

Computação Gráfica

Aula 4: Coordenadas Homogêneas e Quaternions



Retomando da última aula:

Coordenadas Homogêneas (em 2D)



Coordenadas Homogêneas (em 2D)

Adicionar mais uma coordenada (coordenada w)

Ponto 2D : $(x, y, 1)^T$

Vetor 2D : $(x, y, 0)^T$

A matriz para translação então fica:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas (2D)



Ideia: representa pontos 2D com 3 valores (coordenadas homogêneas)

Podemos usar a descrição 2D-H para coordenadas homogêneas em 2D

Logo as transformações são representadas por matrizes 3x3

Para se recuperar as coordenadas 2D de um ponto, basta dividir por w

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x/w \\ y/w \end{bmatrix}$$

Propriedades das Coordenadas Homogêneas



Operações em coordenadas homogêneas:
(válidas se a coordenada w do resultado for 1 ou 0)

vetor **+ vetor** **= vetor**

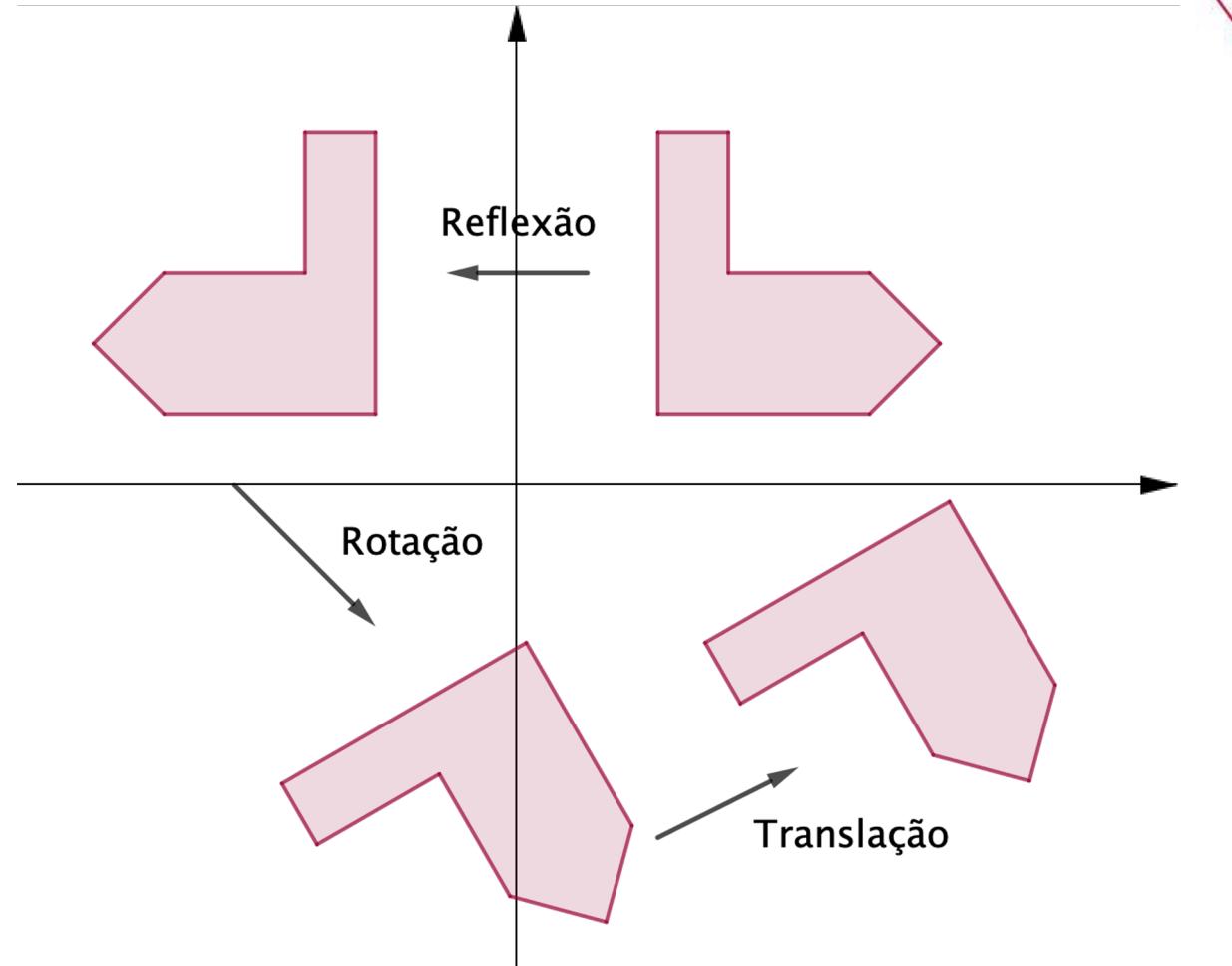
ponto **- ponto** **= vetor**

ponto **+ vetor** **= ponto**

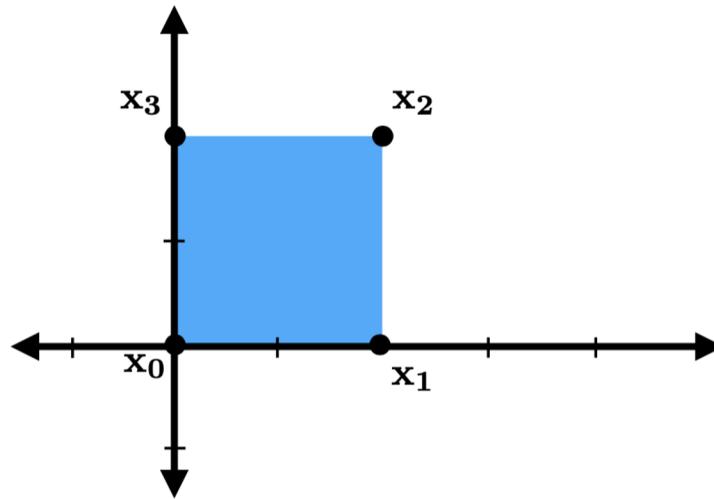
ponto **+ ponto** **= ??**

Composição de Transformações

É possível fazer a composição de transformações mais básicas para conseguir transformações mais complexas.

