Computação Gráfica

Aula 26: Normal e Gradiente

Revisão de Geometria

Para uma esfera centrada em (C_x,C_y,C_z) temos a seguinte equação:

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = R^2$$

Se P ∈ superfície esférica $\Rightarrow \left|\overrightarrow{CP}\right| = R$

$$|P - C|^2 = R^2$$

Assim a equação da esfera na forma vetorial é:

$$(P - C) \cdot (P - C) = R^2$$

Revisão de Geometrias

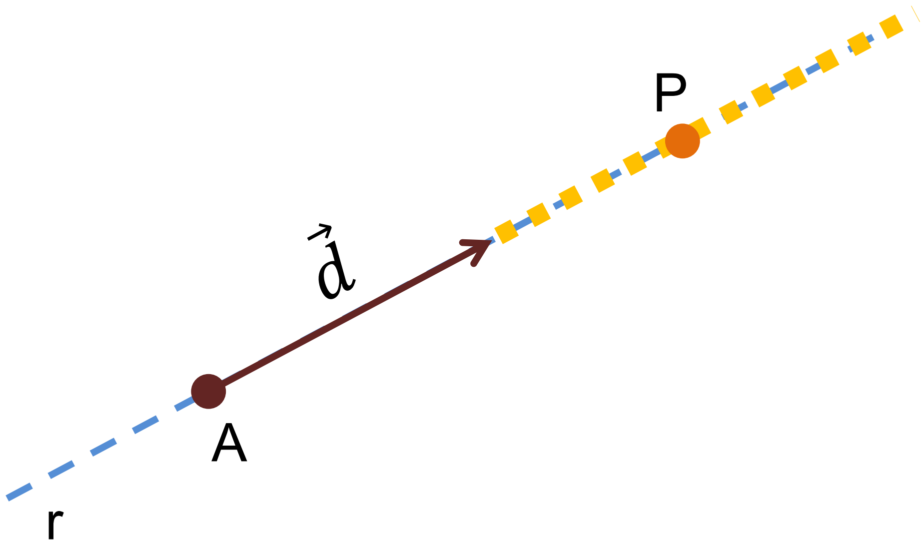
$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

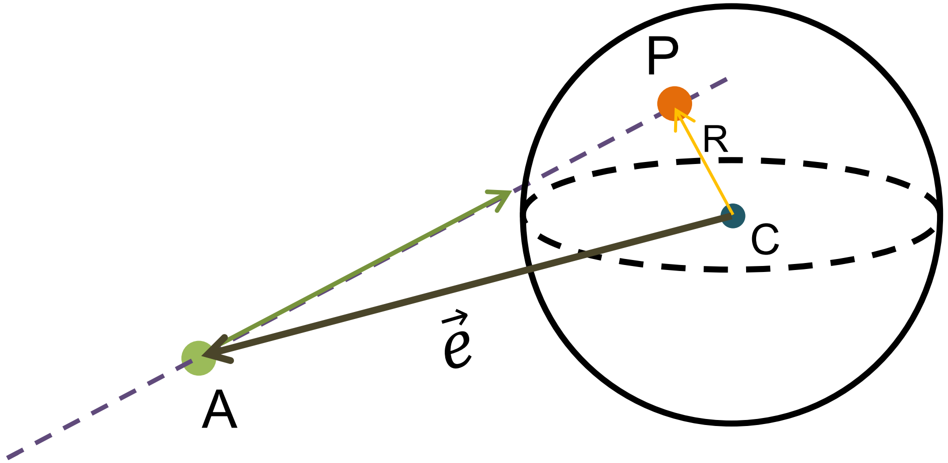
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (v_x, v_y, v_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Insper

Reta





$$P \in r \Rightarrow \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que}$$

