

Computação Gráfica

Aula 5: Sistema de Coordenadas

Antes de Começarmos

Conceitos matemáticos da aula de hoje:

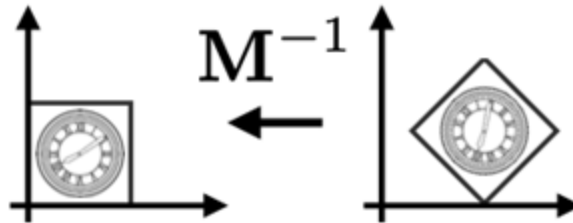
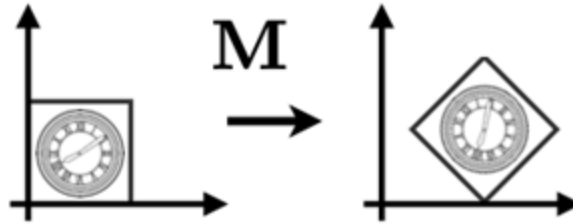
Matriz Inversa

Mudança de Base / Mudança de Sistema de Coordenadas

Transformações Inversas

$$M^{-1}$$

M^{-1} é a transformada inversa de M , tanto no sentido algébrico, como geométrico.



Transformações Inversas

Se M é a matriz de uma transformação geométrica, então a matriz de sua transformação inversa é M^{-1} (matriz inversa).

Lembre-se que

$$M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$$

Sendo:

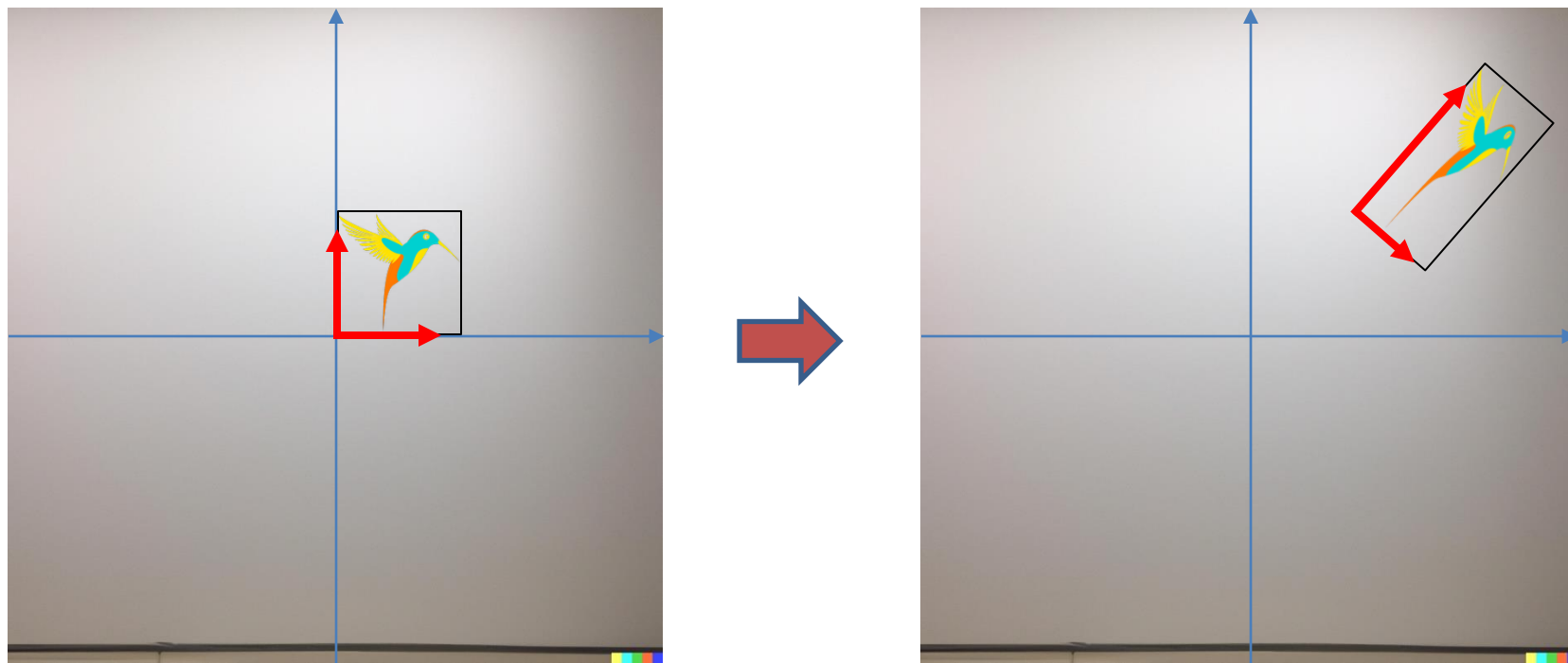
Ums

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zeros

Exemplo para pensar

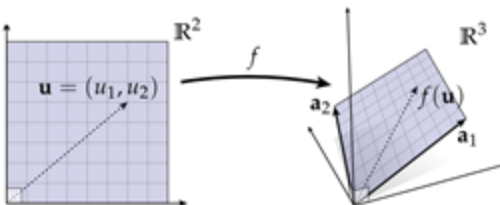
Quero pegar esse adesivo e reposicioná-lo em outra forma e local da minha parede.



Podemos pensar nisso como uma mudança de sistema de coordenadas =
mudança da base + mudança da origem do sistema

Mudança de Base

Eventualmente, podemos realizar mudanças do plano para o espaço:

$$f(\mathbf{u}) = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2$$


Neste caso u_1 e u_2 são coordenadas 2D e \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 vetores 3D

Os vetores da transformação podem ser codificados numa matriz

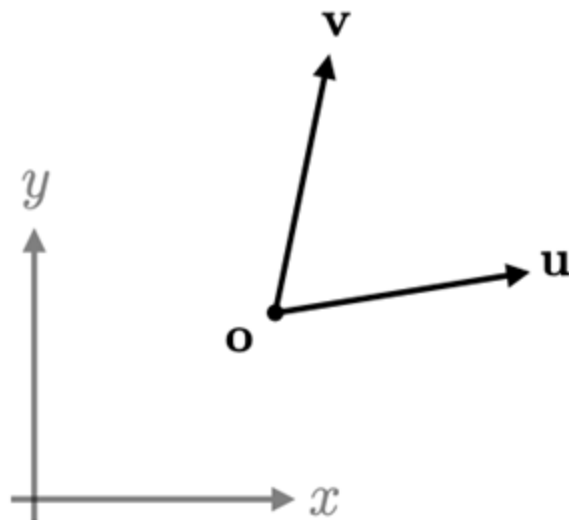
$$A := \begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix}$$

Uma multiplicação de matrizes vai realizar o cálculo desejado

$$\begin{bmatrix} a_{1,x} & a_{2,x} \\ a_{1,y} & a_{2,y} \\ a_{1,z} & a_{2,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,x}u_1 + a_{2,x}u_2 \\ a_{1,y}u_1 + a_{2,y}u_2 \\ a_{1,z}u_1 + a_{2,x}u_2 \end{bmatrix} = u_1 \mathbf{a}_1 + u_2 \mathbf{a}_2$$