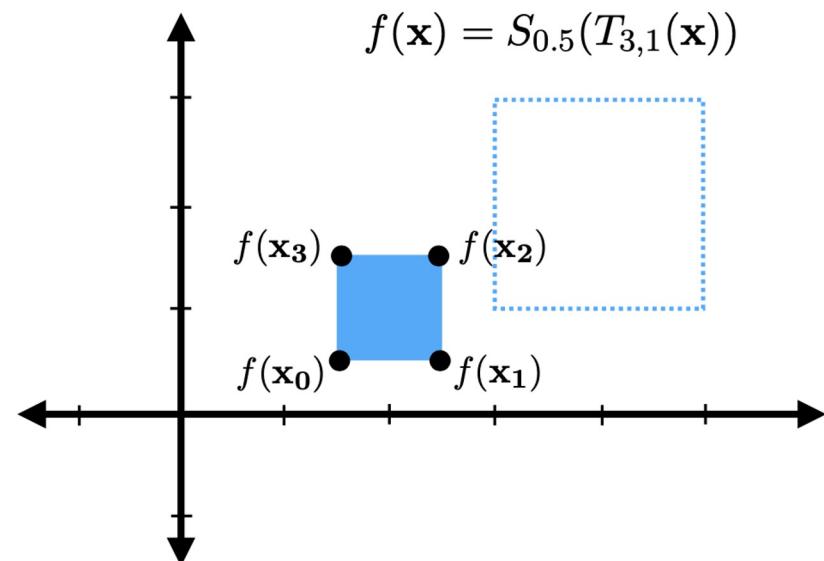
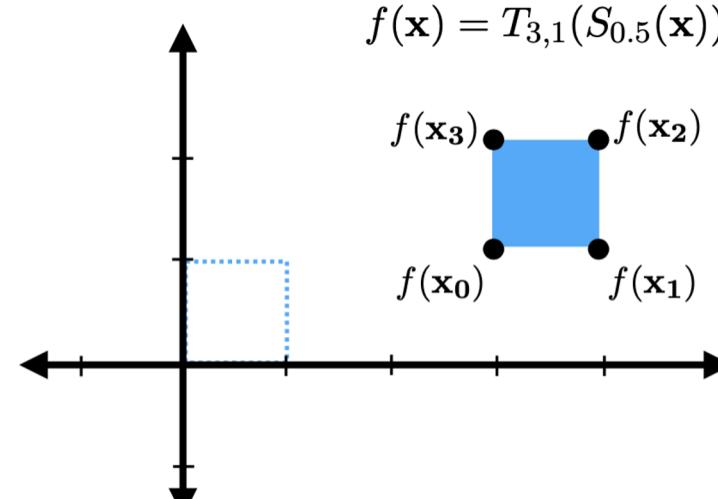


Composição de Transformações



Observação: a ordem em que as transformações são aplicadas importa!

- superior-direito: escala e translada
- inferior-direito: translada e escala



Composição de Transformações

As matrizes podem nos ajudar a compor transformações?

Rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad anti - horário :

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Reflexão no eixo x :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\pi/2} \times R_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

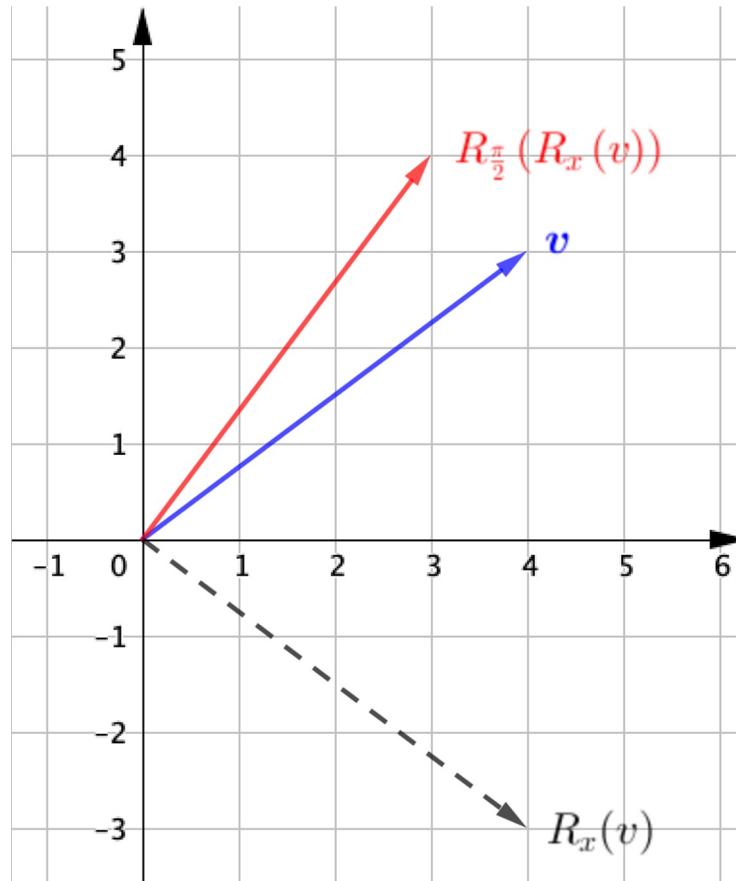
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Composição de Transformações



$$R_{\pi/2} \times R_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



Primeiro reflete em x e, depois, rotaciona $\pi/2$.

A composição obtida aplicando a transformação A seguida da B é indicada por:

$$B \circ A = B(A(v))$$

A matriz dessa composição é:

$$M_B \times M_A$$

Composição de Transformações

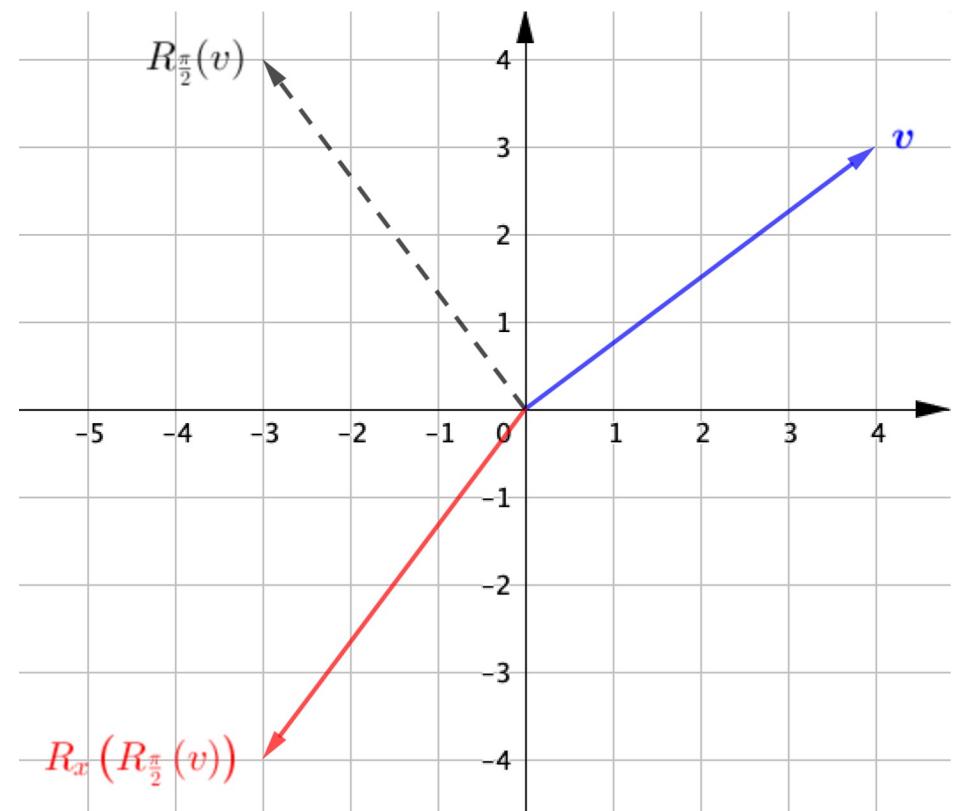


Observe o que acontece invertendo a ordem:

$$R_x \times R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Primeiro rotaciona $\pi/2$ e,
depois, reflete em x.





