

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Отчёт
по лабораторной работе №2
по дисциплине
«Интервальный анализ»

Выполнил студент:
Лапотников Павел Вадимович
группа: 5030102/90201

Проверил:
к.ф.-м.н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Распознающий функционал	2
2.2	Достижение разрешимости	2
2.2.1	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы	2
2.2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части . .	3
2.3	Оценки вариабельности решения	3
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Исходная ИСЛАУ	3
4.2	Коррекция правой части	4
4.3	Общая коррекция матрицы	6
4.4	Коррекция матрицы построчно	7
4.4.1	Первая строка	7
4.4.2	Вторая строка	7
4.4.3	Третья строка	8
4.4.4	Четвертая строка	9
5	Обсуждение	10
6	Приложение	10

Список иллюстраций

1	График $\text{Tol}(x, A, b)$	4
2	$\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с правленной правой частью	5
3	Ξ_{tol} для ИСЛАУ с исправленной матрицей в целом	6
4	$\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной первой строкой матрицы	7
5	$\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной второй строкой матрицы	8
6	$\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной третьей строкой матрицы	9
7	$\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной четвертой строкой матрицы	10

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \\ d \cdot x_1 + 0 = e \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c, k, d, e - положительные интервалы

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимум распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы в целом
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы построчно
- Оценок варибельности решения

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Выражения для распознающего функционала

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \text{rad}b_i - \left| \text{mid}b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \right\}$$

$$x \in \Xi_{\text{tol}} \Leftrightarrow \text{Tol}(x) \geq 0$$

$\text{Tol}(x)$ - достигает конечного максимума на всем R^n . С помощью максимума данного функционала можно судить о пустоте допускового множества решений ИСЛАУ. Если $\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, то допусковое множество не пусто, иначе $\Xi_{\text{tol}} = \emptyset$

2.2 Достижение разрешимости

2.2.1 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Идея метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Для метода, предложенного в лекциях, нужно выполнения свойства о невырожденности интервалов компонент правой части ИСЛАУ. Так как исходная задача (1) не удовлетворяет этому условию, в качестве достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы был взят итерационный метод, на каждой итерации которого уменьшается вдвое радиус интервалов матрицы, пока система не станет разрешимой или разница между границами интервала не станет меньше изначально заданного ε

2.2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Наиболее простой способ достижения разрешимости ИСЛАУ — ослабление ограничения в правой части ИСЛАУ. Эта операция увеличивает значение $\text{Tol}(x)$ и позволяет достичь разрешимости за счет ослабления требований к точности решения. Для этого к каждой компоненте правой части ИСЛАУ добавим величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1; 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i -й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b . Примем $\nu_i = 1 \ \forall i = \overline{1, 3}$. Подберем K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$

2.3 Оценки вариабельности решения

Для оценки вариабельности решений будем использовать абсолютную(ive) и относительную(rve) оценки:

$$\begin{aligned} \text{ive}(A, b) &= \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \|\text{argmax}_{x \in R^n} \text{Tol}(x)\| \frac{\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)}{\|b\|} \\ \text{rve}(A, b) &= \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \end{aligned}$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств языка программирования Python с использованием библиотек matplotlib, intvalpy, numpy в среде разработки Jupyter Notebook.

4 Результаты

4.1 Исходная ИСЛАУ

Рассмотрим следующую ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0, 2] \cdot x_1 + [1, 3] \cdot x_2 = [3, 7] \\ x_1 - [-4, -2] \cdot x_2 = [-0.5, 0.5] \\ [0.75, 1.25] \cdot x_1 = [3, 5] \\ [0.75, 1.25] \cdot x_2 = [0, 2] \end{cases} \quad (2)$$

Изначальная ИСЛАУ имеет пустое допустовое множество - максимум распознающего функционала в точке (2.57, 1.22) равен -1.79. (Пометим звездочкой)

