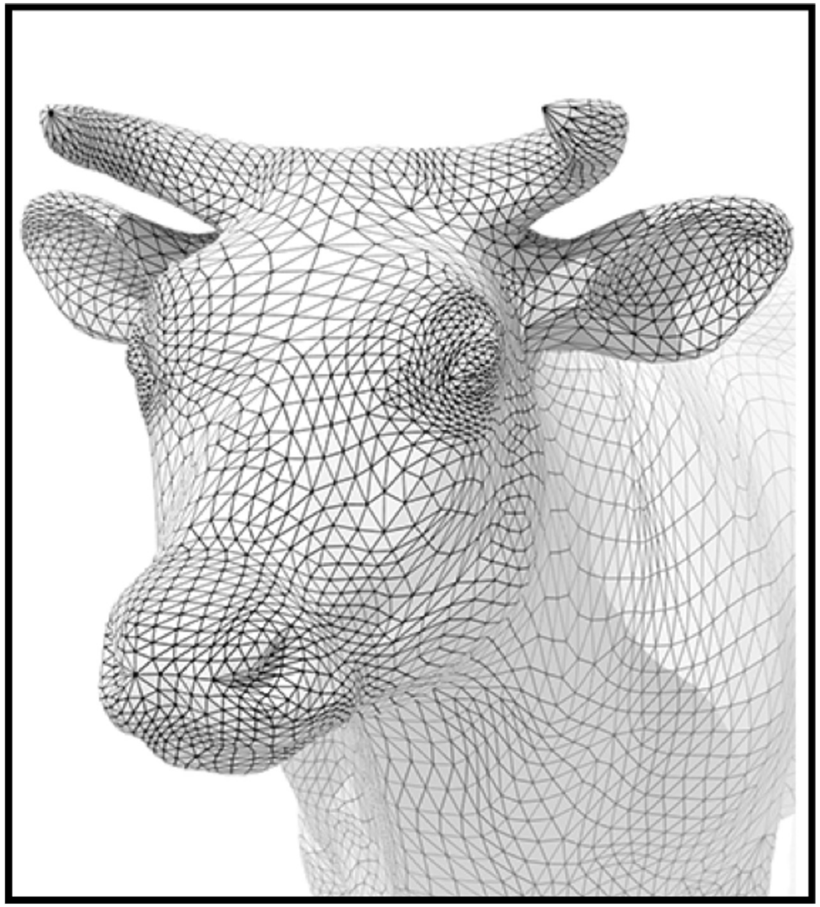
Upsampling (Refinando Malha)