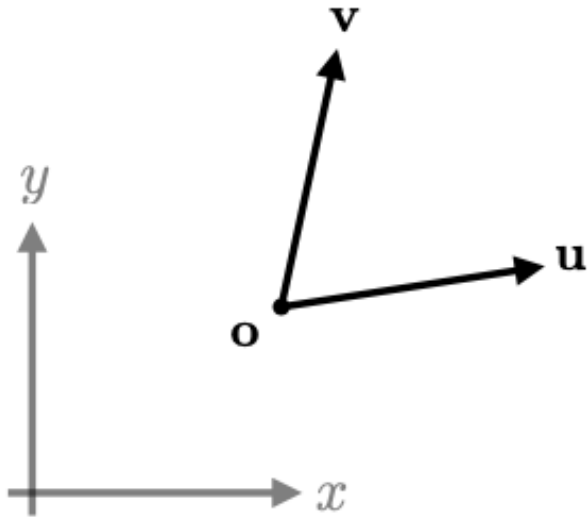
Sistema de Coordenadas

Um novo sistema de coordenadas é definido por uma origem (ponto) e um conjunto de eixos (vetores linearmente independentes). Em geral usamos vetores unitários para definir o sistema de coordenadas.



Dadas as coordenadas no sistema de referência (o, u, v) , qual é a transformação para as coordenadas em (x, y) ?

Matriz de mudança de sistema de coordenadas



As colunas da matriz são definidas pelo sistema de referência nas coordenadas no mundo.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & o_x \\ u_y & v_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

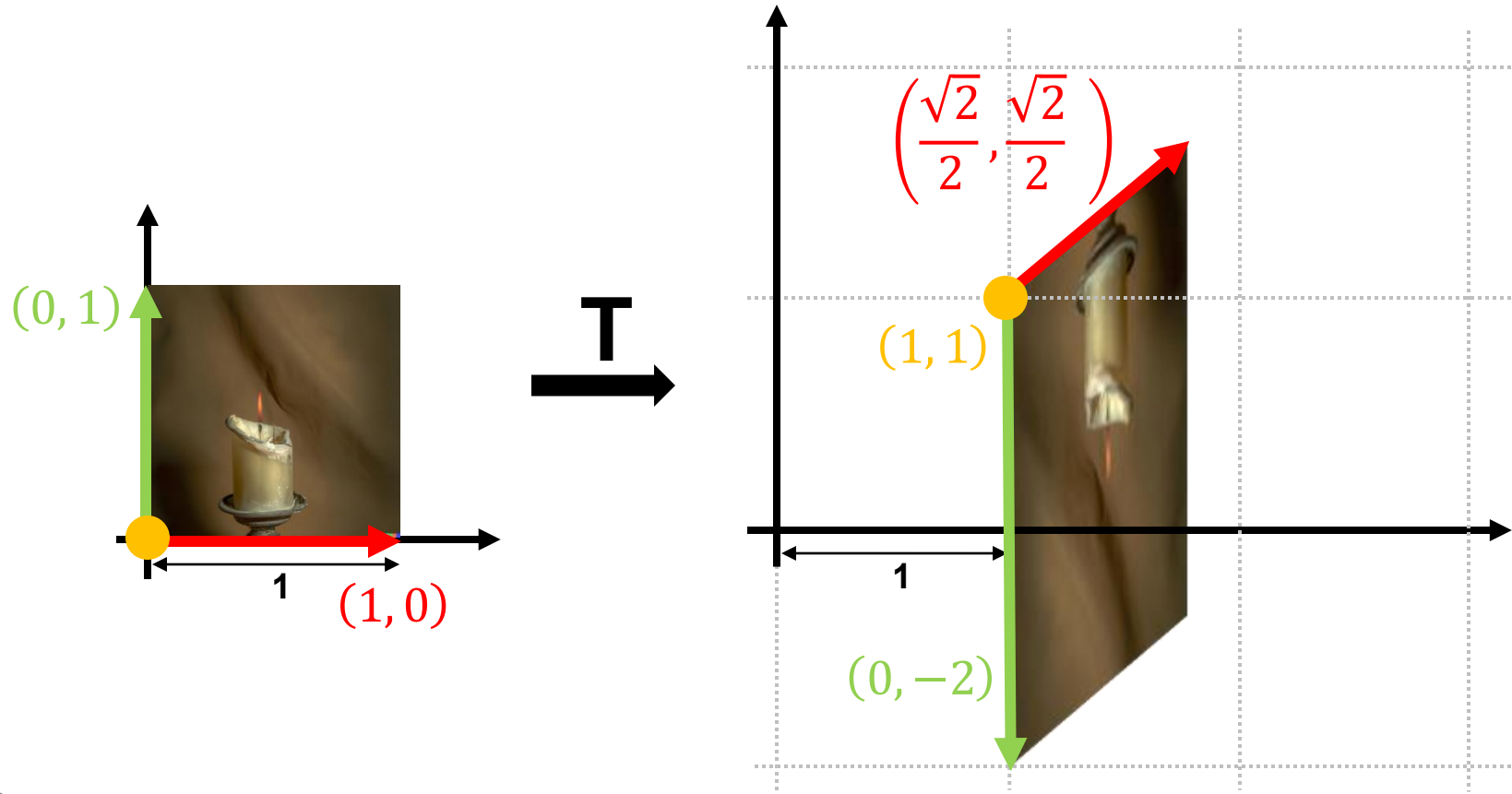
Mudança de sistema de coordenadas 3D

A mudança do sistema de coordenadas para 3D é realizada com uma matriz 4x4.

$$f(u, v, w, o) = \begin{bmatrix} u & v & w & o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x & o_x \\ u_y & v_y & w_y & o_y \\ u_z & v_z & w_z & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

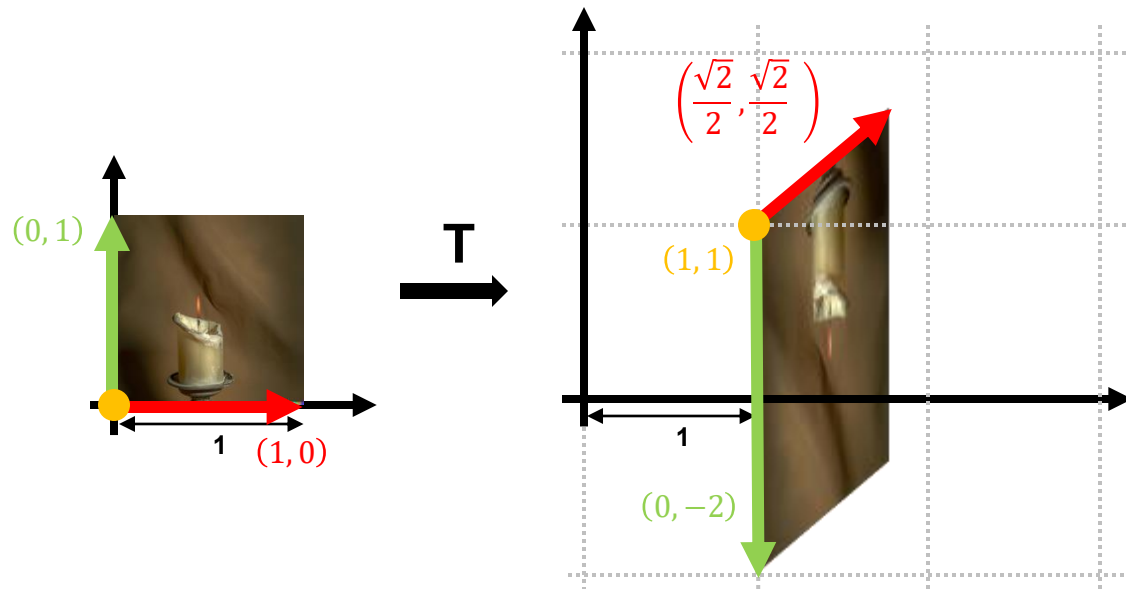
Sistema de Coordenadas : Exemplo

Escreva uma matriz T representando essa transformação:



