

UNIVERSIDAD NACIONAL DE RIO CUARTO

Trabajo de tesis para la obtención del grado de Licenciatura en Ciencias de la
Computación

**Título : Un Model Checker Puramente
Funcional Para μ -Cálculo**

Autor
Luciano Putruele

Director de Tesis: *Dr. Pablo F. Castro*
Co-Director de Tesis: *Dr. Germán Regis*

Rio Cuarto, Argentina
Abril 2016

Resumen

En esta tesis desarrollaremos una herramienta puramente funcional para la verificación de sistemas, llamada MC2 (Mu-Calculus Model Checker), la cuál utiliza la técnica llamada model checking (o verificación de modelos) para determinar la verdad de propiedades lógicas sobre descripciones de sistemas. Este verificador trabaja sobre modelos de sistemas formalizados en un lenguaje simple de descripción de programas que también será desarrollado en este trabajo, y utiliza el μ -Cálculo como formalismo de especificación de propiedades. El model checker se encargará de verificar estas propiedades sobre algún modelo descripto. Cabe destacar que tanto el lenguaje de descripción de modelos como el verificador forman parte de la misma herramienta.

El lenguaje de descripción de modelos MC2 se basa en la definición de reglas de transición usando proposiciones lógicas atómicas con lo cual es transparente ver la estructura del modelo como una máquina de transición de estados más allá de que internamente los modelos se representan simbólicamente por medio de fórmulas lógicas para mejorar el rendimiento.

El objetivo principal es utilizar esta herramienta para la resolución de acertijos lógicos, a la vez que también se permite la verificación de propiedades complejas sobre sistemas de computación. El metalenguaje utilizado para el desarrollo de esta herramienta es Haskell, por lo tanto la herramienta desarrollada es puramente funcional ya que además utiliza librerías de Diagramas Binarios de Decisión implementados funcionalmente [1].

Agradecimientos

Agradezco a la universidad, el departamento de computación, a Pablo Castro y Germán Regis por dirigir mi tesis, y en especial a mi familia y mis amigos, ya que esto no sería posible sin ellos.

Lista de figuras

2.1	Estructura de Kripke para este ejemplo.	7
2.2	Inclusión de lógicas temporales.	10
2.3	Ejemplo de Estructura de Kripke.	13
2.4	Ejecución de operador de punto fijo mayor.	14
2.5	Algoritmo de verificación de modelos explícitos para μ -Cálculo [2].	15
3.1	Árbol binario de decisión para este ejemplo.	17
3.2	OBDD con ordenamiento $a < b < c$ para el ejemplo dado.	19
3.3	OBDD con ordenamiento $b < a < c$ para el ejemplo dado.	19
3.4	Estructura de Kripke con dos estados.	20
3.5	Pseudocódigo de la función FIX [2].	22
4.1	Estructura de Kripke del modelo.	26
4.2	Ejemplo de descripción MC2.	27
4.3	Ejemplo de descripción MC2 usando azúcar sintáctico.	28
4.4	Estructura de Kripke del nuevo modelo.	28
4.5	Ejemplo de descripción MC2 con más de una transición por regla.	29
5.1	Descripción de modelo del problema del cruce del río.	36
5.2	Pentagrama de 1,2,3 Coloca otra vez.	37
5.3	Descripción de modelo del problema de 1,2,3 Coloca otra vez.	38
5.4	Juego de las ranas saltarinas.	39
5.5	Descripción de modelo del problema de las ranas saltarinas.	40

Contenidos

Resumen	i
Agradecimientos	ii
Lista de figuras	iii
1 Introducción	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Estructura	2
1.3 Repositorio de la herramienta	2
2 Conceptos preliminares	3
2.1 Ventajas y desventajas de la verificación de modelos	4
2.2 Modelado de sistemas	6
2.3 Especificación de propiedades	8
2.3.1 CTL	8
2.3.2 CTL*	9
2.4 μ -Cálculo	10
2.4.1 Sintaxis	10
2.4.2 Semántica	11
2.4.3 Algoritmo de verificación de modelos explícitos	14
3 Verificación simbólica de modelos	16
3.1 Representación de fórmulas lógicas	16
3.2 Representación de estructuras de Kripke	20
3.3 Algoritmo de verificación simbólica de modelos	21
3.3.1 Complejidad	23

4	Lenguaje MC2	24
4.1	Sintaxis	24
4.2	Semántica	26
4.2.1	Semántica informal	26
4.2.2	Semántica formal	29
4.3	Notas sobre diseño e implementación	31
4.3.1	Tipos en MC2	32
4.3.2	Descripción del modelo en MC2	32
4.3.3	μ -Cálculo en MC2	32
4.3.4	Módulo principal	33
5	Casos de estudio	34
5.1	Cruce del río	34
5.2	1,2,3, Coloca otra vez	37
5.3	Ranas saltarinas	38
	Conclusión	42

Capítulo 1

Introducción

La verificación de modelos, o *model checking*, es una técnica automática para verificar modelos de sistemas con una cantidad finita de estados. Por ejemplo, protocolos de comunicación y diseños de circuitos, entre otros. En general, la aplicación de esta técnica consta de una caracterización del modelo en términos de algún tipo de sistema de transición de estados y la especificación de la propiedad a analizar en algún tipo de lenguaje formal, comúnmente algún tipo de lógica temporal.

La idea principal es utilizar búsquedas eficientes sobre el grafo que describe el sistema a verificar, para determinar automáticamente si las especificaciones son satisfechas por el mismo [3]. Esta técnica fue desarrollada originalmente en 1981 por Clarke y Emerson. Se puede destacar que el model checking posee varias ventajas importantes sobre probadores de teoremas para verificación de circuitos y protocolos. La más importante es que es automática. Normalmente, el usuario provee una representación de alto nivel del modelo y una especificación de la propiedad que se desea verificar. El model checker terminará devolviendo la respuesta True indicando que el modelo satisface la especificación o dará una traza de ejecución a modo de contraejemplo si el modelo no satisface la propiedad. Los contraejemplos permiten hacer *debugging* en el código fuente y encontrar partes defectuosas en los programas, por lo cual resulta ser una propiedad muy importante a la hora de encontrar bugs sutiles.

1.1 Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es proveer una herramienta de verificación de modelos puramente funcional además de explorar otras alternativas para especificar propiedades que un modelo deba satisfacer, siendo la alternativa en este trabajo el μ -Cálculo, un lenguaje altamente expresivo, lo cuál trae la ventaja de que propiedades descritas en muchos otros tipos de lógicas temporales pueden ser descritos también por el μ -Cálculo. En cuanto a la aplicación práctica de la herramienta, la misma esta planeada para verificar propiedades en lógicas donde el problema de la verificación de modelos pueda ser reducida a μ -Cálculo, por ejemplo dCTL [4], una lógica temporal deóntica usada para especificar propiedades sobre sistemas tolerantes a fallas; o cualquier otra lógica modal o temporal [6].

1.2 Estructura

En el capítulo 2 analizaremos conceptos básicos para la comprensión de esta tesis, conceptos como la verificación de modelos, representación de estos modelos, el concepto de lógicas temporales, y en particular, el μ -Cálculo. En el capítulo 3 veremos formas de representar los datos de una manera más concisa e introduciremos la noción de verificación simbólica de modelos. En el capítulo 4 nos adentramos en la herramienta MC2, su lenguaje de descripción de modelos y su verificador de modelos. Se entra en detalle con la sintaxis y la semántica del lenguaje. Para terminar, se analizarán cuestiones de diseño e implementación de la herramienta. En el capítulo 5 aplicaremos la herramienta a algunos casos de estudio concretos a modo de ejemplificación del uso práctico de esta herramienta.

1.3 Repositorio de la herramienta

La herramienta MC2 es *open source* y completamente programada en el lenguaje funcional Haskell [5]. El código fuente y los ejemplos utilizados en esta tesis se pueden encontrar en el mismo:

<https://github.com/lputruele/MC2-Mu-Calculus-Model-Checker>

Capítulo 2

Conceptos preliminares

En el diseño de software y hardware para sistemas complejos, cada vez es más el tiempo y esfuerzo dedicado a la verificación en vez de la construcción. Se buscan técnicas para reducir y facilitar el trabajo de la verificación y a la vez incrementar su cobertura. Los métodos formales ofrecen un gran potencial para obtener una integración temprana de la verificación en el proceso de diseño, para proveer técnicas de verificación más efectivas, y para reducir el tiempo de verificación en general [6].

La verificación de modelos es una técnica automática de verificación de propiedades sobre sistemas con una cantidad finita de estados. Es una alternativa interesante con respecto al testing o las simulaciones ya que a diferencia de estas técnicas, el model checking hace una prueba exhaustiva del sistema, es decir, analiza todas las trazas posibles de la ejecución del sistema en cuestión. Sin embargo, esto conlleva el problema conocido como la *explosión de estados*, es decir, la cantidad de estados del sistema crece exponencialmente. Esto ocurre en sistemas con muchas interacciones internas, y que pueden hacer crecer exponencialmente el espacio de estados posibles del sistema, ya que la prueba es exhaustiva no se puede ignorar ningún estado posible. En los últimos años se ha logrado un gran progreso en cómo lidiar con este problema mediante formas más compactas de representar al sistema, como por ejemplo, una representación simbólica del modelo del sistema [7] [8].

El modelo del sistema generalmente es generado automáticamente desde una descripción del modelo en un lenguaje similar a alguno de programación como C, Java, etc. Hay que notar que la especificación de la propiedad prescribe lo que el sistema debe y no debe hacer, en cambio la descripción del modelo señala como

se comporta el sistema. El verificador de modelos examina todos los estados relevantes del sistema para verificar si satisface o no la propiedad deseada. El proceso de verificación de modelos consta de varias fases diferenciables [6]:

Modelado: Hay que modelar el sistema en cuestión usando el lenguaje de descripción de modelos del verificador, y formalizar la propiedad que se desea verificar usando el lenguaje de especificación de propiedades.

