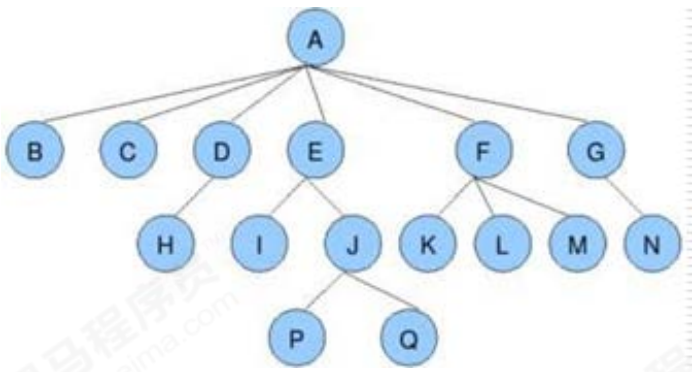
一、二叉树入门

之前我们实现的符号表中，不难看出，符号表的增删查操作，随着元素个数N的增多，其耗时也是线性增多的，时间复杂度都是O(n),为了提高运算效率，接下来我们学习树这种数据结构。

1.1树的基本定义

树是我们计算机中非常重要的一种数据结构，同时使用树这种数据结构，可以描述现实生活中的很多事物，例如家谱、单位的组织架构、等等。

树是由n（n>=1）个有限结点组成一个具有层次关系的集合。把它叫做“树”是因为它看起来像一棵倒挂的树，也就是说它是根朝上，而叶朝下的。



树具有以下特点：

1.每个结点有零个或多个子结点；

2.没有父结点的结点为根结点；

3.每一个非根结点只有一个父结点；

4.每个结点及其后代结点整体上可以看做是一棵树，称为当前结点的父结点的一个子树；

1.2 树的相关术语

结点的度：

一个结点含有的子树的个数称为该结点的度；

叶结点：

度为0的结点称为叶结点，也可以叫做终端结点

分支结点：

度不为0的结点称为分支结点，也可以叫做非终端结点

结点的层次：

从根结点开始，根结点的层次为1，根的直接后继层次为2，以此类推

结点的层序编号：

将树中的结点，按照从上层到下层，同层从左到右的次序排成一个线性序列，把他们编成连续的自然数。

树的度：

树中所有结点的度的最大值

树的高度(深度)：

树中结点的最大层次

森林：

m（m>=0）个互不相交的树的集合，将一颗非空树的根结点删去，树就变成一个森林；给森林增加一个统一的根结点，森林就变成一棵树

孩子结点：

一个结点的直接后继结点称为该结点的孩子结点

双亲结点(父结点)：

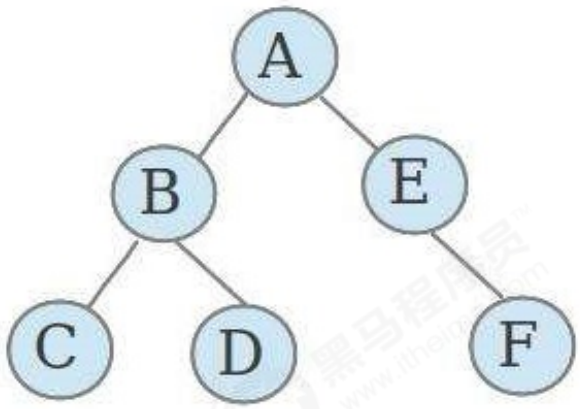
一个结点的直接前驱称为该结点的双亲结点

兄弟结点：

同一双亲结点的孩子结点间互称兄弟结点

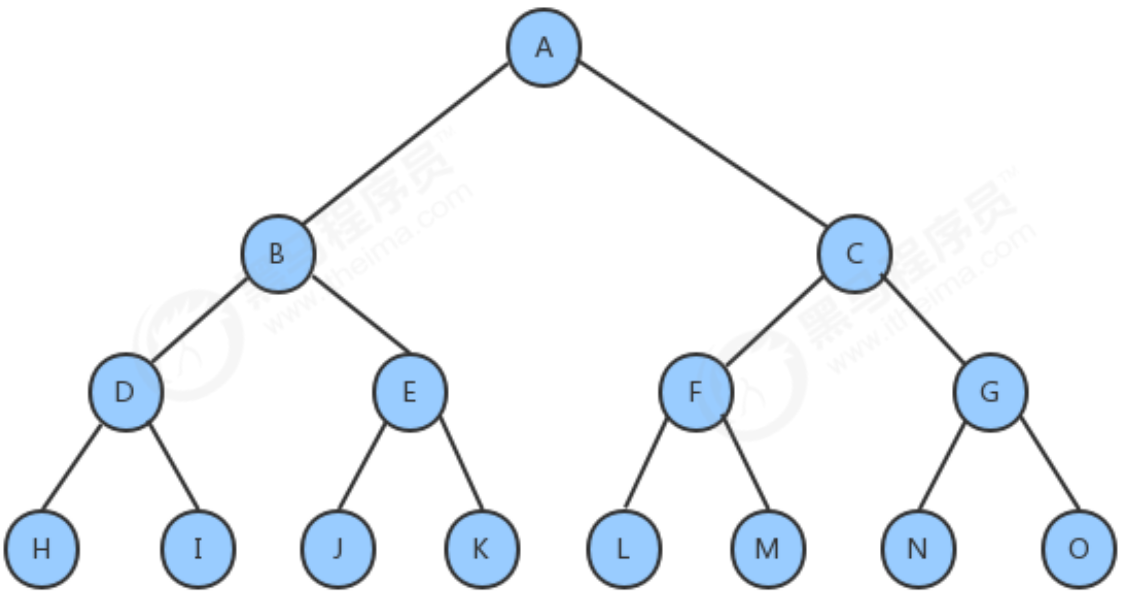
1.3 二叉树的基本定义

二叉树就是度不超过2的树(每个结点最多有两个子结点)



