

# Xử lý ảnh

## Chương 4B: Xử lý ảnh hình thái

Biên soạn: Phạm Văn Sự

Bộ môn Xử lý tín hiệu và Truyền thông  
Khoa Kỹ thuật Điện tử I  
Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

ver.19a



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Tổng quan, Cơ sở của xử lý ảnh hình thái: Tổng quan về xử lý ảnh hình thái

- Hình thái (morphology): một nhánh của khoa học sinh học nghiên cứu về dạng thức và cấu trúc của động vật và cây cối
- Hình thái (morphology) trong Xử lý ảnh: Hình thái toán học - nghiên cứu về cấu trúc hay topo hình học của đối tượng trong ảnh
  - Xử lý ảnh hình thái: Một loạt các kỹ thuật xử lý thực hiện làm việc với hình dạng (hay hình thái) của các đặc trưng trong ảnh
  - Một công cụ hữu hiệu cho phép trích xuất các thành phần (đối tượng) trong ảnh → biểu diễn, mô tả ảnh
    - Loại bỏ những khiếm khuyết của ảnh phân vùng,
    - Cung cấp thông tin về hình dạng và cấu trúc vùng: Các đường bao, các khung, các vùng bao lồi
  - Một công cụ làm tăng tính hiệu quả của các phép tiền xử lý
    - Lọc hình thái, làm mảnh (biên, ...), thu ngắn (đường, ...)
- Là bước khởi đầu của quá trình xử lý: Ảnh  $\xrightarrow{\text{Xử lý ảnh hình thái}}$  Thuộc tính ảnh
- Là một cơ sở của nền tảng toán học được sử dụng để trích xuất "ý nghĩa" từ một ảnh
- Thường xử lý dựa trên ảnh 2 mức (ảnh nhị phân)



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Tổng quan, Cơ sở của xử lý ảnh hình thái: Cơ sở của xử lý ảnh hình thái - Quy ước

- Quy ước biểu diễn:
  - ▶ Điểm thuộc nền: ô màu trắng, có giá trị biểu diễn 0
  - ▶ Điểm thuộc đối tượng (quan tâm): ô màu đen, có giá trị biểu diễn 1
- Trong xử lý ảnh hình thái: Các đối tượng trong ảnh được biểu diễn bởi các tập
  - ▶ Ảnh nhị phân  $\Rightarrow$  Các tập  $B \in Z^2$ ;  $z \in B \Leftrightarrow z = (x, y)$  của điểm ảnh trắng/đen (tùy theo quy ước)
  - ▶ Ảnh đa mức xám  $\Rightarrow$  Các tập  $B \in Z^3$ ;  $z \in B \Leftrightarrow z = ((x, y), f(x, y))$  của điểm ảnh
  - ▶ Nếu quan tâm thêm các thuộc tính khác của ảnh (màu, các thành phần thay đổi theo thời gian, ...)  $\Rightarrow B \in Z^n$



Notes

## Xử lý ảnh hình thái

Tổng quan, Cơ sở của xử lý ảnh hình thái: Cơ sở của xử lý ảnh hình thái - Tập phản xạ, Tập dịch chuyển

Tập phản xạ của một tập  $B$ , kí hiệu là  $\hat{B}$ , được định nghĩa:

$$\hat{B} = \{w | w = -b, \text{ với } b \in B\}$$

- Nếu  $B$  là tập biểu diễn các điểm ảnh (2-D) của một đối tượng  $\Rightarrow \hat{B}$  là tập các điểm trong  $B$  trong đó các tọa độ  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

Tập dịch chuyển của một tập  $B$  bởi điểm  $z = (z_1, z_2)$ , kí hiệu là  $(B)_z$ , được định nghĩa:

$$(B)_z = \{c | c = b + z, \text{ với } b \in B\}$$

- Nếu  $B$  là tập biểu diễn các điểm ảnh (2-D) của một đối tượng  $\Rightarrow (B)_z$  là tập các điểm trong  $B$  trong đó các tọa độ  $(x, y) \rightarrow (x + z_1, y + z_2)$