Composição de Transformações (2D-H)

E como fica nas coordenadas homogêneas?

Exemplo: escala $S_{0,5}$ seguida de translação $T_{3,1}$.

$$T_{3,1} \times S_{0,5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 3 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 3 \\ 0 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5x + 3 \\ 0,5y + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Composição de Transformações



Exercícios

Sumário de Transformações Geométricas Básicas



Lineares:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$f(a\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$$

- Escala
- Rotação
- Reflexão
- Cisalhamento

Não Lineares

- Translação

Transformações Afim:

Composição de uma transformação linear + translação

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

Isometria

Preserva a distância entre os pontos (comprimento)

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

- Translação
- Rotação
- Reflexão

Teorema - Transformações Geométricas Básicas



Toda isometria do plano, distinta da transformação identidade, é uma, e apenas uma, das seguintes transformações: translação, rotação, reflexão em relação a uma reta ou reflexão transladada.



Indo para o espaço 3D

Usando coordenadas homogêneas em 3D

Ponto 3D : $(x, y, z, 1)^T$

Vetor 3D : $\underline{(x, y, z, 0)^T}$

Matrizes 4x4 para transformações afim:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & t_x \\ d & e & f & t_y \\ g & h & i & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Indo para o espaço 3D

Transformações 3D como matrizes 3x3 e 3D-H como matrizes 4x4

Escala:

	3D	3D-H
$S_s = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}$	$S_s = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Cisalhamento: (em x)

	3D	3D-H
$H_{x,d} = \begin{bmatrix} 1 & d_y & d_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$H_{x,d} = \begin{bmatrix} 1 & d_y & d_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

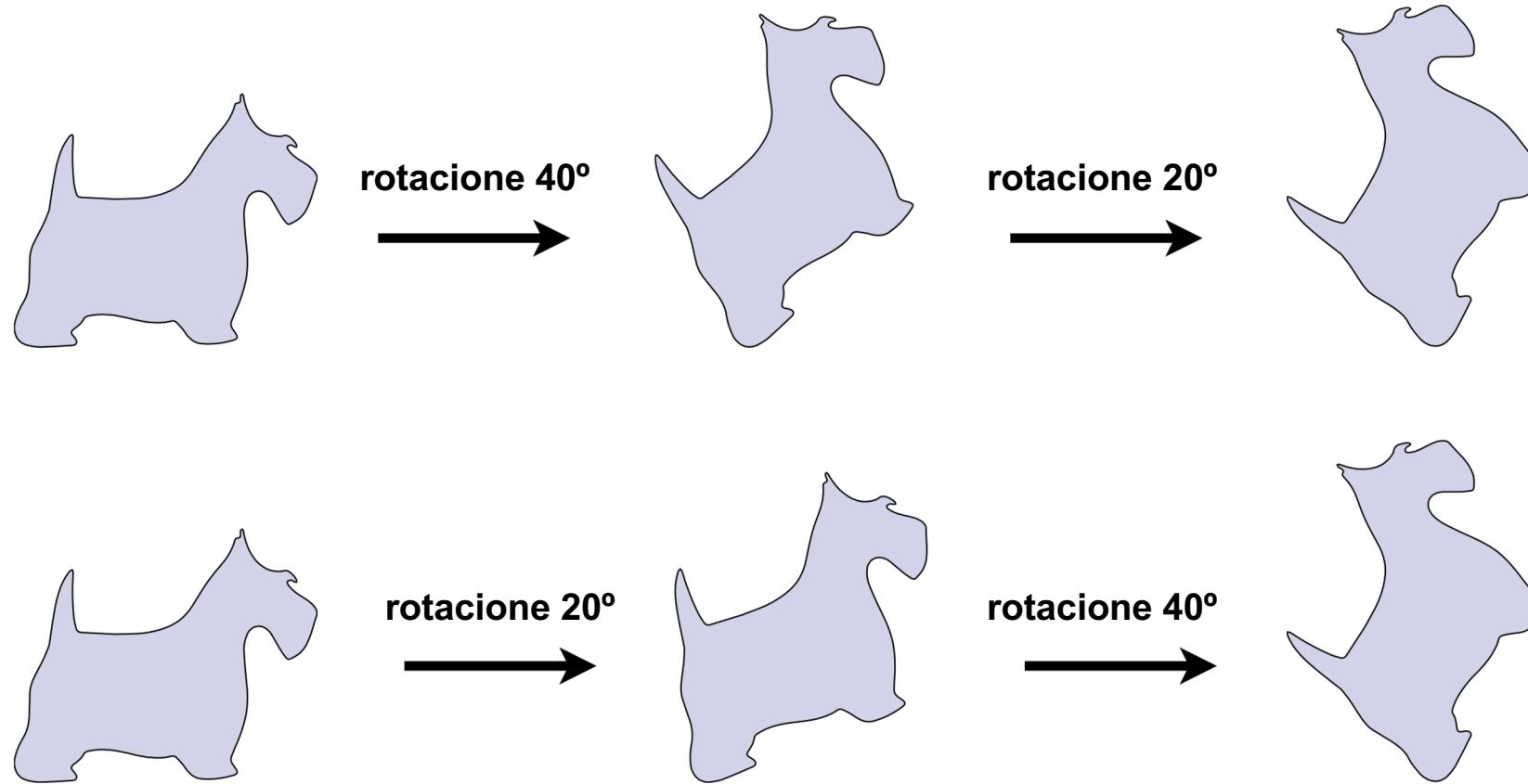
Translação:

	3D-H
$T_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & 0 & b_y \\ 0 & 0 & 1 & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Comutatividade da Rotação (em 2D)