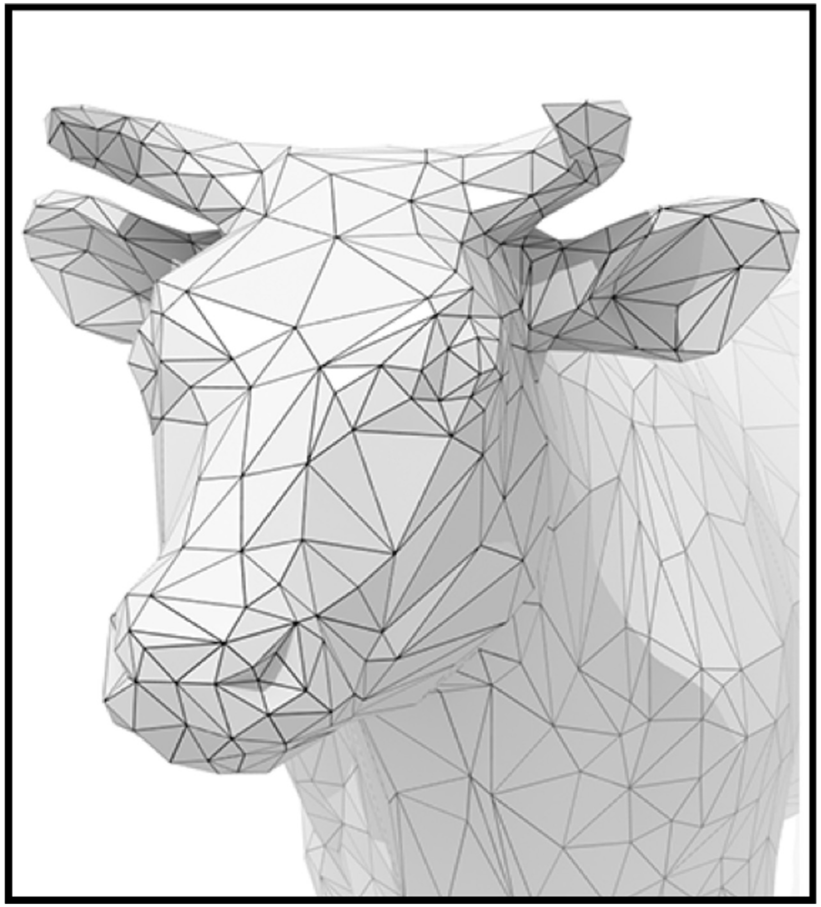




Subdivisão : melhorando resolução interpolando os pontos

Downsampling (Simplificando a Malha)