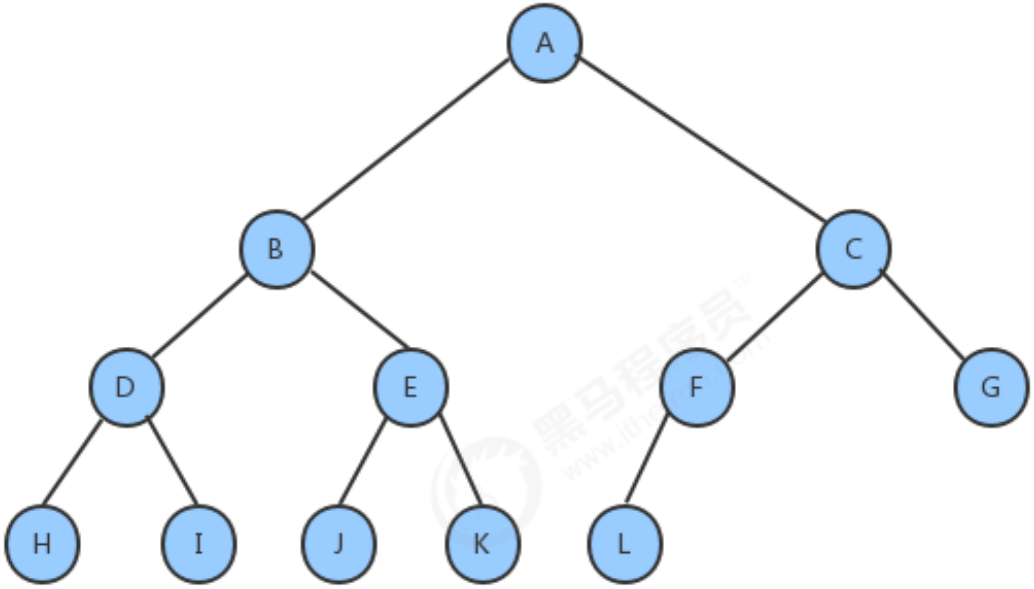
满二叉树：

一个二叉树，如果每一个层的结点树都达到最大值，则这个二叉树就是满二叉树。



完全二叉树：

叶节点只能出现在最下层和次下层，并且最下面一层的结点都集中在该层最左边的若干位置的二叉树



1.4 二叉查找树的创建

1.4.1二叉树的结点类

根据对图的观察，我们发现二叉树其实就是由一个一个的结点及其之间的关系组成的，按照面向对象的思想，我们设计一个结点类来描述结点这个事物。

结点类API设计：

类名	Node<Key,Value>
构造方法	Node(Key key, Value value, Node left, Node right)：创建Node对象
成员变量	1.public Node left:记录左子结点 2.public Node right:记录右子结点 3.public Key key:存储键 4.public Value value:存储值

代码实现：

```
private class Node<Key,Value>{
     //存储键
     public Key key;
     //存储值
     private Value value;
     //记录左子结点
     public Node left;
     //记录右子结点
     public Node right;

     public Node(Key key, Value value, Node left, Node right) {
         this.key = key;
         this.value = value;
```

```
        this.left = left;
        this.right = right;
    }
}
```

1.4.2 二叉查找树API设计

类名	BinaryTree,Value value>
构造方法	BinaryTree()：创建BinaryTree对象
成员变量	1.private Node root:记录根结点 2.private int N:记录树中元素的个数
成员方法	1. public void put(Key key,Value value):向树中插入一个键值对 2.private Node put(Node x, Key key, Value val)：给指定树x上，添加键一个键值对，并返回添加后的新树 3.public Value get(Key key):根据key，从树中找出对应的值 4.private Value get(Node x, Key key):从指定的树x中，找出key对应的值 5.public void delete(Key key):根据key，删除树中对应的键值对 6.private Node delete(Node x, Key key):删除指定树x上的键为key的键值对，并返回删除后的新树 7.public int size():获取树中元素的个数

1.4.3 二叉查找树实现

插入方法put实现思想：

1.如果当前树中没有任何一个结点，则直接把新结点当做根结点使用

2.如果当前树不为空，则从根结点开始：

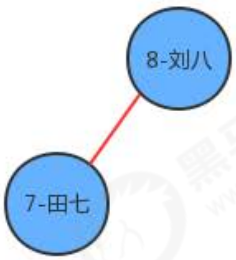
2.1如果新结点的key小于当前结点的key，则继续找当前结点的左子结点；

2.2如果新结点的key大于当前结点的key，则继续找当前结点的右子结点；

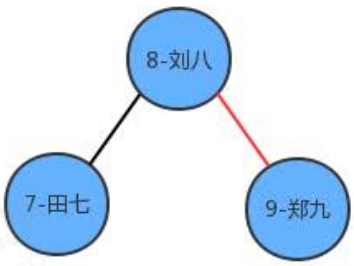
2.3如果新结点的key等于当前结点的key，则树中已经存在这样的结点，替换该结点的value值即可。