Ejecución: Ejecutar el verificador para corroborar la validez de la propiedad en el modelo del sistema.

Análisis: Si la propiedad fue satisfecha, verificar la próxima propiedad (si la hay), si en cambio, no fue satisfecha, hay que refinar el modelo y/o la propiedad y finalmente, repetir el proceso.

2.1 Ventajas y desventajas de la verificación de modelos

Podemos destacar las siguientes ventajas de la verificación de modelos [6]:

- Es un enfoque general de verificación que es aplicable a una gran variedad de áreas, como sistemas embebidos, ingeniería de software, y diseño de hardware.
- Soporta verificación parcial, por lo tanto permite enfocarse en las propiedades esenciales primero.
- No es vulnerable a la probabilidad de que un error sea expuesto, en contraste con el testing y la simulación que son técnicas que apuntan a escenarios particulares de error.
- Provee información en caso de que una propiedad sea inválida, lo cuál es útil para el *debugging*.
- La utilización de un verificador necesita poca interacción con el usuario.

- Esta creciendo en popularidad debido a su facilidad de uso.
- Tiene una base matemática, se basa en teoría de grafos, estructuras de datos y lógica, lo cuál la hace confiable.

Sin embargo, también existen las siguientes desventajas [6]:

- Es principalmente apropiada para aplicaciones dirigidas por control y menos apropiada para aplicaciones dirigidas por datos ya que los datos suelen pertenecer a dominios infinitos.
- Su aplicación esta sujeta a problemas de decidibilidad; para sistemas de estados infinitos, la verificación de modelos en general no es efectivamente computable.
- Verifica un modelo del sistema, en vez del sistema real mismo, cualquier resultado obtenido es tan bueno como el modelo del sistema.
- Solo verifica los requisitos que se hayan descripto, es decir, no hay garantía de completitud.
- Sufre del problema de la explosión de estados, ya que la cantidad de estados necesarios para modelar el sistema puede fácilmente exceder la memoria disponible de la computadora. Si bien hay formas de combatir este problema (ver capítulo 3), los modelos de sistemas reales aun así suelen ser demasiado grandes.
- Su utilización requiere conocimiento sobre como abstraer un sistema para obtener un modelo adecuado, además de conocimientos sobre la lógica utilizada para la especificación de propiedades.
- No garantiza resultados correctos, como cualquier herramienta, el verificador puede contener errores de software.
- En general, verificar sistemas con una cantidad arbitraria de componentes, o sistemas parametrizados, no es posible.

2.2 Modelado de sistemas

En esta sección veremos cómo representar un modelo explícitamente mediante una forma de grafo llamada *estructura de Kripke*, en el siguiente capítulo veremos otra forma de representación llamada simbólica que representa el modelo mediante una fórmula lógica de primer orden. Las definiciones de esta sección se han extraído de [2].

Definición 2.2.1. Sea AP un conjunto de proposiciones atómicas, una estructura de Kripke M sobre AP es una cuatro-upla $M = (S, S_0, R, L)$ donde:

1. S es un conjunto finito de estados.
2. $S_0 \in S$ es el conjunto de estados iniciales.
3. $R \in S \times S$ es una relación de transición total, es decir para cada estado $s \in S$ existe un estado $s' \in S$ tal que $R(s, s')$ vale.
4. $L: S \rightarrow 2^{AP}$ es una función que etiqueta a cada estado con el conjunto de proposiciones atómicas que son verdaderas en ese estado.

Un camino en la estructura M desde un estado s es una secuencia infinita de estados $p = s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$, tal que $s = s_0$ y $R(s_i, s_{i+1})$ vale para todo $i > 0$.

Sea $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ el conjunto de variables del sistema y sea D el dominio, llamaremos una valuación de V a una función que asocia a cada variable de V un valor de D .

Un estado del sistema se puede representar como una valuación de las variables del sistema. Una proposición atómica de la forma $v = d$ donde $v \in V$ y $d \in D$ será verdadera en un estado s si y solo si $s(v) = d$.

Dada una valuación, podemos escribir una fórmula que sea verdadera precisamente para esa valuación, por ejemplo si tenemos $V = \{x, y, z\}$ y la valuación $(x \leftarrow True, y \leftarrow True, z \leftarrow False)$ entonces derivamos la fórmula $(x \wedge y \wedge !z)$. En general, una fórmula puede ser verdadera para varias valuaciones. Si adoptamos la convención de que una fórmula representa el conjunto de todas las valuaciones que

la hacen verdadera, entonces podremos describir ciertos conjuntos de estados como fórmulas de primer orden. En particular, el conjunto de los estados iniciales del sistema puede describirse como una fórmula de primer orden S_0 sobre las variables en V .

Una transición del sistema se puede representar como un par ordenado de valuaciones, de forma similar podemos describir conjuntos de transiciones mediante una formula para ese par, pero para poder expresar la fórmula se necesita una copia V' de V para hablar de siguiente estado, en V' todas las variables están primadas. Por ejemplo si tenemos una transición $(x \leftarrow True, y \leftarrow True, z \leftarrow False, (x \leftarrow True, y \leftarrow True, z \leftarrow True))$, podemos derivar la fórmula $(x \wedge y \wedge !z \wedge x' \wedge y' \wedge z')$.

Consideremos el siguiente ejemplo, tenemos $V = \{x, y, z\}$ y $D = \{True, False\}$, $S_0(x, y, z) = (x = True \wedge y = True \wedge z = False)$, y tenemos solo una transición: $z := x \wedge y$, consideremos $False = 0$ y $True = 1$ por una cuestión de facilidad de lectura. Definimos así la estructura de Kripke (Figura 2.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
S &= D \times D \times D \\
S_0 &= \{(1, 1, 0)\} \\
R &= \{((1, 1, 0), (1, 1, 1)), ((1, 1, 1), (1, 1, 1))\} \\
L(1, 1, 0) &= \{x = 1, y = 1, z = 0\}, \\
L(1, 1, 1) &= \{x = 1, y = 1, z = 1\}
\end{aligned}$$

El único camino posible en esta estructura partiendo del estado inicial es: $(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1) \dots$

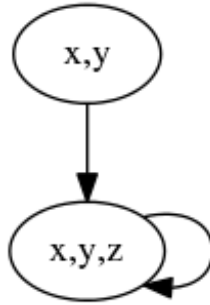


Figura 2.1: Estructura de Kripke para este ejemplo.

2.3 Especificación de propiedades

Ahora describiremos una lógica para especificar propiedades deseadas en una estructura de Kripke u otra máquina de transición de estados. La lógica utiliza proposiciones atómicas y operadores como la disyunción y la negación para construir expresiones más complicadas que describan propiedades sobre estados. La lógica temporal es un formalismo que permite describir secuencias de transiciones entre estados en un sistema reactivo, nos interesa saber si en algún momento se llega a un estado determinado o que nunca se llegue a un deadlock. Para esto introduce nuevos operadores especiales que permiten hablar sobre tiempo. Estos operadores pueden combinarse con los operadores lógicos conocidos. Con el propósito de familiarizarnos con las lógicas temporales, introduciremos ahora las lógicas CTL (Computational Tree Logic), y CTL*.

2.3.1 CTL

CTL tiene dos clases de fórmulas, fórmulas de estado y fórmulas de camino. Las primeras son aserciones respecto de las proposiciones atómicas en los estados y de su estructura de ramificación, mientras que las formulas de camino expresan propiedades temporales de caminos. Las fórmulas de estado CTL sobre el conjunto AP de proposiciones atómicas, están formadas de acuerdo a la siguiente gramática [6]:

$$\Phi ::= \text{true} \mid a \mid \Phi_1 \wedge \Phi_2 \mid \neg\Phi \mid \exists\varphi \mid \forall\varphi$$

donde $a \in AP$ y φ es una fórmula de camino. La sintaxis de fórmula de camino CTL esta dada por la siguiente gramática:

$$\varphi ::= \bigcirc\Phi \mid \Phi_1 \cup \Phi_2$$

donde φ es una fórmula de camino, y Φ, Φ_1, Φ_2 son fórmulas de estado.

Intuitivamente $\exists f$ vale en un estado s , ssi a partir del mismo existe un camino donde vale f (notar que f solo puede ser una formula de estado). Naturalmente $\forall f$ significa que en todos los caminos vale f . En cuanto a $\bigcirc f$, esto vale en el camino p ssi en el próximo estado (en un camino, existe un único próximo estado) vale f , y $f \cup g$ vale en p solo ssi f vale siempre hasta que valga g . Los operadores de camino solo toman fórmulas de estado.

Los operadores booleanos *false*, \vee y \rightarrow se definen de la manera usual. Las modalidades temporales “eventualmente” y “siempre” pueden ser derivadas de la siguiente manera:

Eventualmente:

$$\begin{aligned}\exists \Diamond \Phi &= \exists(true \cup \Phi) \\ \forall \Diamond \Phi &= \forall(true \cup \Phi)\end{aligned}$$

Siempre:

$$\begin{aligned}\exists \Box \Phi &= \neg \forall \Diamond \neg \Phi \\ \forall \Box \Phi &= \neg \exists \Diamond \neg \Phi\end{aligned}$$

Ejemplos de fórmulas CTL:

$\forall \Box (\neg crit_1 \vee \neg crit_2)$ (exclusión mutua).
 $\forall \Box (amarillo \vee \forall \bigcirc \neg rojo)$ (cada fase de luz roja es precedida por una fase de luz amarilla”).

2.3.2 CTL*

CTL* es una lógica que permite combinar libremente los operadores de CTL, por lo cuál CTL* incluye a CTL. Las fórmulas de estado CTL* sobre el conjunto AP de proposiciones atómicas, están formadas de acuerdo a la siguiente gramática[6]:

$$\Phi ::= true \mid a \mid \Phi_1 \wedge \Phi_2 \mid \neg \Phi \mid \exists \varphi$$

donde $a \in AP$ y φ es una fórmula de camino. La sintaxis de fórmula de camino CTL* esta dada por la siguiente gramática:

$$\varphi ::= \Phi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \neg \varphi \mid \bigcirc \varphi \mid \varphi_1 \cup \varphi_2$$

donde Φ es una fórmula de estado, y $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ son fórmulas de camino.