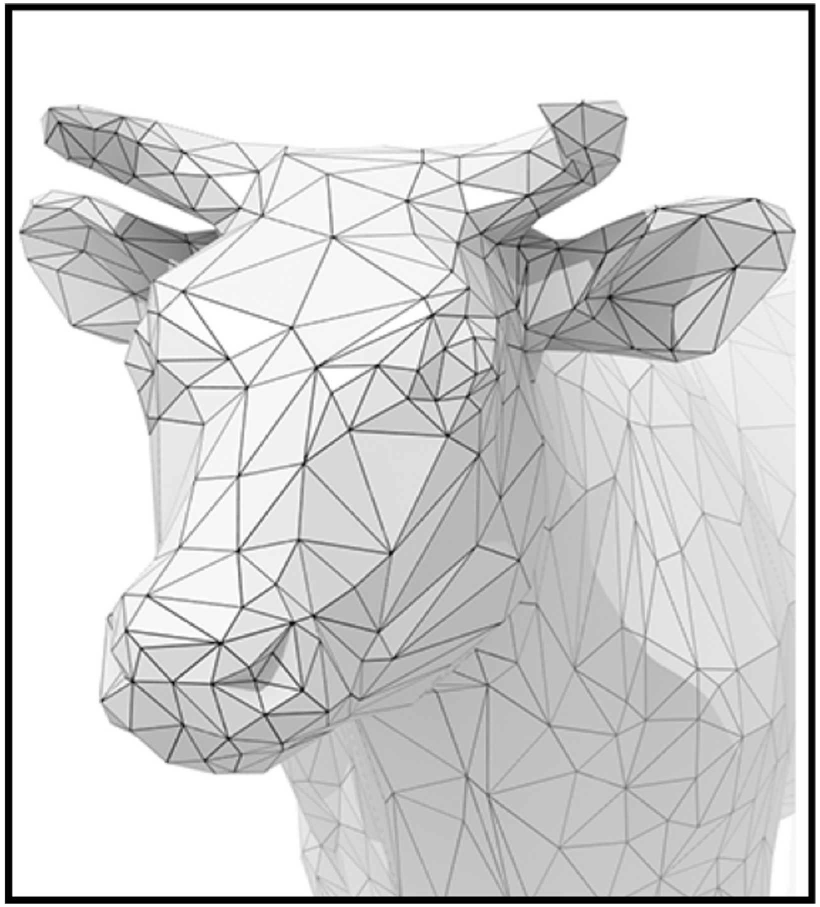


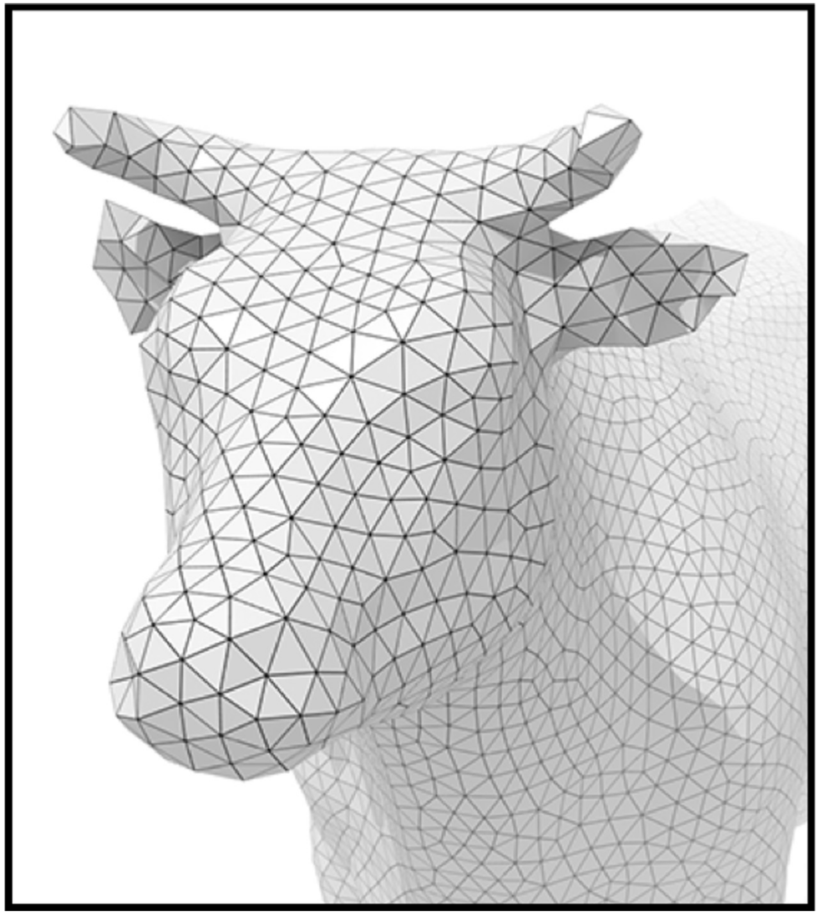


Diminuindo Pontos : tentando manter a forma original