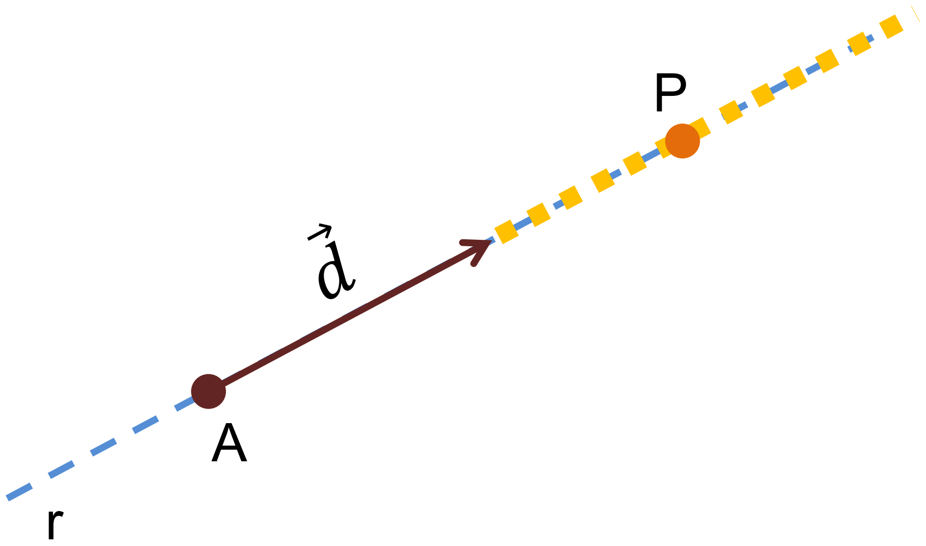
$$P = A + t\vec{d}$$

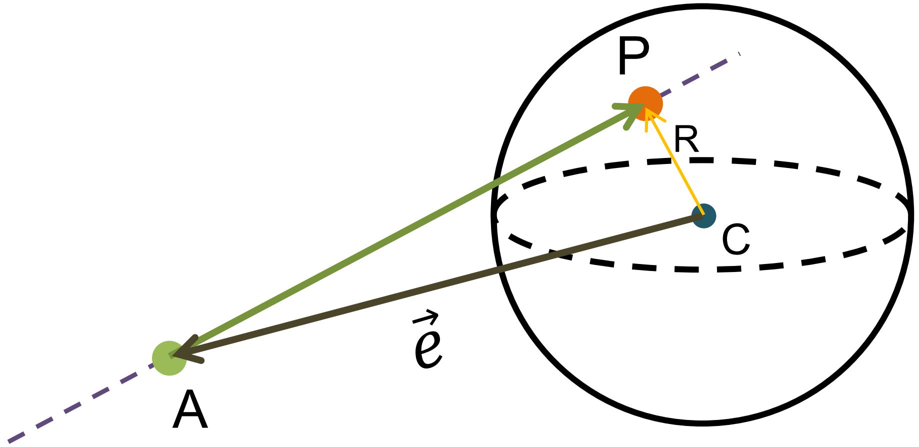
$$P \text{ satisfaz } \begin{cases} *\text{Equação da esfera } (P-C)\cdot(P-C) = R^2 \\ *\text{Equação da reta } (A+t\vec{d}-C)\cdot(A+t\vec{d}-C) = R^2 \end{cases}$$