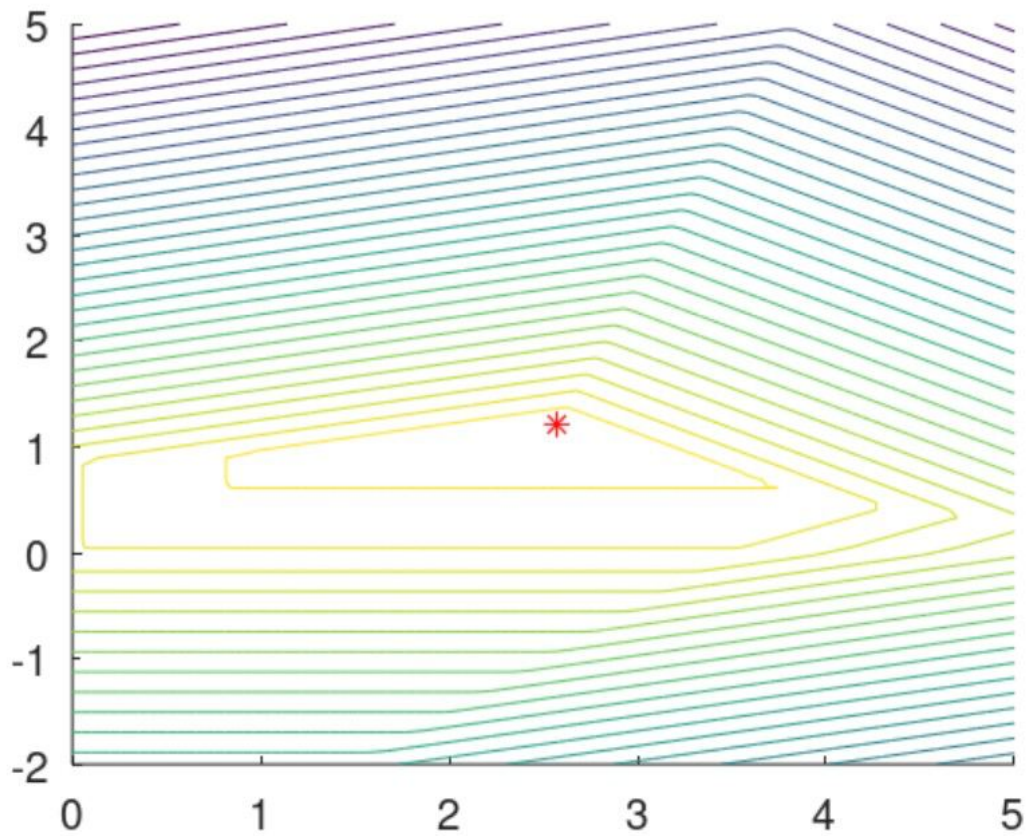


Рис. 1: График $\text{Tol}(x, A, b)$

4.2 Коррекция правой части

Заменяем правую часть ИСЛАУ по описанной выше схеме. После коррекции максимум распознающего функционала стал равен 0.89 в точке $(2.57, 1.21)$. Вектор столбца