Insper

Homogeneizando Malha

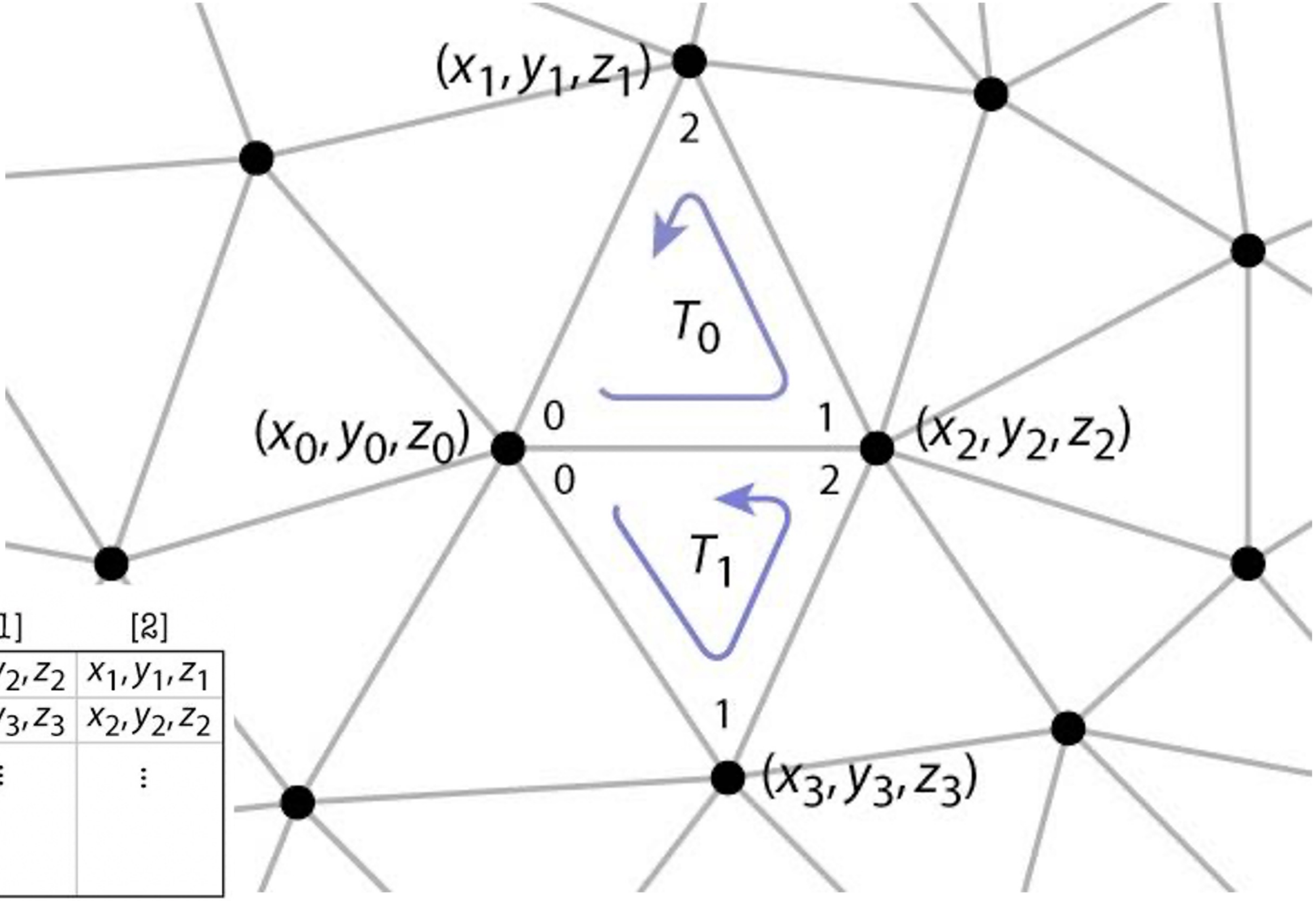




Ajustando Pontos para melhorar qualidade (possivelmente)

