

Computação Gráfica

Aula 9: Interpolação em Triângulos

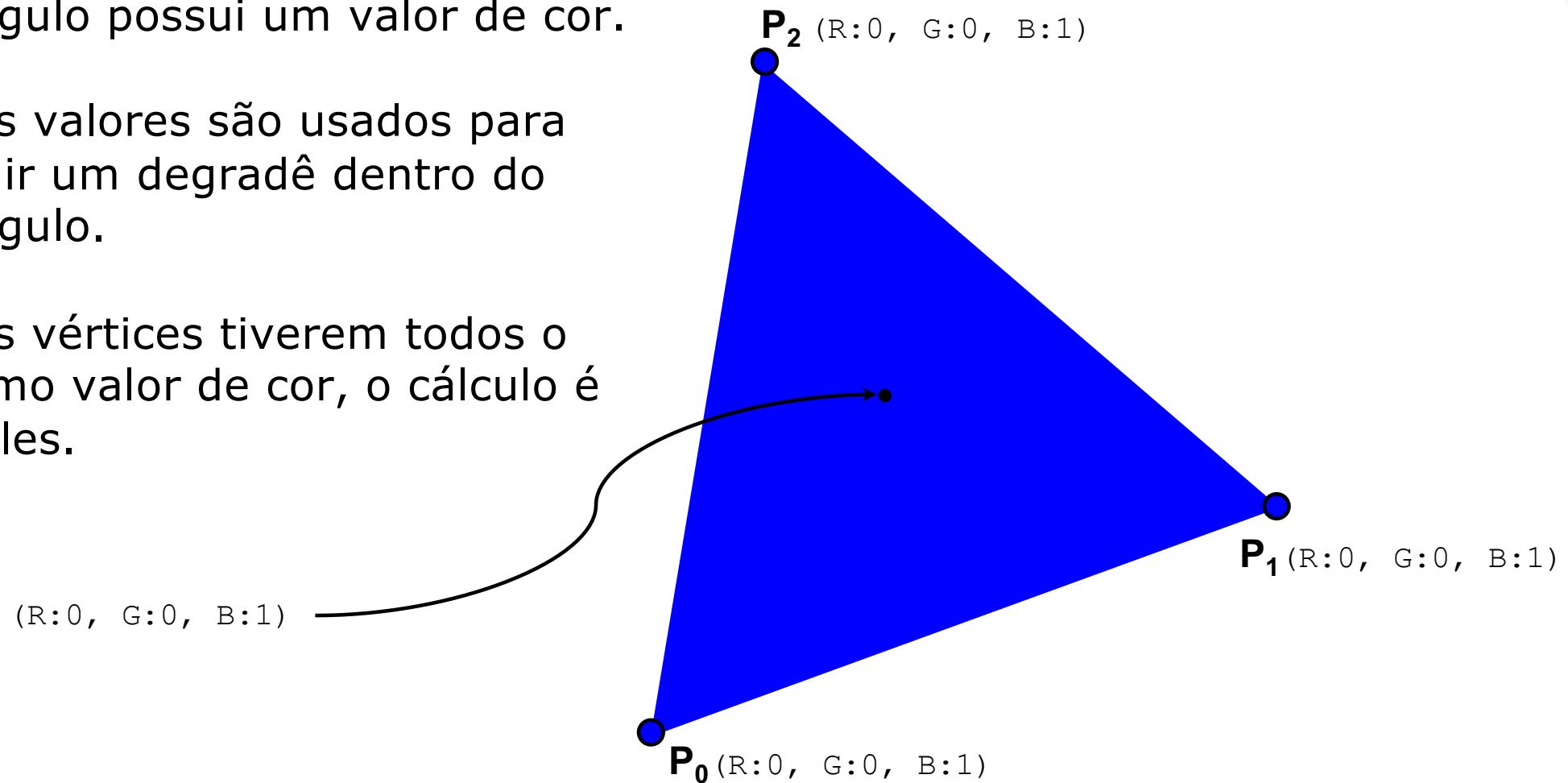
Desenhando Triângulos Coloridos



Vamos definir que cada vértice do triângulo possui um valor de cor.

Esses valores são usados para definir um degradê dentro do triângulo.

Se os vértices tiverem todos o mesmo valor de cor, o cálculo é simples.





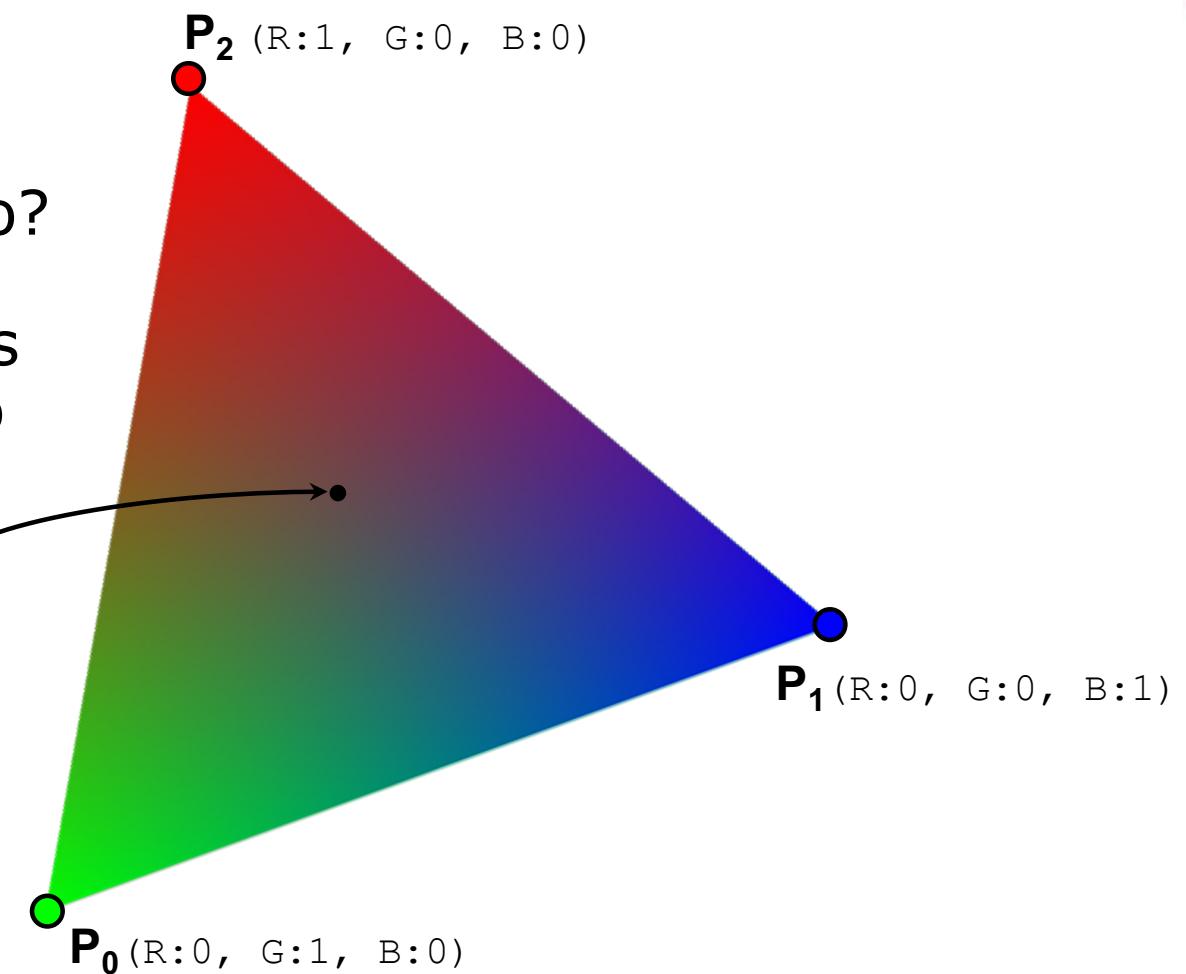
Desenhando Triângulos Coloridos

Mas e se cada vértice tiver uma cor diferente?

Qual a cor de um ponto qualquer dentro do triângulo?

Como podemos interpolar os valores de cor no interior do triângulo?

(R:?, G:?, B:?)



Interpolação no interior de Triângulos



Por que queremos interpolar?

Definir valores pelos vértices e obter valores que variam suavemente pela superfície. Um belo degrade ☺

O que queremos interpolar?

Cores, Coordenadas de textura, Vetores normais, ...

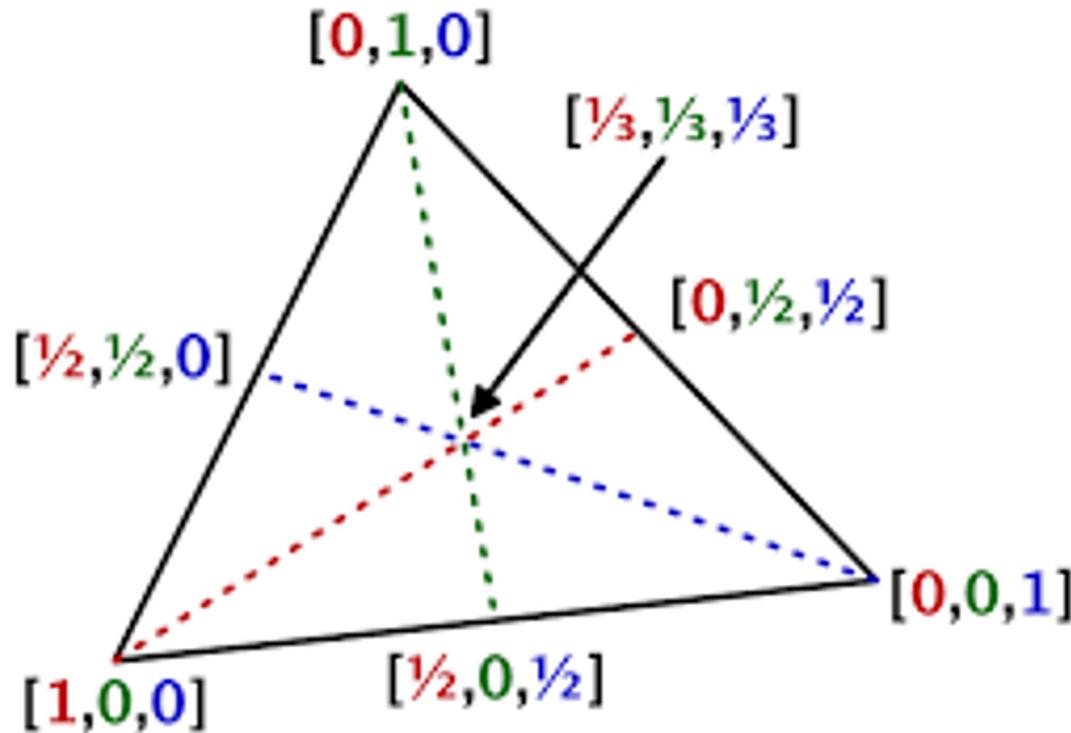
Como podemos fazer a interpolação?