$$b' = ([0.32, 9.67], [3.17, 3.17], [0.321, 7.67], [2.67, 4.67])$$

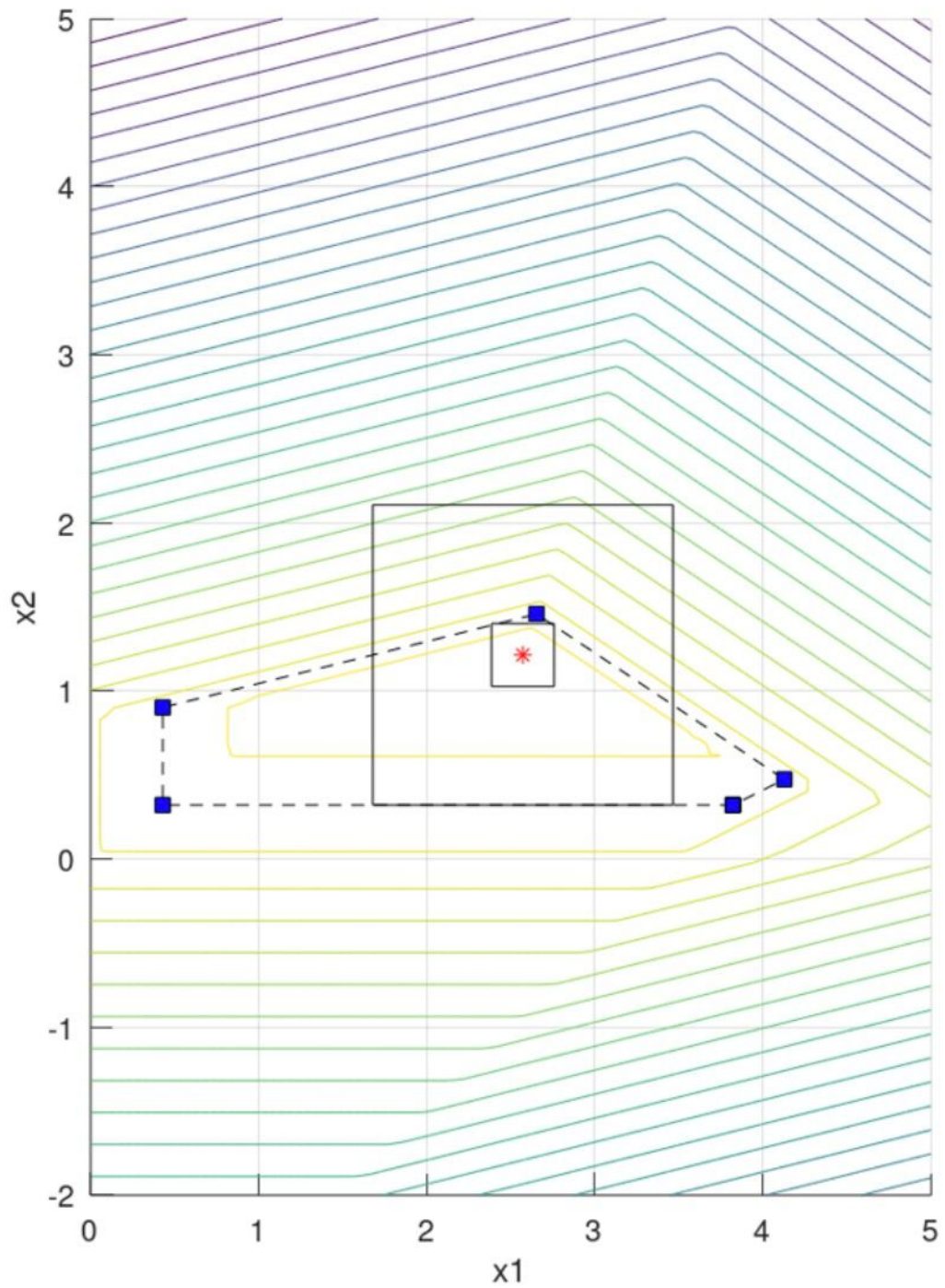


Рис. 2: $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с правленной правой частью

После коррекции правой части имеем следующие показатели ive и rve .

$$\text{ive}(A, \hat{b}) \approx 0.18$$

$$\text{rve}(A, \hat{b}) \approx 0.89$$

На графике изображены квадратные брусы с центром в точке максимума и радиусом ive и rve