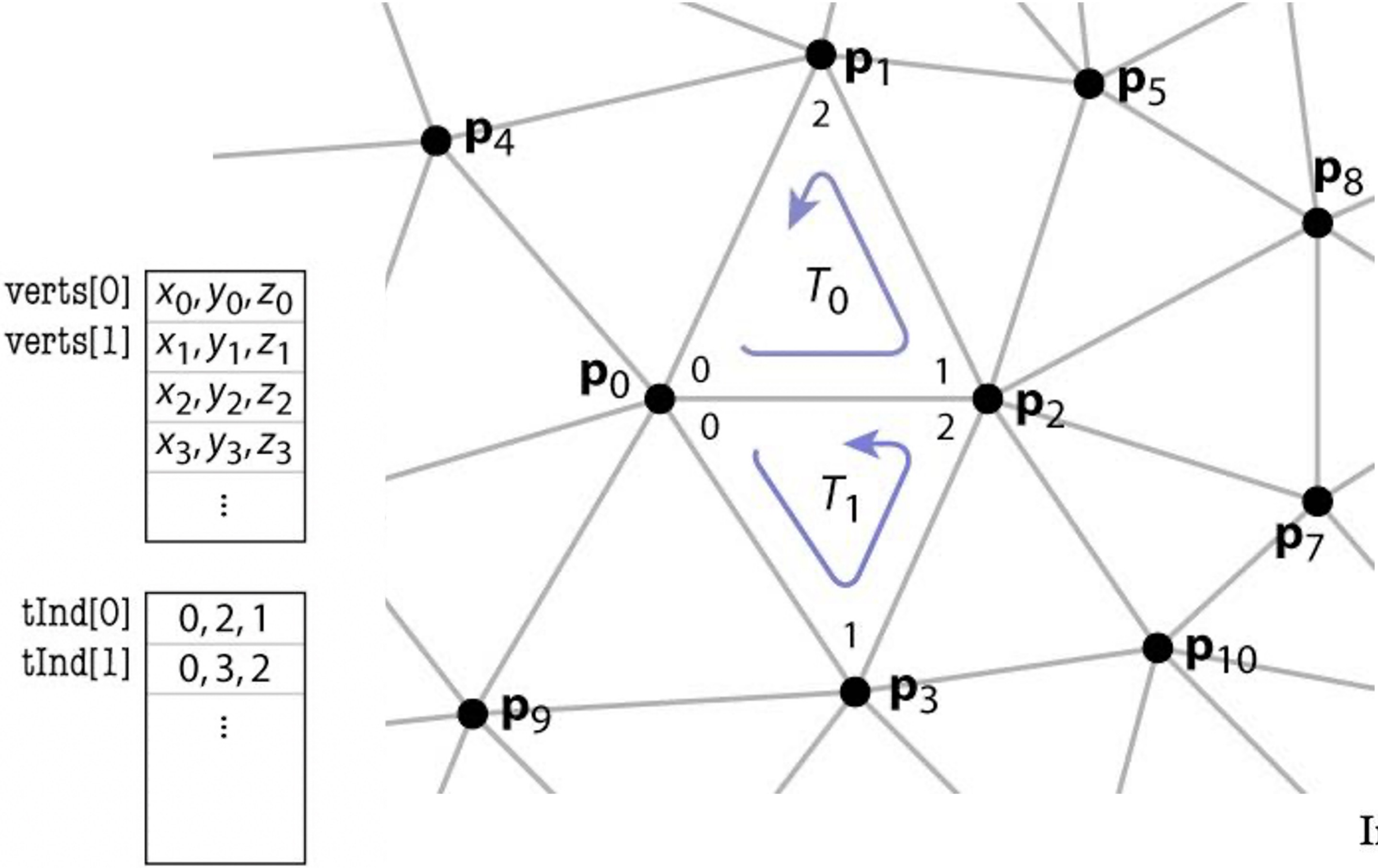
Insper

Lista de Triângulos



	[0]	[1]	[2]
tris[0]	x_0, y_0, z_0	x_2, y_2, z_2	x_1, y_1, z_1
tris[1]	x_0, y_0, z_0	x_3, y_3, z_3	x_2, y_2, z_2
	⋮	⋮	⋮

Lista de Pontos e sua conexão por índices



Comparação

Triângulos

+ Simples

- Muita Informação Redundante

Pontos e Triângulos

+ Compartilhamento de vértices reduz consumo de memória

+ Garante integridade da malha

(alterar um vértice, altera para todos os polígonos)