Analizaremos a continuación una lógica temporal llamada μ -Cálculo, este puede codificar (y de hecho incluye) a CTL y CTL* [9].

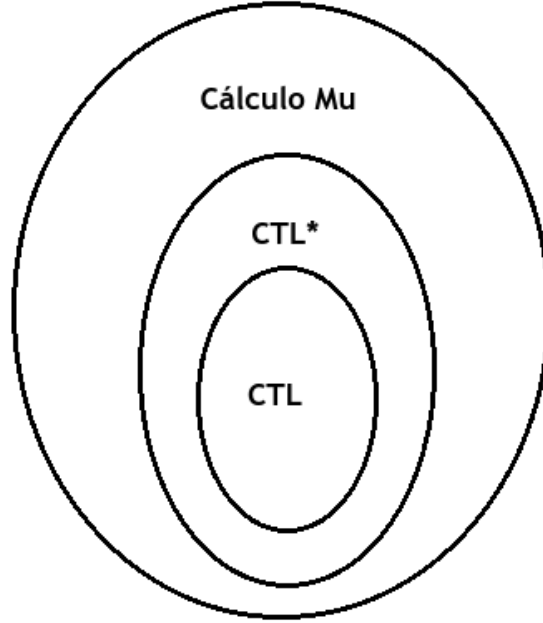


Figura 2.2: Inclusión de lógicas temporales.

2.4 μ -Cálculo

El μ -Cálculo es un poderoso lenguaje para expresar propiedades de sistemas de transición de estados al usar operadores de punto fijo. Este lenguaje posee la ventaja de su expresividad, ya que muchas lógicas temporales se pueden codificar por el μ -Cálculo, otra ventaja se da en la existencia de algoritmos eficientes de verificación de modelos para este formalismo. Estas características favorables despertaron interés entre investigadores en verificación asistida por computadoras. Como consecuencia, los procedimientos de verificación para muchas lógicas temporales y modales pueden ser descriptas al traducirse al μ -Cálculo. Hay varias versiones del μ -Cálculo, concretamente usaremos la versión proposicional de Kozen[10] [2].

2.4.1 Sintaxis

Sea $M = (S, T, L)$ una estructura de Kripke y sea $VAR = Q, Q1, Q2, \dots$ un conjunto de variables relacionales, donde a cada variable relacional se le puede asignar un subconjunto de S , construimos una μ -fórmula como sigue:

Si $p \in AP$, entonces p es una fórmula.

Si $Q \in VAR$, entonces Q es una fórmula.

Si f y g son fórmulas, entonces $\neg f$, $f \vee g$, y $f \wedge g$ son fórmulas.

Si f es una fórmula, entonces $\Box f$ y $\Diamond f$ son fórmulas.

Si $Q \in VAR$ y f es una fórmula entonces $\mu Q.f$ y $\nu Q.f$ son fórmulas.

Las variables pueden estar libres o ligadas en una fórmula a través de un operador de punto fijo. Una fórmula cerrada es una fórmula sin variables libres. En general, se asume que las fórmulas están en forma normal positiva (PNF), es decir, las negaciones solo están aplicadas a las variables proposicionales.

2.4.2 Semántica

El significado intuitivo de $\Diamond f$ es “Es posible realizar una transición a un estado donde f vale”, similarmente $\Box f$ significa “ f vale en todos los estados alcanzables por medio de una transición”. Los operadores μ y ν expresan puntos fijos menores y mayores respectivamente. El conjunto vacío de estados se denota con *False* y el conjunto de todos los estados S se denota con *True*.

Ejemplos:

$\nu X \cdot f \wedge \Box X$ se interpreta como “ f es verdadera siempre en todo camino”.

$\mu X \cdot f \vee \Diamond X$ se interpreta como “existe un camino hacia un estado donde f vale”.

$\nu X \cdot \Diamond True \wedge \Box X$ se interpreta como “no hay estados que no tengan transiciones hacia otros estados”.

Formalmente, una fórmula f se interpreta como un conjunto de estados donde f es verdadera, escribimos este conjunto como $\llbracket f \rrbracket$ sobre un sistema de transición de estados M y un ambiente $e : VAR \rightarrow 2^S$, denotaremos $e[Q \leftarrow W]$ como un ambiente que es igual a e solo que Q ahora tiene el valor W . el conjunto $\llbracket f \rrbracket$ sobre M y e se define recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\llbracket p \rrbracket M e &= \{s \mid p \in L(s)\} \\
\llbracket Q \rrbracket M e &= e(Q) \\
\llbracket \neg f \rrbracket M e &= S \setminus \llbracket f \rrbracket M e \\
\llbracket f \wedge g \rrbracket M e &= \llbracket f \rrbracket M e \cap \llbracket g \rrbracket M e \\
\llbracket f \vee g \rrbracket M e &= \llbracket f \rrbracket M e \cup \llbracket g \rrbracket M e \\
\llbracket \Diamond f \rrbracket M e &= \{s \mid \exists t : s \rightarrow t \wedge t \in \llbracket f \rrbracket M e\} \\
\llbracket \Box f \rrbracket M e &= \{s \mid \forall t : s \rightarrow t \rightarrow t \in \llbracket f \rrbracket M e\}
\end{aligned}$$

$\llbracket \mu Q.f \rrbracket M e$ es el menor punto fijo del predicado transformador $t : 2^S \rightarrow 2^S$ definido como $t(W) = \llbracket f \rrbracket M e[Q \leftarrow W]$.

$\llbracket \nu Q.f \rrbracket M e$ es el mayor punto fijo del predicado transformador $t : 2^S \rightarrow 2^S$ definido como $t(W) = \llbracket f \rrbracket M e[Q \leftarrow W]$.

Los puntos fijos pueden ser calculados utilizando el llamado teorema de Tarski-Knapster [11]. En donde para obtener el punto fijo de un transformador de predicados t , el mínimo punto fijo viene dado por la siguiente ecuación:

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} t^i(\emptyset)$$

en donde, $t^0 = id$. Es decir, en la practica calculamos iterativamente aplicando t y empezando desde el conjunto vacío, hasta obtener un resultado que no puede ser expandido. Esto en general, puede realizarse con un ciclo. El máximo punto fijo es similar, pero empezando desde el conjunto de todos los estados, y usando la intersección.

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} t^i(S)$$

Observemos algunos ejemplos, supongamos que tenemos una estructura de Kripke $M = (S, T, L)$ como la de la figura 2.3, donde $L(s_0) = \{p, q, r\}$, $L(s_1) = \{p, q\}$, $L(s_2) = \{q, r\}$ y $L(s_3) = \{r\}$. Algunos ejemplos de propiedades que uno podría querer verificar son $q \wedge r$, $\Diamond q$, $\Box r$, $\mu Q.(r \wedge \neg p \vee \Diamond Q)$, $\nu Q.(p \wedge \Box Q)$. $q \wedge r$ se cumple en $\{s_2\}$, $\Diamond q$ se cumple en $\{s_0, s_1, s_3\}$, $\Box r$ se cumple en $\{s_1, s_2, s_3\}$, $\mu Q.(r \wedge \neg p \vee \Diamond Q)$ se cumple en S , y $\nu Q.(p \wedge \Box Q)$ se cumple en \emptyset . Para entender cómo funcionan los operadores de punto fijo consideremos la fórmula $\nu Q.(p \wedge \Box Q)$, es decir, queremos saber que estados cumplen con la propiedad de que p vale siempre en todo camino.

Cada iteración del operador esta ilustrada en la figura 2.4. Q se inicializa en True, luego en cada iteración se hace una aproximación al resultado verdadero, los resultados de cada iteración en este caso son, en orden, S , $\{s_0, s_1\}$, $\{s_0\}$, \emptyset . Como se puede apreciar en el resultado, no hay estado donde valga esta propiedad. Si, en vez de usar el mayor punto fijo usáramos el menor, el procedimiento es análogo, solo que la variable se inicializaria en False, aunque no es difícil darse cuenta que no tiene mucho sentido verificar $\mu Q.(p \wedge \Box Q)$.

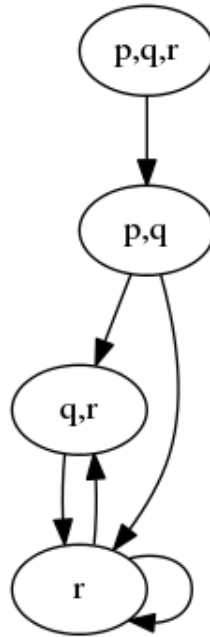


Figura 2.3: Ejemplo de Estructura de Kripke.

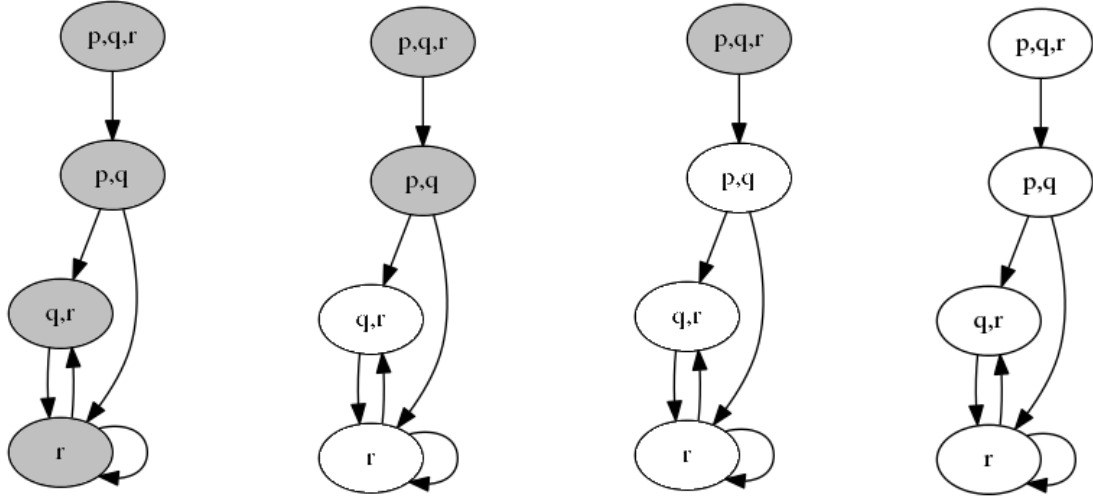


Figura 2.4: Ejecución de operador de punto fijo mayor.