4.3 Общая коррекция матрицы

После общей коррекции матрицы имеем максимум в точке $(3.52, 1.12)$ - 0.34

$$\text{ive}(A, \hat{b}) \approx -0.28$$

$$\text{rve}(A, \hat{b}) \approx 0.67$$

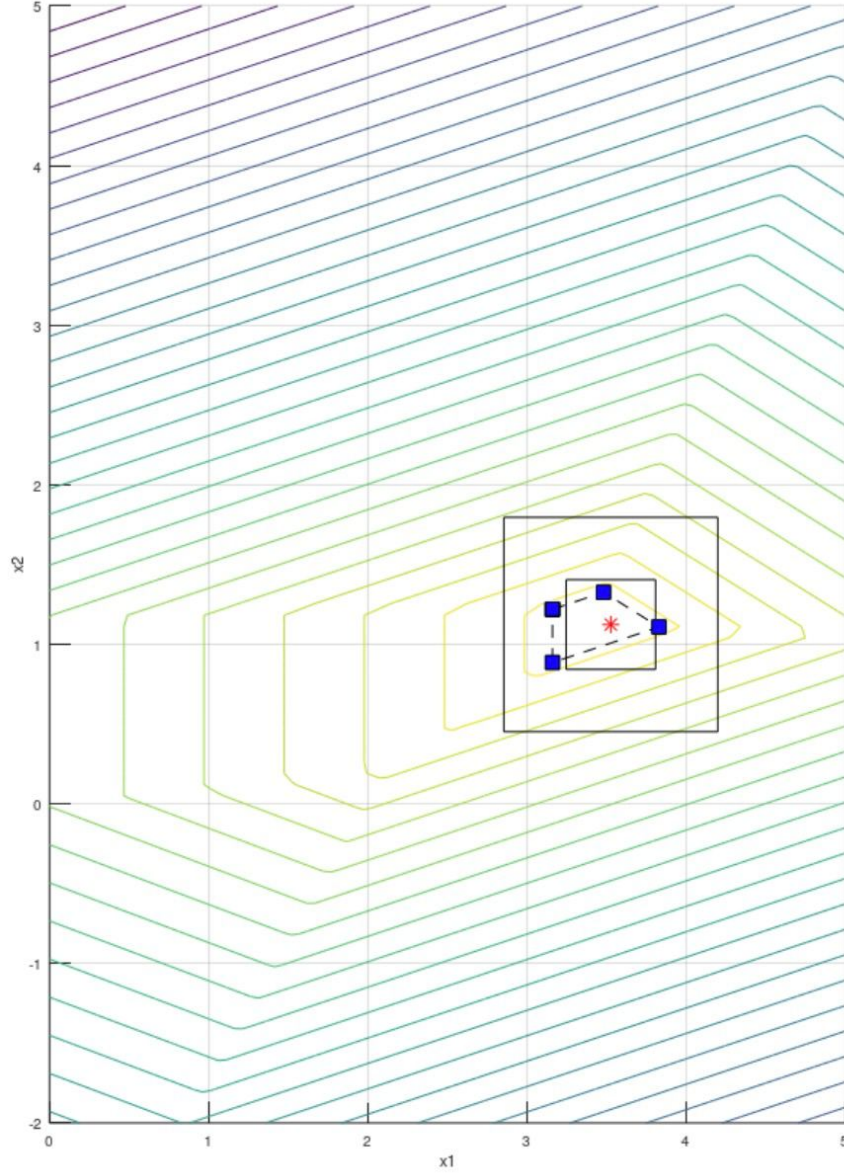


Рис. 3: Ξ_{tol} для ИСЛАУ с исправленной матрицей в целом

Матрица

$$A' = \begin{pmatrix} [0.75, 1.25] & 2 \\ 1 & 3 \\ [0.95, 1.05] & 0 \\ 0 & [0.75, 1.25] \end{pmatrix}$$

4.4 Коррекция матрицы построчно

4.4.1 Первая строка

ИСЛАУ за счет коррекции первой строки имеет максимум распознающего функционала в точке $(3.23, 1.08)$