Sistema de Coordenadas : Exemplo

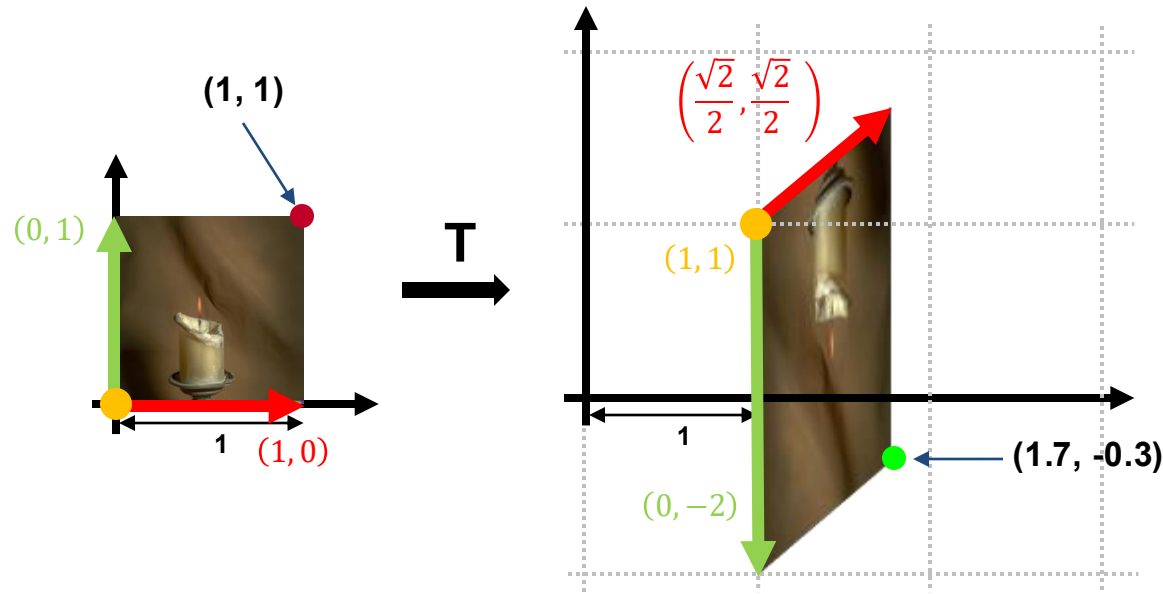
Escreva uma matriz T representando essa transformação:



$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

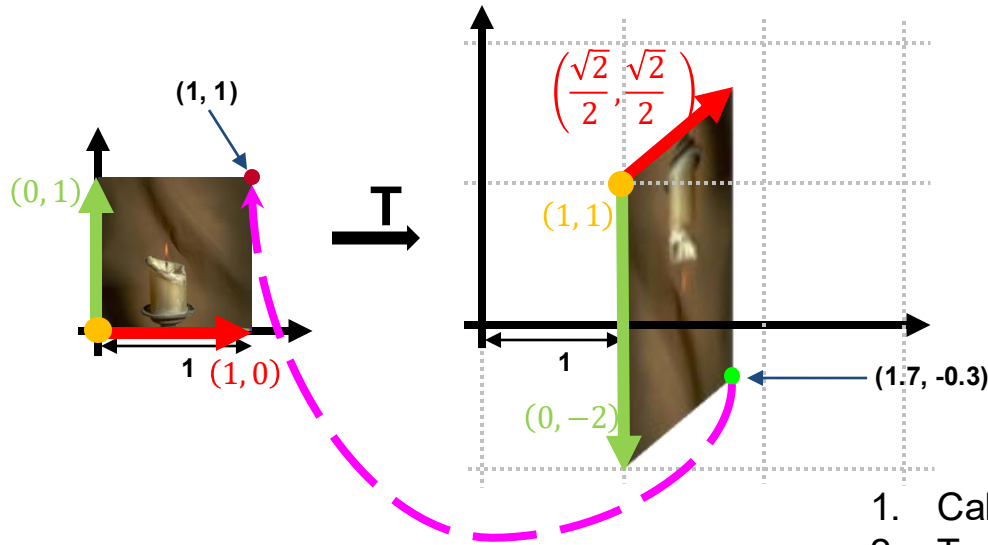
Sistema de Coordenadas : Exemplo



Vamos testar com o ponto $(1, 1)$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo



E se quisermos fazer o Inverso?

Matriz Inversa

1. Calcule o determinante da matriz.
2. Transponha a matriz original.
3. Calcule o determinante de cada sub matriz.
4. Crie a matriz de cofatores.
5. Divida cada termo da matriz adjunta pela determinante.

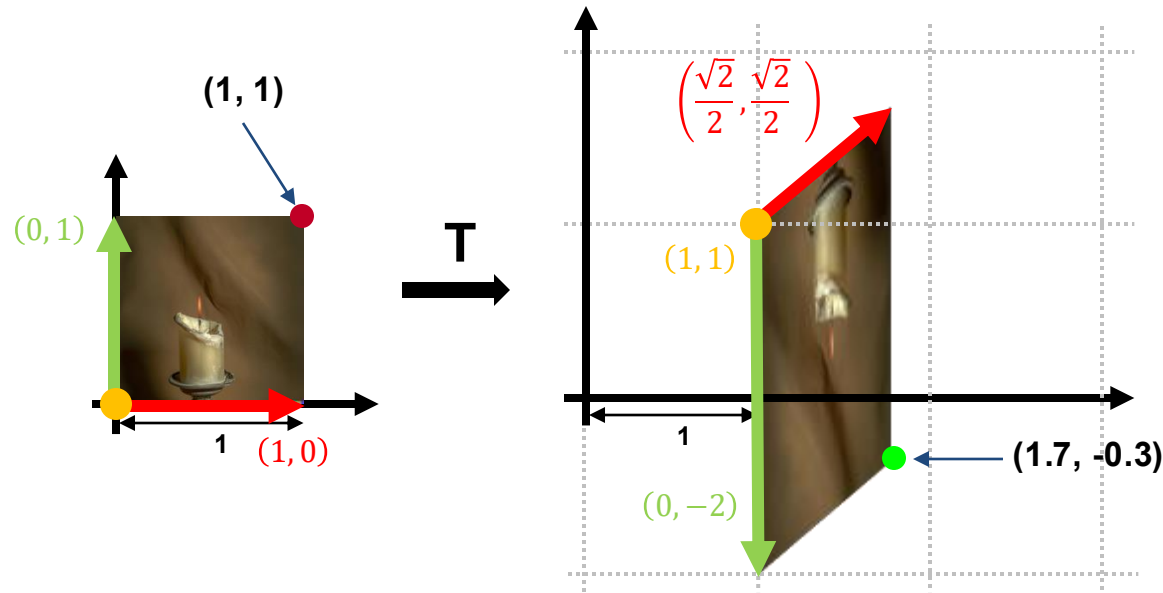
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo

Vamos testar:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistema de Coordenadas : Exemplo



$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Do espaço do mundo (World) para o espaço da câmera (View)

Vamos transformar do **espaço do mundo** para o **espaço da câmera**.

