

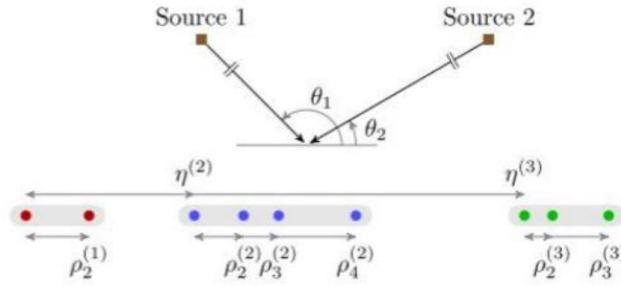
## 数字信号处理课程 Project

林宝诚 2019080030

### 1. 背景介绍

本次任务主要涉及的是阵列信号处理的知识。阵列信号处理是个很广的研究领域，其在现实生活中的应用也很多，包括雷达、声纳、太空探索、无线通讯等。这方面的知识能够解决许多信号探测和预测问题，其中本次任务就将着重在信源角度（Direction-of-Arrival DOA）估计。对于 DOA 角度估计，学术界中提出的方案不胜枚举，这次主要学习了经典的基于子空间估计方法 – MUSIC 和 root-MUSIC，并研究不同算法下，不同信噪比对测角准确度的影响。

### 2. 模型说明



图【1】

首先考虑如图【1】中的分布式阵列。场景中总共存在  $S = 3$  组子阵，每个子阵存在  $M = 8$  个阵元。设第一个子阵的第一个阵元处于原点（0），每个子阵都是均匀线性阵列，子阵内阵元间距  $d = \frac{\lambda}{2}$ ，第  $i$  个子阵的第一个阵元相对原点的距离为  $\xi_{i-1}$ 。

另外，假定场景中有  $D$  的不相干的信号源  $\vec{s}(t)$ ，信号源可以假设为  $\mathbf{0}$  均值高斯随机信号或者含随机初始相位的正弦信号（仿真中假设为白高斯信号  $f(t)e^{j\omega t}$ ， $f(t)$  为高斯过程，波长为  $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ）。为了简化问题，假设子阵共线，设信号源的角度分别位于  $[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{D-1}]$  角度。

利用三角函数的知识，容易计算每个子阵内阵元间信号的相位差：

$$\Delta\vec{\phi}_1(\theta) = [0, \pi \sin \theta, 2\pi \sin \theta, \dots, \pi(M-1) \sin \theta]^T$$

$$\Delta\vec{\phi}_2(\theta) = [0, \pi \sin \theta, 2\pi \sin \theta, \dots, \pi(M-1) \sin \theta]^T + \frac{2\pi\xi_1 \sin \theta}{\lambda}$$

$$\Delta\vec{\phi}_3(\theta) = [0, \pi \sin \theta, 2\pi \sin \theta, \dots, \pi(M-1) \sin \theta]^T + \frac{2\pi\xi_2 \sin \theta}{\lambda}$$

最后，考虑加性的独立白噪声 $\vec{n}(t)$ ，每个阵元接收到的信号就是所有不同信号源和噪声的相加，因此可以写出特定时间 $t$  接收到的信号 $\vec{x}(t)$ ：

$$\vec{x}(t) = A\vec{s}(t) + \vec{n}(t)$$

$$\vec{x}(t) = \exp\left(\begin{bmatrix} -j\Delta\vec{\phi}_1(\theta_0) \dots -j\Delta\vec{\phi}_1(\theta_{D-1}) \\ -j\Delta\vec{\phi}_2(\theta_0) \dots -j\Delta\vec{\phi}_2(\theta_{D-1}) \\ -j\Delta\vec{\phi}_3(\theta_0) \dots -j\Delta\vec{\phi}_3(\theta_{D-1}) \end{bmatrix}\right) \vec{s}(t) + \vec{n}(t)$$