2.4.3 Algoritmo de verificación de modelos explícitos

El algoritmo de verificación de modelos explícitos para μ -Cálculo que analizaremos es el más intuitivo (hay algoritmos más eficientes), se basa en la semántica anterior, y calcula el subconjunto de estados de un modelo M que cumplen con una fórmula f . El algoritmo trabaja en forma bottom-up a través de la fórmula, evaluándola a partir de los valores de sus subfórmulas. Este algoritmo requiere tiempo $O(n^k)$ [2], donde n es la cantidad de estados del sistema y k es el número de operadores de punto fijo anidados en la fórmula. Esto se debe a que cada operador de punto fijo hace $n + 1$ iteraciones como máximo, ya que en cada iteración se hace una aproximación del resultado ya sea agregando o quitando al menos un estado (menor y mayor punto fijo respectivamente). En la figura 2.5 se puede ver el algoritmo, donde f es la fórmula y e es el ambiente de variables relacionales.

```

1  function eval( $f, e$ )

2  if  $f = p$  then return  $\{s \mid p \in L(s)\}$ ;
3  if  $f = Q$  then return  $e(Q)$ ;
4  if  $f = g_1 \wedge g_2$  then
5      return eval( $g_1, e$ )  $\cap$  eval( $g_2, e$ );
6  if  $f = g_1 \vee g_2$  then
7      return eval( $g_1, e$ )  $\cup$  eval( $g_2, e$ );
8  if  $f = \langle a \rangle g$  then
9      return  $\{s \mid \exists t [s \xrightarrow{a} t \text{ and } t \in \text{eval}(g, e)]\}$ ;
10 if  $f = [a]g$  then
11     return  $\{s \mid \forall t [s \xrightarrow{a} t \text{ implies } t \in \text{eval}(g, e)]\}$ ;

12 if  $f = \mu Q.g(Q)$  then
13      $Q_{\text{val}} := \text{False}$ ,
14     repeat
15          $Q_{\text{old}} := Q_{\text{val}}$ ;
16          $Q_{\text{val}} := \text{eval}(g, e [Q \leftarrow Q_{\text{val}}])$ ;
17     until  $Q_{\text{val}} = Q_{\text{old}}$ ,
18     return  $Q_{\text{val}}$ ;
19 end if;

20 if  $f = \nu Q.g(Q)$  then
21      $Q_{\text{val}} := \text{True}$ ;
22     repeat
23          $Q_{\text{old}} := Q_{\text{val}}$ ;
24          $Q_{\text{val}} := \text{eval}(g, e [Q \leftarrow Q_{\text{val}}])$ ;
25     until  $Q_{\text{val}} = Q_{\text{old}}$ ,
26     return  $Q_{\text{val}}$ ;
27 end if;
28 end function

```

Figura 2.5: Algoritmo de verificación de modelos explícitos para μ -Cálculo [2].

Capítulo 3

Verificación simbólica de modelos

El algoritmo de verificación de modelos con estados explícitos para μ -Cálculo tiene un problema, es muy susceptible a que ocurra una explosión en el tamaño del modelo, especialmente si el grafo de transición de estados se extrae de un sistema concurrente con muchos componentes.

En muchos casos, la “complejidad” del espacio de estados es mucho menor que lo que el número de estados indica. A menudo, los sistemas con un gran número de componentes tienen una estructura regular que sugeriría una regularidad correspondiente en el grafo de estados. En consecuencia, existen representaciones más sofisticadas que explotan esta regularidad. Un buen candidato para tal representación simbólica es el diagrama de decisión binario (BDD) [8].

En este capítulo se describe un algoritmo de verificación de modelos simbólicos para μ -Cálculo que opera sobre estructuras de Kripke, esta vez representadas no de manera explícita, sino de manera simbólica a través de fórmulas lógicas (que internamente operan como BDDs).

3.1 Representación de fórmulas lógicas

Los árboles binarios de decisión ordenados (OBDDs) son formas canónicas de representación de fórmulas lógicas. Son considerablemente más compactos que las formas normales tradicionales como la forma normal conjuntiva y la forma normal disyuntiva, y existen algoritmos para manipularlos eficientemente. Por esto, los OBDDs se han utilizado para una amplia variedad de aplicaciones en el diseño

asistido por computadoras, incluyendo simulación simbólica, verificación de lógica combinatoria y verificación de sistemas concurrentes con estados finitos [2]. Las definiciones que aparecen en esta sección se extraen de [2].

Para entender la necesidad de usar OBDDs, consideremos primero los árboles binarios de decisión. Un árbol binario de decisión es un árbol dirigido con raíz que consiste en vértices terminales y no terminales. Cada vértice no terminal v está etiquetado por una variable $var(v)$ y tiene dos hijos: $izq(v)$ corresponde al caso en que v tenga el valor 0 y $der(v)$ en caso contrario. Cada vértice terminal está etiquetado por una constante $valor(v)$ la cual es 0 o 1. Un árbol binario de decisión para la fórmula $f(a, b, c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ es mostrado en la figura 3.1. Uno puede decidir si una asignación particular a las variables hace verdadera la fórmula o no al atravesar el árbol desde la raíz hasta un vértice terminal. Por ejemplo, la asignación $\{a \leftarrow 1, b \leftarrow 0, c \leftarrow 0\}$ lleva al vértice terminal 0, por lo tanto la fórmula es falsa para esta asignación.

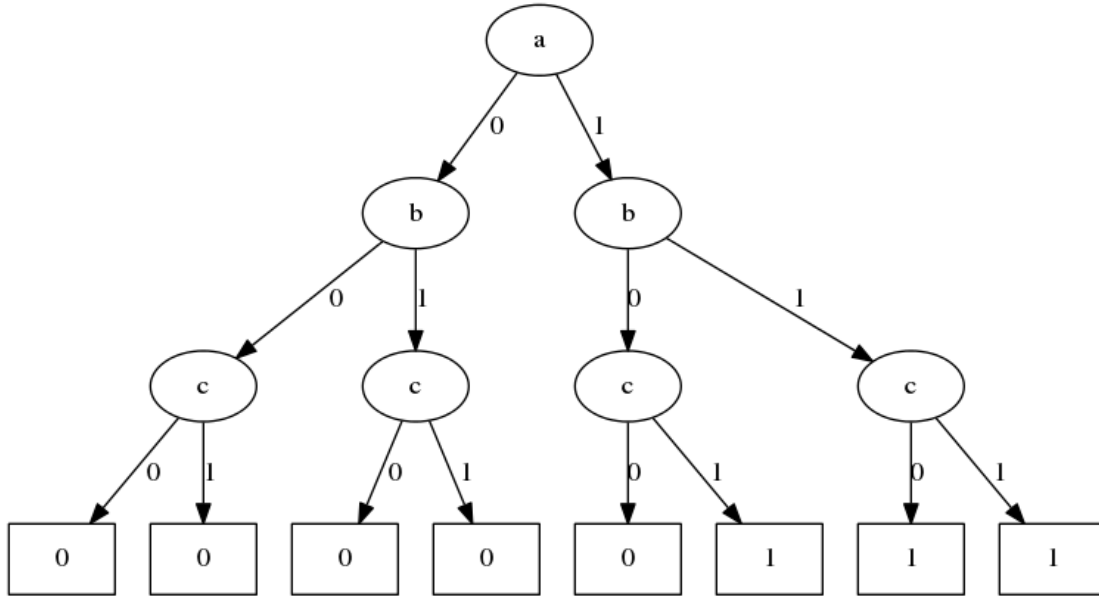


Figura 3.1: Árbol binario de decisión para este ejemplo.

Los árboles binarios de decisión no proveen una representación muy concisa para las funciones lógicas. De hecho, tienen el mismo tamaño que las tablas de verdad. Afortunadamente, es común que haya mucha redundancia en tales árboles. Por ejemplo, en la figura 3.1 todos los caminos donde a tiene el valor 0 llevan al

nodo terminal 0, por lo tanto no sería necesario analizar los valores de b y c en esta rama. Esto lleva a pensar que hay formas de reducir el tamaño del árbol unificando subárboles isomorfos. Esto da como resultado un grafo acíclico dirigido (DAG) llamado diagrama binario de decisión (BDD). Mas precisamente, un BDD es un grafo con raíz, dirigido y acíclico con dos tipos de vértices, vértices terminales y no terminales. Estos tienen el mismo significado que en el caso de los árboles. Cada BDD B con raíz v determina una función lógica $f_v(x_1, \dots, x_n)$ de la siguiente manera [2]:

1. Si v es un vértice terminal: (a) Si $valor(v) = 1$ entonces $f_v(x_1, \dots, x_n) = 1$.
(b) Si $valor(v) = 0$ entonces $f_v(x_1, \dots, x_n) = 0$.