存储第一个元素：8-刘八

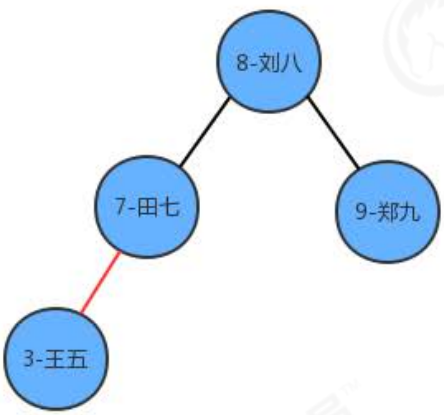
存储第二个元素：7-田七



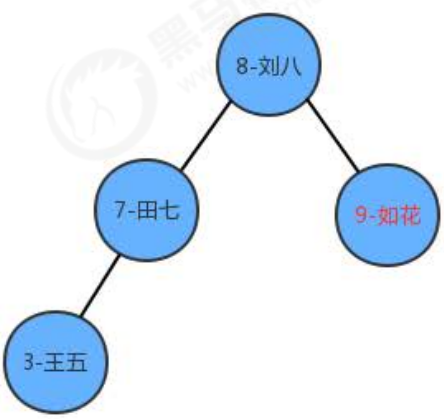
存储第三个元素：9-郑九



存储第四个元素：3-王五



存储第五个元素：9-如花



查询方法get实现思想：

从根节点开始：

1.如果要查询的key小于当前结点的key，则继续找当前结点的左子结点；

2.如果要查询的key大于当前结点的key，则继续找当前结点的右子结点；

3.如果要查询的key等于当前结点的key，则树中返回当前结点的value。

删除方法delete实现思想：

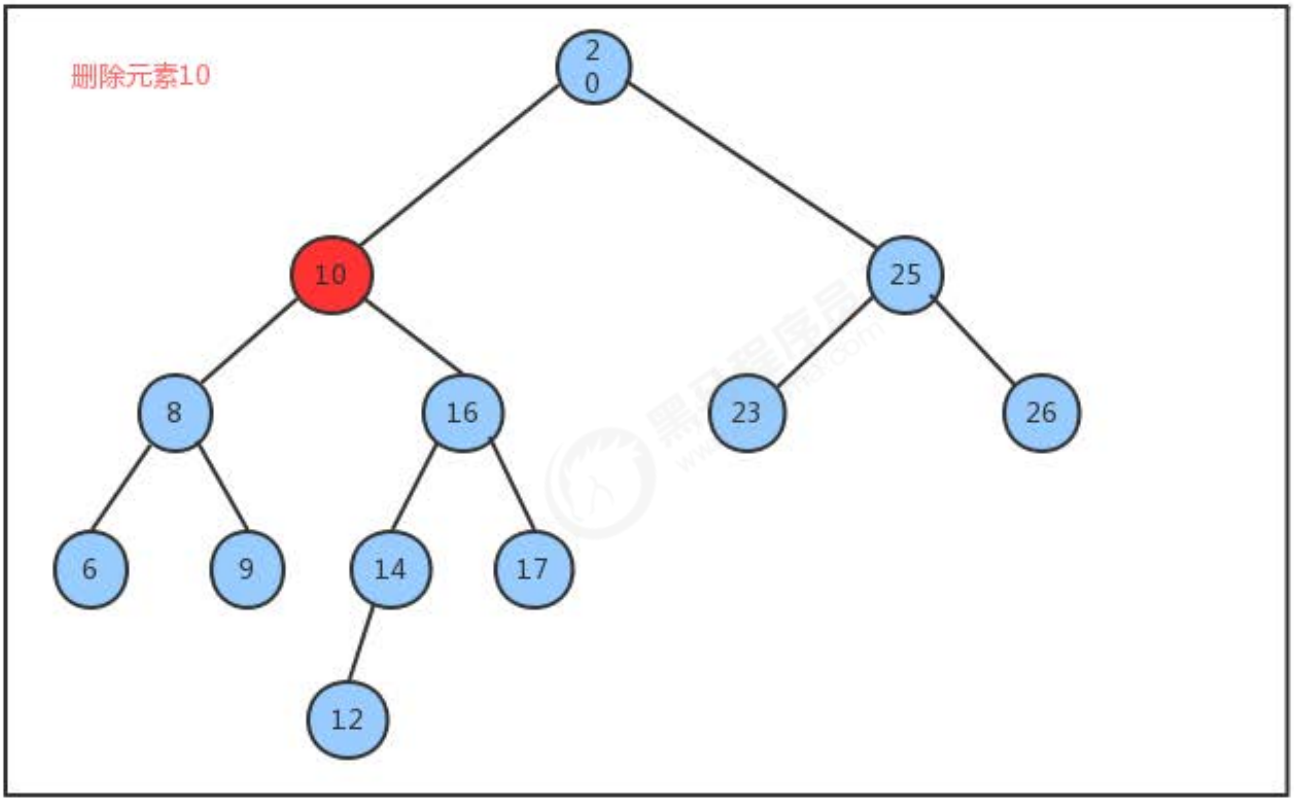
1.找到被删除结点；

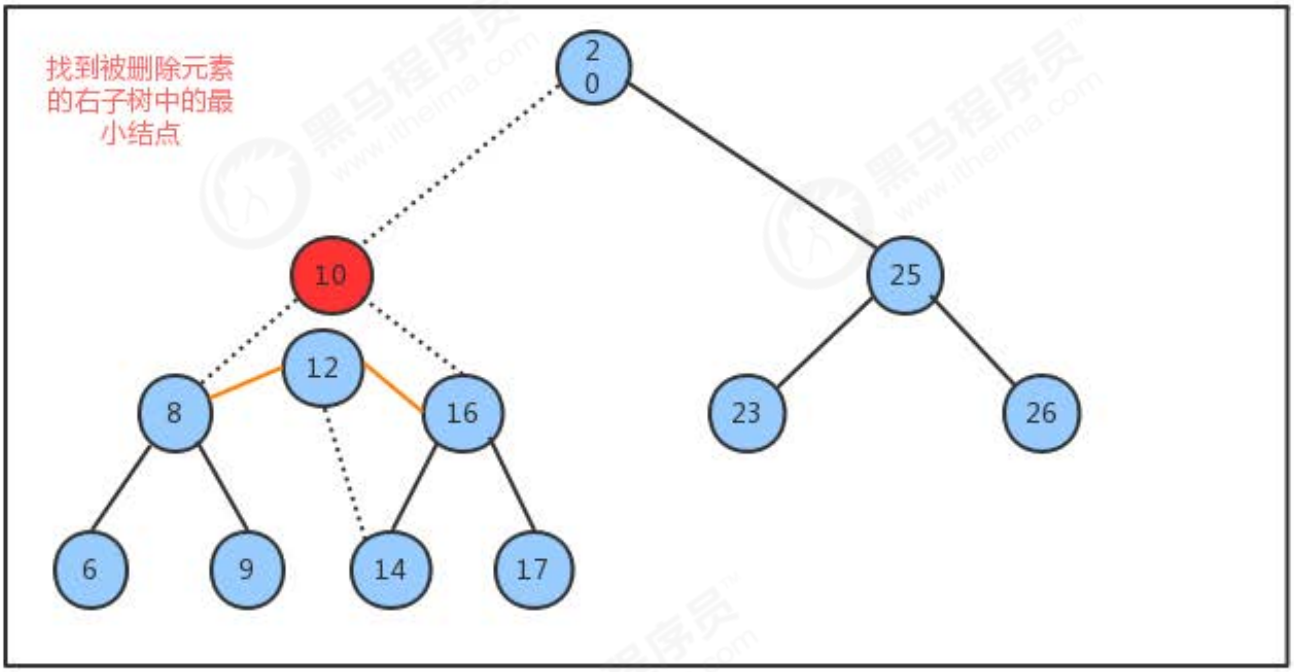
2.找到被删除结点右子树中的最小结点minNode

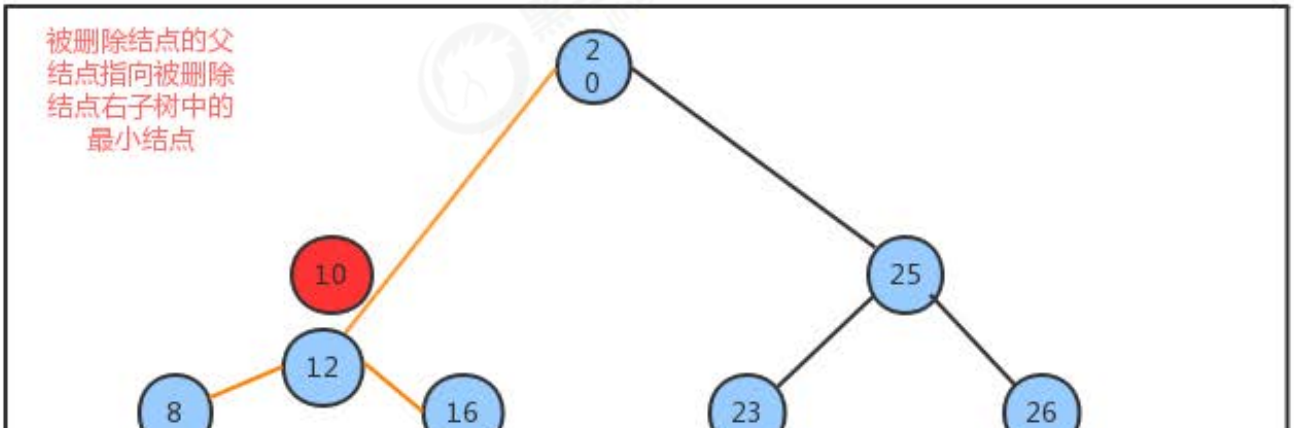
3.删除右子树中的最小结点

4.让被删除结点的左子树称为最小结点minNode的左子树，让被删除结点的右子树称为最小结点minNode的右子树

5.让被删除结点的父节点指向最小结点minNode


删除元素10
20
10
25
8
16
23
26
6
9
14
17
12


找到被删除元素的右子树中的最小结点
20
10
25
12
8
16
23
26
6
9
14
17


被删除结点的父结点指向被删除结点右子树中的最小结点
20
10
25
12
8
16
23
26

代码：

```
//二叉树代码
public class BinaryTree<Key extends Comparable<Key>, Value> {
    //记录根结点
    private Node root;
    //记录树中元素的个数
    private int N;

    //获取树中元素的个数
    public int size() {
        return N;
    }

    //向树中添加元素key-value
    public void put(Key key, Value value) {
        root = put(root, key, value);
    }

    //向指定的树x中添加key-value,并返回添加元素后新的树
    private Node put(Node x, Key key, Value value) {
        if (x == null) {
            //个数+1
            N++;
            return new Node(key, value, null, null);
        }
        int cmp = key.compareTo(x.key);
        if (cmp > 0) {
            //新结点的key大于当前结点的key，继续找当前结点的右子结点
            x.right = put(x.right, key, value);
        } else if (cmp < 0) {
            //新结点的key小于当前结点的key，继续找当前结点的左子结点
            x.left = put(x.left, key, value);
        } else {
            //新结点的key等于当前结点的key，把当前结点的value进行替换
            x.value = value;
        }
        return x;
    }

    //查询树中指定key对应的value
    public Value get(Key key) {
        return get(root, key);
    }


    //从指定的树x中，查找key对应的值
```

```
    public Value get(Node x, Key key) {
        if (x == null) {
            return null;
        }
        int cmp = key.compareTo(x.key);
        if (cmp > 0) {
            //如果要查询的key大于当前结点的key，则继续找当前结点的右子结点；
            return get(x.right, key);
        } else if (cmp < 0) {
            //如果要查询的key小于当前结点的key，则继续找当前结点的左子结点；
            return get(x.left, key);
        } else {
            //如果要查询的key等于当前结点的key，则树中返回当前结点的value。
            return x.value;
        }
    }

    //删除树中key对应的value
    public void delete(Key key) {
        root = delete(root, key);
    }

    //删除指定树x中的key对应的value，并返回删除后的新树
    public Node delete(Node x, Key key) {
        if (x == null) {
            return null;
        }

        int cmp = key.compareTo(x.key);
        if (cmp > 0) {