Informação da Topologia da Malha

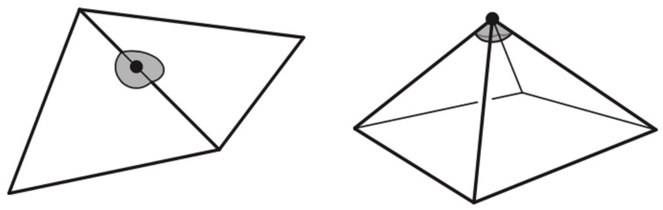
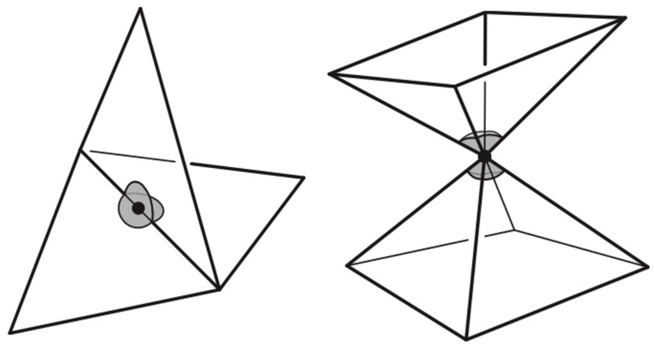
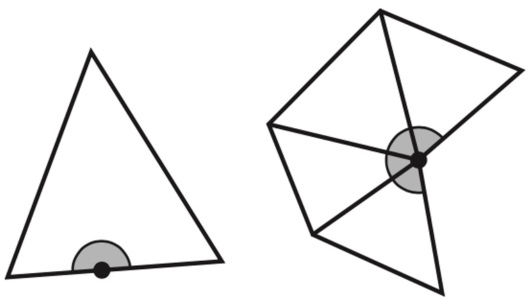
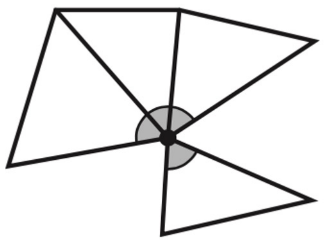
Aplicações:

- Acesso aos vizinhos em tempo constante
  ex: cálculo de normais da superfície, subdivisões
- Edição da Geometria
  ex: adicionando/removendo vértices, faces, arestas, etc

Solução: Estrutura de Dados Topológicas

Validade Topológica: Manifold

Definição: um manifold 2D é uma superfície que, quando cortada em qualquer ponto com uma pequena esfera, sempre produz um (e somente um) disco contínuo (ou meio disco nas bordas).

Manifold	**Não Manifold**
	
nas bordas	nas bordas
	

Insper

Validade Topológica: Manifold

Definição: um manifold 2D é uma superfície que, quando cortada em qualquer ponto com uma pequena esfera, sempre produz um disco (ou meio disco nas bordas).

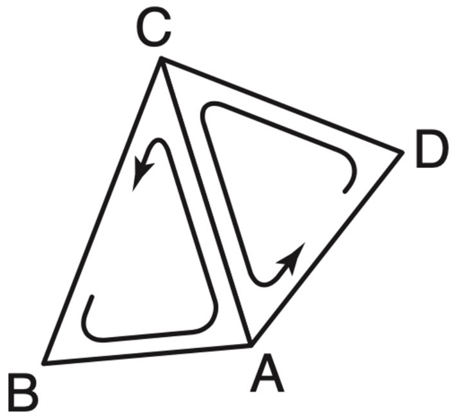
Se a malha é manifold, podemos contar com propriedades úteis:

- Uma aresta conecta com exatamente duas faces
- Uma aresta conecta com exatamente dois vértices
- Uma face consiste em um contorno de arestas e vértices
- Um vértice consiste em um contorno de arestas e faces

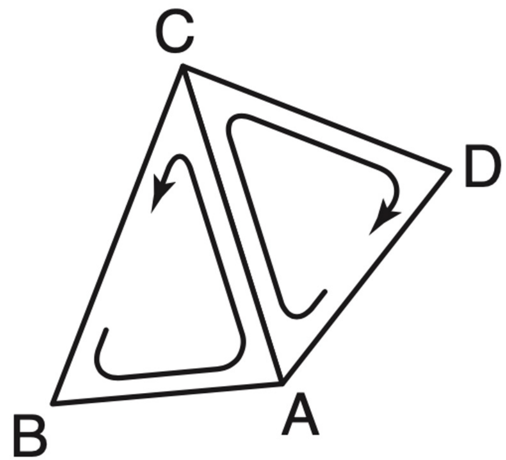
A fórmula do poliedro de Euler é válida: #f - #a + #v = 2
(para uma superfície topologicamente equivalente a uma esfera)
(Verifique em um cubo: 6 - 12 + 8 = 2)