2. Si v es un vértice no terminal con $var(v) = x_i$ entonces f_v es la función

$$f_v(x_1, \dots, x_n) = (\neg x_i \wedge f_{izq(v)}(x_1, \dots, x_n)) \vee (x_i \wedge f_{der(v)}(x_1, \dots, x_n))$$

Bryant [7] demostró como obtener una representación canónica para funciones lógicas al poner dos restricciones sobre los BDDs. Primero, las variables deberían aparecer en el mismo orden a lo largo de cada camino desde la raíz a un terminal. Segundo, no debería haber subárboles isomórficos o vértices redundantes en el diagrama. El primer requisito se logra al imponer un ordenamiento total $<$ sobre las variables que etiquetan los vértices en el BDD y requiriendo eso para cada vértice u en el diagrama, si u tiene un sucesor no terminal, entonces $var(u) < var(v)$. El segundo requisito se logra al aplicar repetidamente tres reglas de transformación que no alteran la función representada por el diagrama,

- Eliminar terminales duplicados: Dejar solo un terminal para cada valor y redirigir todos los arcos a los eliminados hacia este.

- Eliminar no terminales duplicados: Si dos no terminales u y v tienen $var(u) = var(v)$, $izq(u) = izq(v)$ y $der(u) = der(v)$, entonces eliminar u o v y redirigir todos los arcos que iban al vértice eliminado hacia el otro.

- Eliminar tests redundantes: Si el no terminal v tiene $izq(v) = der(v)$, entonces eliminar v y redirigir todos los arcos a $izq(v)$.

Empezando por un BDD satisfaciendo la propiedad de ordenamiento, la forma canónica se obtiene aplicando las reglas de transformación hasta que el tamaño

del diagrama no pueda ser reducido. Al resultado lo vamos a llamar OBDD.

Hay que destacar que el tamaño del OBDD depende fuertemente del ordenamiento de las variables. Esto se puede ver en las figuras 3.2 y 3.3

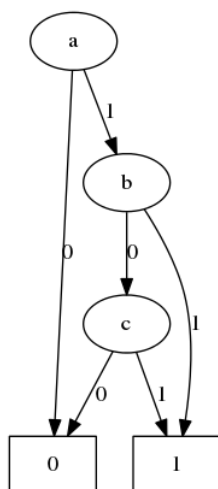


Figura 3.2: OBDD con ordenamiento $a < b < c$ para el ejemplo dado.

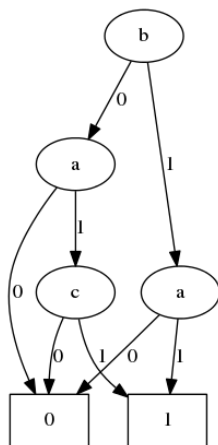


Figura 3.3: OBDD con ordenamiento $b < a < c$ para el ejemplo dado.

3.2 Representación de estructuras de Kripke

Para ilustrar como los OBDDs pueden ser usados para representar concisamente una estructura de Kripke, consideremos la estructura de dos estados mostrada en la figura 3.4 donde $L(s_1) = \{x, y\}$ y $L(s_2) = \{x, y, z\}$. En este caso hay tres variables de estado, x , y , y z . Introducimos tres variables más, x' , y' y z' , para representar el estado sucesor. Así, representaremos la transición de s_1 a s_2 como la conjunción:

$$(x \wedge y \wedge \neg z \wedge x' \wedge y' \wedge z')$$

La fórmula lógica para todo el sistema de transiciones esta dada por:

$$(x \wedge y \wedge \neg z \wedge x' \wedge y' \wedge z') \vee (x \wedge y \wedge \neg z \wedge x' \wedge y' \wedge \neg z') \vee (x \wedge y \wedge z \wedge x' \wedge y' \wedge \neg z') \vee (x \wedge y \wedge z \wedge x' \wedge y' \wedge z')$$

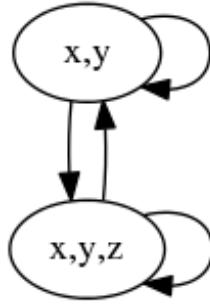


Figura 3.4: Estructura de Kripke con dos estados.

En la fórmula hay cuatro disyuntos porque la estructura de Kripke tiene cuatro transiciones. Esta fórmula se convierte ahora en OBDD para obtener una representación concisa de la relación de transición.

En muchos casos, construir una representación explícita de la estructura de Kripke M y luego codificarla como se vió anteriormente no es factible porque la estructura es demasiado grande, incluso si la representación simbólica termina siendo concisa. Por lo tanto, en la práctica construimos los OBDDs directamente desde una descripción de alto nivel del sistema. En el próximo capítulo, cuando introduzcamos el lenguaje de modelado de sistemas utilizado en este trabajo, veremos como se realiza esta transformación.

3.3 Algoritmo de verificación simbólica de modelos

En la sección anterior vimos como codificar una estructura de Kripke como un OBDD, ahora mostraremos una adaptación del algoritmo de verificación con estados explícitos, ahora con una representación simbólica del modelo en forma de OBDD. En este caso transformaremos las fórmulas del μ -Cálculo de la siguiente manera[2]:

- Los valores Falso y Verdadero están representados por OBDD-FALSE y OBDD-TRUE que son constantes(hojas).
- Cada proposición atómica p tiene un OBDD asociado con el mismo. Lo denotaremos como $OBDD_p(x)$, donde x es un estado del sistema, este OBDD cumple la propiedad de que x satisface $OBDD_p$ si y solo si $x \in L(p)$.
- El sistema de transiciones tiene un diagrama ordenado de decisión $OBDD_m(x, x')$ asociado al mismo. Un par $(x, x') \in S \times S$ satisface $OBDD_m$ si y solo si $(x, x') \in T$

Asumamos que tenemos una fórmula f de μ -Cálculo con las variables relacionales libres Q_1, \dots, Q_k . La función $assoc[Q_i]$ asigna a cada variable relacional el OBDD correspondiente al conjunto de estados asociados a esa variable. La notación $assoc(Q \leftarrow B_Q)$ significa que a Q se le da el valor B_Q , se puede ver a $assoc$ como un ambiente de OBDDs. A continuación se da el procedimiento B que, a partir de una fórmula f y una función $assoc$, retorna el OBDD correspondiente a la semántica de f .

$$\begin{aligned}
B(p, assoc) &= OBDD_p(x) \\
B(Q_i, assoc) &= assoc[Q_i] \\
B(\neg f, assoc) &= \neg B(f, assoc) \\
B(f \wedge g, assoc) &= B(f, assoc) \wedge B(g, assoc) \\
B(f \vee g, assoc) &= B(f, assoc) \vee B(g, assoc) \\
B(\diamond f, assoc) &= \exists x' : OBDD_m(x, x') \wedge B(f, assoc)(x') \\
B(\Box f, assoc) &= B(\neg \diamond \neg f, assoc) \\
B(\mu Q.f, assoc) &= FIX(f, assoc, OBDD - FALSE) \\
B(\nu Q.f, assoc) &= FIX(f, assoc, OBDD - TRUE)
\end{aligned}$$

Donde $B(f, assoc)(x')$ reemplaza cada aparición de x por x' , y FIX es la siguiente función:

```

1  function FIX(f, assoc, BQ)
2  result-bdd = BQ,
3  repeat
4      old-bdd := result-bdd;
5      result-bdd := B(f, assoc(Q ← old-bdd));
6  until (equal(old-bdd, result-bdd));
7  return(result-bdd);
8  end function

```

Figura 3.5: Pseudocódigo de la función FIX [2].

Las operaciones lógicas que ocurren del lado derecho de las ecuaciones son operaciones de BDDs. El significado de la cuantificación existencial de una variable lógica está dada por la siguiente ecuación [12] :

$$\exists x.t = t[0/x] \vee t[1/x]$$

Donde $t[v/x]$ es t pero donde x toma el valor v .

3.3.1 Complejidad

Un interrogante importante en cuanto a la verificación de modelos para μ -Cálculo es su complejidad. Los algoritmos más eficientes conocidos son exponenciales en cuanto al tamaño de la fórmula. Existe la conjetura[2] de que no hay un algoritmo polinomial para el problema de la verificación de modelos para μ -Cálculo. Es posible demostrar que el problema está en $NP \cap co - NP$. Si el problema fuera NP-completo, entonces NP sería igual a co-NP, lo cual se cree que no es cierto.

Capítulo 4

Lenguaje MC2

MC2 es el verificador de modelos desarrollado en esta tesis, el mismo toma modelos descritos en un lenguaje simple que también llamaremos MC2, el modelo incluye la descripción del sistema y las propiedades que debe satisfacer en μ -Cálculo. El diseño del lenguaje de modelado se centra en la noción de estructuras de Kripke, es decir que con este lenguaje se puede describir el comportamiento del sistema en términos de transiciones de entre estados, y además especificar las propiedades que se desean verificar sobre el modelo. En este capítulo analizaremos la sintaxis y semántica del lenguaje de modelado y el lenguaje de especificación de propiedades, además observaremos algunos detalles relevantes sobre la implementación concreta de la herramienta.

4.1 Sintaxis

Sean $p, X \in String$, entonces la sintaxis de MC2 se define con la siguiente gramática:

Declaraciones $D := p$
 $| D; D$

Reglas $C := E -> E$
 $| C; C$

Ambientes $E := p$
 $| !p$
 $| E, E$

Lista de fórmulas $P := F$
 $| P, P$

Fórmulas $F := p$
 $| : X$
 $| !F$
 $| (F \& F)$
 $| (F | F)$
 $| <> F$
 $| [] F$
 $| \%X.F$
 $| \$X.F$

Descripción MC2 $M := \text{vars } D \text{ rules } C \text{ init } E \text{ check } P$

Usamos la coma ',' para separar elementos de una lista de expresiones, y , punto y coma ';' para separar elementos de una lista de comandos o de declaraciones. La diferencia es sutil pero es importante destacarla para evitar confusión. Un detalle de implementación muy importante que hace falta destacar es que el *parsing* de E retorna un ambiente, el cual es una lista de pares (p, v) , donde $p \in AP$ y $v \in Bool$. Se puede decir que hay una semántica intermedia para E:

$$\begin{aligned}
\llbracket p \rrbracket &= (p, True) \\
\llbracket !p \rrbracket &= (p, False) \\
\llbracket E0, E1 \rrbracket &= \llbracket E0 \rrbracket ++ \llbracket E1 \rrbracket
\end{aligned}$$

De ahora en mas cuando hablemos de E, hacemos referencia a la lista generada anteriormente.