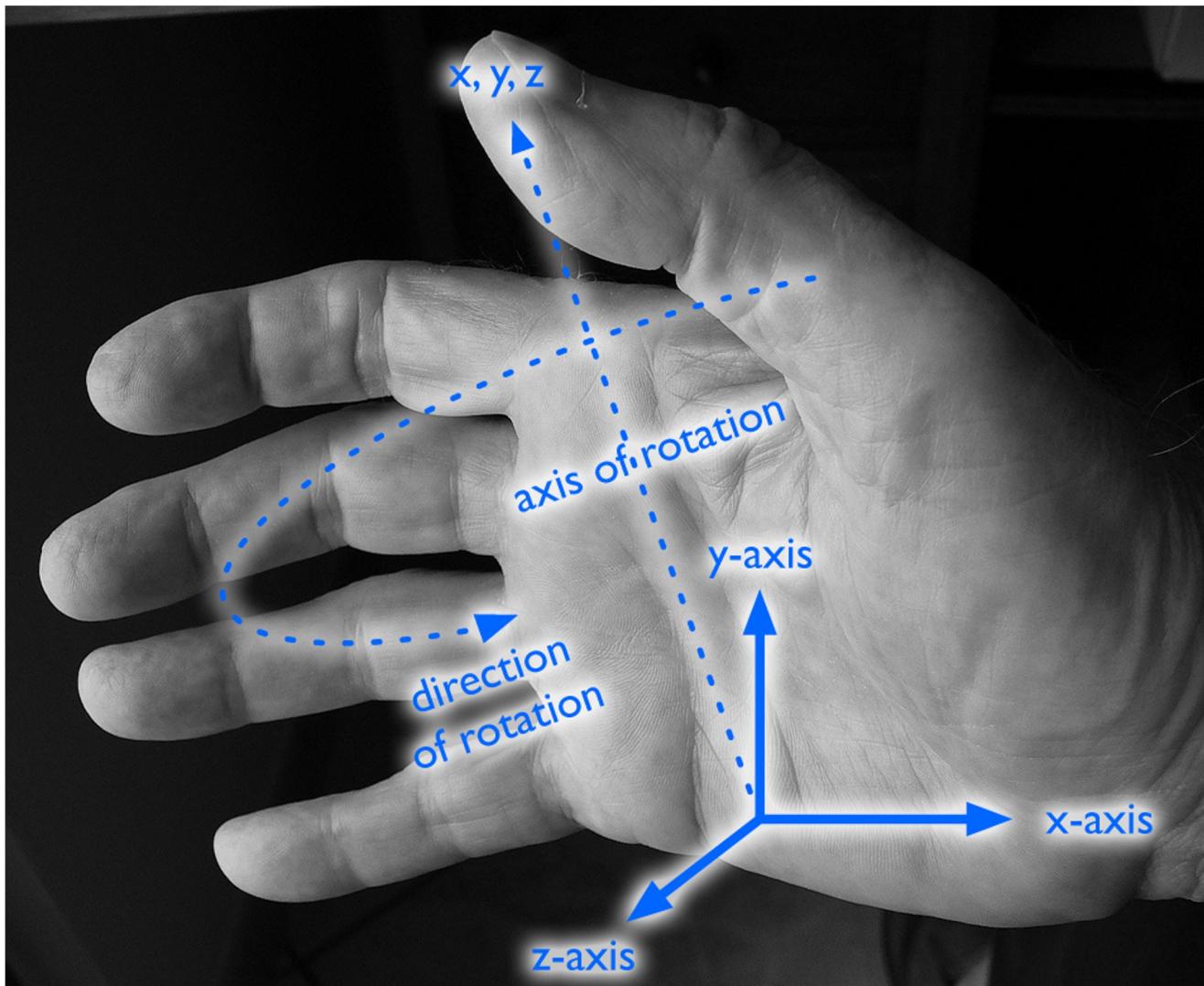
Em 2D a ordem da rotação não importa.



Mesmo resultado. Bom! É comutativo



Eixos e Rotações em 3D



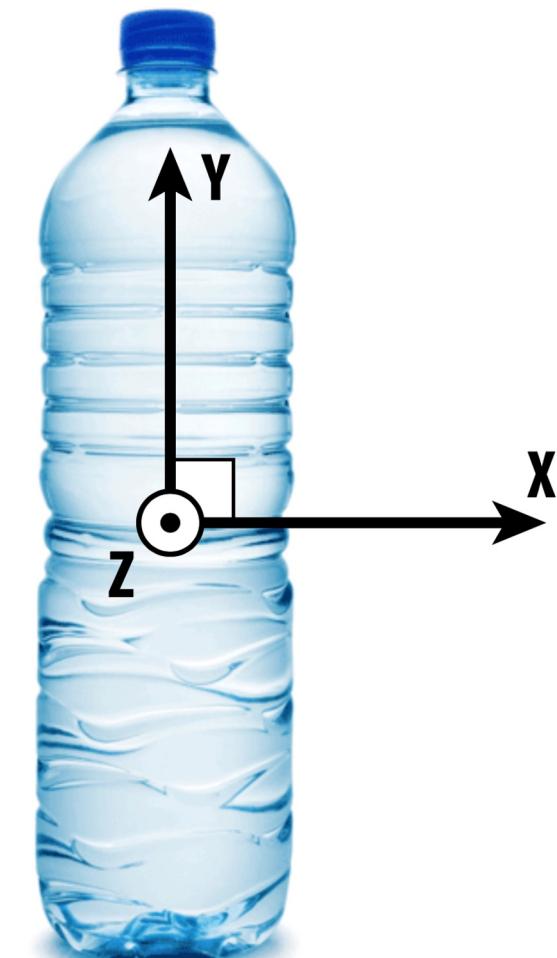
Comutatividade da Rotação (em 3D)

Experimento, gire a garrafa (sempre no sentido positivo da regra da mão direita):

- Gire 90° em torno de Y, a seguir 90° em torno de Z, a seguir 90° em torno de X
- Gire 90° em torno de Z, a seguir 90° em torno de Y, a seguir 90° em torno de X

Houve alguma diferença?

**Não é o mesmo resultado.
Isso pode dar problemas.**



Rotações em 3D por ângulos de Euler



Rotação sobre os eixos:

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

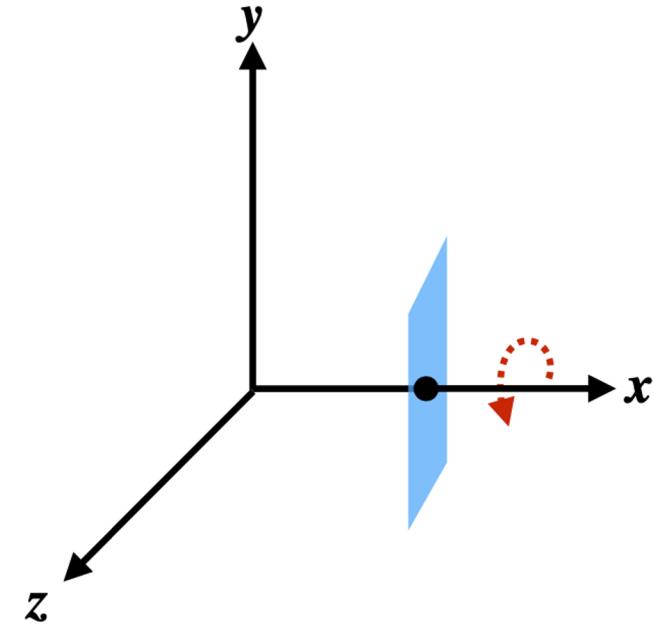
3D

3D-H

$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

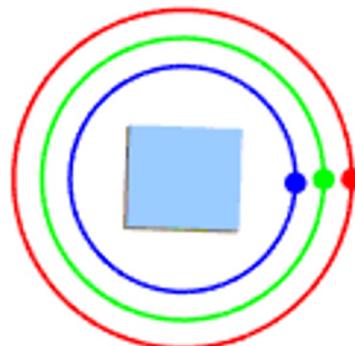
$$\mathbf{R}_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