Câmera (View)



Mundo (World)

Por exemplo:

Um mesmo ponto P.

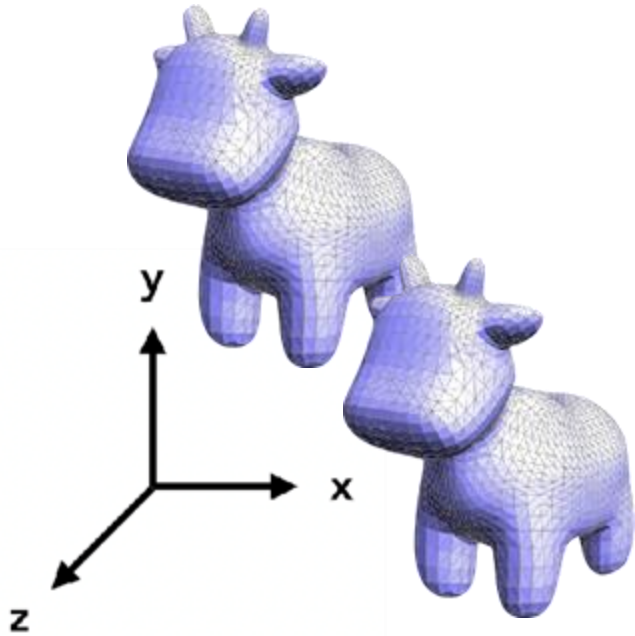
Tem valor:

$P = (0, 0, 4)_w$ no espaço do mundo.

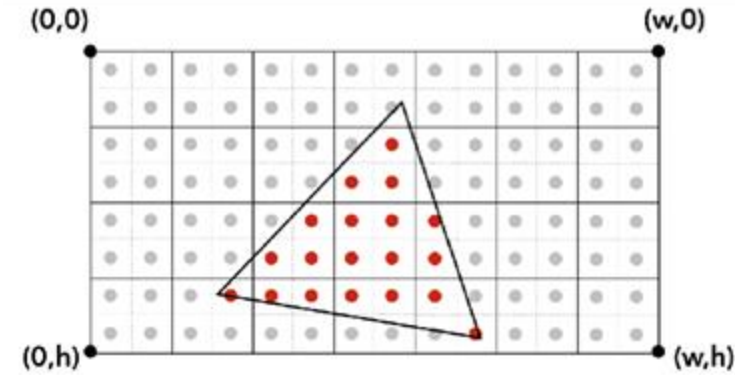
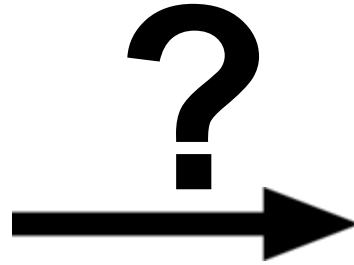
Tem valor:

$P = (0, -1, 1)_v$ no espaço da câmera.

Transformações para Visualização e Perspectiva

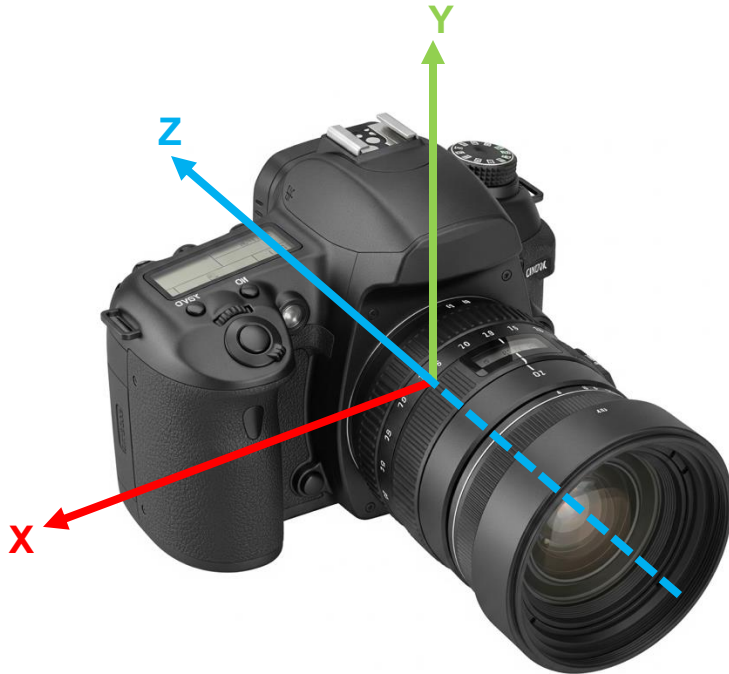


Modelando a cena em
coordenadas do mundo 3D
(*world Space*)



Rasterização em
coordenadas da tela em 2D
(*Screen Space*)

Espaço de Coordenadas da Câmera (View)



Usaremos esta convenção para o sistema de coordenadas padrão de câmera:

- câmera localizada na origem
- olhando pelo eixo z negativo
- o vetor vertical é o eixo y
- eixo x
 - ortogonal a y e z
 - apontando para direita

Espaço de Coordenadas da Câmera (View)