            //新结点的key大于当前结点的key，继续找当前结点的右子结点
            x.right = delete(x.right, key);
        } else if (cmp < 0) {
            //新结点的key小于当前结点的key，继续找当前结点的左子结点
            x.left = delete(x.left, key);
        } else {
            //新结点的key等于当前结点的key,当前x就是要删除的结点
            //1.如果当前结点的右子树不存在，则直接返回当前结点的左子结点
            if (x.right == null) {
                return x.left;
            }
            //2.如果当前结点的左子树不存在，则直接返回当前结点的右子结点
            if (x.left == null) {
                return x.right;
            }
            //3.当前结点的左右子树都存在
            //3.1找到右子树中最小的结点
            Node minNode = x.right;
            while (minNode.left != null) {
                minNode = minNode.left;
            }
            //3.2删除右子树中最小的结点

            Node n = x.right;
```

```
            while (n.left != null) {
                if (n.left.left == null) {
                    n.left = null;
                } else {
                    n = n.left;
                }
            }

            //3.3让被删除结点的左子树称为最小结点minNode的左子树，让被删除结点的右子树称为最小结点minNode的右子树
            minNode.left = x.left;
            minNode.right = x.right;
            //3.4让被删除结点的父节点指向最小结点minNode
            x = minNode;
            //个数-1
            N--;
        }
        return x;
    }

    private class Node {
        //存储键
        public Key key;
        //存储值
        private Value value;
        //记录左子结点
        public Node left;
        //记录右子结点
        public Node right;

        public Node(Key key, Value value, Node left, Node right) {
            this.key = key;
            this.value = value;
            this.left = left;
            this.right = right;
        }
    }
}

//测试代码
public class Test {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        BinaryTree<Integer, String> bt = new BinaryTree<>();
        bt.put(4, "二哈");
        bt.put(1, "张三");
        bt.put(3, "李四");
        bt.put(5, "王五");
        System.out.println(bt.size());
        bt.put(1,"老三");
        System.out.println(bt.get(1));
        System.out.println(bt.size());
        bt.delete(1);

        System.out.println(bt.size());
```

```
    }
}
```

1.4.4 二叉查找树其他便捷方法

1.4.4.1 查找二叉树中最小的键

在某些情况下，我们需要查找出树中存储所有元素的键的最小值，比如我们的树中存储的是学生的排名和姓名数据，那么需要查找出排名最低是多少名？这里我们设计如下两个方法来完成：

public Key min()	找出树中最小的键
private Node min(Node x)	找出指定树x中，最小键所在的结点

```
//找出整个树中最小的键
    public Key min(){
        return min(root).key;
    }

    //找出指定树x中最小的键所在的结点
    private Node min(Node x){
        if (x.left!=null){
            return min(x.left);
        }else{
            return x;
        }
    }
```