各向量矩阵小结：

向量 & 矩阵	维度
信号源角度 $\vec{\theta}$	$D \times 1$
信号源 $\vec{s}(t)$	$D \times 1$
子阵内部相位差 $\Delta\vec{\phi}_i(\theta)$	$M \times 1$
阵列流形 A	$MS \times D$
接收信号 $\vec{x}(t)$	$MS \times 1$

### 3. 算法简介

下面将依次介绍基于 DFT、MUSIC 和 root-MUSIC 的 DOA 估计原理。

- 基于 DFT 的 DOA 估计

考虑不含噪声的线性均匀阵列，且信号源已知：

$$\vec{x}(t) = \exp([ -j\Delta\vec{\phi}(\theta_0) \dots -j\Delta\vec{\phi}(\theta_{D-1}) ]) \vec{s}(t)$$

上述方程也可写成：

$$\vec{x}(t) = \sum_i s_i(t) \exp([ -j\Delta\vec{\phi}(\theta_i) ])$$

每个求和项可以看成是一个长为 $M$ 离散信号序列，且是对一个复指数信号的抽样（相位差部分可以类比于 DSP 课程中熟悉的 $\omega n$ ）。这时，问题就转变成求复指数信号的频率，因此只需求 $\vec{x}(t)$ 的傅里叶变换，然后在频谱中寻找峰值即可。

在数字频谱分析中已经学习过，由于加窗的原因，频谱中会出现主瓣和一系列旁瓣，造成分辨率受限和较难分辨小信号的问题。因此，工程应用中似乎并不会使用此方法，而是会采用其他能够提供更高分辨率的算法，比如 MUSIC。

注：上述推导只是想总结出一个基本想法，如果信号源是随机信号，且含噪声，则需要使用自相关函数来推导，这里就不展开了。

- MUSIC

首先，考虑阵元数量为 $M$ 的线性均匀阵列和 $D$ 个不相干信源，根据上面已介绍过的数学模型模型：

$$\vec{x}(t) = A\vec{s}(t) + \vec{n}(t)$$

由于涉及随机信号，故使用相关原理进行分析。对于子空间的方法，要求 $M > D$ 。个别写出 $\vec{s}(t)$ 和 $\vec{n}(t)$ 的自相关矩阵

$$E[\vec{s}(t)\vec{s}^*(t)] = R_{ss}$$

$$E[\vec{n}(t)\vec{n}^*(t)] = R_{nn} = \sigma_n^2 I$$

其中噪声为假设为白噪声。这里，由于信源不相干， $R_{ss}$ 是满秩的（秩为 $D$ ）。进一步，可以写出接收信号 $\vec{x}(t)$ 的自相关矩阵：

$$R_{xx} = E[\vec{x}(t)\vec{x}^*(t)]$$

$$R_{xx} = AR_{ss}A^* + \sigma_n^2 I$$

已知自相关矩阵是厄米矩阵，利用 spectral theorem：

$$R_{ss} = \sum_{i=1}^D \lambda_i v_i v_i^* = V \Lambda V^*$$

其中， $\lambda_i$ 为非零且非负实特征值（自相关矩阵非负定）。因此，

$$R_{xx} = AV\Lambda V^*A^* + \sigma_n^2 I$$

从上述式子中可以看出，维度为 $M \times M$ 的 $AR_{ss}A^*$ 是奇异矩阵，其只有 $D$ 个非零的实特征值，并有 $M - D$ 个为0的特征值。容易验证 $R_{xx}$ 与 $AR_{ss}A^*$ 有相同的特征向量，且 $R_{xx}$ 特征向量对应的特征值为 $\lambda_i + \sigma_n^2$ ，所以 $R_{xx}$ 中有 $M - D$ 个为 $\sigma_n^2$ 的特征值。

对于 $R_{xx}$ ，假设 $e_i, i = 1, \dots, M - D$ 为对应特征值 $\sigma_n^2$ 的特征向量，有

$$AR_{ss}A^*e_i = 0$$

$$(A^*e_i)^*R_{ss}(A^*e_i) = 0$$

已知 $R_{ss}$ 满秩（不相干的信号源），则有：

$$A^*e_i = 0$$

这就表示了 $A$ 的列空间与 $e_i$ 正交。由于 $A$ 包含角度信息， $e_i$ 对应噪声，因此就可以借着正交性分为信号子空间（signal subspace）和噪声子空间（noise subspace）两个部分。