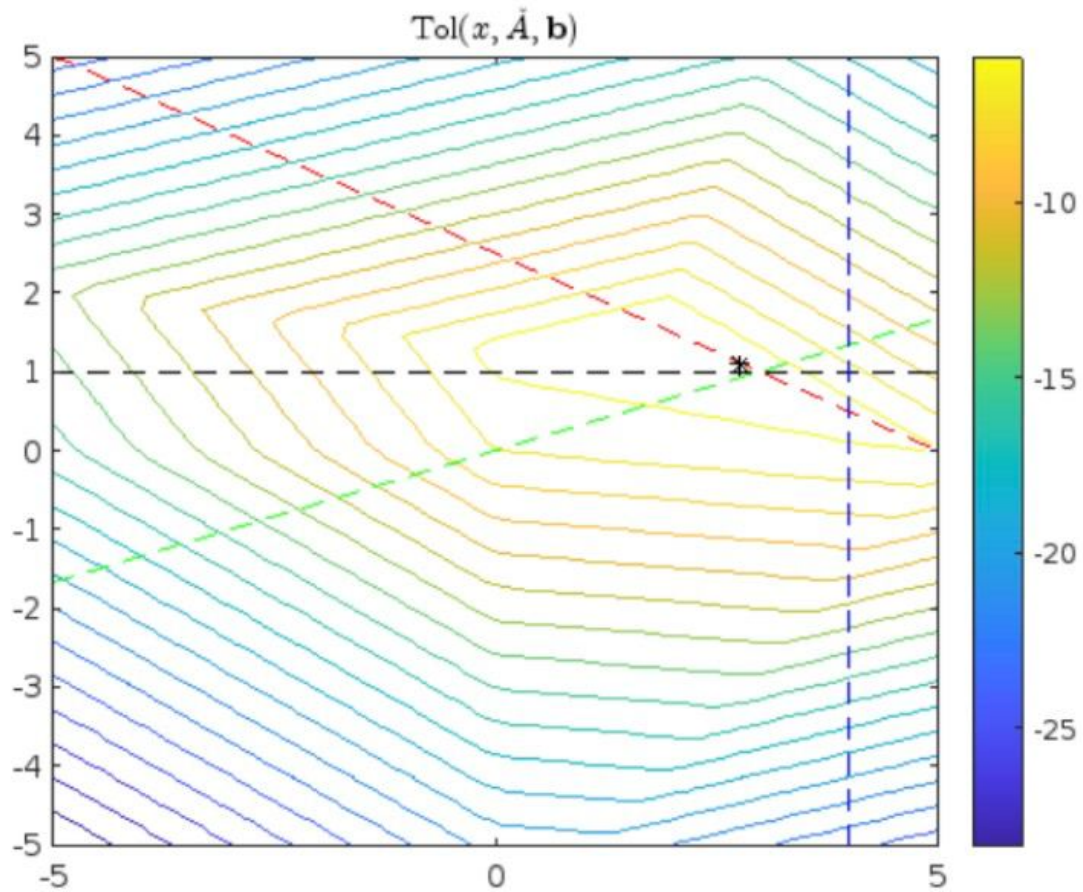


Рис. 4: $Tol(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной первой строкой матрицы

4.4.2 Вторая строка

В результате коррекции второй строки матрицы имеет максимум распознающего функционала в точке $(2.17, 1.42)$

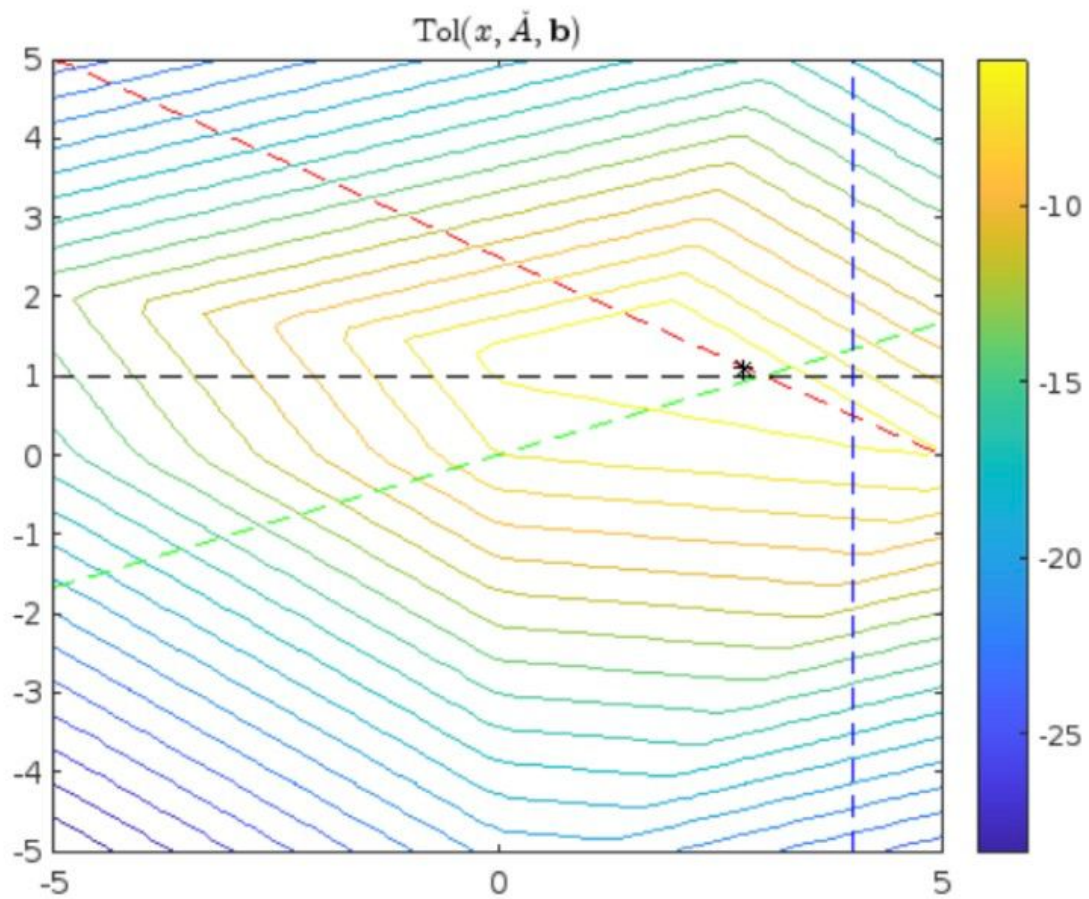


Рис. 5: $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной второй строкой матрицы