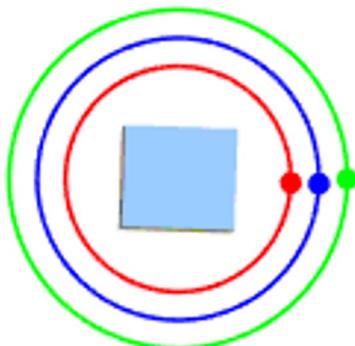
os pontos que estiverem sobre o eixo de rotação ficam inalterados.



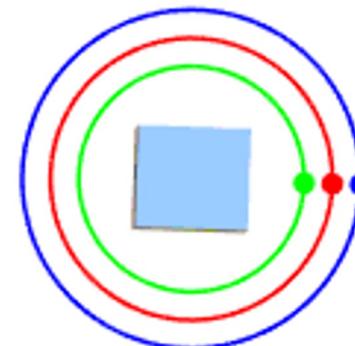
Problema 1: Ordem das rotações



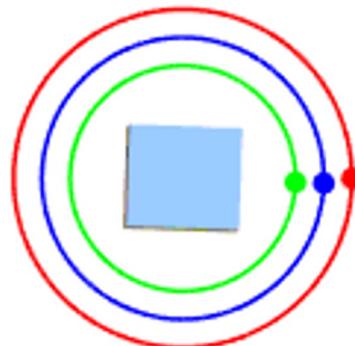
XYZ



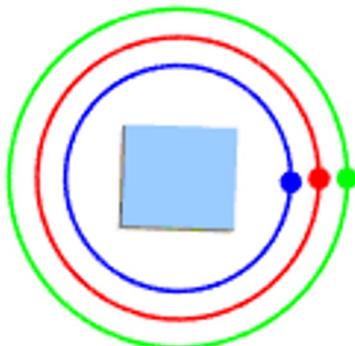
YZX



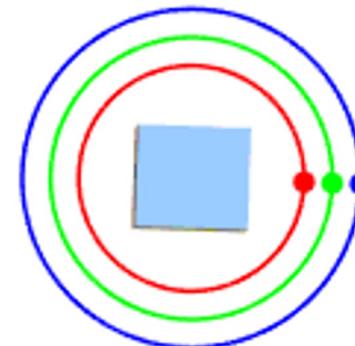
ZXY



XZY



YXZ



ZYX

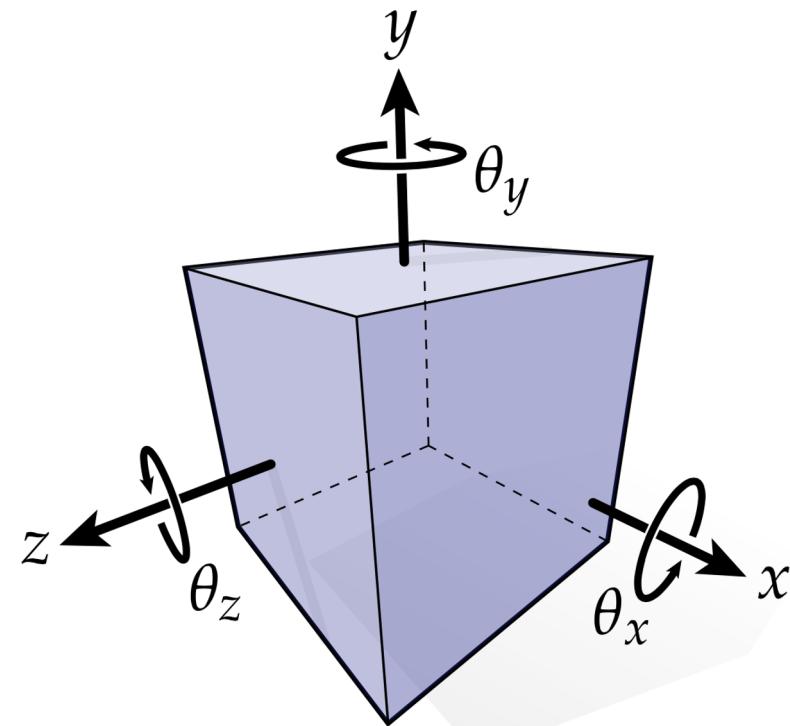
Rotações em 3D – ângulos de euler



Como expressamos rotações em 3D?

Possibilidade: aplicar rotações em torno dos três eixos? (X, Y, Z)

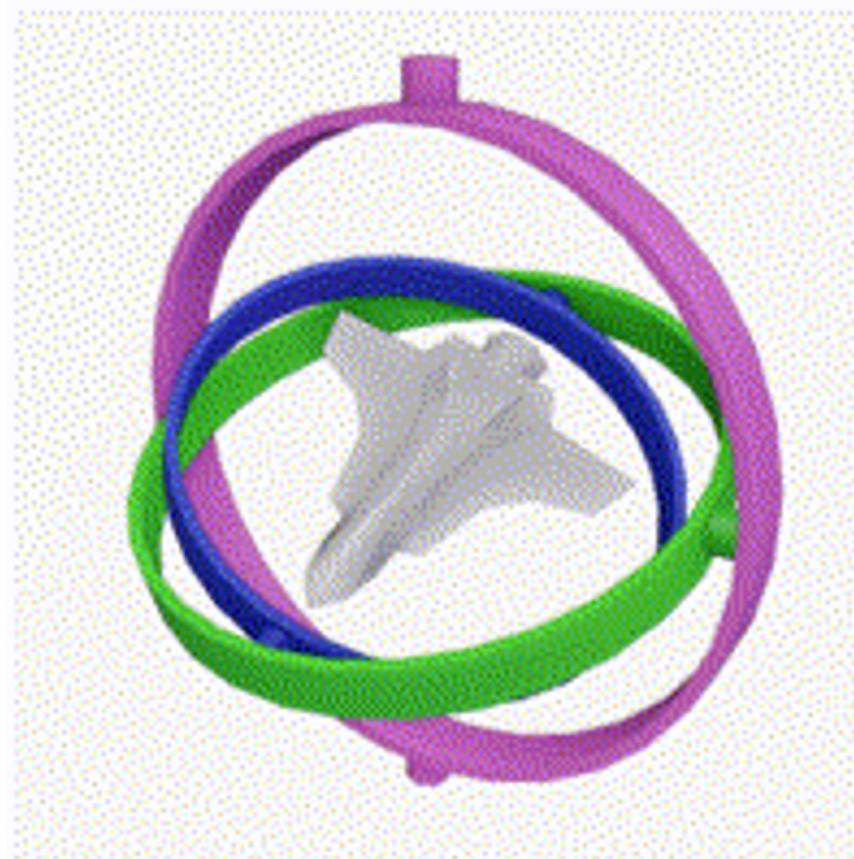
Essa proposta é chamada de ângulos de Euler