4.2 Semántica

Ya definimos la sintaxis del lenguaje, ahora vamos a definir el significado asociado a esta sintaxis. Primero daremos una semántica informal para que sea mas fácil entender como se usa y como funciona el lenguaje MC2, y después entraremos en detalle con la semántica formal.

4.2.1 Semántica informal

La figura 4.2 muestra un ejemplo de una descripción MC2. Aquí representamos una estructura de Kripke con dos estados s_0, s_1 donde $L(s_0) = \{a, b\}$, $L(s_1) = \{a\}$, y $T = \{(s_0, s_1), (s_1, s_0), (s_1, s_1)\}$ como el de la figura 4.1. En la sección *vars* se declara el conjunto de proposiciones atómicas del modelo. La sección *rules* describe las transiciones del sistema. La sección *init* es donde se señala el valor inicial de las proposiciones atómicas. En la sección *check* se especifican las propiedades que se desean verificar sobre el modelo en el estado *init*.



Figura 4.1: Estructura de Kripke del modelo.

```

1 vars
2   a;b
3
4 rules
5   a,b -> a,!b;
6   a,!b -> a,b;
7   a,!b -> a,!b
8
9 init
10  a,b
11
12 check
13  <>(!a & !b),
14  %z.(b | <>:z),
15  $z.(b & []:z),
16  $z.(a & []:z)

```

Figura 4.2: Ejemplo de descripción MC2.

Se puede ver que las reglas describen precisamente las tres transiciones del sistema. Aquellas proposiciones que no varían su valor de un estado al siguiente, se las puede obviar en la parte derecha de la regla como se ve en la figura 4.3. Esta descripción es equivalente a la anterior. Intuitivamente podemos pensar la parte izquierda de la regla como el estado corriente y la parte derecha como el siguiente estado, pero en realidad podemos representar mas de una transición con una sola regla. Por ejemplo, la descripción de la figura 4.5 modela el sistema de la figura 4.4. Al omitir a en la parte izquierda de las reglas, estamos diciendo que las mismas se cumplen tanto si vale como si no vale a .

```

1 vars
2   a;b
3
4 rules
5   a,b -> !b;
6   a,!b -> b;
7   a,!b ->
8
9 init
10  a,b
11
12 check
13  <>(!a & !b),
14  %z.(b | <>:z),
15  $z.(b & []:z),
16  $z.(a & []:z)

```

Figura 4.3: Ejemplo de descripción MC2 usando azúcar sintáctico.

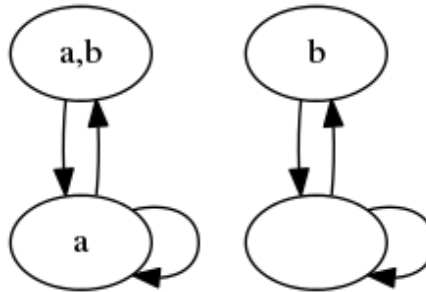


Figura 4.4: Estructura de Kripke del nuevo modelo.

```

1 vars
2   a;b
3
4 rules
5   b -> !b;
6   !b -> b;
7   !b ->
8
9 init
10  a,b
11
12 check
13  <>(!a & !b),
14  %z.(b | <>:z),
15  $z.(b & []:z),
16  $z.(a & []:z)

```

Figura 4.5: Ejemplo de descripción MC2 con más de una transición por regla.

En la sección *check* se puede ver que hay cuatro propiedades descritas en μ -Cálculo, que son las siguientes: $\Diamond(\neg a \wedge \neg b)$, $\mu z.(b \vee \Diamond z)$, $\nu z.(b \wedge \Box z)$, y $\nu z.(a \wedge \Box z)$. Al ejecutar el verificador con la descripción de la figura 4.2, el resultado va a ser el conjunto de propiedades que el modelo haya satisfecho, en este caso $\mu z.(b \vee \Diamond : z)$ y $\nu z.(a \wedge \Box : z)$, ya que existe un camino en donde b vale en algún momento, y a vale siempre en todo camino. Se puede apreciar que '\$' representa a ν y '%' representa a μ . Cabe destacar también que al anteponer ':' a una cadena estamos haciendo referencia a una variable relacional y no a una proposición atómica.

4.2.2 Semántica formal

En esta sección vamos a formalizar las nociones descritas en la sección anterior. Vamos a necesitar usar operaciones de OBDDs, para lo cual tenemos NOT, AND, OR, NULL (True si no hay modelos para este OBDD [1]), EXISTS, OBDD-TRUE y OBDD-FALSE. Por cuestiones de simpleza, omitiremos la semántica de los azúcares sintácticos vistos en la semántica informal. La semántica de una descripción MC2 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \llbracket \text{vars } D \text{ rules } C \text{ init } E \text{ check } P \rrbracket_m \\
& = \\
& [F \mid F \in P \wedge \text{NULL}(\text{NOT inst } D[E] (\llbracket F \rrbracket_f \llbracket C \rrbracket_c \text{assocInit}))]
\end{aligned}$$

Donde *assocInit* es el estado inicial de la función *assoc* e *inst* es una función que instancia las variables proposicionales del OBDD generado por la evaluación de *F* con los valores del ambiente *D[E]* (*D* inicializado con los valores de *E*). Es decir, de todas las fórmulas en *P* solo nos quedamos con aquellas que al instanciarlas con los valores de *init* siempre da como resultado *True*. La semántica de una declaración está dada por la siguiente función:

$$\begin{aligned}
\llbracket p \rrbracket_d &= (p, \text{False}) \\
\llbracket D0; D1 \rrbracket_d &= \llbracket D0 \rrbracket_d ++ \llbracket D1 \rrbracket_d
\end{aligned}$$

Una declaración da como resultado un ambiente, es decir, una lista de proposiciones con sus valores asociados (*False* en principio). A continuación tenemos la función que denota la semántica de los modelos, un modelo es la disyunción de una o más reglas, a su vez, una regla es una disyunción de todas las transiciones que genera, de nuevo por simpleza suponemos aquí que cada regla genera exactamente una transición. Una transición es una conjunción de los OBDDs generados por la evaluación de los ambientes del estado corriente y el siguiente (en el siguiente estado todas las proposiciones deben estar primadas).

$$\begin{aligned}
\llbracket C; D \rrbracket_c &= \llbracket C \rrbracket_c \text{ OR } \llbracket D \rrbracket_c \\
\llbracket E0- > E1 \rrbracket_c &= \llbracket E0 \rrbracket_e \text{ AND } \llbracket E1 \rrbracket_{e'}
\end{aligned}$$

La evaluación de un ambiente está dada por las funciones $\llbracket E \rrbracket_e$ y $\llbracket E \rrbracket_{e'}$, donde la única diferencia entre estas funciones es que la segunda prima a las proposiciones. La semántica de un ambiente da como resultado la conjunción de las proposiciones del mismo con paridad acorde a sus valores asociados.

$$\begin{aligned}
\llbracket (p, True) \rrbracket_e &= OBDD_p \\
\llbracket (p, False) \rrbracket_e &= NOT\ OBDD_p \\
\llbracket E0 + +E1 \rrbracket_e &= \llbracket E0 \rrbracket_e\ AND\ \llbracket E1 \rrbracket_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\llbracket (p, True) \rrbracket_{e'} &= OBDD_{p'} \\
\llbracket (p, False) \rrbracket_{e'} &= NOT\ OBDD_{p'} \\
\llbracket E0 + +E1 \rrbracket_{e'} &= \llbracket E0 \rrbracket_{e'}\ AND\ \llbracket E1 \rrbracket_{e'}
\end{aligned}$$

Por ultimo, la semántica de las fórmulas, es la vista en el capítulo 3. M es el modelo del sistema (un OBDD). $Assoc$ es una función que asocia cada variable relacional con un OBDD. La operación EXISTS de los OBDD toma un conjunto de variables y las elimina existencialmente de un OBDD.

$$\begin{aligned}
\llbracket p \rrbracket_f M\ assoc &= OBDD_p \\
\llbracket : X \rrbracket_f M\ assoc &= assoc\ X \\
\llbracket !F \rrbracket_f M\ assoc &= NOT\ (\llbracket F \rrbracket_f M\ assoc) \\
\llbracket (F \ \&\ G) \rrbracket_f M\ assoc &= (\llbracket F \rrbracket_f M\ assoc)\ AND\ (\llbracket G \rrbracket_f M\ assoc) \\
\llbracket (F \mid G) \rrbracket_f M\ assoc &= (\llbracket F \rrbracket_f M\ assoc)\ OR\ (\llbracket G \rrbracket_f M\ assoc) \\
\llbracket \langle \rangle F \rrbracket_f M\ assoc &= EXISTS\ \vec{x'} : M\ AND\ (\llbracket F \rrbracket_f(\vec{x'})\ M\ assoc) \\
\llbracket [] F \rrbracket_f M\ assoc &= \llbracket ! \langle \rangle !F \rrbracket_f M\ assoc \\
\llbracket \%X.F \rrbracket_f M\ assoc &= FIX\ F\ assoc\ OBDD - FALSE \\
\llbracket \$X.F \rrbracket_f M\ assoc &= FIX\ F\ assoc\ OBDD - TRUE
\end{aligned}$$

Donde $\vec{x'}$ es la versión primada del conjunto de variables proposicionales del modelo, $(\llbracket F \rrbracket_f(\vec{x'})\ M\ assoc)$ reemplaza cada variable x_i por x'_i , y FIX es la función de punto fijo.

4.3 Notas sobre diseño e implementación

En esta sección vamos a aclarar detalles del diseño y la implementación del verificador de modelos MC2. La herramienta esta implementada en el lenguaje fun-

cional Haskell, y se interpreta con GHC (Glasgow Haskell Compiler). La misma está compuesta por los módulos *Types*, *Mu*, *MuEval*, *Model*, *ModelEval*, *Main*, y usa dos módulos externos, *OBDD* [1] (provee la estructura con sus operaciones) y *ParseLib* [13] (tiene utilidades de *parsing*).