Coordenadas baricêtricas



Coordenadas Baricêntricas

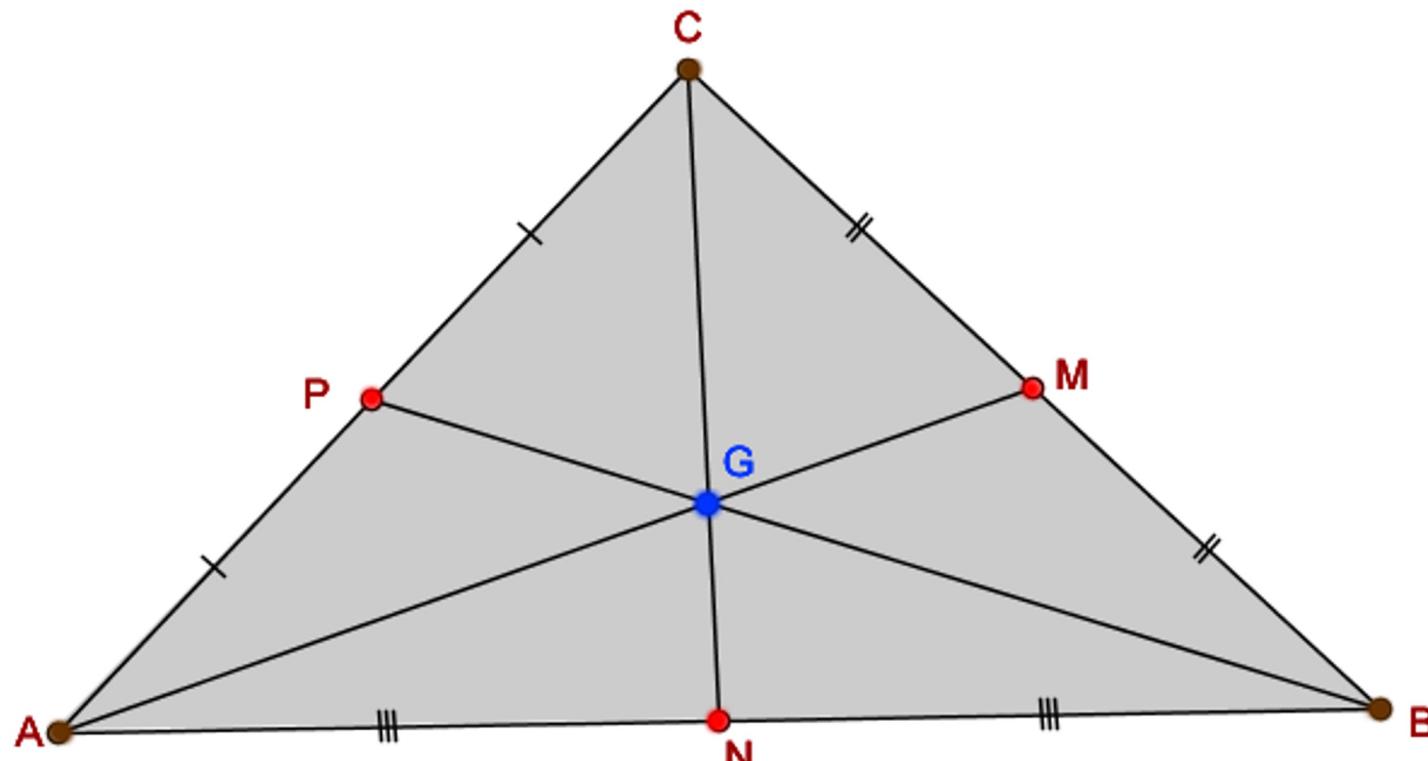
Usando coordenadas baricêntricas para interpolar dados ou atributos de vértices.





Definição de Baricentro

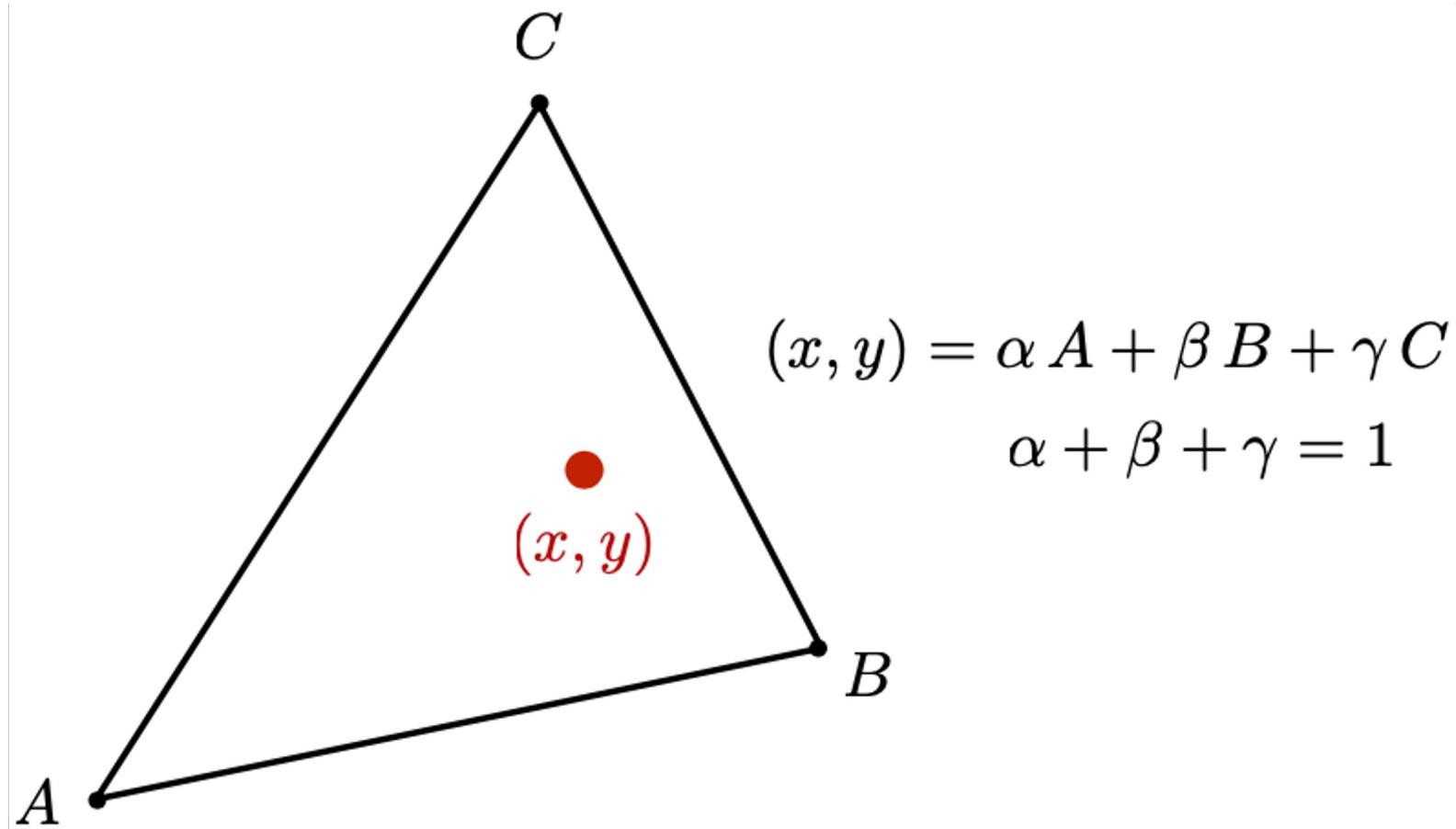
O baricentro é determinado pelo encontro das medianas de um triângulo.



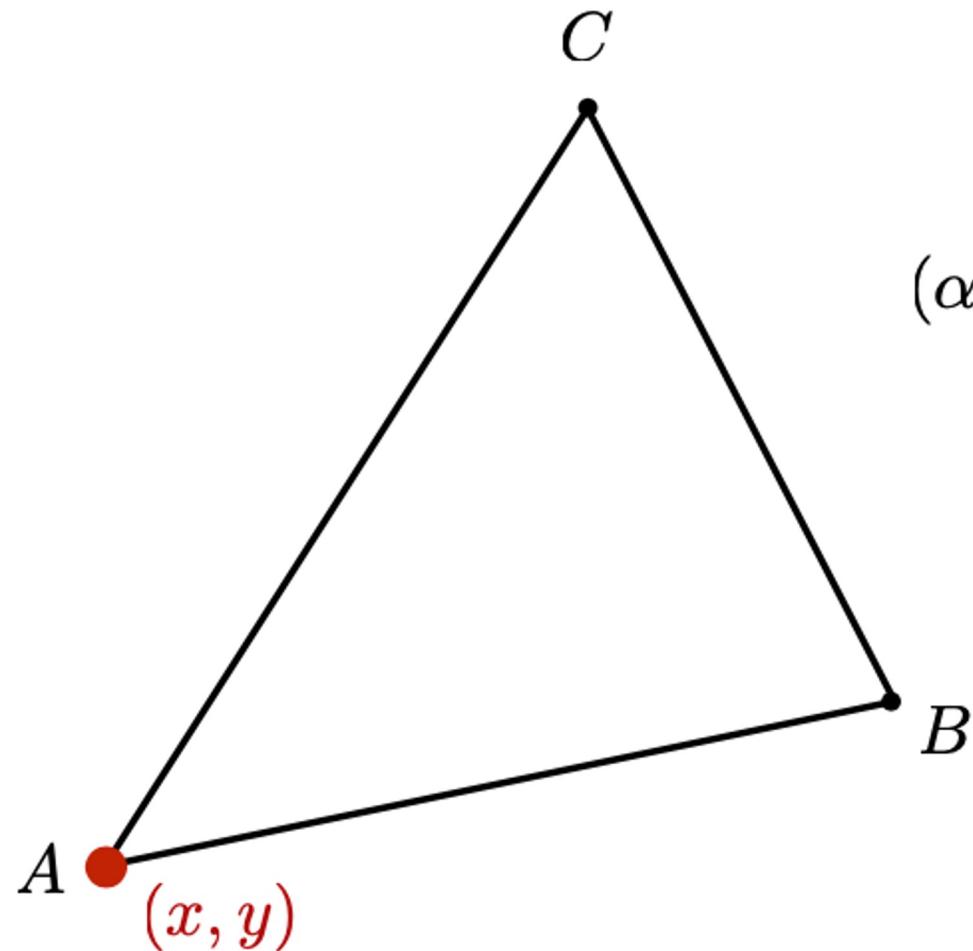


Coordenadas Baricêtricas

Um sistema de coordenadas para triângulos (α, β, γ)



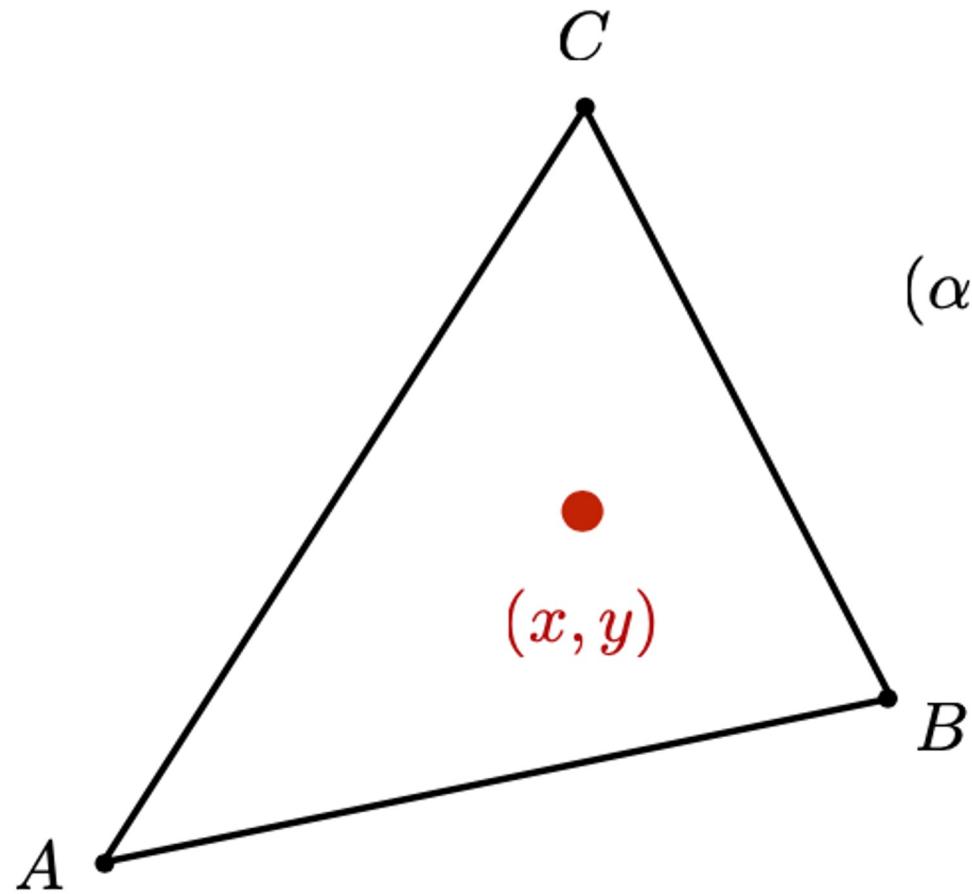
Coordenadas Baricêtricas - Exemplo



$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}(x, y) &= \alpha A + \beta B + \gamma C \\ &= A\end{aligned}$$