Problema 2: Gimbal Lock

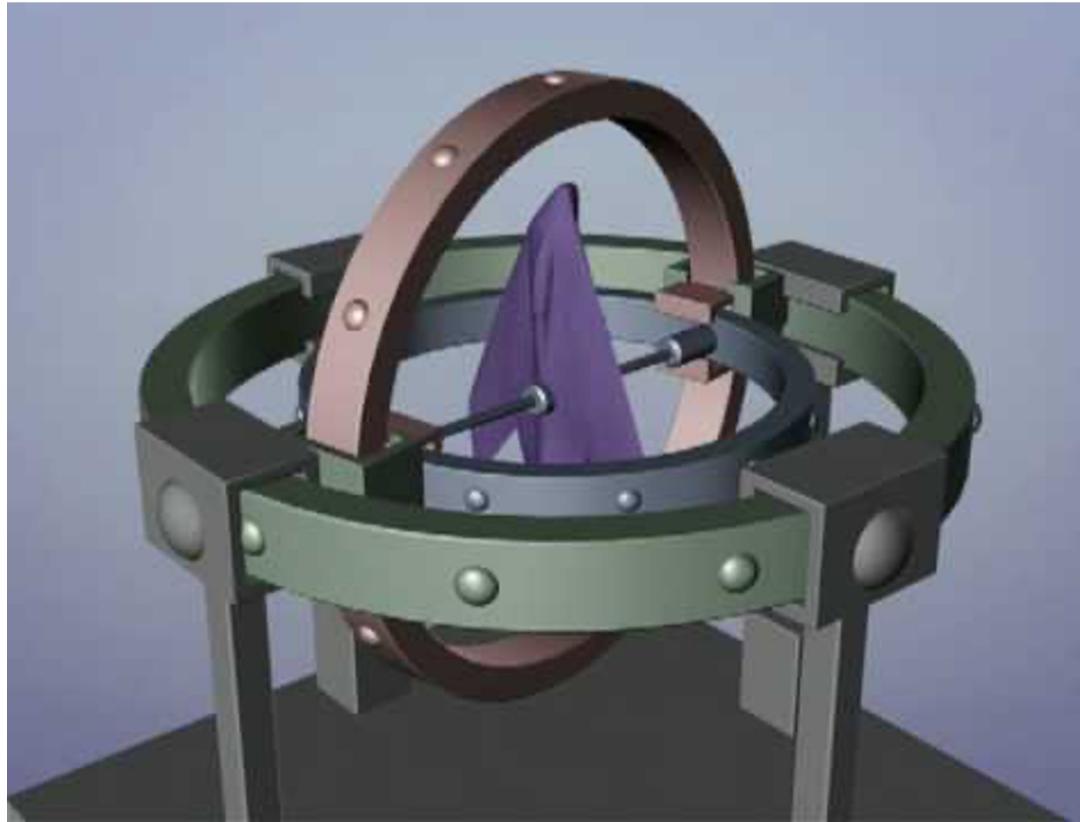
Conforme se executa rotações, uma rotação pode chegar a anular outras rotações.