1.4.4.2 查找二叉树中最大的键

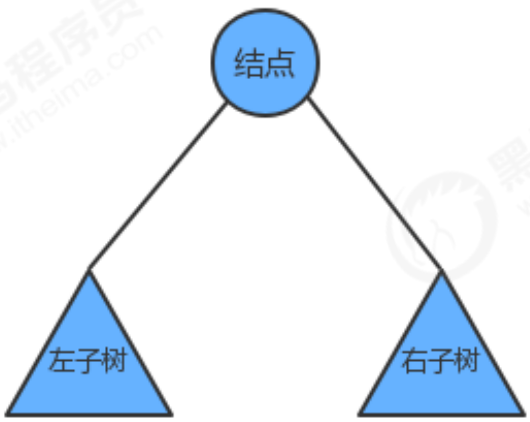
在某些情况下，我们需要查找出树中存储所有元素的键的最大值，比如比如我们的树中存储的是学生的成绩和学生的姓名，那么需要查找出最高的分数是多少？这里我们同样设计两个方法来完成：

public Key max()	找出树中最大的键
public Node max(Node x)	找出指定树x中，最大键所在的结点

```java
//找出整个树中最大的键
    public Key max(){
        return max(root).key;
    }

    //找出指定树x中最大键所在的结点
    public Node max(Node x){
        if (x.right!=null){
            return max(x.right);
        }else{
            return x;
        }
    }
```

1.5 二叉树的基础遍历

很多情况下，我们可能需要像遍历数组数组一样，遍历树，从而拿出树中存储的每一个元素，由于树状结构和线性结构不一样，它没有办法从头开始依次向后遍历，所以存在如何遍历，也就是按照什么样的**搜索路径**进行遍历的问题。



我们把树简单的画作上图中的样子，由一个根节点、一个左子树、一个右子树组成，那么按照根节点什么时候被访问，我们可以把二叉树的遍历分为以下三种方式：

1.前序遍历；

先访问根结点，然后再访问左子树，最后访问右子树

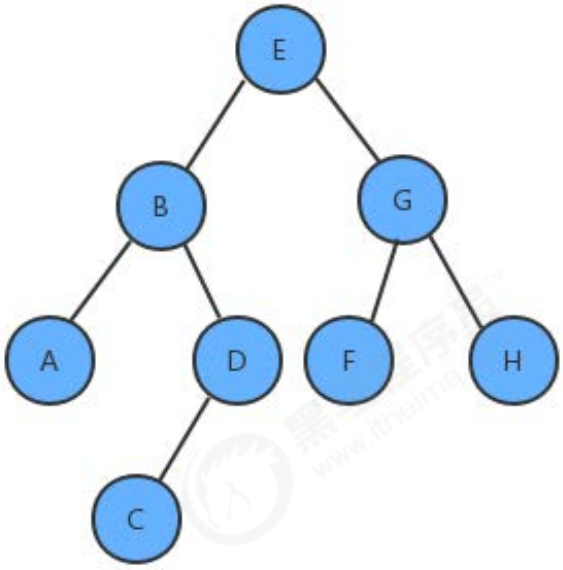
2.中序遍历；

先访问左子树，中间访问根节点，最后访问右子树

3.后序遍历；

先访问左子树，再访问右子树，最后访问根节点

如果我们分别对下面的树使用三种遍历方式进行遍历，得到的结果如下：



前序遍历结果：EBADCGFH

中序遍历结果：ABCDEFGH

后序遍历结果：ACDBFHGE

1.5.1 前序遍历

我们在4.4中创建的树上，添加前序遍历的API：

`public Queue<Key> preErgodic()`：使用前序遍历，获取整个树中的所有键

`private void preErgodic(Node x,Queue<Key> keys)`：使用前序遍历，把指定树x中的所有键放入到keys队列中

实现过程中，我们通过前序遍历，把,把每个结点的键取出，放入到队列中返回即可。

实现步骤：

1.把当前结点的key放入到队列中;

2.找到当前结点的左子树，如果不为空，递归遍历左子树

3.找到当前结点的右子树，如果不为空，递归遍历右子树

代码：

```
//使用前序遍历，获取整个树中的所有键
public Queue<Key> preErgodic(){
    Queue<Key> keys = new Queue<>();
    preErgodic(root,keys);
    return keys;
}

//使用前序遍历，把指定树x中的所有键放入到keys队列中
private void preErgodic(Node x,Queue<Key> keys){
    if (x==null){
        return;

    }
```

```
    //1.把当前结点的key放入到队列中;
    keys.enqueue(x.key);
    //2.找到当前结点的左子树，如果不为空，递归遍历左子树
    if (x.left!=null){
        preErgodic(x.left,keys);
    }
    //3.找到当前结点的右子树，如果不为空，递归遍历右子树
    if (x.right!=null){
        preErgodic(x.right,keys);
    }
}

//测试代码
public class Test {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        BinaryTree<String, String> bt = new BinaryTree<>();
        bt.put("E", "5");
        bt.put("B", "2");
        bt.put("G", "7");
        bt.put("A", "1");
        bt.put("D", "4");
        bt.put("F", "6");
        bt.put("H", "8");
        bt.put("C", "3");

        Queue<String> queue = bt.preErgodic();
        for (String key : queue) {
            System.out.println(key+"="+bt.get(key));
        }

    }
}
```

1.5.2 中序遍历

我们在4.4中创建的树上，添加前序遍历的API：

`public Queue<Key> midErgodic()`：使用中序遍历，获取整个树中的所有键

`private void midErgodic(Node x,Queue<Key> keys)`：使用中序遍历，把指定树x中的所有键放入到keys队列中

实现步骤：

1.找到当前结点的左子树，如果不为空，递归遍历左子树

2.把当前结点的key放入到队列中;

3.找到当前结点的右子树，如果不为空，递归遍历右子树

代码：

```
//使用中序遍历，获取整个树中的所有键
public Queue<Key> midErgodic(){
    Queue<Key> keys = new Queue<>();
    midErgodic(root,keys);
```

```
        return keys;
    }

    //使用中序遍历，把指定树x中的所有键放入到keys队列中
    private void midErgodic(Node x,Queue<Key> keys){
        if (x==null){
            return;
        }
        //1.找到当前结点的左子树，如果不为空，递归遍历左子树
        if (x.left!=null){
            midErgodic(x.left,keys);
        }
        //2.把当前结点的key放入到队列中;
        keys.enqueue(x.key);
        //3.找到当前结点的右子树，如果不为空，递归遍历右子树
        if (x.right!=null){
            midErgodic(x.right,keys);
        }
    }
//测试代码
public class Test {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        BinaryTree<String, String> bt = new BinaryTree<>();
        bt.put("E", "5");
        bt.put("B", "2");
        bt.put("G", "7");
        bt.put("A", "1");
        bt.put("D", "4");
        bt.put("F", "6");
        bt.put("H", "8");
        bt.put("C", "3");

        Queue<String> queue = bt.midErgodic();
        for (String key : queue) {
            System.out.println(key+"="+bt.get(key));
        }

    }
}
```