实际场景中是通过快拍取平均形式计算 $\hat{R}_{xx}$ :

$$\hat{R}_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \vec{x}(t) \vec{x}^*(t)$$

通过对 $\hat{R}_{xx}$ 进行特征值分解，再取最小的 $M - D$ 个特征值相应的特征向量（对应噪声子空间）。然后，利用正交性，找寻所有角度使得下述方程为 0:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^{M-D} |a^H(\theta) e_i|^2$$

其中 $\vec{a}$ 为矩阵 $A$ 的列向量。或者，可定义伪谱，并遍历所有角度找寻峰值:

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M-D} |a^H(\theta) e_i|^2}$$

- Root-MUSIC

Root-MUSIC 算法与 MUSIC 算法的差别只在于最后求解方程使用的方法。由于 $a^H(\theta)$ 是复指数的形式，可以类比成 DTFT 中的 $e^{-j\omega n}$ ，在 root-MUSIC 中，伪谱写为:

$$P_{root-MUSIC}(z) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M-D} E_i(z) E_i^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}$$

这时只需取令分母为 0，且最靠近单位圆的 $z$ ，再取其幅角即可求得信号源角度（注意还需进行 $\arcsin$ 等简单代数运算）。

从文献和 Matlab 文档中可知 MUSIC 和 root-MUSIC 属于高分辨率的角度估计方法（虽然不确定其分辨率表达形式），性能比基于 DFT 的 DOA 估计好。

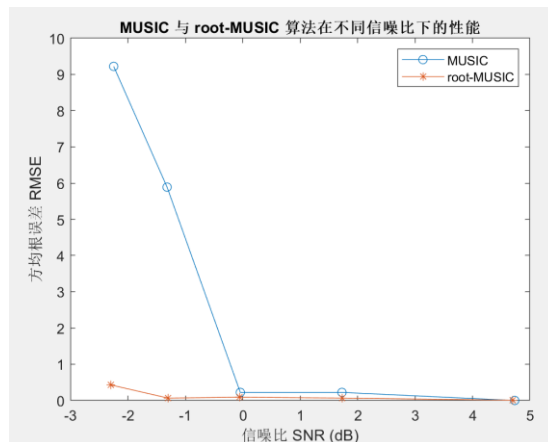
上述算法中的推导都是基于线性均匀阵列，与给定的含多子阵的阵列有所差别。由于知识水平有限，来不及学习 multiple invariance 阵列的 DOA 估计，即无法融合不同子阵的信息实现联合测角，因此采取的方式是将每一个子阵当成独立的阵列，分别进行测角，再取平均获得最后的角度估计值。

#### 4. 仿真与分析

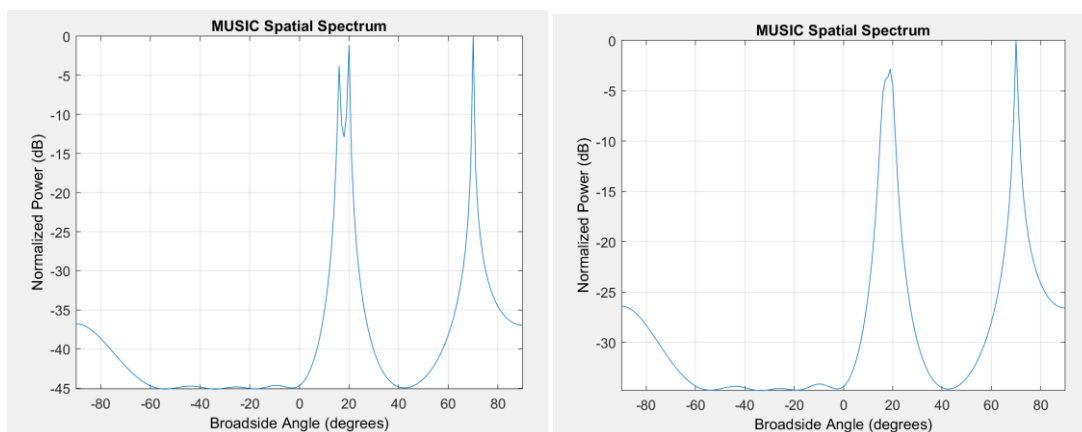
- 比较 MUSIC 和 root-MUSIC 在不同信噪比情况下的角度估计性能的影响