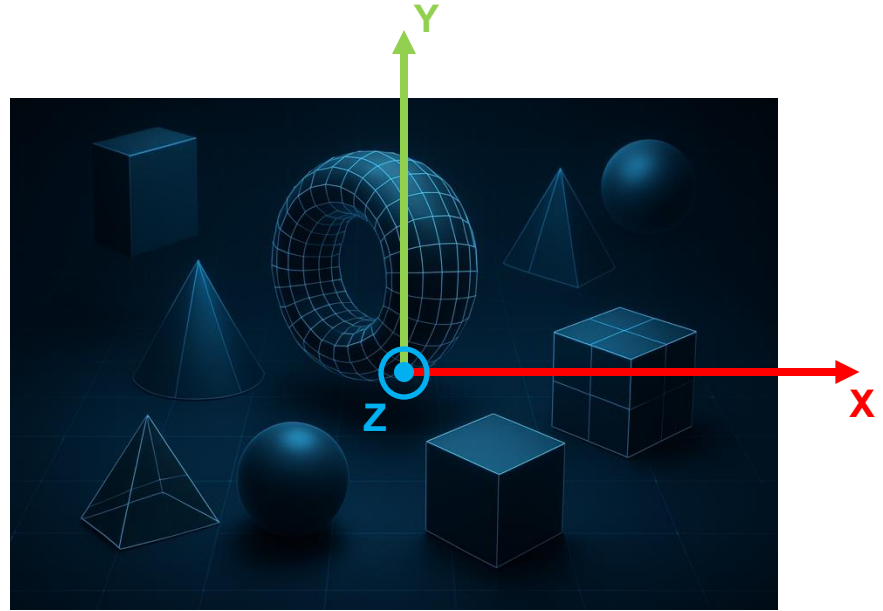
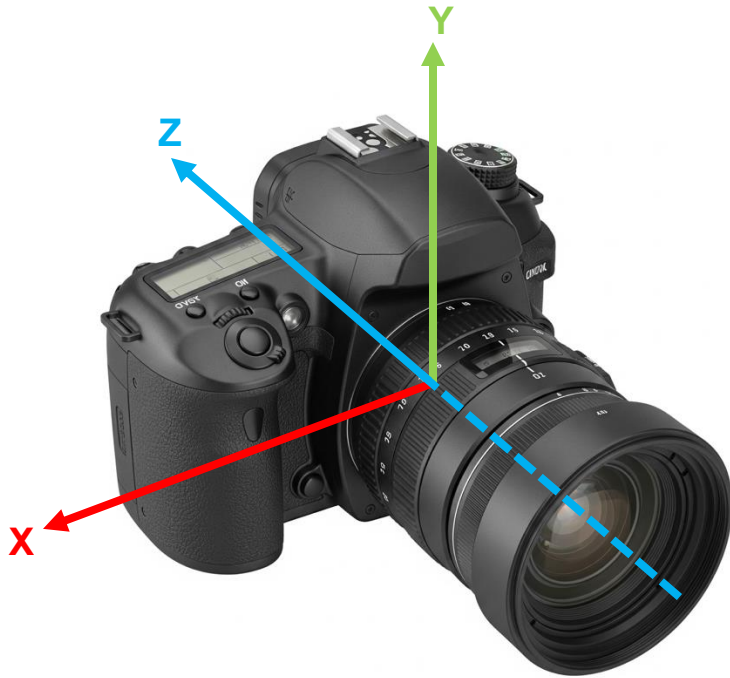
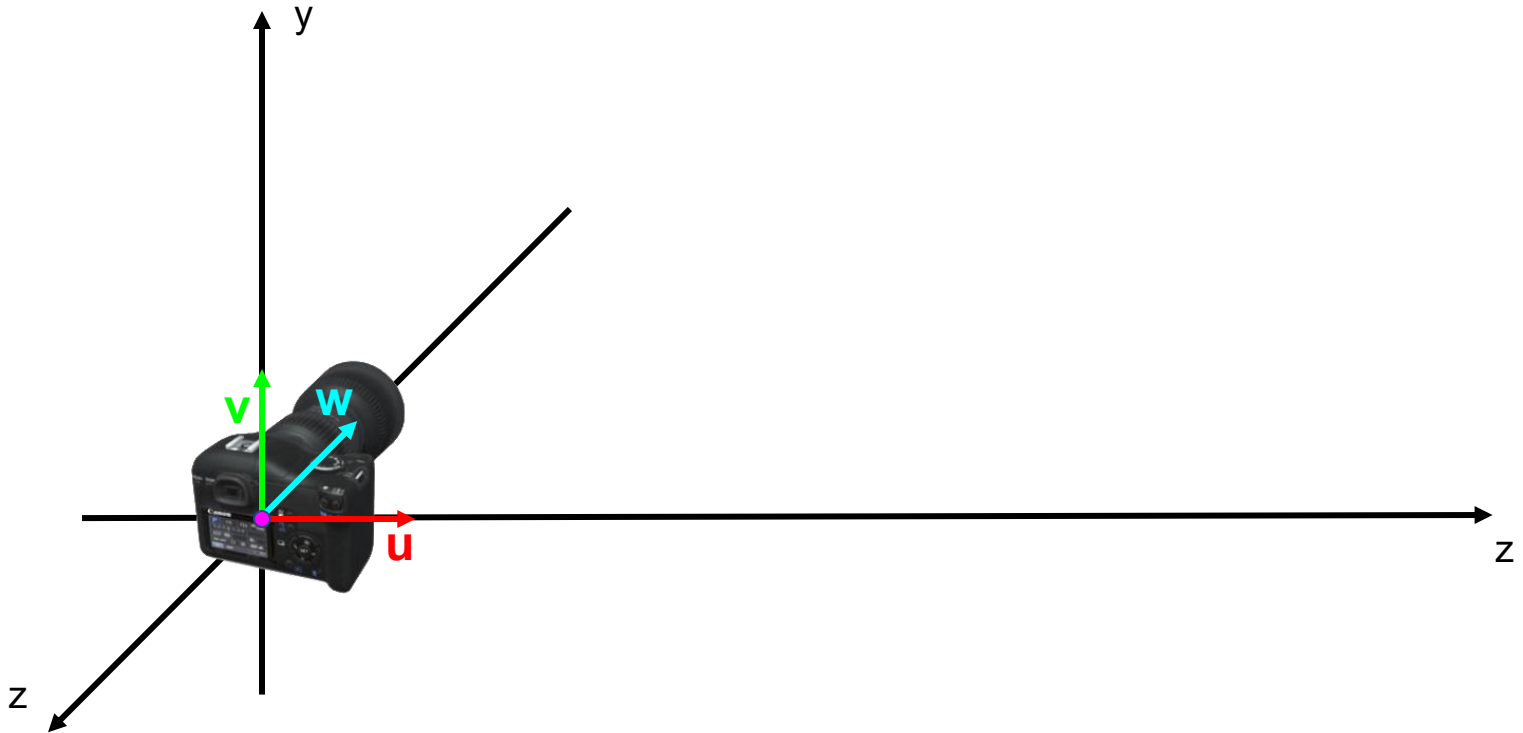


Imagem Resultante
(eixo z como se estivesse saindo da tela)

Câmera no Mundo

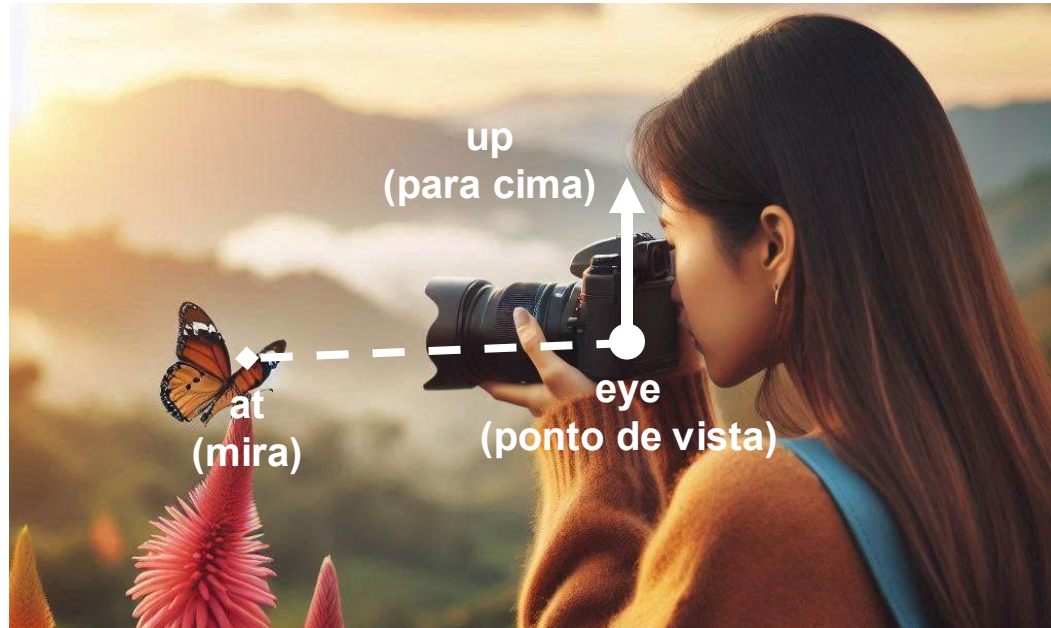
A câmera deve ser definida de alguma forma no espaço de coordenadas do Mundo.