1.5.3 后序遍历

我们在4.4中创建的树上，添加前序遍历的API：

`public Queue<Key> afterErgodic()`：使用后序遍历，获取整个树中的所有键

`private void afterErgodic(Node x,Queue<Key> keys)`：使用后序遍历，把指定树x中的所有键放入到keys队列中

实现步骤：

1.找到当前结点的左子树，如果不为空，递归遍历左子树

2.找到当前结点的右子树，如果不为空，递归遍历右子树

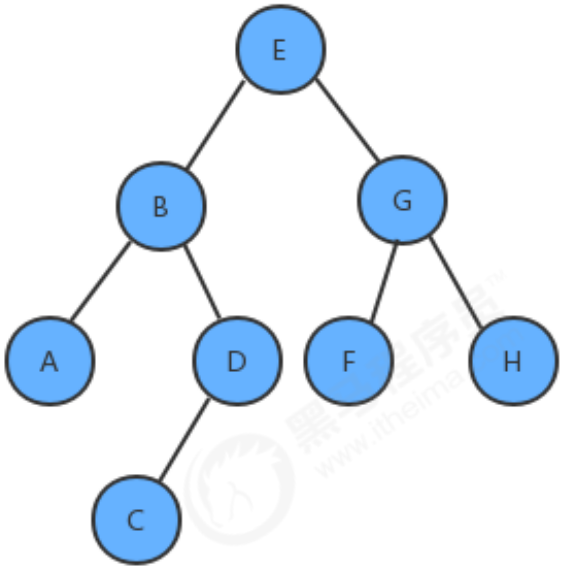
3.把当前结点的key放入到队列中;

代码：

```java
//使用后序遍历，获取整个树中的所有键
public Queue<Key> afterErgodic(){
    Queue<Key> keys = new Queue<>();
    afterErgodic(root,keys);
    return keys;
}

//使用后序遍历，把指定树x中的所有键放入到keys队列中
private void afterErgodic(Node x,Queue<Key> keys){
    if (x==null){
        return;
    }
    //1.找到当前结点的左子树，如果不为空，递归遍历左子树
    if (x.left!=null){
        afterErgodic(x.left,keys);
    }
    //2.找到当前结点的右子树，如果不为空，递归遍历右子树
    if (x.right!=null){
        afterErgodic(x.right,keys);
    }
    //3.把当前结点的key放入到队列中;
    keys.enqueue(x.key);
}

//测试代码
public class Test {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        BinaryTree<String, String> bt = new BinaryTree<>();
        bt.put("E", "5");
        bt.put("B", "2");
        bt.put("G", "7");
        bt.put("A", "1");
        bt.put("D", "4");
        bt.put("F", "6");
        bt.put("H", "8");
        bt.put("C", "3");

        Queue<String> queue = bt.afterErgodic();
        for (String key : queue) {
            System.out.println(key+"="+bt.get(key));
        }

    }
}
```