4.4.3 Третья строка

В результате коррекции третьей строки матрицы, ИСЛАУ также не стала разрешимой. Максимум распознающего функционала в точке $(2.57, 1.21)$

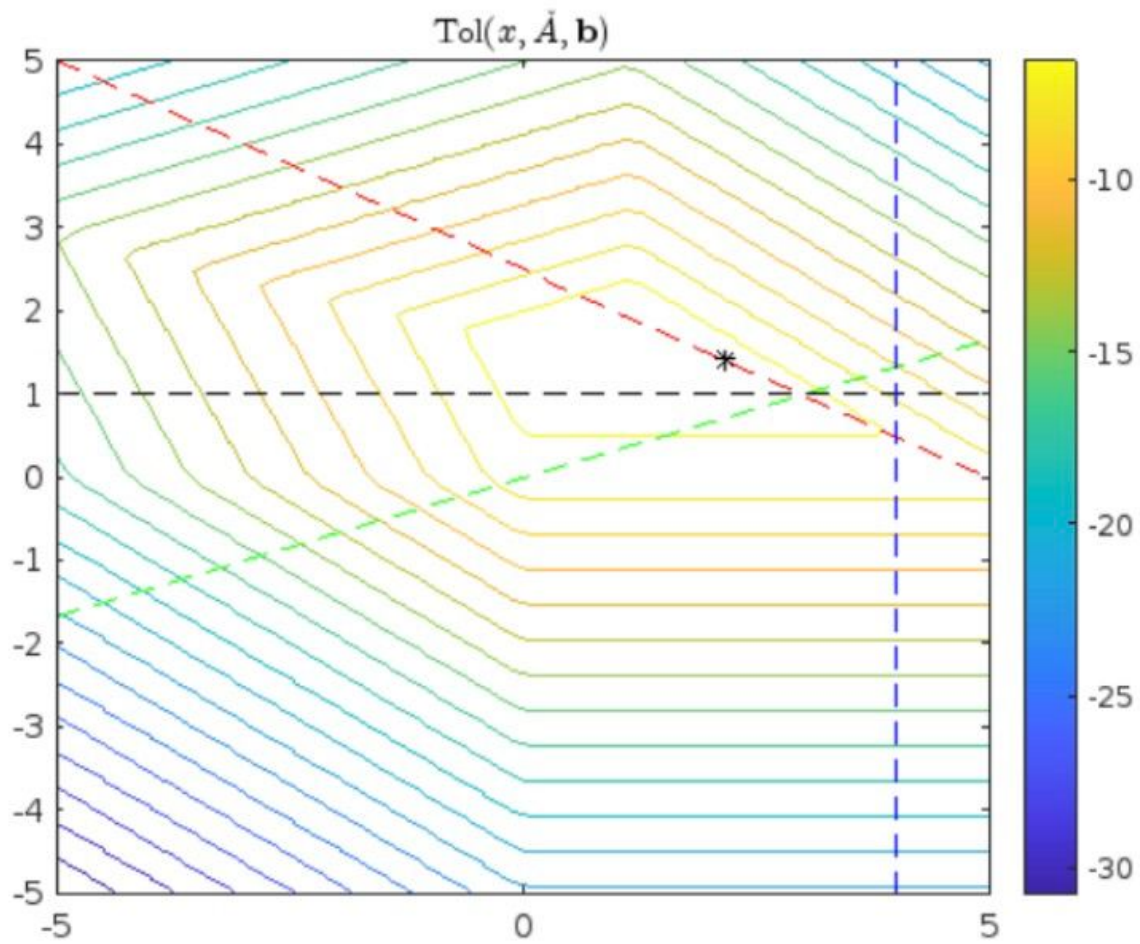


Рис. 6: $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной третьей строкой матрицы