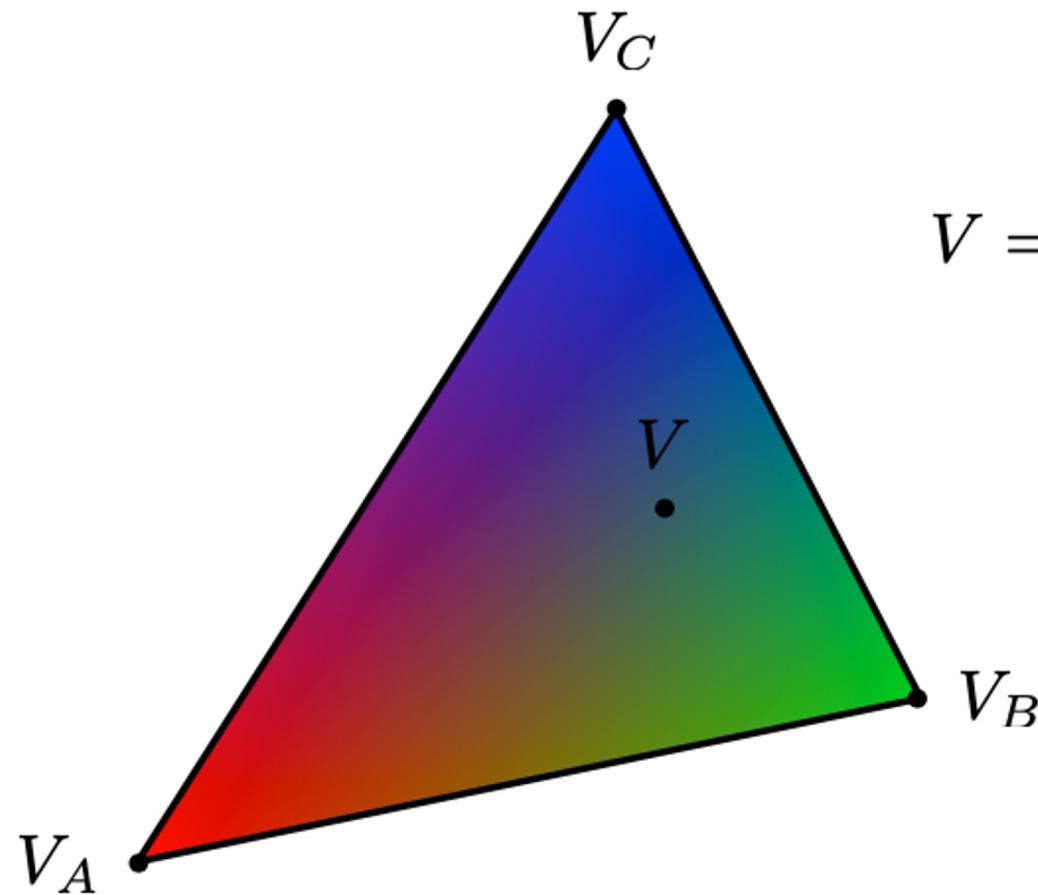
Coordenadas Baricêtricas - Exemplo



$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$(x, y) = \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C$$

Interpolação Linear Pelo Triângulo



$$V = \alpha V_A + \beta V_B + \gamma V_C$$

V_A, V_B, V_C podem ser
posições, coordenadas
de textura, cores,
vetores normais,
atributos de materiais ...

Propostas de cálculos das coordenadas



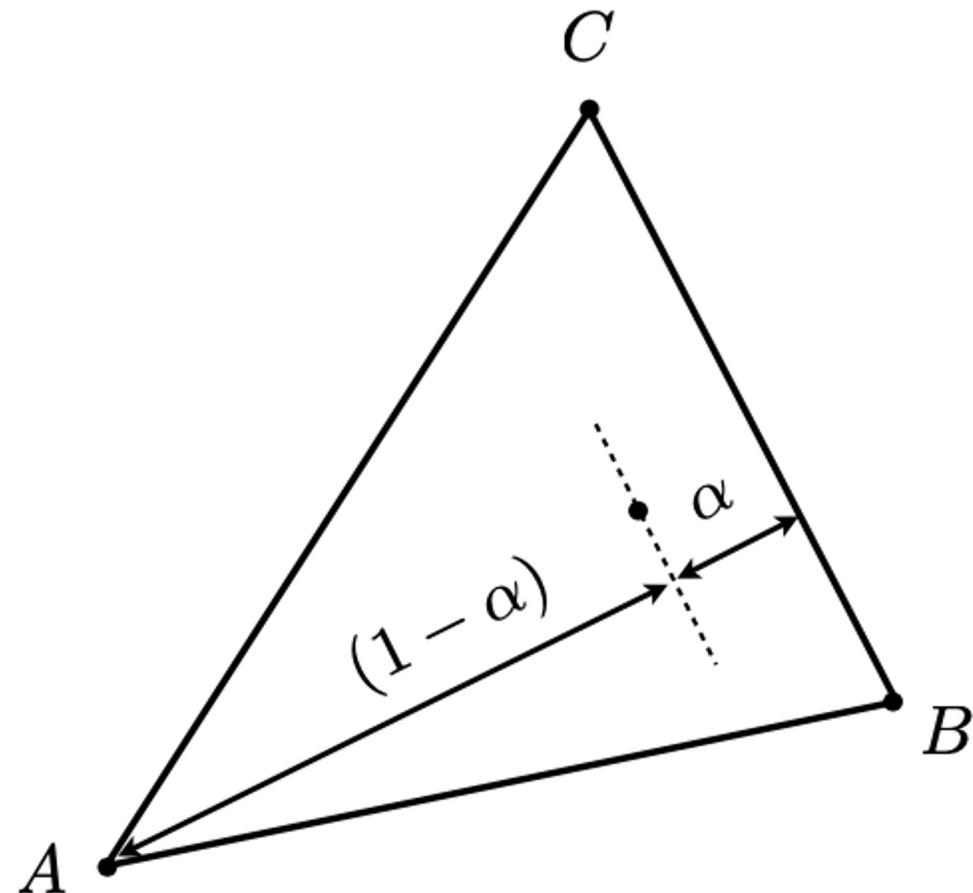
Ponto de vista geométrico de:

- distâncias proporcionais
- áreas proporcionais

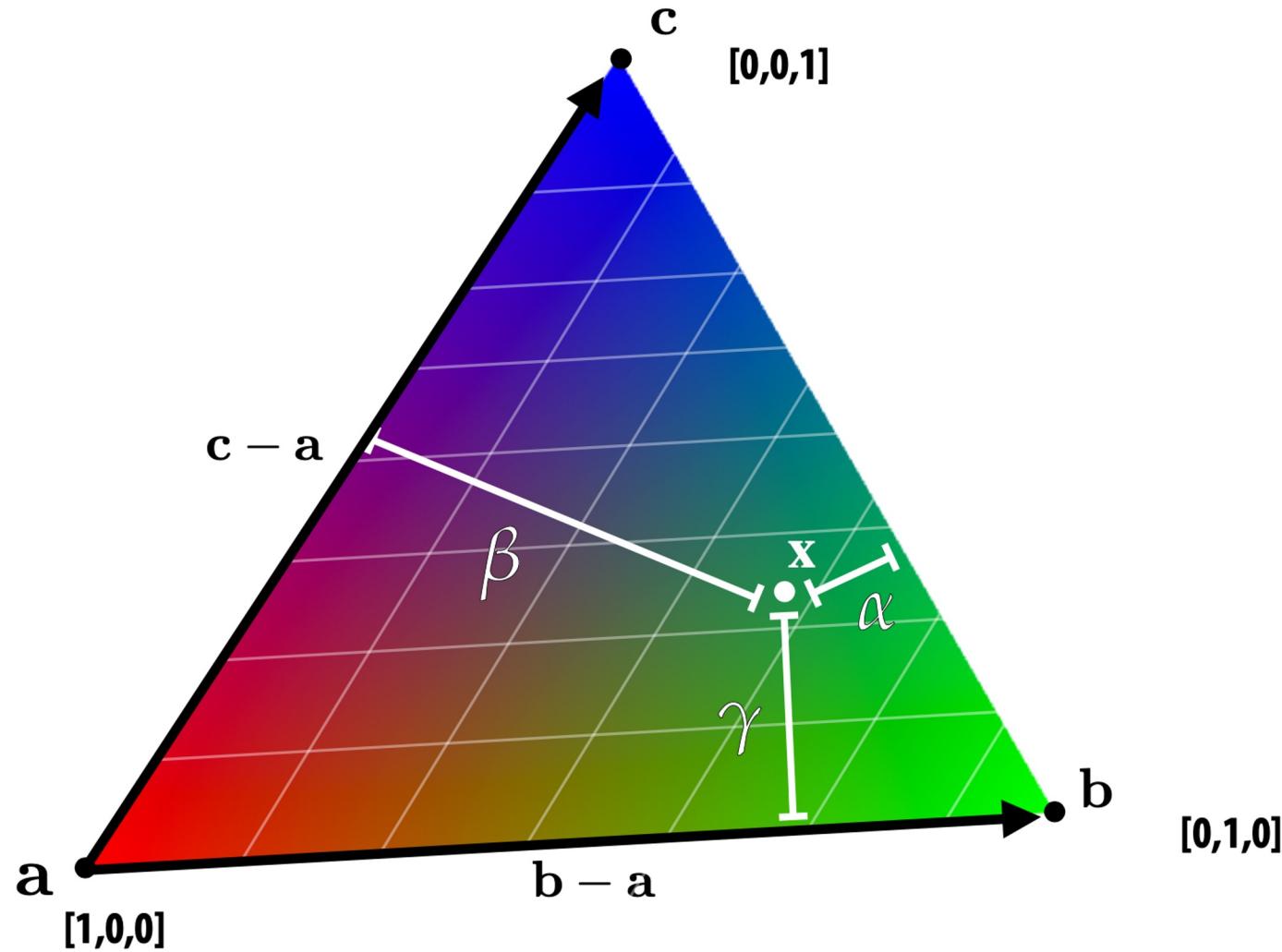
Coordenadas Baricêntricas



Ponto de vista geométrico de distâncias proporcionais

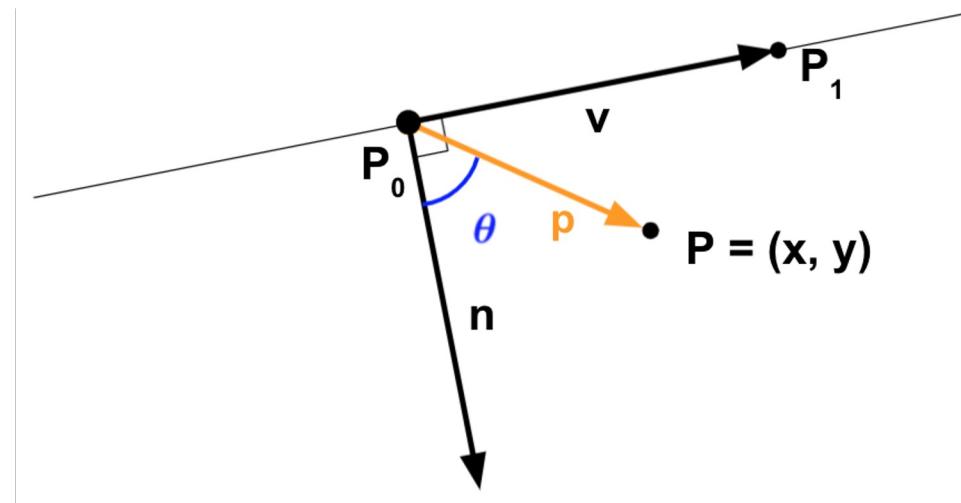


Coordenadas Baricêtricas como Distâncias



Lembrando: Equação da Reta

$$\begin{aligned}L(x, y) &= p \cdot n = (x - x_0 ; y - y_0) \cdot (y_1 - y_0 ; -(x_1 - x_0)) \\&= (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) \\&= (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)\end{aligned}$$