1.6 二叉树的层序遍历

所谓的层序遍历，就是从根节点（第一层）开始，依次向下，获取每一层所有结点的值，有二叉树如下：



那么层序遍历的结果是：EBGADFHC

我们在4.4中创建的树上，添加层序遍历的API：

`public Queue<Key> layerErgodic()`：使用层序遍历，获取整个树中的所有键

实现步骤：

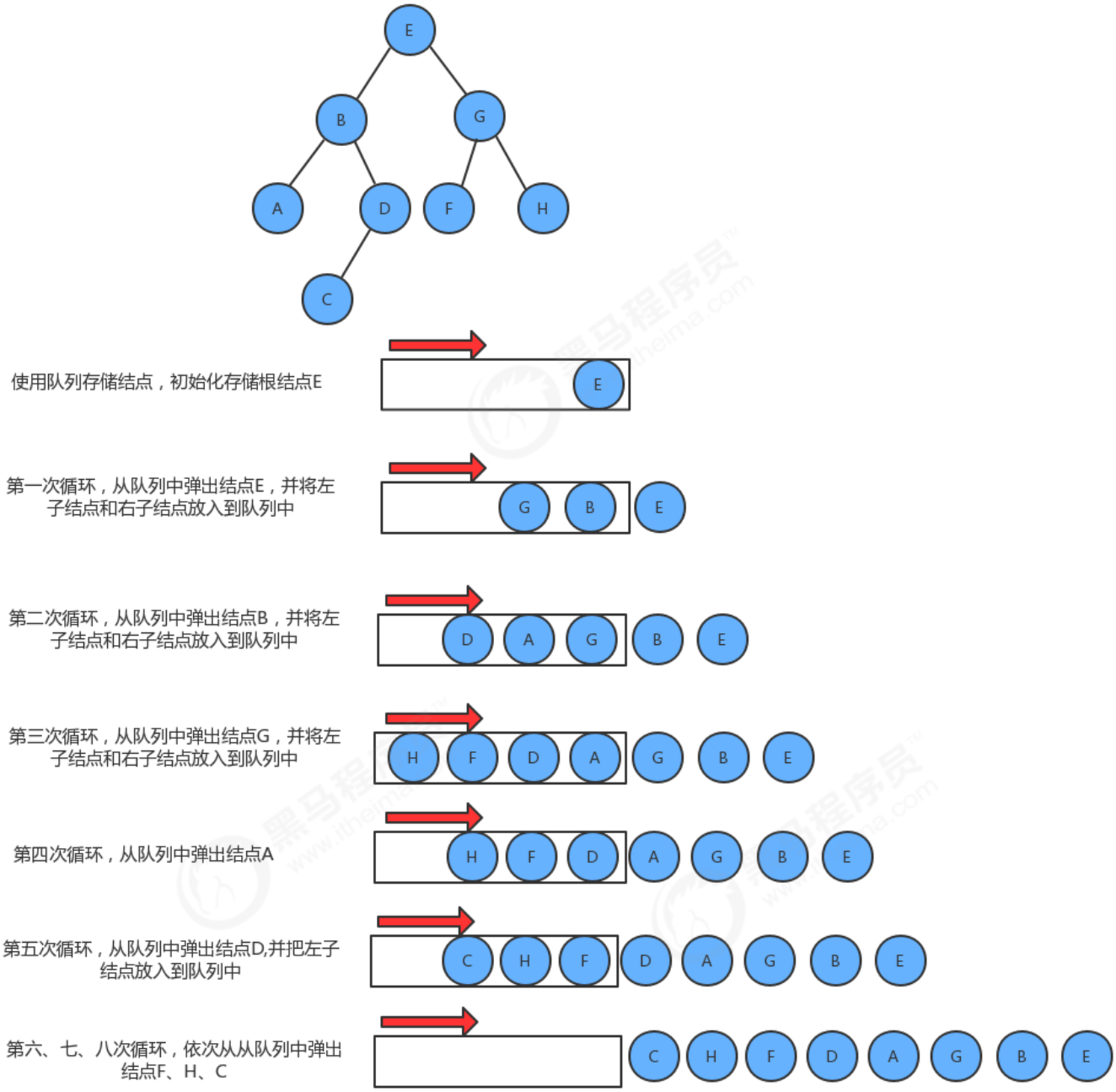
1.创建队列，存储每一层的结点；

2.使用循环从队列中弹出一个结点：

2.1获取当前结点的key；

2.2如果当前结点的左子结点不为空，则把左子结点放入到队列中

2.3如果当前结点的右子结点不为空，则把右子结点放入到队列中



代码：

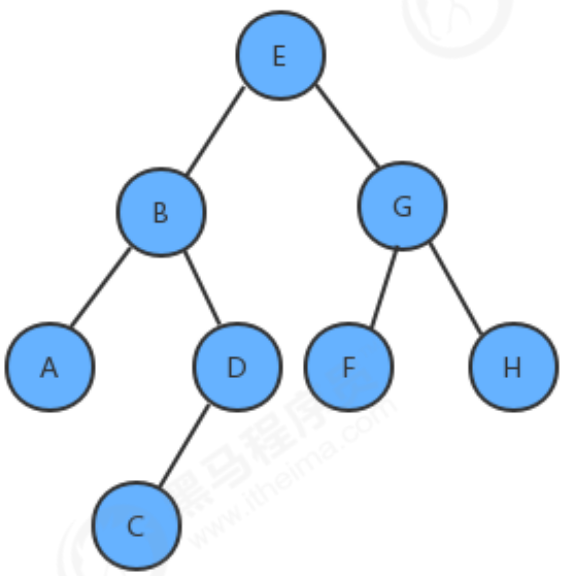
```
//使用层序遍历得到树中所有的键
 public Queue<Key> layerErgodic(){
     Queue<Key> keys = new Queue<>();
     Queue<Node> nodes = new Queue<>();
     nodes.enqueue(root);
     while(!nodes.isEmpty()){
         Node x = nodes.dequeue();
         keys.enqueue(x.key);
         if (x.left!=null){
             nodes.enqueue(x.left);
         }
         if (x.right!=null){
             nodes.enqueue(x.right);
         }

     }
```

```
16      return keys;
17  }
18 //测试代码
19 public class Test {
20     public static void main(String[] args) throws Exception {
21         BinaryTree<String, String> bt = new BinaryTree<>();
22         bt.put("E", "5");
23         bt.put("B", "2");
24         bt.put("G", "7");
25         bt.put("A", "1");
26         bt.put("D", "4");
27         bt.put("F", "6");
28         bt.put("H", "8");
29         bt.put("C", "3");
30 
31         Queue<String> queue = bt.layerErgodic();
32         for (String key : queue) {
33             System.out.println(key+"="+bt.get(key));
34         }
35 
36     }
37 }
```

1.7 二叉树的最大深度问题

需求：

给定一棵树，请计算树的最大深度（树的根节点到最远叶子结点的最长路径上的结点数）；



上面这棵树的最大深度为4。

实现：

我们在1.4中创建的树上，添加如下的API求最大深度：

`public int maxDepth()`：计算整个树的最大深度

`private int maxDepth(Node x)`:计算指定树x的最大深度

实现步骤：

1.如果根结点为空，则最大深度为0；

2.计算左子树的最大深度；

3.计算右子树的最大深度；

4.当前树的最大深度=左子树的最大深度和右子树的最大深度中的较大者+1

代码：

```
//计算整个树的最大深度
public int maxDepth() {
    return maxDepth(root);
}

//计算指定树x的最大深度
private int maxDepth(Node x) {
    //1.如果根结点为空，则最大深度为0；
    if (x == null) {
        return 0;
    }
    int max = 0;
    int maxL = 0;
    int maxR = 0;
    //2.计算左子树的最大深度；
    if (x.left != null) {
        maxL = maxDepth(x.left);
    }
    //3.计算右子树的最大深度；
    if (x.right != null) {
        maxR = maxDepth(x.right);
    }
    //4.当前树的最大深度=左子树的最大深度和右子树的最大深度中的较大者+1
    max = maxL > maxR ? maxL + 1 : maxR + 1;
    return max;
}

//测试代码
public class Test {
    public static void main(String[] args) throws Exception {
        BinaryTree<String, String> bt = new BinaryTree<>();
        bt.put("E", "5");
        bt.put("B", "2");
        bt.put("G", "7");
        bt.put("A", "1");
        bt.put("D", "4");
        bt.put("F", "6");
        bt.put("H", "8");
        bt.put("C", "3");

        int i = bt.maxDepth();

        System.out.println(i);
```