Uma opção é transladar e rotacionar ela como se saísse da origem.



Posicionando a Câmera no Mundo

Outra opção é posicionar e indicando onde olhar.



Função LookAt:

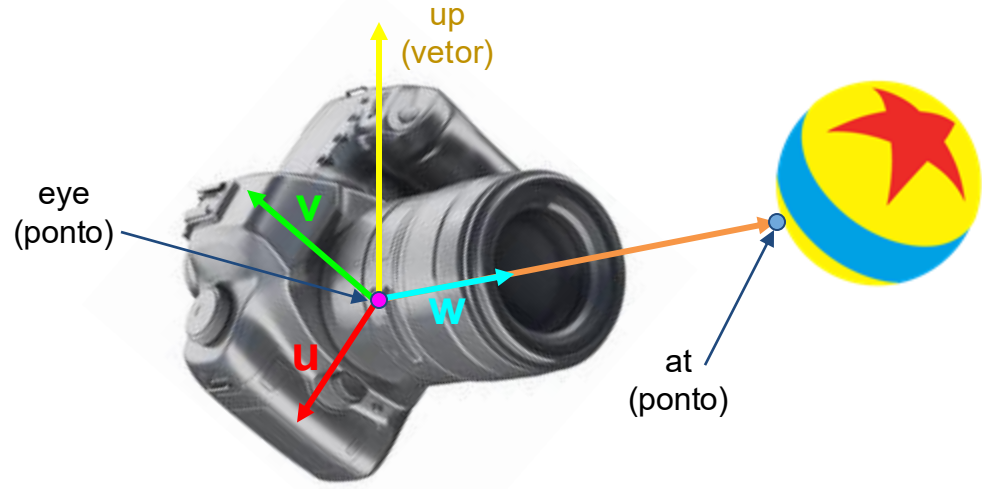
- **Entrada:** at, up, eye: fornecidos em coordenadas do espaço do mundo (3D)
- **Saída:** matriz de transformação do espaço do mundo para o espaço da câmera

Identificando coordenadas ortonormais

$$w = \frac{\text{at} - \text{eye}}{|\text{at} - \text{eye}|}$$

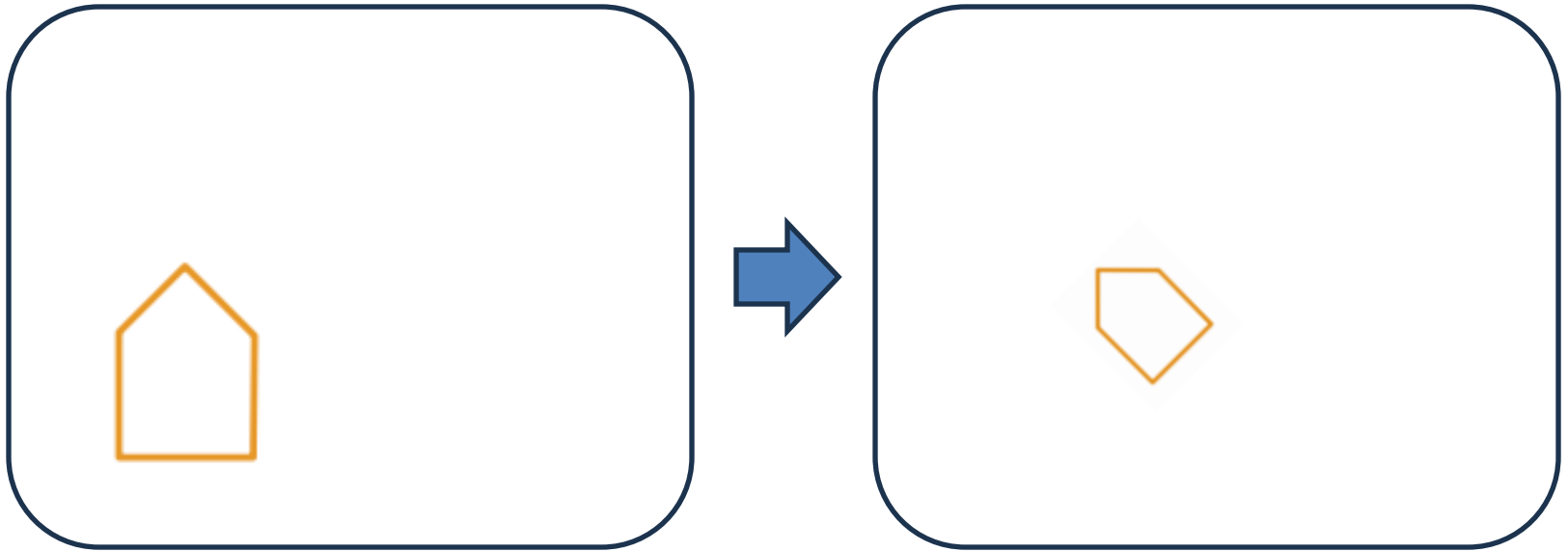
$$u = \frac{w \times \text{up}}{|w \times \text{up}|}$$

$$v = \frac{u \times w}{|u \times w|}$$



X é o produto vetorial

Como fazer essa modificação? (pensando em 2D)