Temos de verificar se o t existe nessas condições

Insper

Reta



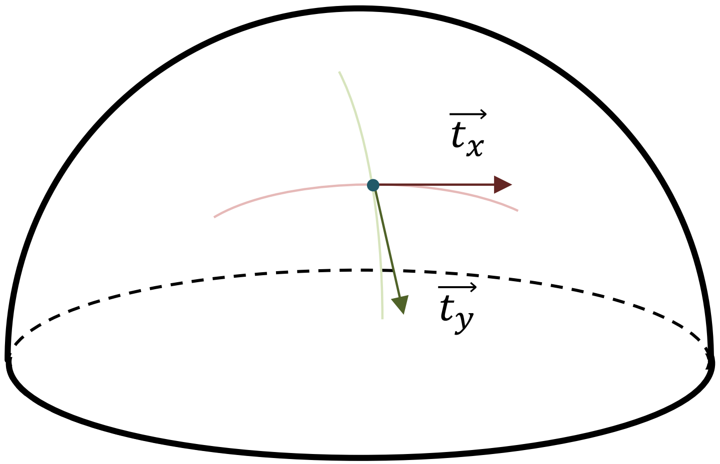


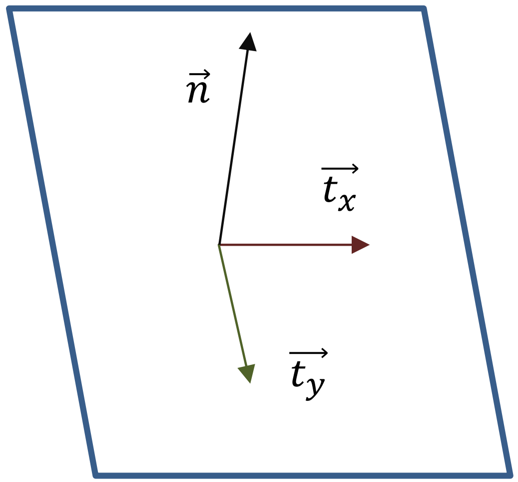
$$\left(t\vec{d}-\vec{e}\right)\cdot\left(t\vec{d}-\vec{e}\right)=R^2$$

$$\underbrace{\left(\vec{d}\cdot\vec{d}\right)}_{\text{a}}t^2+\underbrace{2\left(\vec{d}\cdot\vec{e}\right)}_{\text{b}}t+\underbrace{\vec{e}\cdot\vec{e}-R^2}_{\text{c}}=0$$

$$at^2+bt+c=o$$

Vetor Normal





plano tangente

$$\vec{n} = \overrightarrow{t_y} \wedge \overrightarrow{t_y}$$ (produto vetorial)

Plano Tangente

Superfície definida implicitamente (esfera):

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$F(x,y,z) = 0$$

Equação do plano tangente:

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$$

Plano Tangente

Equação geral de um plano

$$ax + by + cz + d = 0$$

$\vec{n} = (a, b, c)$ vetor normal ao plano

Equação do plano tangente:

$$\underbrace{\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}}}_{a} x + \underbrace{\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}}_{b} y \underbrace{\boxed{-1}}_{c} z + \underbrace{\boxed{\left(z_0 - \frac{\partial z}{\partial x} x_0 - \frac{\partial z}{\partial y} y_0\right)}}_{d} = 0$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$$

Vetor normal ao plano tangente

Insper

Derivação Implícita

$$F(x, y, z) = 0$$

Equação do plano tangente:

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Exemplo para esfera

Para uma esfera de raio R $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}_{F(x,y,z)} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} - \frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right) = \left(-\frac{x}{z}, -\frac{y}{z}, -1\right) = -\frac{1}{z}(x, y, z)$$

Calculando pelo Gradiente

O vetor normal $\vec{n}$ de um ponto $p(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de uma função implícita $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pode ser calculada pelo seu gradiente $\nabla f \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{\nabla f(x, y, z)}{\|\nabla f(x, y, z)\|}$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

Insper

Calculando o gradiente de um ponto na esfera

Para uma esfera centrada em (C_x,C_y,C_z) temos a seguinte equação:

$$f(x,y,z) = (x - C_x)^2 + \left(y - C_y\right)^2 + (z - C_z)^2 - R^2$$

Calculando o $\nabla f(x,y,z)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) =$$

$$\left(2(x - C_x), 2\left(y - C_y\right), 2(z - C_z)\right)$$

Insper

Normal da esfera pelo gradiente

Para uma esfera centrada em (C_x,C_y,C_z) temos a seguinte equação:

$$\vec{n}(x,y,z) = \frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|}$$

Simplificando e normalizando:

$$\vec{n}(x,y,z) = \frac{\left((x - C_x),(y - C_y),(z - C_z)\right)}{\left\|\left((x - C_x),(y - C_y),(z - C_z)\right)\right\|}$$

Computação Gráfica

Luciano Soares
<lpsoares@insper.edu.br>

Fabio Orfali
<fabioo1@insper.edu.br>