Validade Topológica: Consistência da Orientação

Orientação consistente

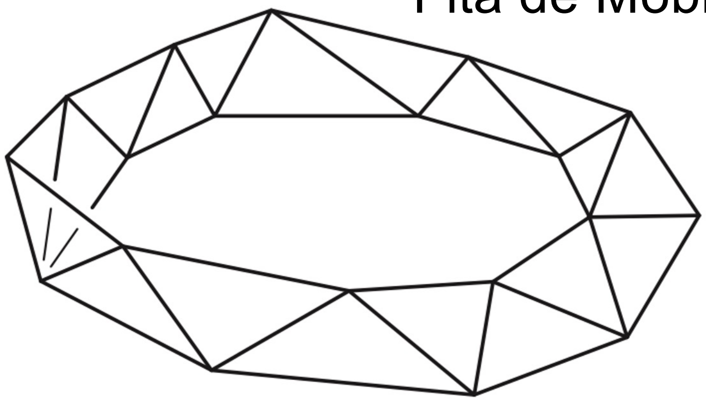


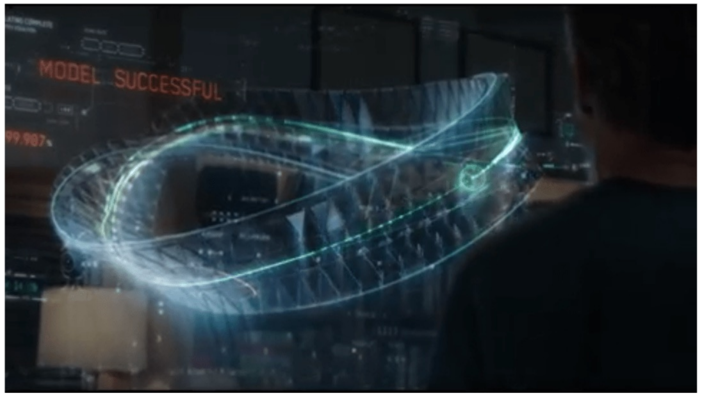
Orientação inconsistente



Não orientável

Fita de Möbius

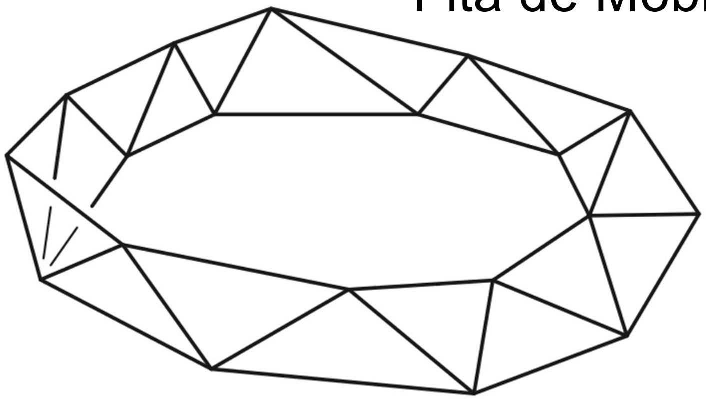