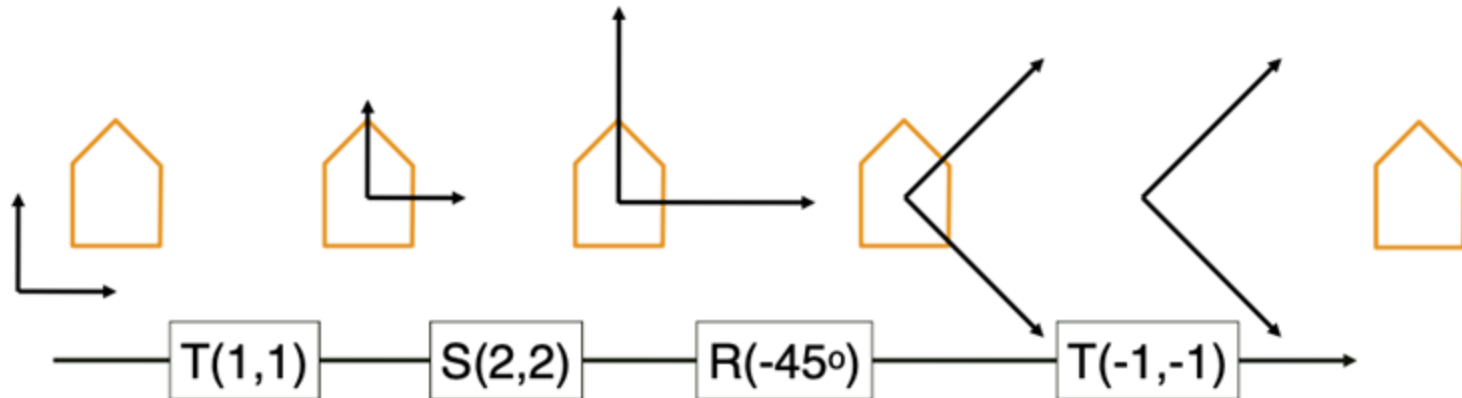


Duas interpretações para uma transformação

Interpretação 1: transforme os pontos do objeto

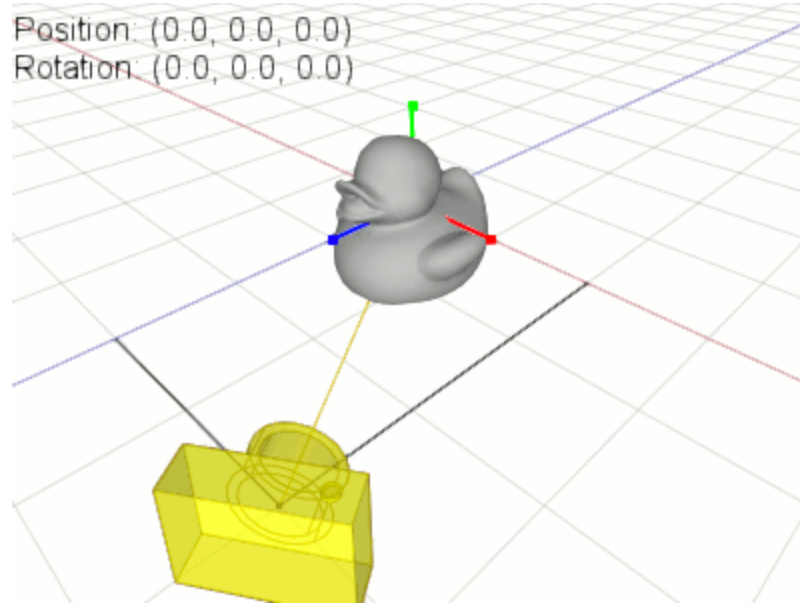


Interpretação 2: transforme o sistema de coordenadas



Função "LookAt"

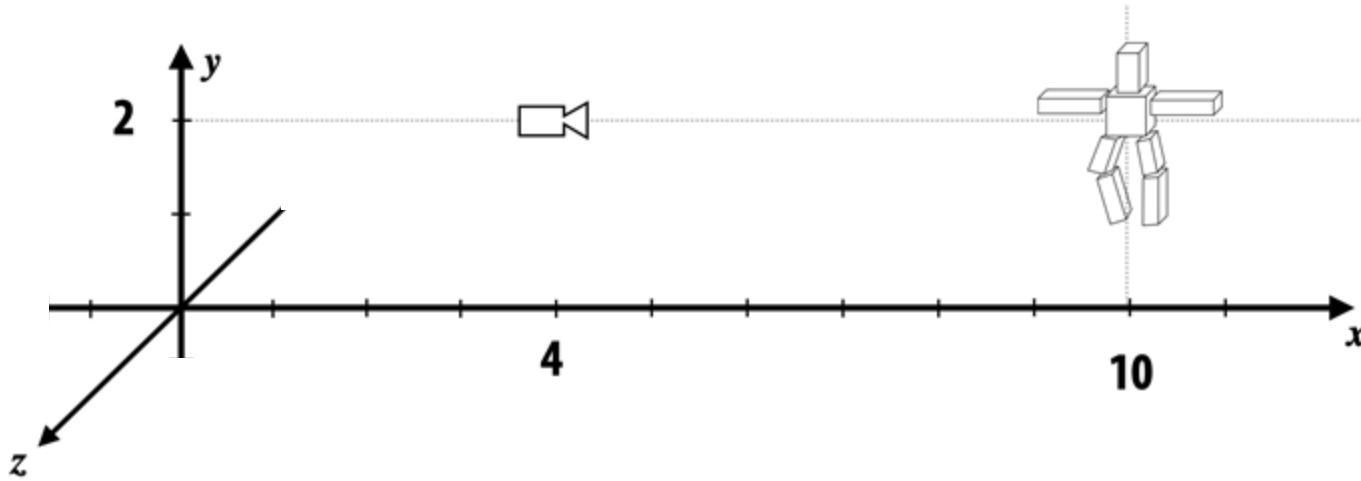
A função LookAt cria uma matriz de visualização (LookAt Matrix) que transforma vértices do espaço do mundo para o espaço da câmera (View).



Exemplo: Transformação Simples de Câmera

Considere um objeto posicionado no mundo.

Considere a câmera na posição $(4, 2, 0)$, olhando pelo eixo X.



Quais transformações no sistema de coordenadas são necessárias para colocar a câmera na origem vendo pelo eixo $-Z$?

- Transladar os vértices do objeto por $(-4, -2, 0)$, para fazer a câmera na origem.
- Rotacionar os vértices do objeto por $\pi/2$ no eixo Y, para fazer a câmera olhar por $-Z$.

* A conveniência de fazer essa mudança de sistema de coordenadas ficará logo clara!

Inversa de Bases Ortogonais

2 Matrizes ortogonais

Dada uma matriz quadrada M sua *transposta*, denotada M^t , é uma matriz cujas linhas são as colunas de M , ou seja, se $M = (a_{i,j})$ e $M^t = (b_{i,j})$ se verifica $b_{j,i} = a_{i,j}$.

Definição 1 (Matriz ortogonal). Uma matriz M é ortogonal se é inversível e $M^{-1} = M^t$, ou seja,

$$MM^t = M^tM = Id.$$

Observe que se M é ortogonal então sua transposta também é ortogonal (veja que $(M^t)^{-1} = M$). Portanto, a inversa de uma matriz ortogonal também é ortogonal.

Propriedade 2.1. Uma matriz ortogonal é uma matriz cujas colunas (ou linhas) formam uma base ortonormal (de fato, isto é uma definição geométrica alternativa de matriz ortogonal).

Prova: Para simplificar a notação veremos a afirmação para matrizes 2×2 . Seja M uma matriz ortogonal cujos vetores coluna são $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$.

$$\begin{aligned} Id &= M^tM = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa+bb & ac+bd \\ ac+bd & cc+dd \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo

$$u \cdot u = v \cdot v = 1, \quad u \cdot v = 0,$$

e u e v formam uma base ortonormal. □

De fato, o argumento anterior mostra o seguinte:

Propriedade 2.2. Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores coluna formam uma base ortonormal.

Multiplicando MM^t , v. obterá a mesma afirmação para os vetores linha:

Propriedade 2.3. Uma matriz é ortogonal se, e somente se, seus vetores linha formam uma base ortonormal.