Problema 2: Gimbal Lock

Vídeo sobre Gimbal Lock

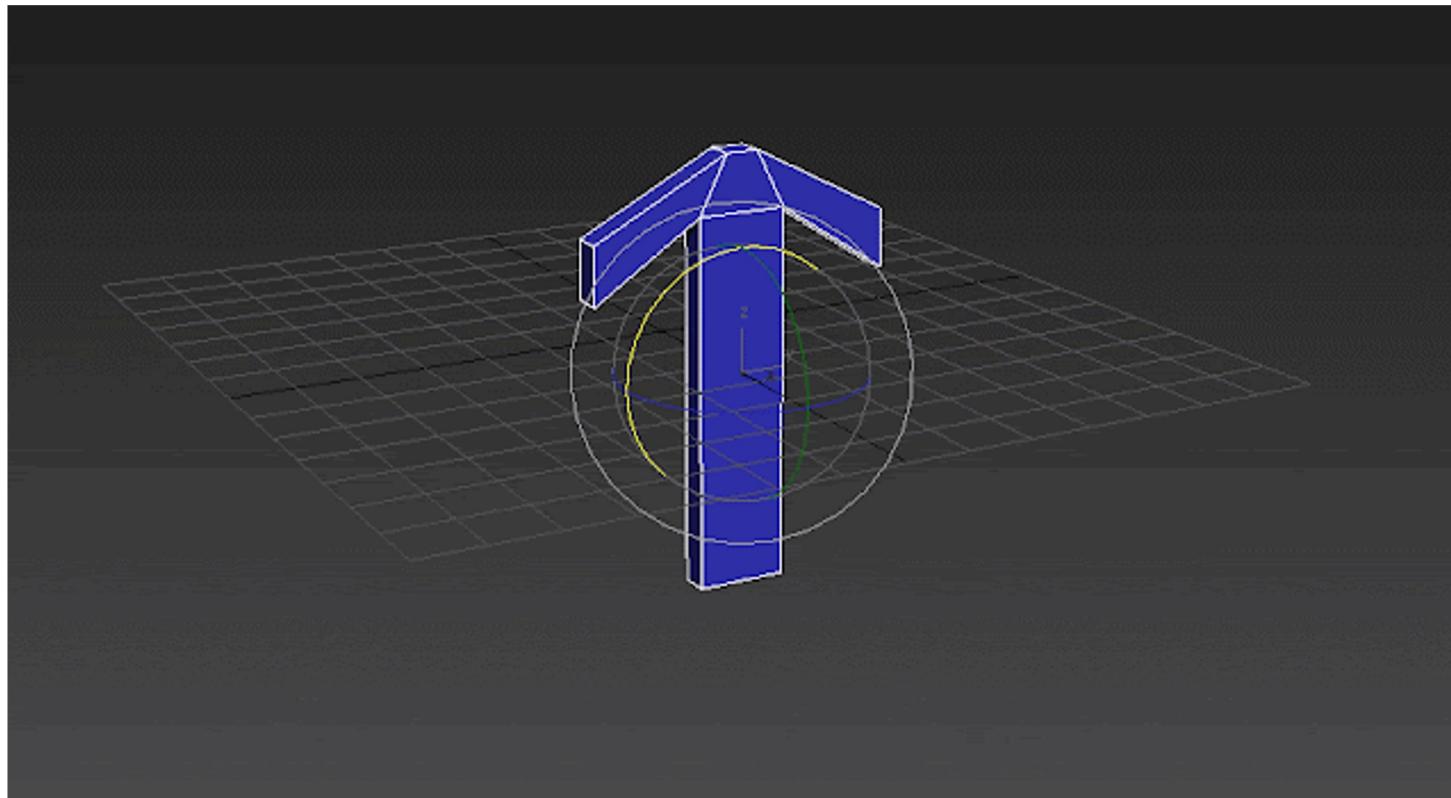


<https://www.youtube.com/watch?v=zc8b2Jo7mno>

problema 3 : SLERP



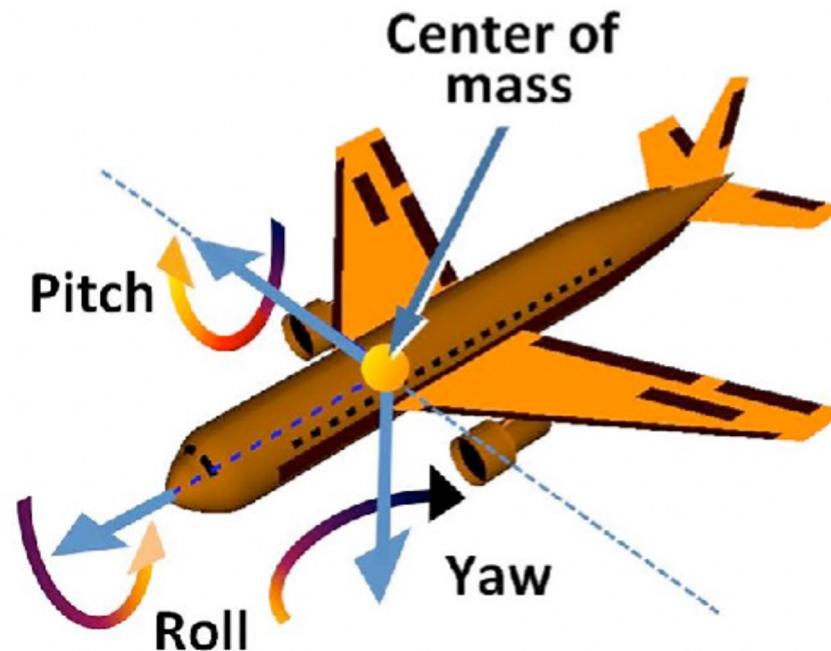
Interpolação de rotações podem ficar muito estranhas



Rotações em 3D



Para definir cada um dos ângulos a área de aviação usa os seguintes termos:



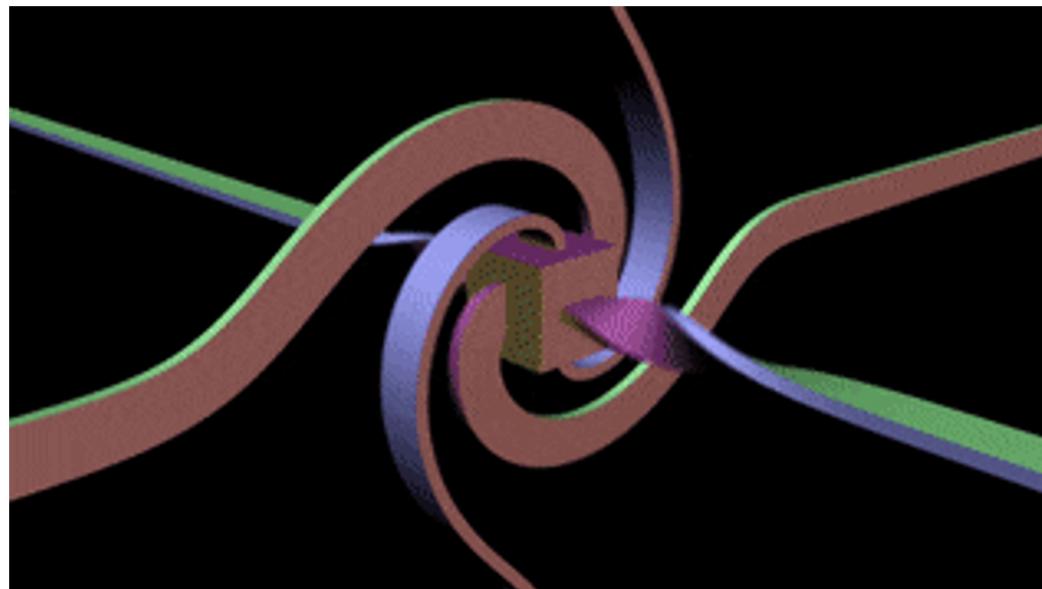
Wikipédia: Os **Ângulos de Tait–Bryan** (nomeados através de Peter Guthrie Tait e George Bryan), são um tipo específico de ângulos de Euler usados normalmente em aplicações aeroespaciais para definir a relativa orientação do aeroplano. Os três ângulos especificados nesta fórmula são especificados como empinamento (pitch ou θ), cabeceio (yaw ou ψ) e balanceio (roll ou ϕ).

Representação Alternativa de Rotações 3D



Quaternions.

$$a + bi + cj + dk$$



The Strange Numbers That Birthed Modern Algebra; Quanta Magazine



Quatérnios

Podemos pensar os números Complexos (\mathbb{C}) como uma extensão dimensional dos números Reais (\mathbb{R}).

Dessa forma, os Quatérnios (\mathbb{H}) são uma extensão para uma quarta dimensão dos números Reais.



O que são Quatérnios

- São quatro valores reais e três unidades imaginárias:

$$a + bi + cj + dk$$

Imaginários:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ijk = -1$$

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

$$ji = -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j$$

Reais (escalares)

$$a, b, c, d$$

Obs: Perceba que o produto dos imaginários i, j, k se comporta como um produto vetorial.

A base canônica dos quatérnios



O conjunto $\{1, i, j, k\}$ forma uma base dos quatérnios, pois todo quatérnio pode ser escrito como uma combinação linear desses elementos.

Note que se trata de uma **base ortonormal**.

Lembre que os vetores de uma base ortonormal são dois a dois ortogonais e têm comprimento unitário.



Como representar quatérnios

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$$

$$q = (q_r, q_i, q_j, q_k)$$

$$q = q_r + \mathbf{q}$$

Definição:

Para um quatérnio $q_r + \mathbf{q}$, dizemos que q_r é a parte escalar e \mathbf{q} é a parte vetorial.