Notes

## Xử lý ảnh hình thái

Tổng quan, Cơ sở của xử lý ảnh hình thái: Cơ sở của xử lý ảnh hình thái - Các phần tử cấu trúc

- Phần tử cấu trúc (SE: Structuring Element) là một tập nhỏ hoặc ảnh con được sử dụng để thăm dò các tính chất quan tâm của một ảnh
  - ▶ Có thể có hình dạng và kích thước bất kỳ
    - ★ Thường có dạng chữ nhật với tâm đối xứng là điểm gốc
    - ★ Các cấu trúc khác được mở rộng → cấu trúc hình chữ nhật bằng cách thêm vào một số điểm ít nhất có thể thuộc nền
  - ▶ Điểm có màu đậm (đen, giá trị biểu diễn là 1) là một thành phần của SE; Điểm trắng (giá trị biểu diễn là 0) không phải là thành phần của SE; Điểm mà không quan trọng thuộc hay không thuộc SE biểu diễn bởi  $\times$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Tổng quan, Cơ sở của xử lý ảnh hình thái: Cơ sở của xử lý ảnh hình thái - Hit & Fit

**Fit** (Sự trùng khít): Khi tất cả các điểm là phần tử của SE bao trùm các điểm ảnh của đối tượng (các điểm 1) trong ảnh

**Hit** (Sự bao trùm): Khi có ít nhất một điểm là phần tử của SE bao trùm các điểm ảnh của đối tượng (các điểm 1) trong ảnh

- Tất cả các phép toán xử lý ảnh hình thái dựa trên những ý tưởng đơn giản trên; Giá trị điểm ảnh mới phụ thuộc vào toán tử hình thái



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Tổng quan, Cơ sở của xử lý ảnh hình thái: Cơ sở của xử lý ảnh hình thái - Nhận xét

- Phép xử lý ảnh hình thái  $\Leftrightarrow$  Lọc không gian
  - ▶ Tâm của phần tử cấu trúc dịch khắp các điểm ảnh của đối tượng (quan tâm) để tạo ra điểm ảnh của ảnh kết quả
- Giá trị của điểm ảnh kết quả được quyết định bởi toán tử hình thái
- Phần lớn các phép toán trong xử lý ảnh hình thái dựa trên hai phép toán cơ bản:
  - ▶ Phép co ảnh (Erosion)
  - ▶ Phép giãn ảnh (Dilation)



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

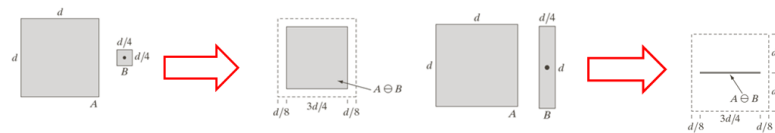
## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép co ảnh

Với hai tập  $A$  và  $B$  là các tập trong  $Z^2$ , phép co đối với  $A$  theo  $B$ , ký hiệu là  $A \ominus B$ , là một tập hợp gồm tất cả các điểm  $z$  sao cho  $(B)_z$  bị chứa trong  $A$

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

- $B$  thường là các SE
- $\equiv A \ominus B = \{z | (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$



- Các biểu thức trên không phải là các định nghĩa duy nhất của phép co ảnh
- $B$  (phần tử cấu trúc)  $\equiv$  Mặt nạ không gian



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

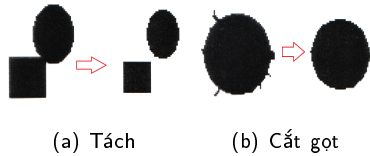
---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép co ảnh

- $\equiv$  Phép nhân tương quan không gian
- Phép co ảnh làm mỏng đối tượng
- $\equiv$  Phép toán lọc hình thái
  - ▶ Xóa bỏ các phần tử chi tiết nhỏ (nhỏ hơn kích thước phần tử SE) trong ảnh
    - ★ Loại bỏ các dải nhỏ không mong muốn của đối tượng
- Thu nhỏ (co) đối tượng trong ảnh
- Tách rời các đối tượng quá gần nhau