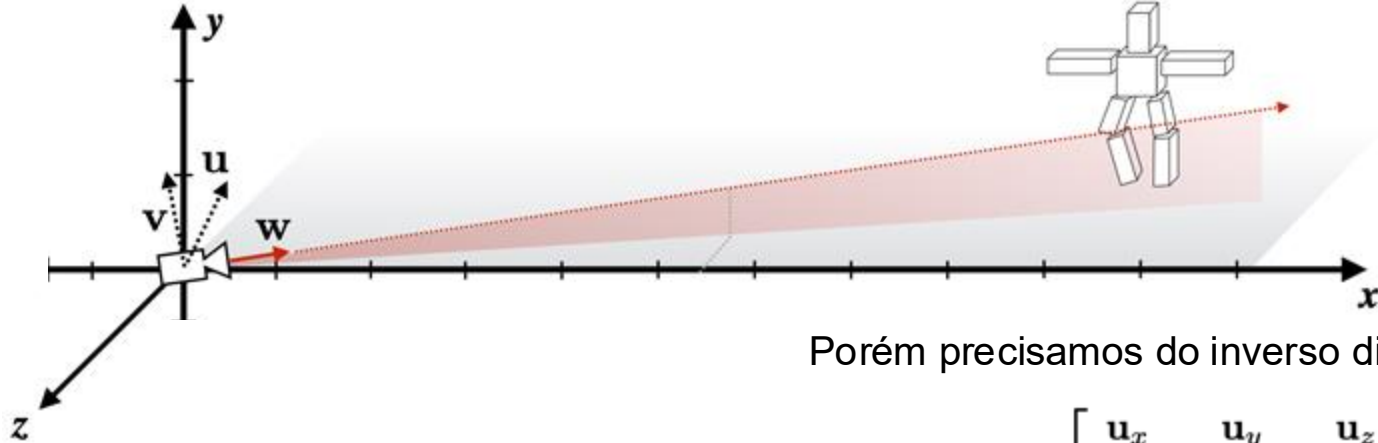
Observação 1. O fato anterior implica que a matriz de uma rotação ou de um espelhamento (na base canônica) é uma matriz ortogonal. Também implica que a matriz de uma projeção não é ortogonal (em nenhuma base).

Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^t$).

Câmera olhando para uma direção qualquer

Considere a câmera na origem olhando para uma direção w .

Qual transformação no sistema de coordenadas que rotaciona a câmera para estar olhando pelo eixo $-Z$?



Porém precisamos do inverso disso:

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \mathbf{v}_x & \mathbf{v}_y & \mathbf{v}_z \\ -\mathbf{w}_x & -\mathbf{w}_y & -\mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

Use uma base ortonormal para o W

A matriz de rotação R , mapeia o eixo x para u , o eixo y para v e o eixo z para $-w$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{v}_x & -\mathbf{w}_x \\ \mathbf{u}_y & \mathbf{v}_y & -\mathbf{w}_y \\ \mathbf{u}_z & \mathbf{v}_z & -\mathbf{w}_z \end{bmatrix}$$

Isso é mesmo a matriz inversa?

$$\mathbf{R}^T \mathbf{u} = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad -\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}]^T = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{v} = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad -\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}]^T = [0 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{w} = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad -\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}]^T = [0 \quad 0 \quad -1]^T$$

Transformação

A matriz do espaço do mundo para o espaço da câmera é uma mudança do sistema de coordenadas para o espaço (u, v, -w, e)

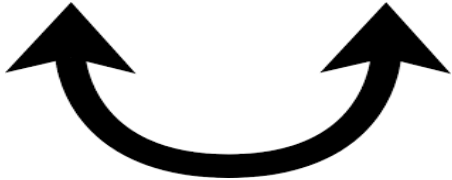
$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & e_x \\ u_y & v_y & -w_y & e_y \\ u_z & v_z & -w_z & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Que pode ser decomposta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e_x \\ 0 & 1 & 0 & e_y \\ 0 & 0 & 1 & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & 0 \\ u_y & v_y & -w_y & 0 \\ u_z & v_z & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversas do produto de duas matrizes

A inversa do produto de A por B é igual ao produto das matrizes inversa de B pela inversa de A

$$(T \cdot R)^{-1} = R^{-1} \cdot T^{-1}$$
A thick black curved arrow pointing from the term R^{-1} to the term T^{-1} in the equation above.

Transformação de "Look-At"

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & e_x \\ 0 & 1 & 0 & e_y \\ 0 & 0 & 1 & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & 0 \\ u_y & v_y & -w_y & 0 \\ u_z & v_z & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A transformação de "look-at" é o inverso da matriz acima:

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x & -w_x & e_x \\ u_y & v_y & -w_y & e_y \\ u_z & v_z & -w_z & e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ -w_x & -w_y & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Concluindo a Matriz Look At

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ -w_x & -w_y & -w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -e_x \\ 0 & 1 & 0 & -e_y \\ 0 & 0 & 1 & -e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -u_x e_x - u_y e_y - u_z e_z \\ v_x & v_y & v_z & -v_x e_x - v_y e_y - v_z e_z \\ -w_x & -w_y & -w_z & w_x e_x + w_y e_y + w_z e_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -u \cdot e \\ v_x & v_y & v_z & -v \cdot e \\ -w_x & -w_y & -w_z & w \cdot e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

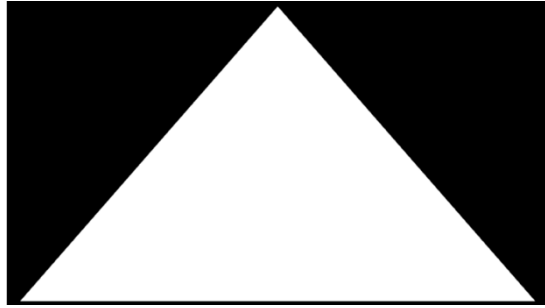
ATIVIDADE: Sistema de Coordenadas

Acesse o documento

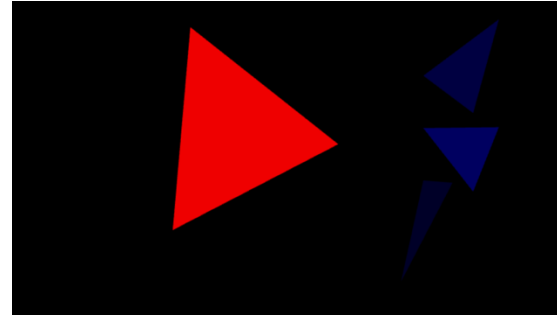
Realize todos os exercícios.

Voltamos em 30 minutos?

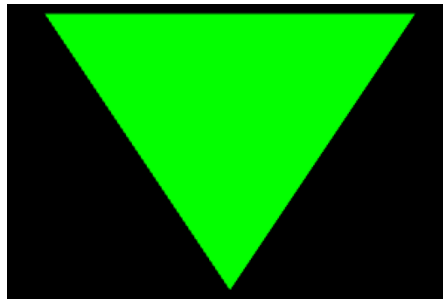
Segunda parte do projeto 1 (entrega 1.2)



um_triangulo.x3d



triang3d.x3d



zoom.x3d

<https://lpsoares.github.io/Renderizador/>

Computação Gráfica

Luciano Soares

<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali

<fabioO1@insper.edu.br>