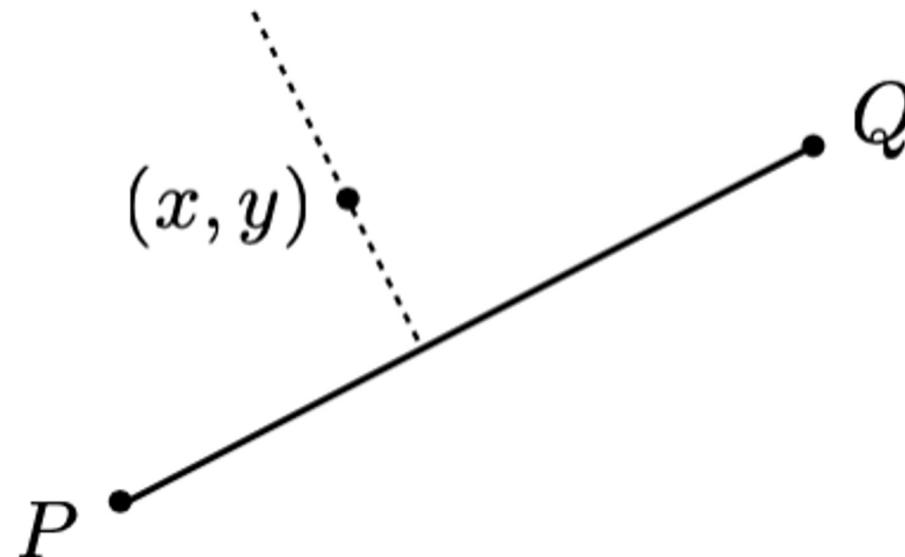


Calculando as Coordenadas Baricêtricas



$L_{PQ}(x, y)$ é a distância do ponto (x, y) até a linha PQ .

$$L_{PQ}(x, y) = (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) - x_0(y_1 - y_0)$$

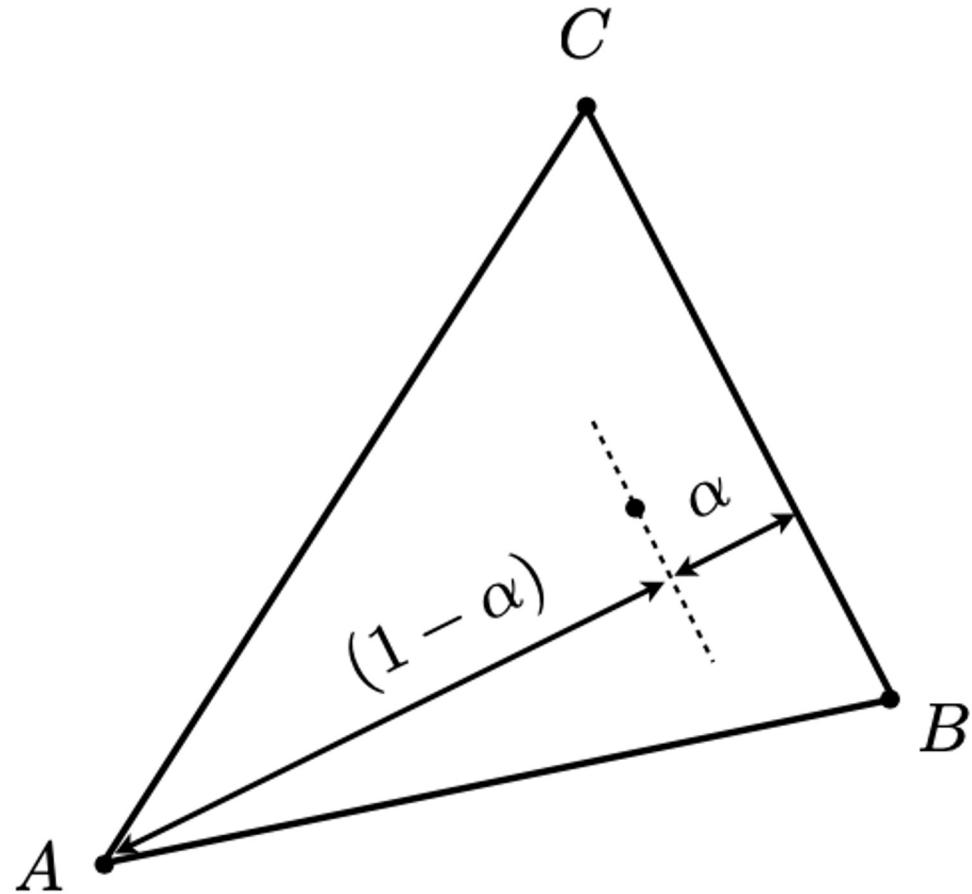


Obs: Cuidado com os sinais, lembre-se de que nas coordenadas da tela o Y aponta para baixo então seus cálculos podem com valores invertidos.

Coordenadas Baricêntricas



Ponto de vista geométrico – distâncias proporcionais

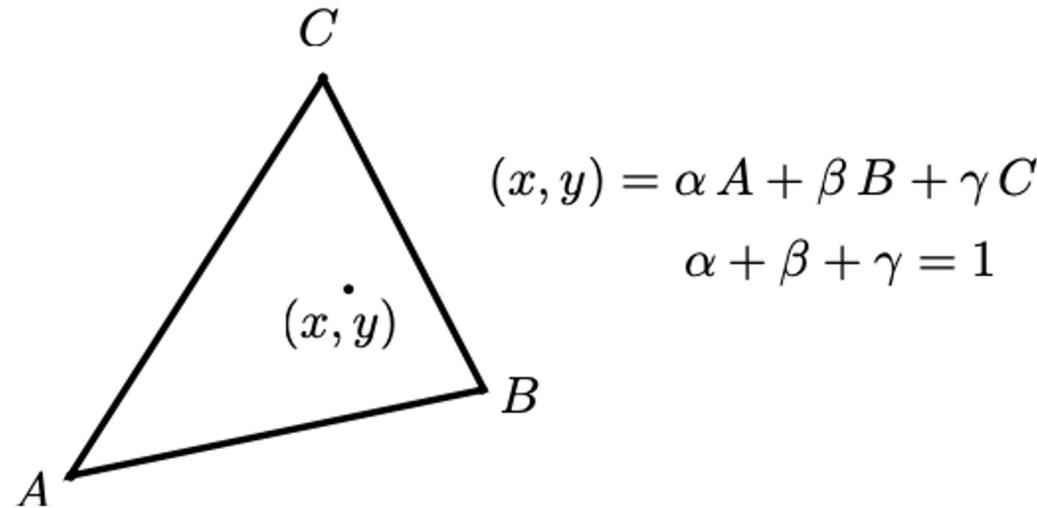


$$\alpha = \frac{L_{BC}(x, y)}{L_{BC}(x_A, y_A)}$$

Construções similares
para as outras
coordenadas



Fórmulas das Coordenadas Baricênicas

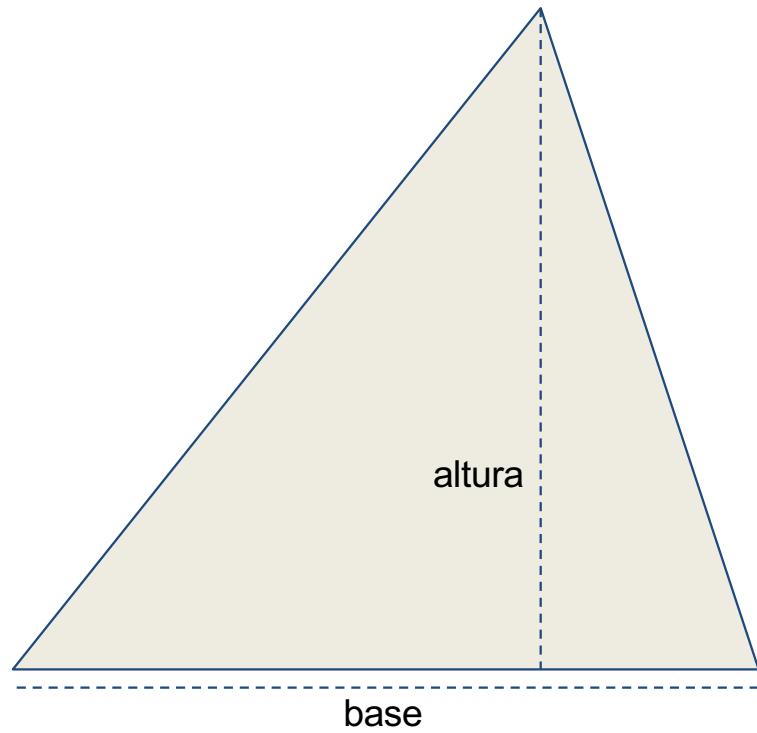


$$\alpha = \frac{-(x - x_B)(y_C - y_B) + (y - y_B)(x_C - x_B)}{-(x_A - x_B)(y_C - y_B) + (y_A - y_B)(x_C - x_B)}$$

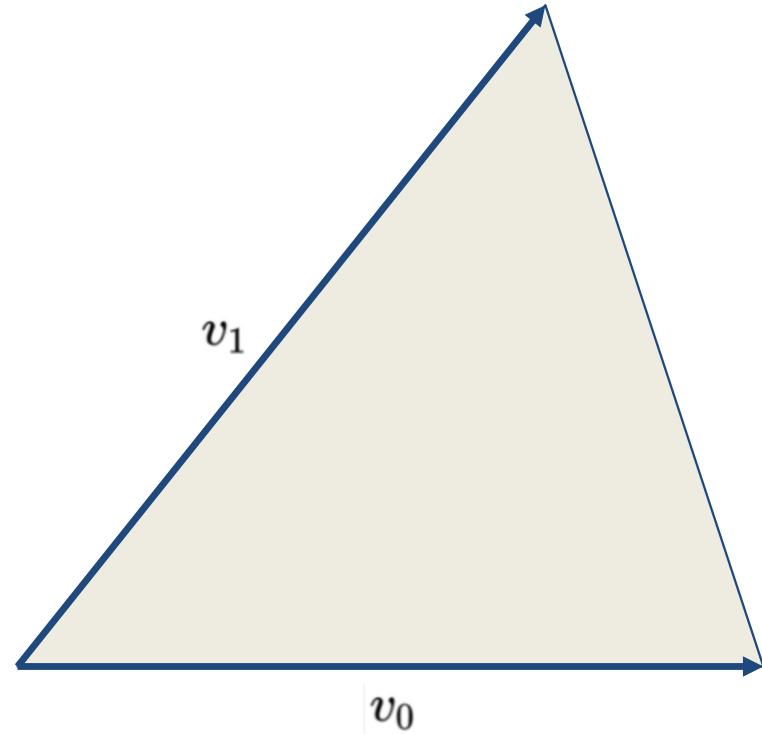
$$\beta = \frac{-(x - x_C)(y_A - y_C) + (y - y_C)(x_A - x_C)}{-(x_B - x_C)(y_A - y_C) + (y_B - y_C)(x_A - x_C)}$$