4.3.1 Tipos en MC2

En *MC2* tenemos proposiciones atómicas (*AP*) representadas por cadenas, cada una tiene asociada un valor lógico (*True* o *False*), para lo cual existe un tipo *Env* (ambiente) que consta de una lista de pares de proposiciones atómicas y sus valores lógicos asociados. Un valor de tipo *Env* representa el estado del sistema en un momento dado. También definimos el tipo *VName* como sinónimo de cadenas, pero este tipo lo usamos para hacer referencia a variables relacionales. También hemos definido en este modulo el tipo *Assoc* como una función *Assoc*: *VName* \rightarrow *OBDD AP*. *OBDD AP* hace referencia al tipo de OBDDs donde las variables de sus nodos están representadas con cadenas (*AP*). *Assoc* es un tipo que se utiliza en la semántica de las fórmulas de μ -Cálculo, este representa una función que toma el nombre de una variable y devuelve el valor asociado (representado por un OBDD).

4.3.2 Descripción del modelo en MC2

Hay dos módulos dedicados a la descripción del modelo. Uno es *Model*, el cuál contiene la definición de la sintaxis de las declaraciones y comandos, y sus correspondientes *parsers*. El otro módulo es *ModelEval*, este contiene las funciones *ceval*, *deval* y *eeval* correspondientes a los evaluadores de comandos, declaraciones y ambientes respectivamente, además de algunas funciones auxiliares. La función *deval* toma una declaración y un ambiente con proposiciones a inicializar (se usa en la sección *init* unicamente), y a partir de estos genera el ambiente inicial del sistema. La función *eeval* transforma un ambiente en una OBDD-conjunción como se observó en la semántica de ambientes.

4.3.3 μ -Cálculo en MC2

Similarmente tenemos dos módulos dedicados al μ -Cálculo. Uno es *Mu*, el cuál contiene la definición de la sintaxis, y adicionalmente también contiene el *parser*, y un *printer*. El otro módulo es *MuEval*, este contiene la función *check* que, dada una fórmula, un modelo (OBDD) y la función *Assoc*, evalúa la fórmula y devuelve el OBDD correspondiente a su semántica. Al ser funcional la implementación,

toda la información necesaria para computar un resultado debe ser pasada como parámetro, por lo que la función *check* también toma dos parámetros extra, necesarios para reescribir los nombres de las proposiciones atómicas del OBDD por sus respectivas versiones primas (cuando es necesario verificar algo sobre el siguiente estado). Además *MuEval* contiene algunas funciones auxiliares como *fix*, la cual se utiliza en el cálculo de puntos fijos.

4.3.4 Módulo principal

El módulo *Main* contiene el *parser* de descripciones MC2, su evaluador y varias funciones auxiliares para la lectura de archivos e impresión por pantalla de los resultados. El *parser* principal utiliza los *parsers* de las declaraciones, comandos (reglas) y propiedades (fórmulas de μ -Cálculo). Para el estado inicial también se usa el *parser* de declaraciones, solo que en vez de inicializarse todas las proposiciones atómicas en *False*, se inicializan con los valores de la sección *init* de la descripción del modelo.

Capítulo 5

Casos de estudio

Ya hemos presentado el verificador de modelos MC2 y el lenguaje de descripción asociado al mismo. Es hora de observar algunos ejemplos concretos de uso de esta herramienta, y ese es el propósito de este capítulo final. Veremos como modelar tres clásicos juegos solitarios de lógica y estrategia, y analizaremos hasta que punto es viable describir manualmente el modelo con esta versión de MC2.

5.1 Cruce del río

Existen muchas versiones de este problema, nosotros modelaremos una de las versiones mas conocidas [14]. El problema es el siguiente, un granjero va a comprar un zorro, un ganso y una bolsa de frijoles. Mientras vuelve a su casa, se encuentra con que debe cruzar un río, para lo cual alquila un bote. El granjero solo puede llevar una de sus compras en el barco. Si se deja al zorro con el ganso, el zorro se lo va a comer, y si se deja al ganso con la bolsa de frijoles, este se va a comer los frijoles. El desafío del granjero es el de llevar todas sus compras intactas al otro lado del río. El problema consiste entonces en elegir sabiamente que compras trasladar en cada viaje.

La descripción MC2 para el modelo de este problema esta en la figura 5.1. Para modelarlo declaramos tres pares de proposiciones atómicas, uno para cada compra (f representa los frijoles, z el zorro y g el ganso), las proposiciones marcadas con 1 hacen referencia a que están del lado *origen* del río, y las marcadas con 2 hacen referencia a que están del lado *destino* del río. Luego declaramos la variable proposicional *boat* que si es verdadera representa al bote del lado *origen* y en caso

contrario estará del lado *destino*. Por último declaramos *go* que sirve para que el granjero no pueda viajar hasta que no pase algo del otro lado del río. En cuanto a las reglas, hay dos grupos de reglas a tener en cuenta para describir el comportamiento del sistema, por un lado se describe lo que pasa cuando se dejan juntos objetos (si son incompatibles, uno es comido, sino, no pasa nada), por otro lado tenemos las reglas que definen la acción de viajar de un lado del río al otro (se puede viajar solo o acompañado por un solo objeto). Hay que destacar que, por ejemplo, si $f1$ y $f2$ son falsas significa que los frijoles se han comido, y ninguna regla puede cambiar estos valores. En este caso, en el estado inicial queremos que valga que tanto el granjero/bote como el zorro, el ganso y los frijoles están del lado *origen* del río. Por último, la propiedad que queremos verificar es si es alcanzable un estado donde, siguiendo las reglas, puedan estar el zorro, el ganso y los frijoles en el lado *destino* del río.

```

1 vars
2   z1;z2;f1;f2;g1;g2;boat;go
3
4 rules
5   z1,g1,!boat,!go -> !g1,go;
6   z2,g2,boat,!go -> !g2,go;
7   g1,f1,!boat,!go -> !f1,go;
8   g2,f2,boat,!go -> !f2,go;
9
10  z1,f1,!g1,!boat,!go -> go;
11  z2,f2,!g2,boat,!go -> go;
12
13  z1,!f1,!g1,!boat,!go -> go;
14  z2,!f2,!g2,boat,!go -> go;
15
16  g1,!f1,!z1,!boat,!go -> go;
17  g2,!f2,!z2,boat,!go -> go;
18
19  f1,!z1,!g1,!boat,!go -> go;
20  f2,!z2,!g2,boat,!go -> go;
21
22  boat,g1,go -> !g1,!boat,g2,!go;
23  !boat,g2,go -> !g2,boat,g1,!go;
24  boat,f1,go -> !f1,!boat,f2,!go;
25  !boat,f2,go -> !f2,boat,f1,!go;
26  boat,z1,go -> !z1,!boat,z2,!go;
27  !boat,z2,go -> !z2,boat,z1,!go;
28
29  boat,go -> !boat,!go;
30  !boat,go -> boat,!go
31
32 init
33   z1,f1,g1,boat,go
34
35 check
36   %x.((f2 & (z2 & g2)) | <>:x)

```

Figura 5.1: Descripción de modelo del problema del cruce del río.

5.2 1,2,3, Coloca otra vez

Se parte de una estrella de 5 puntas, además de estas, se forman 5 puntos en su interior. Partiendo de uno de los 10 puntos donde no haya una ficha previamente colocada, se cuenta tres posiciones consecutivas sobre una de las aristas que contienen el punto de partida. Tras ello, se coloca una ficha en la tercera posición. En la figura 5.2 podemos ver la estrella, hemos nombrado los puntos externos como $o1, \dots, o5$ y los internos como $i1, \dots, i5$. Por ejemplo partiendo de $o1$ podemos poner una ficha en $i3$ o $i5$. El conteo puede pasar por una posición en la que haya ficha, pero no puede iniciarse en una posición con ficha. El juego estará resuelto cuando se hayan colocado 9 fichas [15].

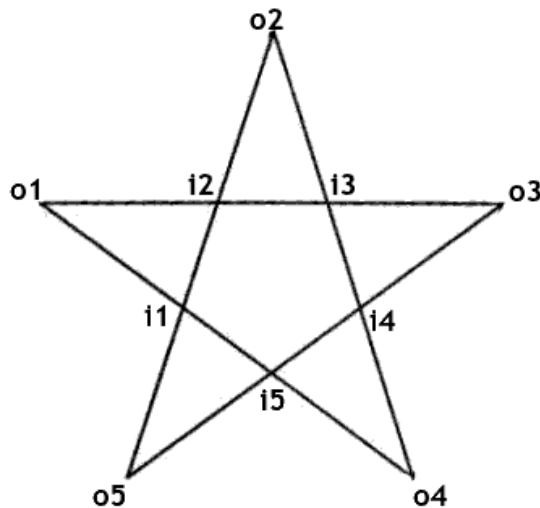


Figura 5.2: Pentagrama de 1,2,3 Coloca otra vez.