Multiplicação de Quatérnios

Podemos representar o produto de quatérnios de diversas formas:

$$\begin{aligned}\mathbf{pq} &= (p_r + p_i i + p_j j + p_k k)(q_r + q_i i + q_j j + q_k k) \\ &= (p_r q_r - p_i q_i - p_j q_j - p_k q_k) + (\dots)i + (\dots)j + (\dots)k\end{aligned}$$

Uma forma de representar o produto de quatérnios é usando a representação de produtos escalares e produtos vetoriais:

$$\mathbf{pq} = p_r q_r - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_r \mathbf{q} - q_r \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$



Quatérnios

Não são comutativos

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_1$$

Porém manipulações usuais são válidas

$$(\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3)$$

$$(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3$$

$$\mathbf{q}_1 (\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) = \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_3$$

$$\lambda(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = \lambda \mathbf{q}_1 + \lambda \mathbf{q}_2 \quad (\lambda \text{ é escalar})$$

$$(\lambda \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2 = \lambda (\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2) = \mathbf{q}_1 (\lambda \mathbf{q}_2) \quad (\lambda \text{ é escalar})$$



Conjugado

Seja z um número complexo.

$z \in \mathbb{C}$; Lê – se z pertence ao conjunto dos números complexos

Então temos que o nosso número z é escrito da seguinte forma:

$z = x + yi$, ou em forma de coordenada $z = (x, y)$

O conjugado do número z é representado por \bar{z} , e para obtermos este conjugado, basta trocarmos o sinal da parte imaginária do número z , sendo assim:

$\bar{z} = x - yi$, ou em forma de coordenada $\bar{z} = (x, -y)$.

Propriedades

- $|z| = |\bar{z}|$ (O módulo do conjugado de um número é o mesmo módulo do número)
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (o produto de um número pelo seu conjugado é o quadrado do módulo do número)
- $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ (a soma de um número ao seu conjugado é o dobro da parte real do número)
- $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)$ (a subtração de um número ao seu conjugado é o dobro da parte imaginária do número)



Conjugado

Conjugado de um quatérnio

$$q = q_r - q_i i - q_j j - q_k k$$

Assim:

$$q \bar{q} = (q_r + \mathbf{q})(q_r - \mathbf{q})$$

$$q \bar{q} = q_r^2 + q_r \mathbf{q} - q_r \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{q}$$

$$q \bar{q} = q_r^2 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}$$

$$q \bar{q} = q_r^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2$$

Comprimento:

$$|q| = \sqrt{q \bar{q}} = \sqrt{q_i^2 + q_j^2 + q_k^2 + q_r^2}$$



Propriedades algébricas dos quatérnios

Inverso de um quatérnio: $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$

Quatérnio unitário: $|q| = 1$

Inverso de um quatérnio unitário: $q^{-1} = \bar{q}$

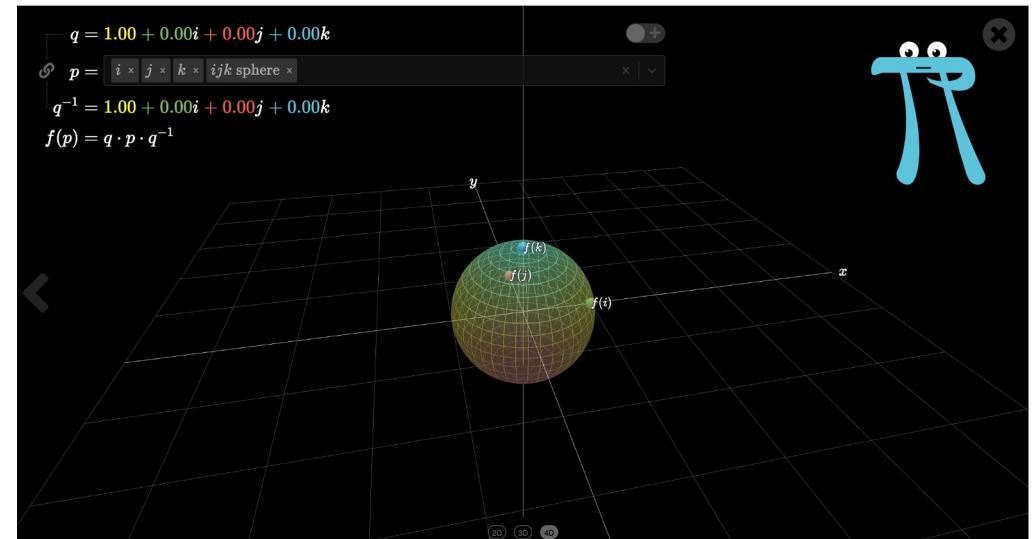
Quatérnios e Rotações



Rotações são representadas por quatérnios unitários

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$$

$$q_i^2 + q_j^2 + q_k^2 + q_r^2 = 1$$



- Quatérnios unitários vivem em uma superfície esférica unitária no \mathbb{R}^4
- Os quatérnios q e $-q$ representam a mesma rotação
- A rotação nula (identidade) é o quatérnio $= 1$



Rotação de Quatérnios unitários

Uma rotação é definida por um eixo u com uma rotação θ .

$$\begin{aligned}\text{eixo} &= [u_x \quad u_y \quad u_z] \\ \text{ângulo} &= \theta\end{aligned}$$

Um quatérnio terá a parte escalar igual a $\cos(\theta/2)$ e sua parte imaginária (indicada por um ponto no espaço) como os eixos multiplicados pelo $\sin(\theta/2)$ e os respectivos valores imaginários.

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_x i + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_y j + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u_z k$$



Quatérnios Unitários e Rotações

Para trabalharmos com a rotação por quatérnios, precisamos deles normalizados:

$$\hat{q} = \frac{q_r + q_i i + q_j j + q_k k}{\sqrt{q_r^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2}}$$

Sua rotação pode ser realizada pela operação:

$$rot(v) = q \cdot v \cdot q^{-1}$$

Representação Quaternios em Coord. Homogêneas



Na prática:

$$\hat{q} = q_i i + q_j j + q_k k + q_r = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \\ q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \sin \frac{\theta}{2} \\ u_y \sin \frac{\theta}{2} \\ u_z \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

O que leva uma matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_j^2 + q_k^2) & 2(q_i q_j - q_k q_r) & 2(q_i q_k + q_j q_r) & 0 \\ 2(q_i q_j + q_k q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_k^2) & 2(q_j q_k - q_i q_r) & 0 \\ 2(q_i q_k - q_j q_r) & 2(q_j q_k + q_i q_r) & 1 - 2(q_i^2 + q_j^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A definição acima armazena quaternion como uma matriz seguindo a convenção usada em (Wertz 1980) e (Markley 2003)*

Computação Gráfica

Luciano Soares
[<lpsoares@insper.edu.br>](mailto:lpsoares@insper.edu.br)