4.4.4 Четвертая строка

В результате коррекции четвертой строки матрицы, ИСЛАУ также не стала разрешимой. Максимум распознающего функционала в точке (2.57, 1.21)

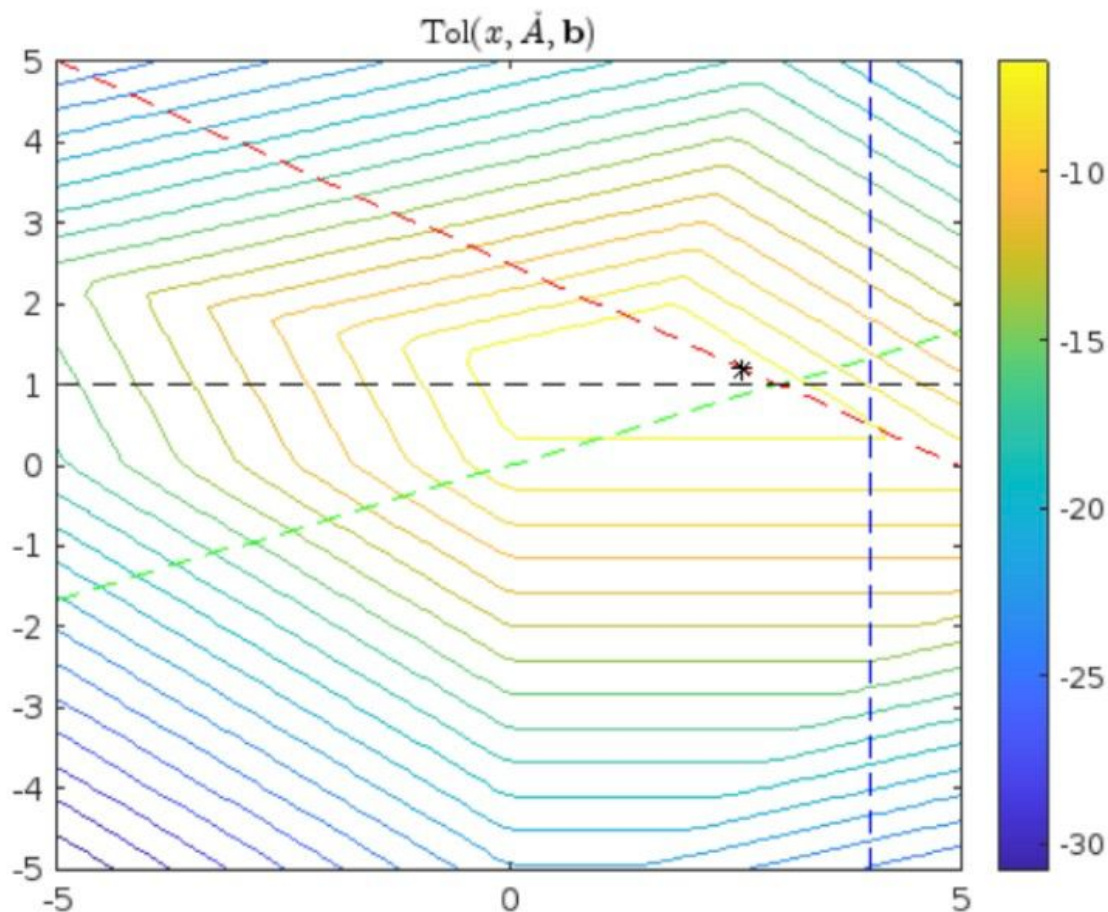


Рис. 7: $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с исправленной четвертой строкой матрицы

5 Обсуждение

1. Оценки вариабельности меньше при коррекции матрицы, при этом брусы, соответствующие оценкам вариабельности, хорошо оценили допустовое множество итоговой ИСЛАУ
2. Коррекция матрицы ИСЛАУ меняет форму распознающего функционала во всех рассмотренных преобразованиях
3. Во всех случаях исправления максимум распознающего функционала располагается на прямой соответствующей медиане.
4. При корректировки третьей строки можно наблюдать смещение центра максимума и при увеличении параметра, начиная с $\epsilon = 0.2$, положение максимума не изменяется

6 Приложение

Код программы на GitHub Url <https://github.com/lpvmak/interval>