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

Área de um triângulo



$$\text{area} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

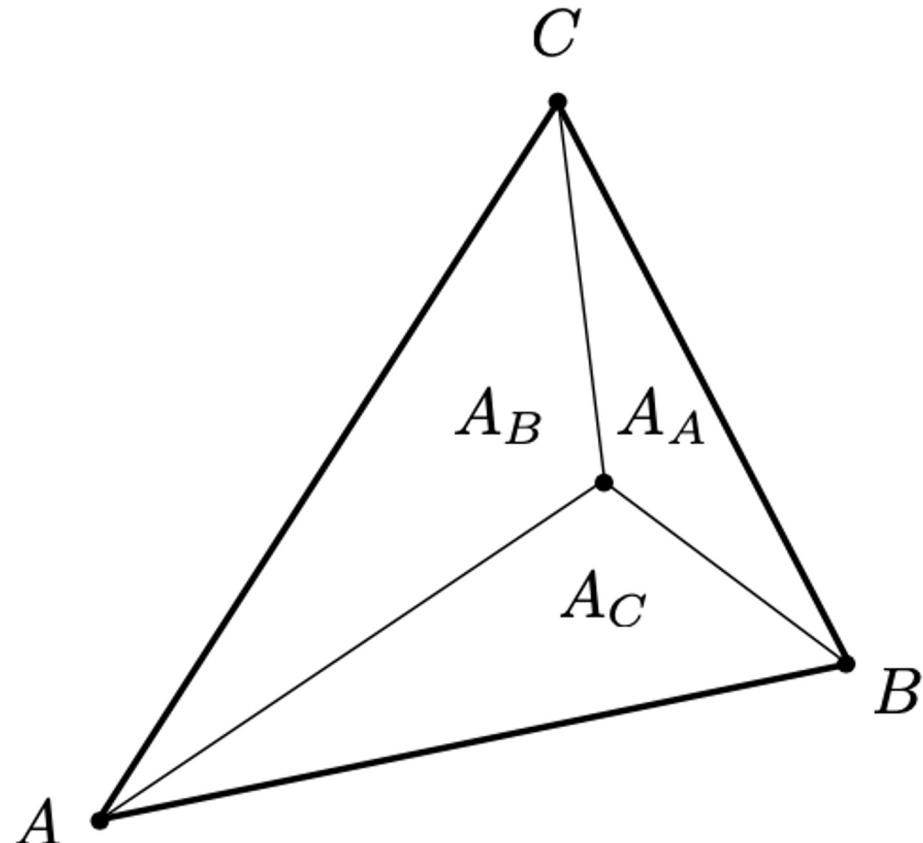


$$\text{area} = \frac{\|v_0 \times v_1\|}{2}$$

Coordenadas Baricêtricas



Ponto de vista geométrico de áreas proporcionais



$$\alpha = \frac{A_A}{A_A + A_B + A_C}$$

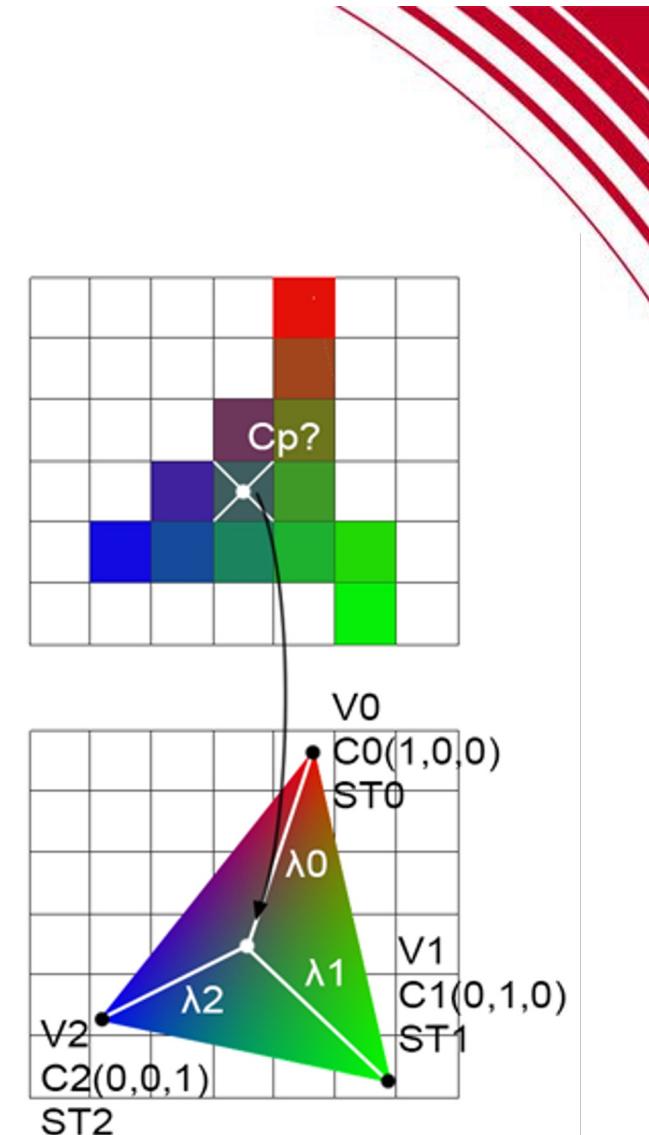
$$\beta = \frac{A_B}{A_A + A_B + A_C}$$

$$\gamma = \frac{A_C}{A_A + A_B + A_C}$$

Obs: Essa abordagem tem vantagens se você estiver usando produtos vetoriais nos seus cálculos.

Processo de Rasterização

- O triângulo é projetado na tela, ou seja os vértices do triângulo são convertidos do espaço da câmera (3D) para o espaço da tela (2D).
- Se um pixel se encontra dentro do triângulo, as coordenadas baricêtricas desse pixel são calculadas para interpolar os valores dos vértices e identificar o valor do pixel.



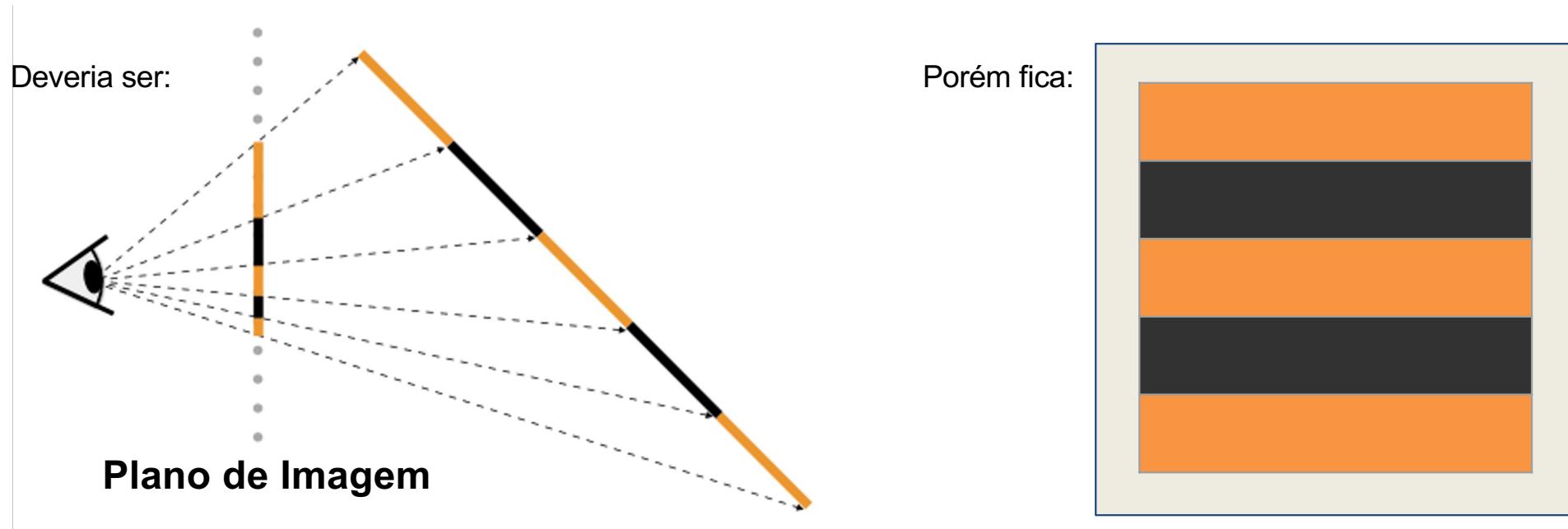
© www.scratchapixel.com

Projeções Perspectivas Cria Não Linearidades



Uma interpolação no espaço da tela (2D) não é a mesma de no espaço da câmera (3D).

Devido a projeção perspectiva, a interpolação baricêntrica dos valores dos vértices do triângulo não são uma função afim.



Uma interpolação linear nas coordenadas do mundo produz uma interpolação não linear nas coordenadas da tela!

Estratégia, usar o Z para calcular os valores

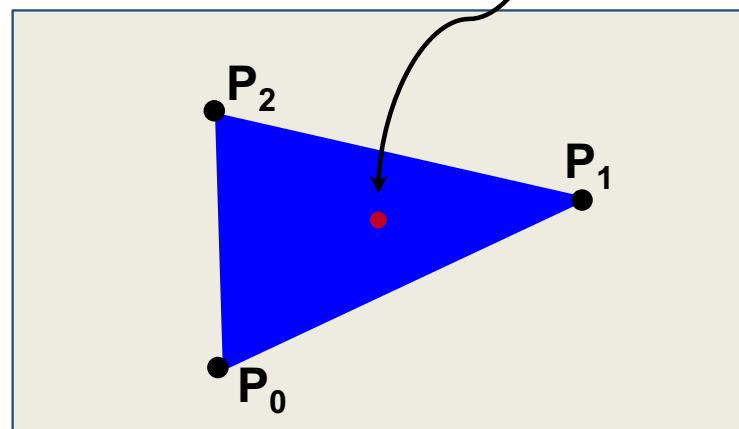


Mas e o Z de onde estamos amostrando?

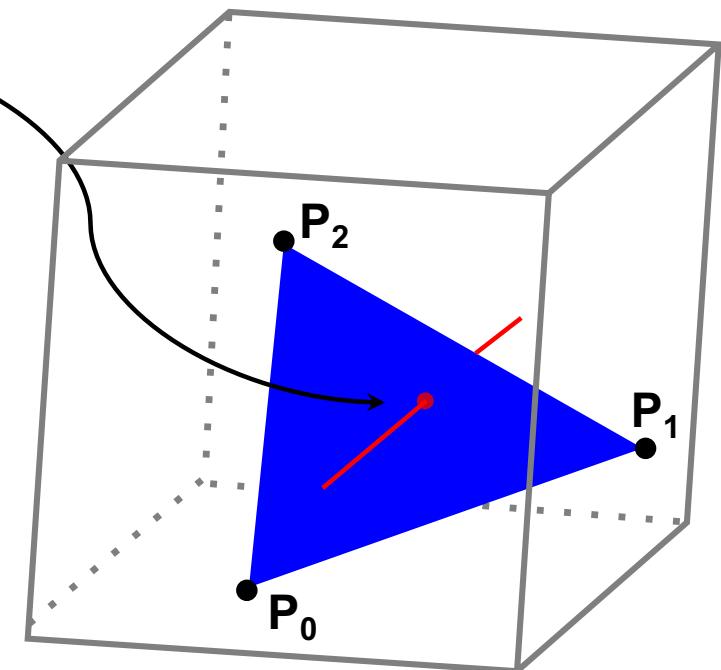
Temos o Z dos vértices no espaço da câmera.

Média harmônica ponderada, os pesos são alfa, beta e gama.

$$Z = \frac{1}{\alpha \frac{1}{Z_0} + \beta \frac{1}{Z_1} + \gamma \frac{1}{Z_2}}$$



Z ?



Estratégia, usar o Z para calcular os valores



Usar agora o Z dividindo o parâmetro que se deseja interpolar.
E depois multiplica o Z do ponto sendo amostrado.

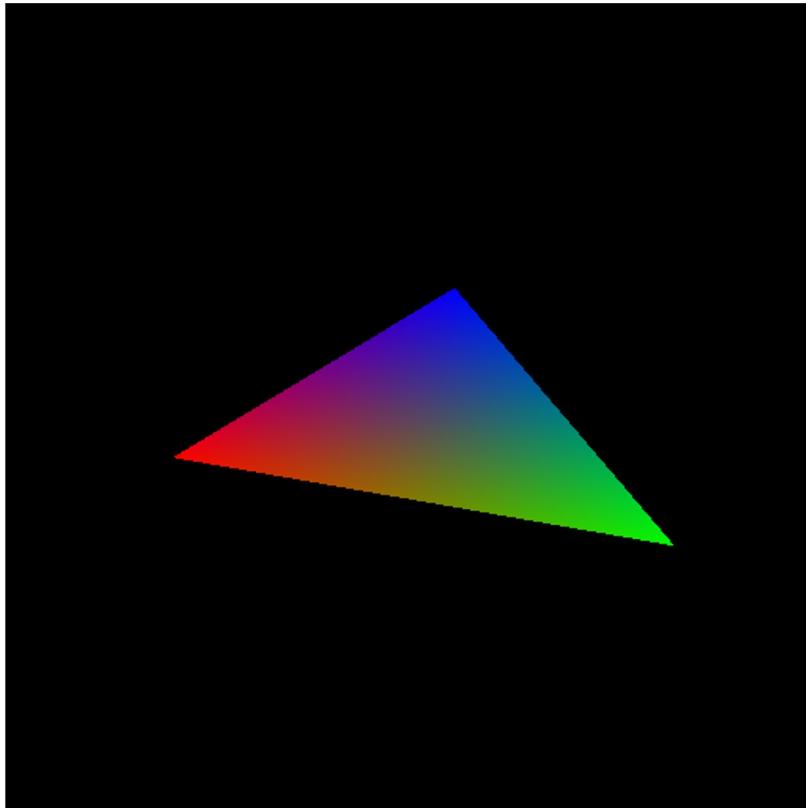
$$C = Z \cdot \left(\alpha \frac{C_0}{Z_0} + \beta \frac{C_1}{Z_1} + \gamma \frac{C_2}{Z_2} \right)$$

As coordenadas baricêtricas no espaço da tela não são transformações afim. Já se forem interpoladas com a divisão do valor de Z são transformações afim.