仿真中设定了 3 个信号源，角度分别为 $16^\circ, 20^\circ, 70^\circ$ 。每个子阵第一个阵元的位置分别为 $0, 5\lambda, 10\lambda$ ，即子阵间隔为 $1.5\lambda$ 。信号源为波长为 $1m$  的白高斯信号（载波频率 $f = 3 \times 10^8 Hz$ ）。噪声功率（方差）分别为 $1, 2, 3, 4, 5$ 。仿真结果如下：

注：由于噪声和信号的随机性，每次仿真结果都会有些区别。



图【2】不同算法下 RMSE 与 SNR 关系



图【3-4】部分 MUSIC 谱（左：高信噪比；右：低信噪比）

根据图【2-4】的结果，容易发现随着信噪比的增加，误差也相应增加。噪声会使得测量准确度变低（因为会影响特征值的选取）。另一方面，仿真中因为有两个角度较为接近的信号源，较大的噪声导致了两个峰值变得非常接近，直至无法分辨，这时误差就会有较大幅度的提高。

另外，从本次实验结果来看，root-MUSIC 的算法相比 MUSIC 算法性能较好，其在较高信噪比的情况下仍然能够区分较为接近的两个角度。虽然如此，根据文献[4]中的结果，两者的性能较为相似，因此这部分需要在更深入的研究后才能够做出合理分析与结论。

## 5. 总结与感想

本次实验大作业中初步研究了 MUSIC 和 root-MUSIC 算法和信噪比对算法性能的影响。当然，作为一个上个世纪末就已经提出的算法，MUSIC 相关的研究已经非常丰富，在它之后也有不少基于子空间的算法被提出，因此可以继续学习探讨的内容也有不少。相比起应用场景，MUSIC 算法的思路更令我印象深刻，因为推导过程中运用了以前接触过的线性代数知识（还有随机过程），通过模型的建立和一些数学基础的知识就能够设计出实用性高的算法，用以解决实际工程问题。因此，本次作业令我进一步意识到数学基础知识的重要性。就算以后不往阵列信号处理的方向发展，想必基于子空间的想法也能够运用到其他不同研究方向中，所以是非常有价值的。

随着大作业的完成，本学期的数字信号处理课程也来到了尾声。对我而言，这门课难度不小，具有较大的挑战性，不过可以从中收获不少实用的知识，毕竟数字信号处理在现实生活中扮演着举足轻重的角色，且是后续专业课如数字图像处理的基础。在此感谢老师和助教一学期的付出。

## 参考文献

- [1] Hayes, Monson H., *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, John Wiley & Sons, Inc., 1996. [ISBN 0-471-59431-8](#).
- [2] A. L. Swindlehurst, P. Stoica and M. Jansson, "Application of MUSIC to arrays with multiple invariances," 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No.00CH37100), 2000, pp. 3057-3060 vol.5, doi: 10.1109/ICASSP.2000.861182.
- [3] A. L. Swindlehurst, P. Stoica and M. Jansson, "Exploiting arrays with multiple invariances using MUSIC and MODE," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 49, no. 11, pp. 2511-2521, Nov. 2001, doi: 10.1109/78.960398.
- [4] N. P. Waweru, D. B. O. Konditi, & P. K, "LangatPerformance Analysis of MUSIC, Root-MUSIC and ESPRIT DOA Estimation Algorithm," <https://doi.org/10.5281/zenodo.1091734>, 2014