En la figura 5.3 se puede ver la descripción MC2 para el modelo de este problema. Para este modelo, declaramos una proposición para cada uno de los diez puntos de la estrella, donde cada proposición es verdadera o falsa dependiendo de si hay o no una ficha en ese punto. Las reglas en este caso representan las jugadas posibles a partir de cada punto. En el estado inicial no hace falta describir nada, ya que inicialmente queremos que no haya ficha en ningún punto de la estrella (todas las proposiciones están inicializadas en *False*). Por último, la propiedad que queremos verificar es si es posible poner nueve fichas en la estrella, a modo de ejemplo, la formula pide que haya una ficha en todos los puntos excepto $i5$.

```

1 vars
2   o1;o2;o3;o4;o5;i1;i2;i3;i4;i5
3
4 rules
5   !o1,!i3 -> i3;
6   !o1,!i5 -> i5;
7   !o2,!i1 -> i1;
8   !o2,!i4 -> i4;
9   !o3,!i2 -> i2;
10  !o3,!i5 -> i5;
11  !o4,!i5 -> i5;
12  !o4,!i4 -> i4;
13  !o5,!i2 -> i2;
14  !o5,!i4 -> i4;
15
16  !i1,!o2 -> o2;
17  !i1,!o4 -> o4;
18  !i2,!o5 -> o5;
19  !i2,!o3 -> o3;
20  !i3,!o1 -> o1;
21  !i3,!o4 -> o4;
22  !i4,!o2 -> o2;
23  !i4,!o5 -> o5;
24  !i5,!o1 -> o1;
25  !i5,!o3 -> o3
26
27 init
28
29 check
30  %z.((o1 & (o2 & (o3 & (o4 & (o5 & (i1 & (i2 & (i3 & i4))))))) | <>:z)

```

Figura 5.3: Descripción de modelo del problema de 1,2,3 Coloca otra vez.

5.3 Ranas saltarinas

En este juego se tiene una tira de papel dividida en siete casillas [15]. La posición inicial es la indicada con tres fichas azules (blancas) y tres rojas (grises) colocadas como en la figura 5.4. El objetivo del juego consiste en permutar las posiciones de las fichas azules y rojas. Es decir, las azules han de pasar a ocupar las posiciones de las rojas y viceversa. Para ello son válidos los siguientes movimientos:

- Una ficha puede moverse a un lugar contiguo, si éste está vacío.
- Una ficha junto a otra de distinto color puede saltar por encima de ella si el

salto (por encima de una sola ficha) le lleva a una casilla vacía.

- Son válidos tanto los movimientos hacia atrás como hacia adelante.



Figura 5.4: Juego de las ranas saltarinas.

La descripción MC2 del modelo para este juego esta en la figura 5.5. En este caso, tenemos siete proposiciones que representan la ocupación de cada casilla por una ficha roja, y siete más para las fichas azules, es de imaginar que una casilla i esta vacía si ri y bi son falsas, donde ri significa que hay una ficha roja en la i -ésima casilla, y bi significa que hay una azul en la misma casilla. Las reglas están divididas en cuatro bloques, dos para cada dirección en la que se puede mover una ficha. Los dos bloques de una dirección representan las primeras dos reglas del juego. Por su puesto, los bloques de la otra dirección son análogos. Como estado inicial tenemos las fichas azules colocadas del lado izquierdo de la tira de casillas, y las rojas del lado derecho, dejando vacía la casilla del medio. Por último, una propiedad interesante que podemos verificar es si es posible permutar las posiciones de las fichas rojas con las azules y viceversa, desde todos los estados alcanzables por el inicial.

```

1 vars
2  b1;b2;b3;b4;b5;b6;b7;
3  r1;r2;r3;r4;r5;r6;r7
4
5 rules
6  b2,!b1,!r1 -> !b2,b1;
7  b3,!b2,!r2 -> !b3,b2;
8  b4,!b3,!r3 -> !b4,b3;
9  b5,!b4,!r4 -> !b5,b4;
10 b6,!b5,!r5 -> !b6,b5;
11 b7,!b6,!r6 -> !b7,b6;
12
13 r2,!b1,!r1 -> !r2,r1;
14 r3,!b2,!r2 -> !r3,r2;
15 r4,!b3,!r3 -> !r4,r3;
16 r5,!b4,!r4 -> !r5,r4;
17 r6,!b5,!r5 -> !r6,r5;
18 r7,!b6,!r6 -> !r7,r6;
19
20 b1,!b2,!r2 -> !b1,b2;
21 b2,!b3,!r3 -> !b2,b3;
22 b3,!b4,!r4 -> !b3,b4;
23 b4,!b5,!r5 -> !b4,b5;
24 b5,!b6,!r6 -> !b5,b6;
25 b6,!b7,!r7 -> !b6,b7;
26
27 r1,!b2,!r2 -> !r1,r2;
28 r2,!b3,!r3 -> !r2,r3;
29 r3,!b4,!r4 -> !r3,r4;
30 r4,!b5,!r5 -> !r4,r5;
31 r5,!b6,!r6 -> !r5,r6;
32 r6,!b7,!r7 -> !r6,r7;
33
34 b3,r2,!b1,!r1 -> !b3,b1;
35 b4,r3,!b2,!r2 -> !b4,b2;
36 b5,r4,!b3,!r3 -> !b5,b3;
37 b6,r5,!b4,!r4 -> !b6,b4;
38 b7,r6,!b5,!r5 -> !b7,b5;
39
40 r3,b2,!b1,!r1 -> !r3,r1;
41 r4,b3,!b2,!r2 -> !r4,r2;
42 r5,b4,!b3,!r3 -> !r5,r3;
43 r6,b5,!b4,!r4 -> !r6,r4;
44 r7,b6,!b5,!r5 -> !r7,r5;
45
46 b1,r2,!b3,!r3 -> !b1,b3;
47 b2,r3,!b4,!r4 -> !b2,b4;
48 b3,r4,!b5,!r5 -> !b3,b5;
49 b4,r5,!b6,!r6 -> !b4,b6;
50 b5,r6,!b7,!r7 -> !b5,b7;
51
52 r1,b2,!b3,!r3 -> !r1,r3;
53 r2,b3,!b4,!r4 -> !r2,r4;
54 r3,b4,!b5,!r5 -> !r3,r5;
55 r4,b5,!b6,!r6 -> !r4,r6;
56 r5,b6,!b7,!r7 -> !r5,r7
57
58
59 init
60  b1,b2,b3,r5,r6,r7
61
62 check
63  $X.($Z.((r1 & (r2 & (r3 & (b5 & (b6 & b7)))))) | <>:z) & []:x

```

Figura 5.5: Descripción de modelo del problema de las ranas saltarinas.

Nos podemos preguntar como sería la descripción MC2 del modelo si la tira tuviera más de siete casillas, esta claro que cada vez se vuelve más humanamente inviable

a medida que se incrementa el tamaño de casillas. Esto es debido a que la herramienta no cuenta actualmente con abstracciones estructurales como los arreglos. Pero no es difícil escribir un programa en un lenguaje de alto nivel que genere una descripción MC2 para un sistema determinado, por ejemplo, para generar el modelo del problema de las ranas saltarinas pero con N casillas.

Conclusión

Para el desarrollo de esta tesis, se ha investigado sobre la verificación de modelos, sus variantes como la verificación de modelos explícitos y la verificación de modelos simbólicos, para lo cual también fue necesario investigar sobre lógicas temporales para llegar así a entender el μ -Cálculo y aplicarlo a la práctica.

Se logró desarrollar una nueva herramienta de verificación de modelos para μ -Cálculo, con un lenguaje de modelado propio basado que permite describir de manera intuitiva diversos tipos de sistemas, entre ellos, acertijos lógicos. Mediante el model checker se puede determinar si el modelo cumple con las propiedades deseadas por el usuario (en el caso de un acertijo, determinar si hay solución por ejemplo). Se puede destacar que existen algunas herramientas de model checking para μ -Cálculo como mCRL2 [16], TAPAs [17] y CWB [18]. Sin embargo, ninguna de estas está implementada en lenguajes funcionales, una implementación funcional posee algunas ventajas, por ejemplo la simplicidad al verificar correctitud y la transparencia de las definiciones.

Como trabajos futuros, se puede considerar la idea de hacer más versátil el lenguaje de modelado, ya sea agregando más tipos de datos y/o extendiendo las formas de expresar el flujo del sistema que se está modelando. Además como el foco de atención en el desarrollo de la herramienta no fue la eficiencia, se puede mejorar notoriamente en este aspecto.

Bibliografia

- [1] J. Waldmann, *The OBDD package*. <https://github.com/jwaldmann/haskell-obdd>.
- [2] E. M. Clarke, O. Grumberg, and D. A. Peled, *Model Checking*. The MIT Press, 2000.
- [3] E. Clarke, O. Grumberg, and D. Long, *Model Checking*.
- [4] P. F. Castro, C. Kilmurray, A. Acosta, and N. Aguirre, *dCTL: A Branching Time Temporal Logic for Fault-Tolerant System Verification*. 2011.
- [5] <https://www.haskell.org/>.
- [6] C. Baier and J.-P. Katoen, *Principles of Model Checking*. The MIT Press, 2008.
- [7] R. E. Bryant, *Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary Decision Diagrams*. Fujitsu Laboratories, Ltd., 1992.
- [8] J. Burch, E. M. Clarke, and K. L. McMillan, *Symbolic Model Checking 10²⁰ States and Beyond**. LICS, 1990.
- [9] E. A. Emerson, *Temporal and modal logic*. 1995.
- [10] D. Kozen, *Results on the prepositional mu-calculus*. Elsevier Science Publishers B.V., 1983.
- [11] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*. Pacific Journal of Mathematics, 1955.
- [12] H. R. Andersen, *An Introduction to Binary Decision Diagrams*. Lecture Notes, IT University of Copenhagen, 1999.

- [13] G. Hutton and E. Meijer, *A LIBRARY OF MONADIC PARSER COMBINATORS*. <http://www.informatik.uni-bremen.de/cofi/CASL-CD/Tools/Hets/src/Haskell/Hatchet/ParseLib.hs>, 2008.
- [14] J. Hadley and D. Singmaster, *Problems to Sharpen the Young*. The Mathematical Gazette, 1992.
- [15] <http://juegosdelogica.net/juegosdeestrategia/>.
- [16] J. Groote and M. Mousavi, *Modeling and analysis of communicating systems*. The MIT press, 2014.
- [17] F. Calzolari, R. D. Nicola, M. Loreti, and F. Tiezzi., *TAPAs: a Tool for the Analysis of Process Algebras*. LNCS, Springer-Verlag, 2008.
- [18] F. Moller, *The Edinburgh Concurrency Workbench*. <http://homepages.inf.ed.ac.uk/perdita/cwb/>.