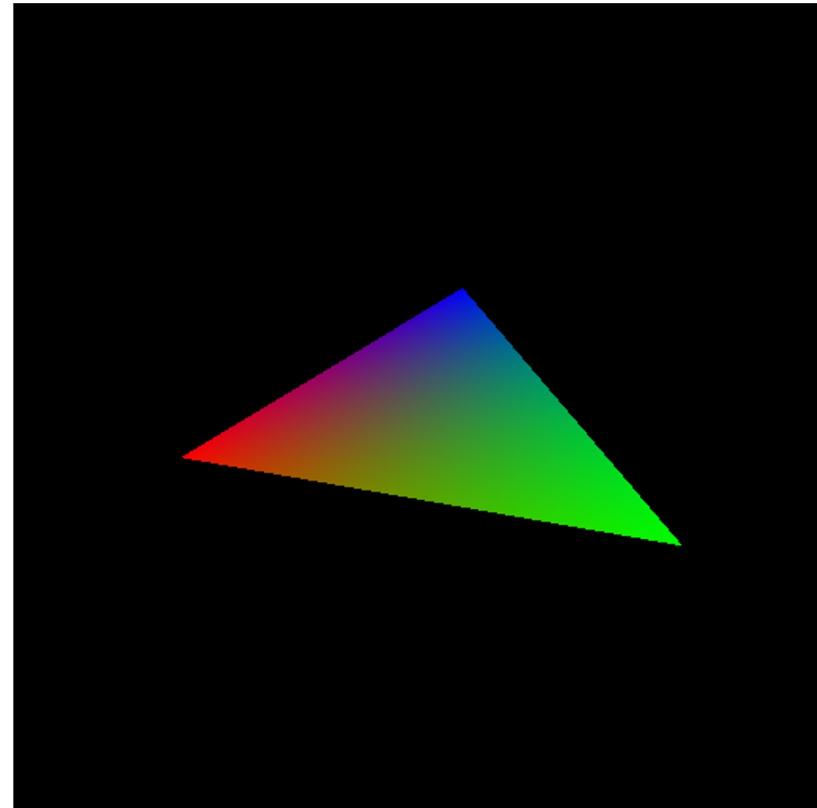


Diferença no resultado quando usada o Z

Interpolação Baricêntrica 2D



Interpolação Baricêntrica 3D



Mapeamento de Texturas

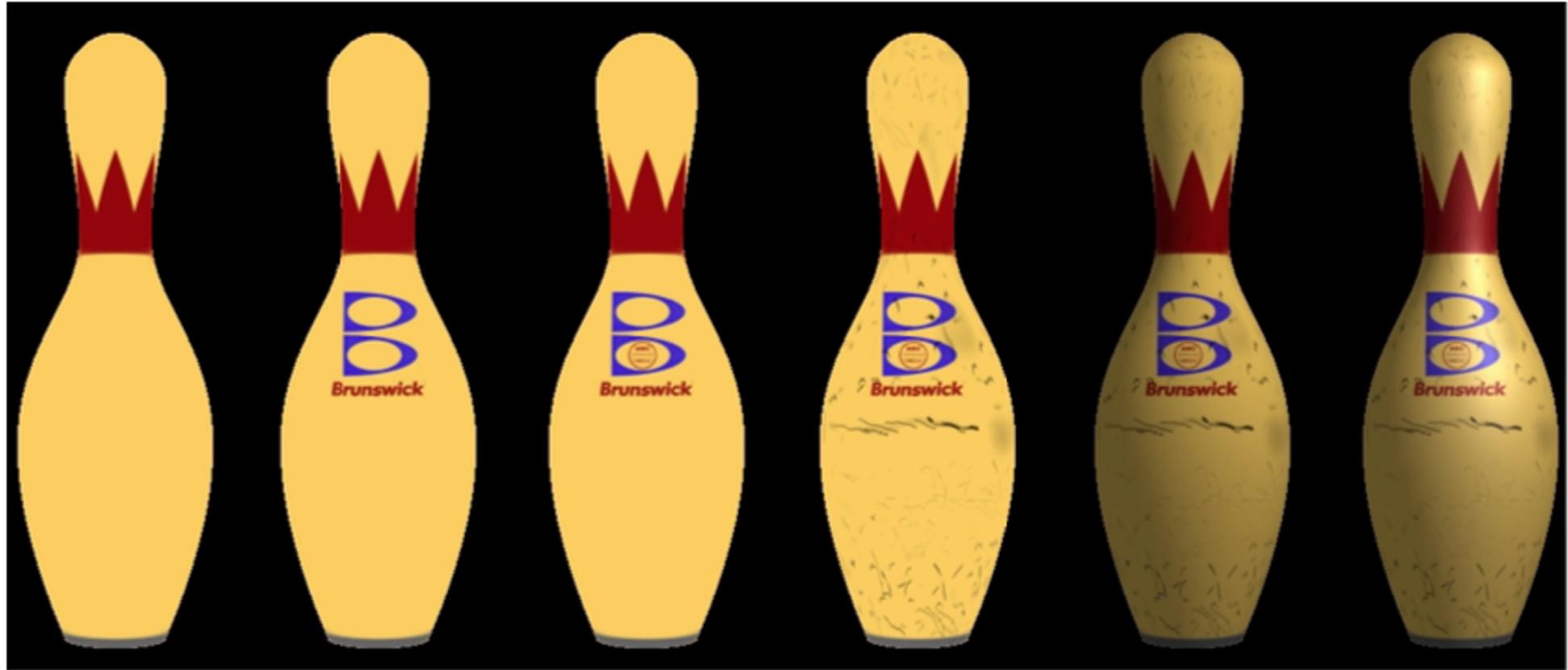


padrão na bola

padrão na madeira

Insper

Realismos das Superfícies



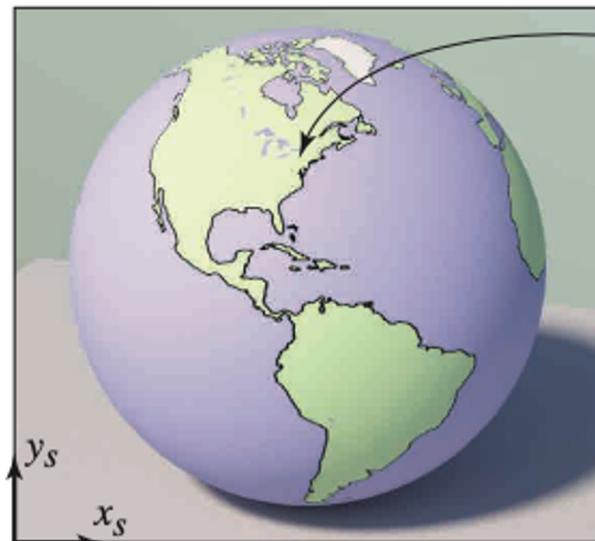
Chan et al.

- Adiciona detalhes sem aumentar a complexidade geométrica
- Se aplica uma imagem na geometria ou se pinta proceduralmente

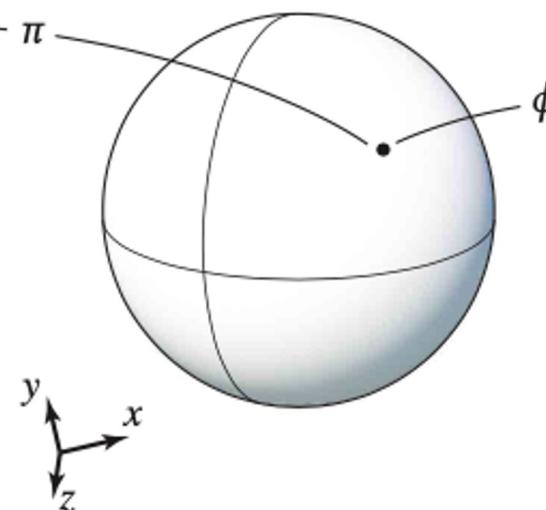
Três Espaços

As superfícies habitam o espaço 3D do mundo

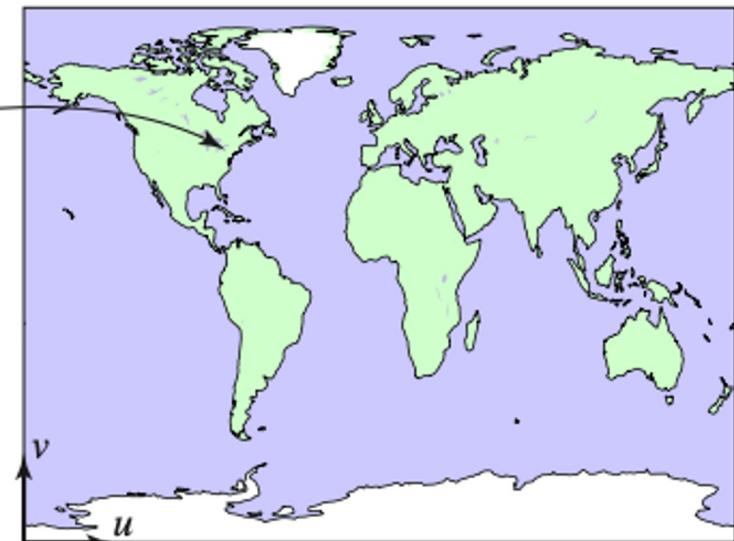
Cada ponto das superfícies 3D também tem uma posição onde fica na tela 2D e na textura 2D.



**Espaço da
Tela**



**Espaço do
Mundo**

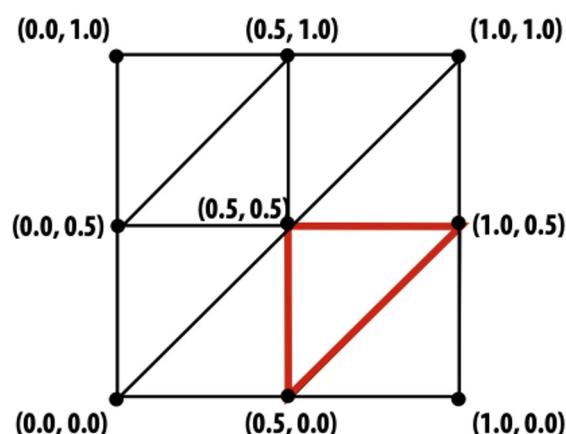


**Espaço da
Textura**

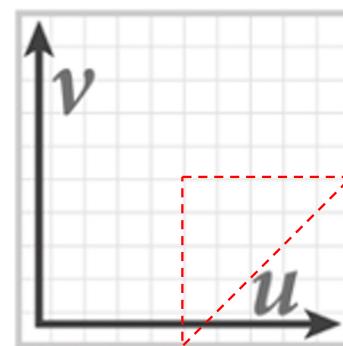
Coordenadas de Textura



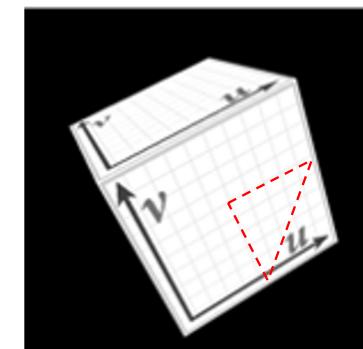
As coordenadas de Textura definem um mapeamento das coordenadas nas superfícies (pontos 3D no triângulo) para coordenadas de textura (pontos 2D na imagem).



Oito triângulos (uma face de um cubo) com parâmetros de superfície fornecida como coordenadas de textura por vértice.



As coordenadas de textura são definidas num espaço normalizado $[0,1]^2$. Localização do triângulo destacado no espaço de textura mostrado em vermelho.



Resultado final renderizado (cubo inteiro mostrado). Localização do triângulo após a projeção na tela mostrada em vermelho.



Mapeamento das coordenadas de textura.