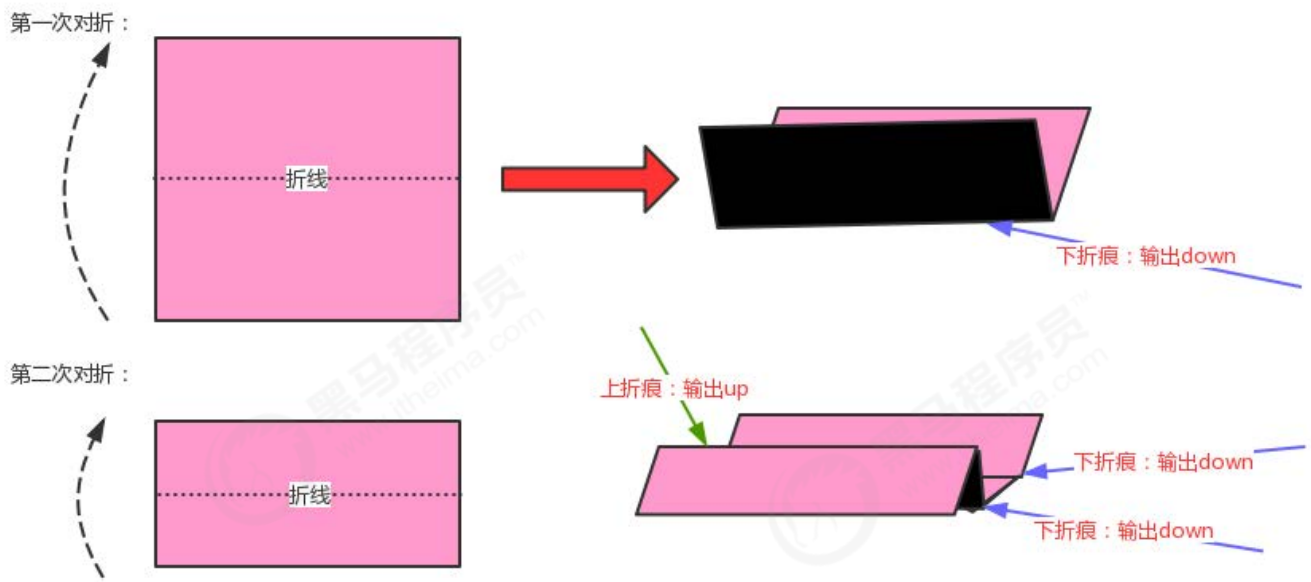
```
43
44      }
45  }
```

1.8 折纸问题

需求：

请把一段纸条竖着放在桌子上，然后从纸条的下边向上方对折1次，压出折痕后展开。此时 折痕是凹下去的，即折痕突起的方向指向纸条的背面。如果从纸条的下边向上方连续对折2 次，压出折痕后展开，此时有三条折痕，从上到下依次是下折痕、下折痕和上折痕。

给定一 个输入参数N，代表纸条都从下边向上方连续对折N次，请从上到下打印所有折痕的方向 例如：N=1时，打印： down；N=2时，打印： down down up



分析：

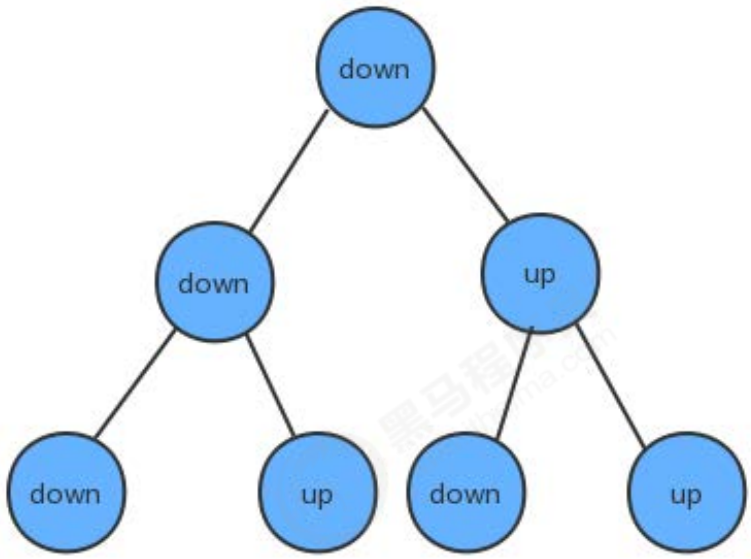
我们把对折后的纸张翻过来，让粉色朝下，这时把第一次对折产生的折痕看做是根结点，那第二次对折产生的下折痕就是该结点的左子结点，而第二次对折产生的上折痕就是该结点的右子结点，这样我们就可以使用树型数据结构来描述对折后产生的折痕。

这棵树有这样的特点：

1.根结点为下折痕；

2.每一个结点的左子结点为下折痕；

3.每一个结点的右子结点为上折痕；



实现步骤：

1.定义结点类

2.构建深度为N的折痕树；

3.使用中序遍历，打印出树中所有结点的内容；

构建深度为N的折痕树：

1.第一次对折，只有一条折痕，创建根结点；

2.如果不是第一次对折，则使用队列保存根结点；

3.循环遍历队列：

3.1从队列中拿出一个结点；

3.2如果这个结点的左子结点不为空，则把这个左子结点添加到队列中；

3.3如果这个结点的右子结点不为空，则把这个右子结点添加到队列中；

3.4判断当前结点的左子结点和右子结点都不为空，如果是，则需要为当前结点创建一个值为down的左子结点，一个值为up的右子结点。

代码：

```
public class PaperFolding {

    public static void main(String[] args) {
        //构建折痕树
        Node tree = createTree(3);

        //遍历折痕树，并打印
        printTree(tree);
    }

    //3.使用中序遍历，打印出树中所有结点的内容；
    private static void printTree(Node tree) {

```

```
        if (tree==null){
            return;
        }

        printTree(tree.left);
        System.out.print(tree.item+",");
        printTree(tree.right);
    }

    //2.构建深度为N的折痕树；
    private static Node createTree(int N) {
        Node root = null;
        for (int i = 0; i <N ; i++) {
            if (i==0){
                //1.第一次对折，只有一条折痕，创建根结点；
                root = new Node("down",null,null);
            }else{
                //2.如果不是第一次对折，则使用队列保存根结点；
                Queue<Node> queue = new Queue<>();
                queue.enqueue(root);
                //3.循环遍历队列：
                while(!queue.isEmpty()){
                    //3.1从队列中拿出一个结点；
                    Node tmp = queue.dequeue();
                    //3.2如果这个结点的左子结点不为空，则把这个左子结点添加到队列中；
                    if (tmp.left!=null){
                        queue.enqueue(tmp.left);
                    }
                    //3.3如果这个结点的右子结点不为空，则把这个右子结点添加到队列中；
                    if (tmp.right!=null){
                        queue.enqueue(tmp.right);
                    }
                    //3.4判断当前结点的左子结点和右子结点都不为空，如果是，则需要为当前结点创建一个值为down的左子结点，一个值为up的右子结点。
                    if (tmp.left==null && tmp.right==null){
                        tmp.left = new Node("down",null,null);
                        tmp.right = new Node("up",null,null);
                    }
                }
            }
        }

        return root;
    }

    //1.定义结点类
    private static class Node{
        //存储结点元素
        String item;
        //左子结点
        Node left;
        //右子结点

        Node right;
```

```
66
67          public Node(String item, Node left, Node right) {
68              this.item = item;
69              this.left = left;
70              this.right = right;
71          }
72      }
73  }
```