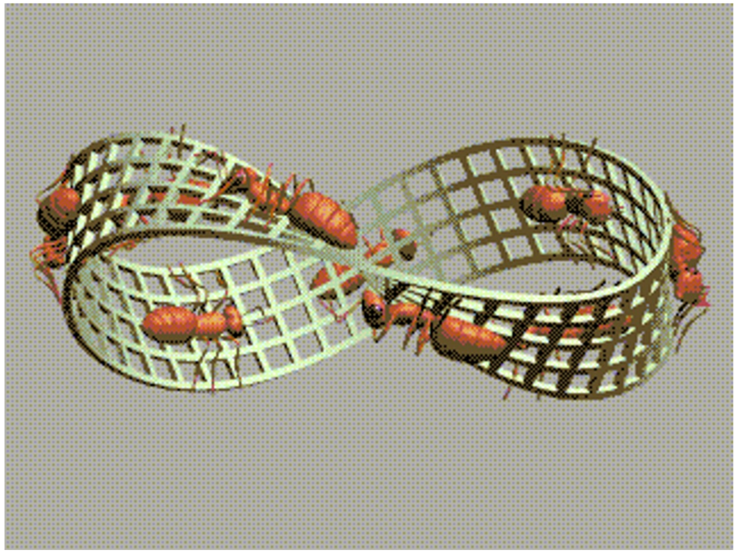


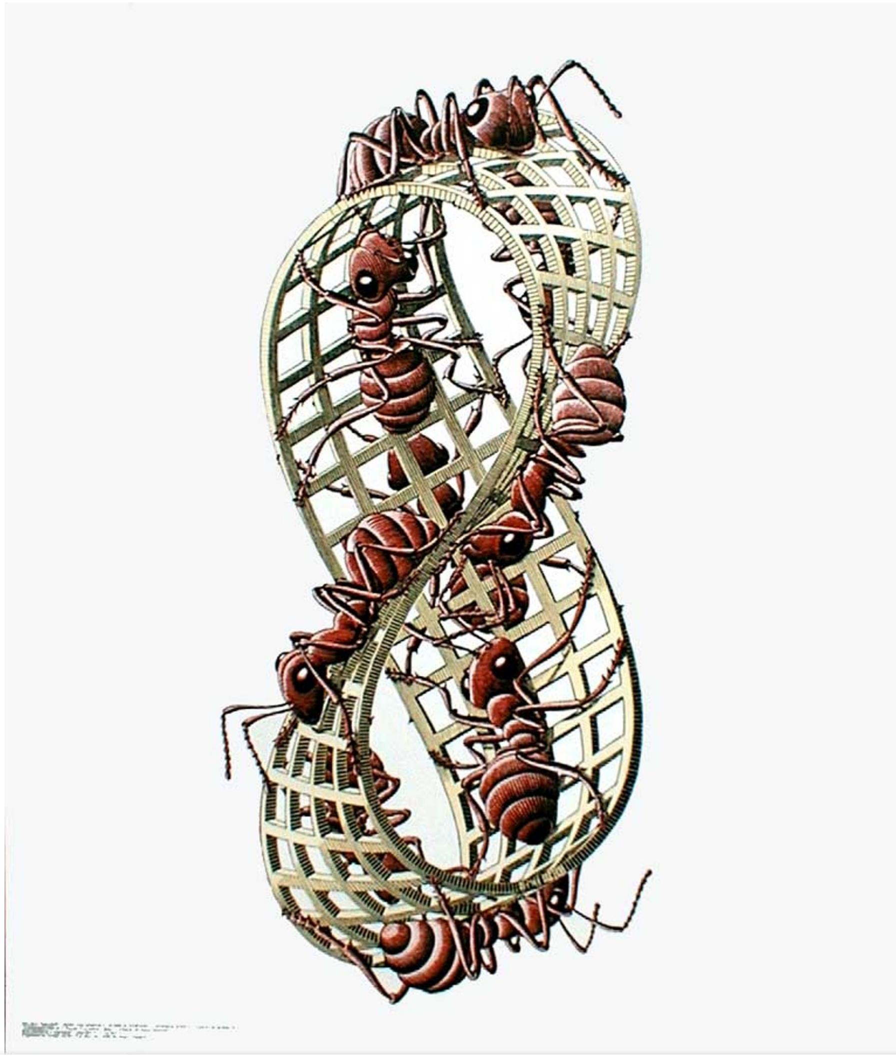
Vingadores: Ultimato

Validade Topológica: Consistência da Orientação

Fita de Möbius







M. C. Escher - Möbius Strip II (1963)

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>