Textura Aplicada na Superfície

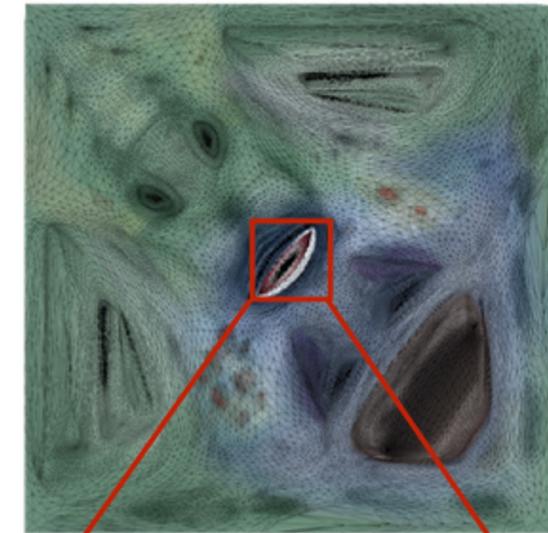
Renderização sem textura



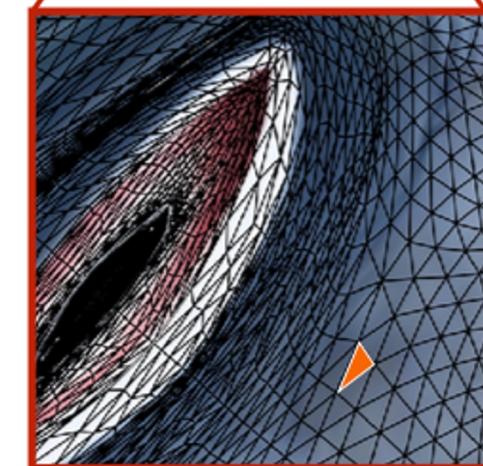
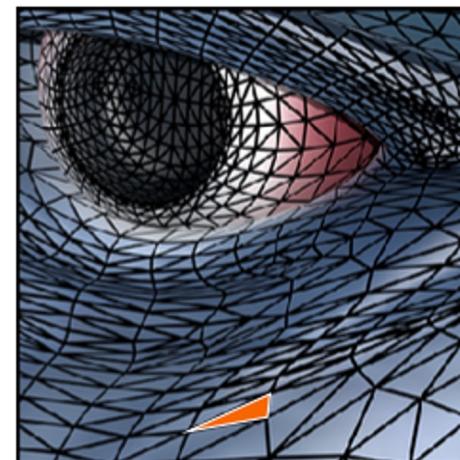
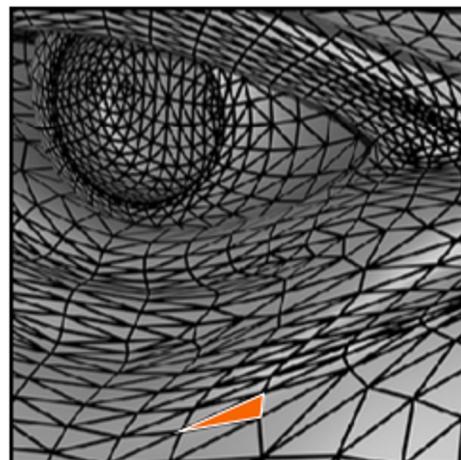
Renderização com textura



Textura



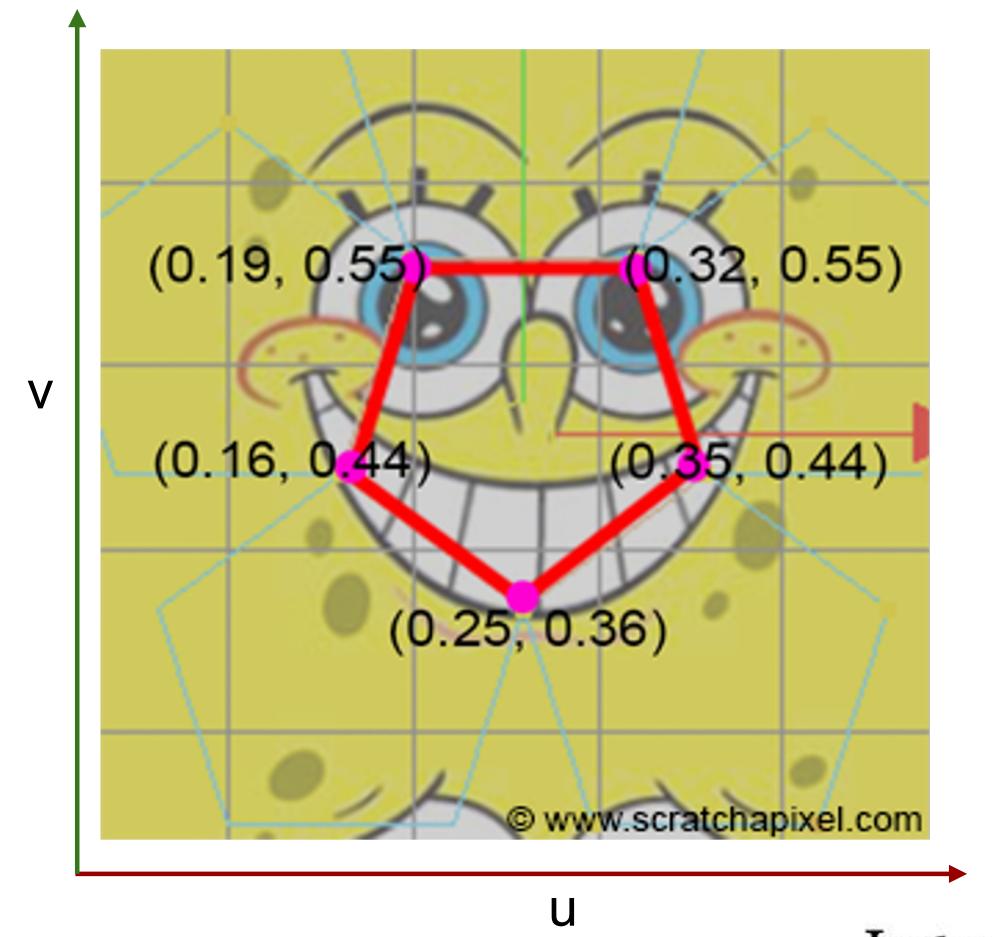
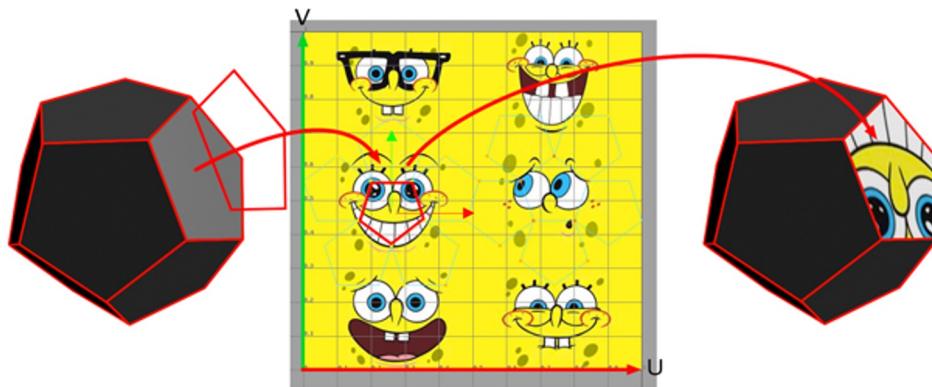
Zoom



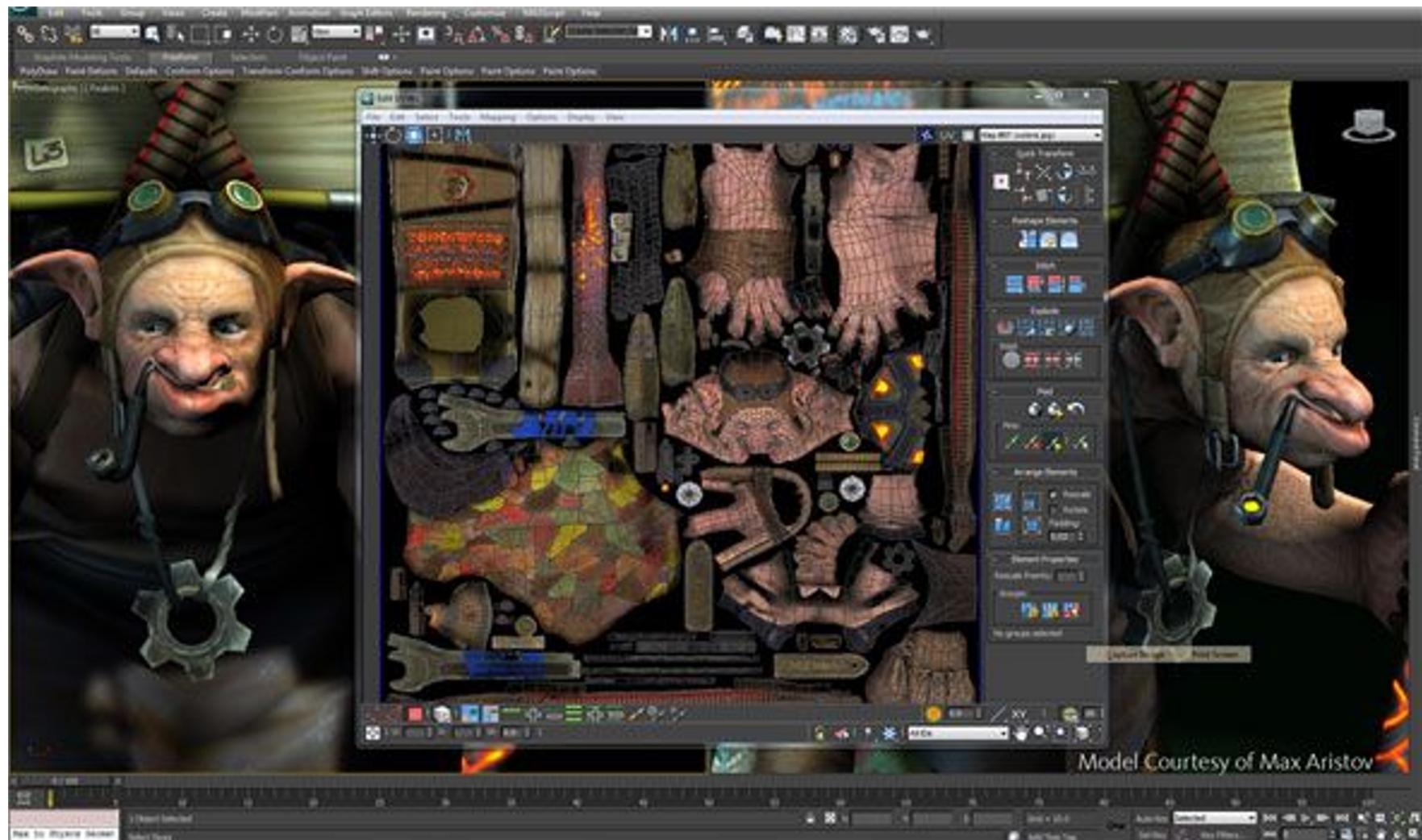
Cada triângulo "copia" um pedaço da textura para a superfície.

UV Layout

O processo pelo qual as faces são dispostas na superfície da textura é chamado de layout UV.



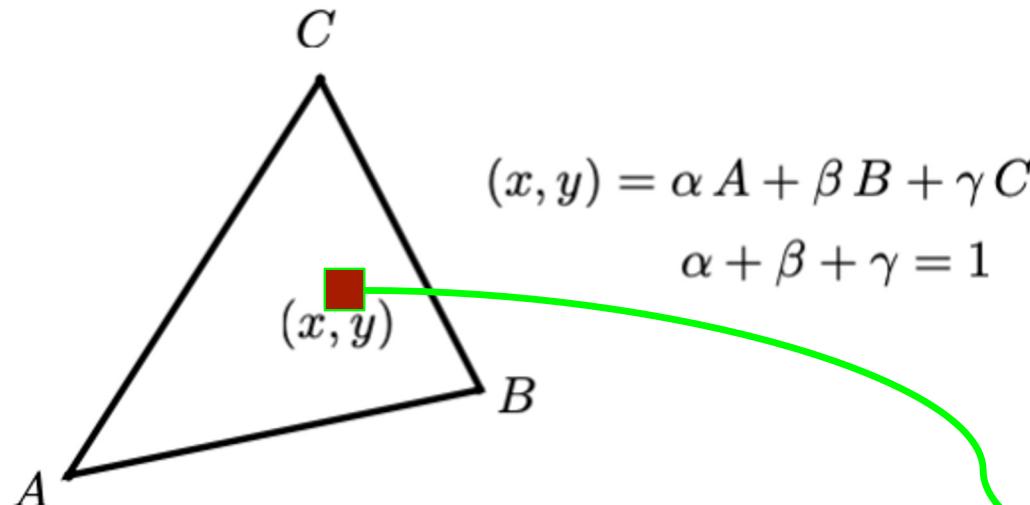
Mapeamento de Texturas



Operação de Mapeamento de Textura



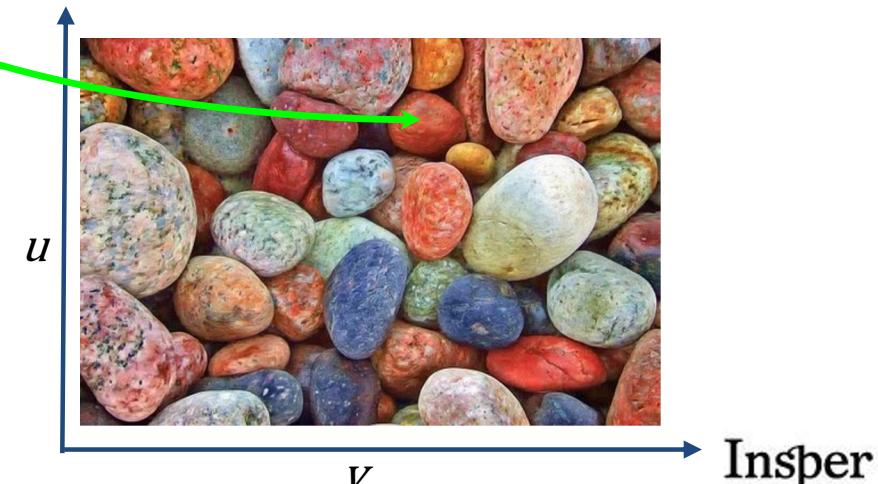
Ao rasterizar a tela no ponto(x, y) identificar o peso das coordenadas:



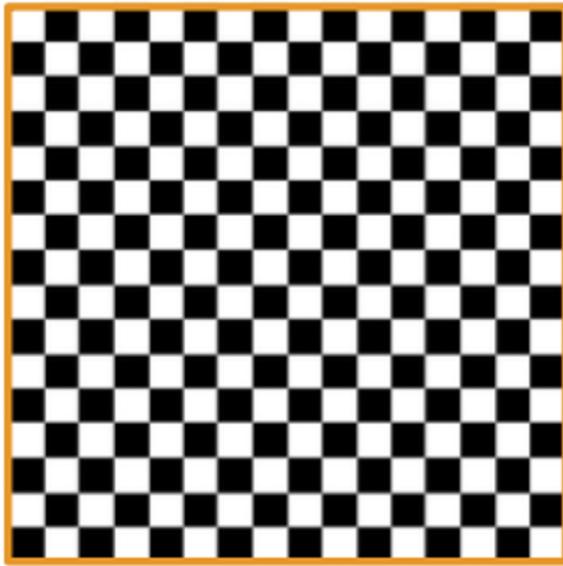
Avaliar o valor da cor na textura nas coordenadas (u, v) da textura.

Os valores das coordenadas de textura são dois (u, v) que são definidos em cada vértice.

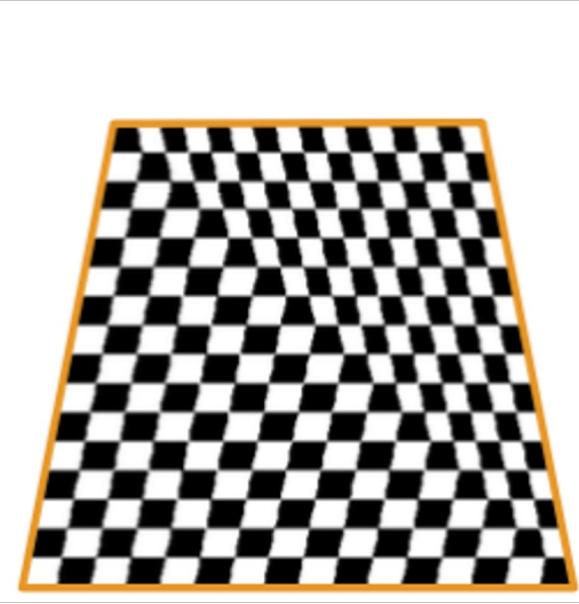
Use as mesmas interpolações para identifica o valor da coordenada de textura em (x, y) para valores (u, v)



Projeção Perspectiva e Interpolação



Textura



Plano inclinado
com uma projeção
perspectiva

O que está
errado?

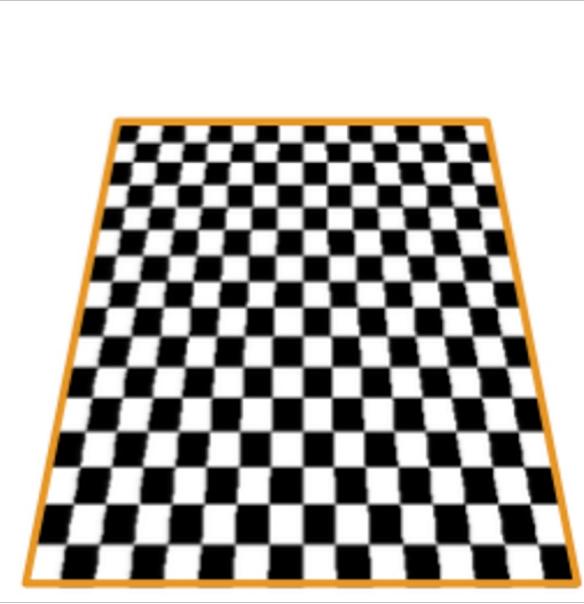
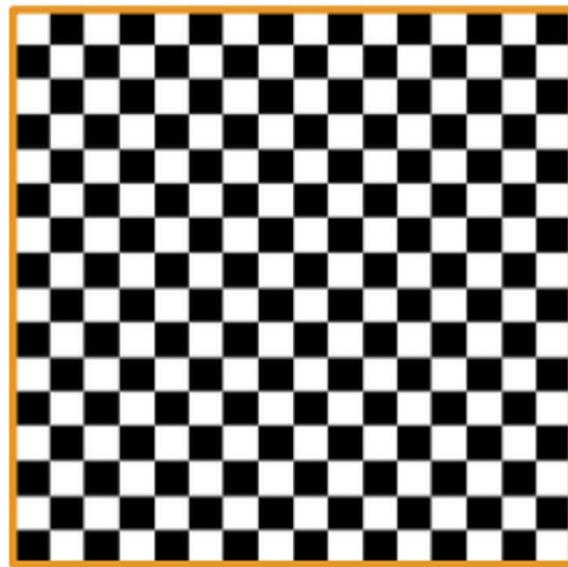
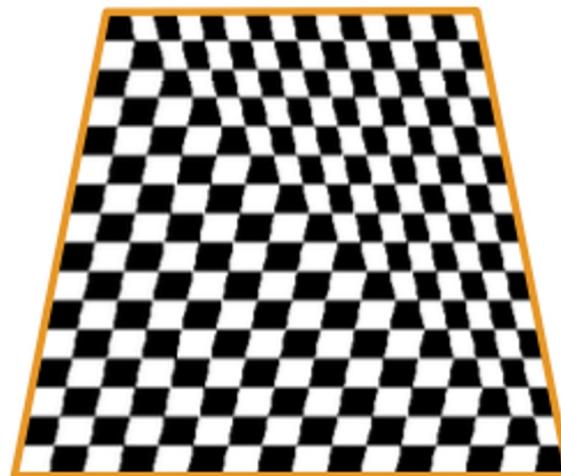


Imagen correta

Projeção Perspectiva e Interpolação



Textura



**Interpolação
baricêntrica de
coordenadas de
textura no espaço
da tela (2D)**

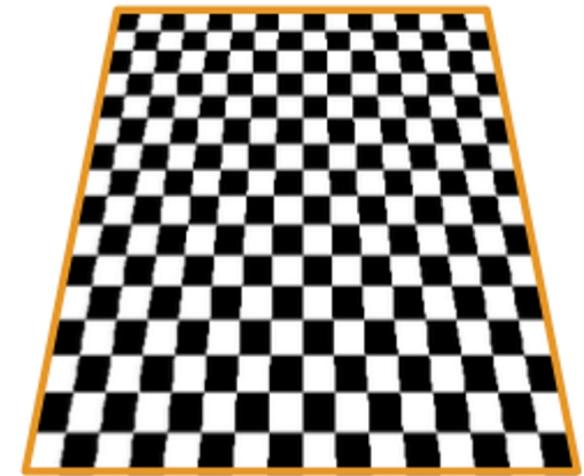
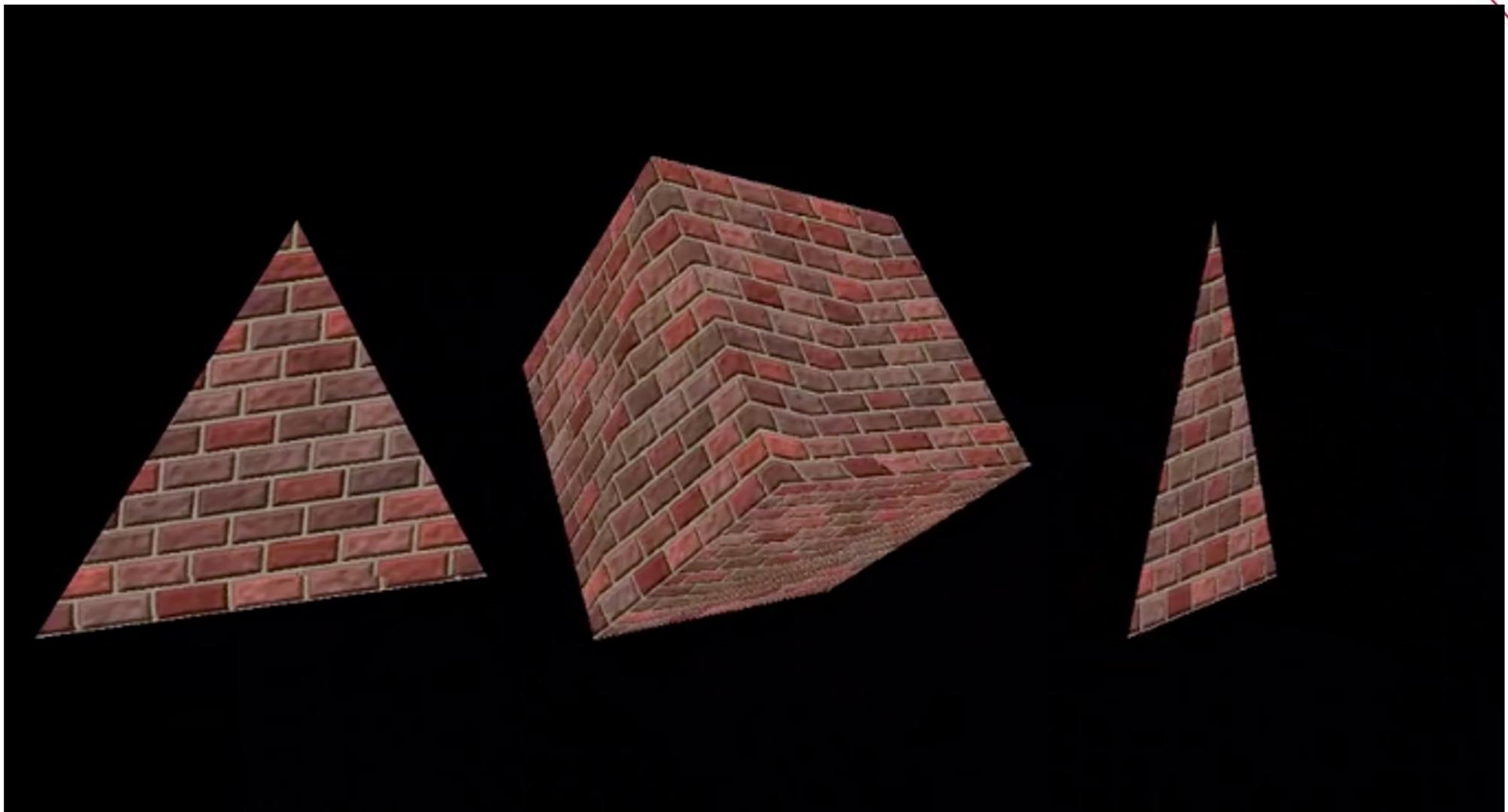


Imagen correta



Mapeamento de texturas Afim



PlayStation 1



O PS1 não tinha texturas corrigidas pela perspectiva. Hoje o PGXP (Parallel / Precision Geometry Transform Pipeline) é um aprimoramento para a emulação do PlayStation que produz geometrias 3D de alta precisão.



Computação Gráfica

Luciano Soares
[<lpsoares@insper.edu.br>](mailto:lpsoares@insper.edu.br)