Notes

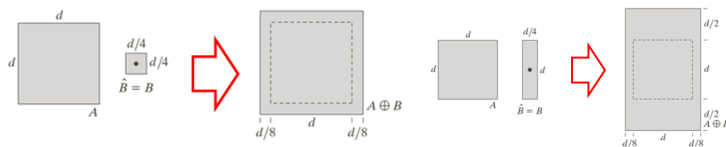
## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép giãn ảnh

Với hai tập  $A$  và  $B$  là các tập trong  $Z^2$ , phép giãn đối với  $A$  theo  $B$ , ký hiệu là  $A \oplus B$ , là một tập hợp gồm tất cả các điểm  $z$  sao cho  $(\hat{B})_z$  có ít nhất một phần tử chung với  $A$

$$A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

- $B$  thường là các SE
- $\equiv A \oplus B = \{z | [(\hat{B})_z \cap A] \subseteq A\}$



- Các biểu thức trên không phải là các định nghĩa duy nhất của phép giãn ảnh duy nhất



Notes

## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép giãn ảnh

- Phép giãn ảnh làm dày/làm to đối tượng (làm đối tượng phát triển)
  - ▶ Điền (làm đầy, nối) những đoạn đứt gãy
  - ▶ Bỏ dung những phần khuyết thiếu của đối tượng



(a) Nối khe hở (b) Bỏ khuyết



(c) Làm to



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép co ảnh, phép giãn ảnh - Tính đối ngẫu

Phép co ảnh và phép giãn ảnh là các phép toán đối ngẫu nhau theo các phép toán bù và phản xạ của tập hợp

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

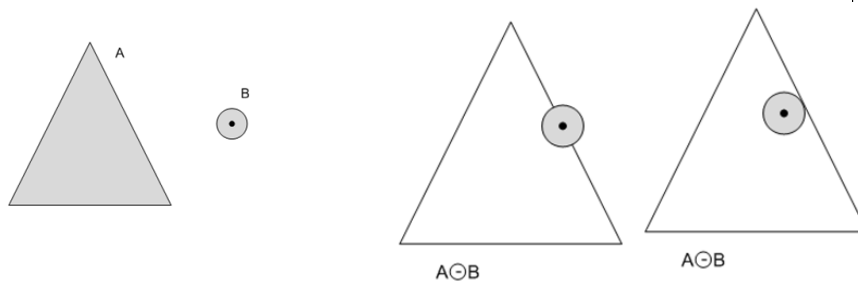
## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép mở

Phép mở của một tập  $A$  bởi phần tử cấu trúc  $B$ , kí hiệu là  $A \circ B$ , được định nghĩa bởi:

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- (1) Co  $A$  theo  $B$ , (2) Kết quả thu được được giãn theo  $B$

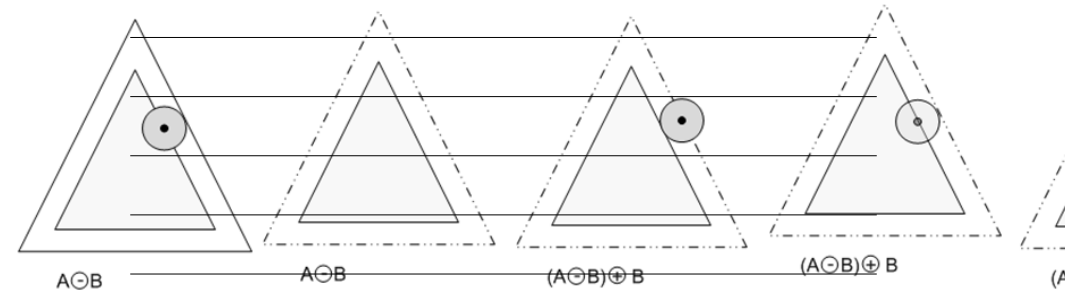


Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Xử lý ảnh

ver.19a 13 / 28

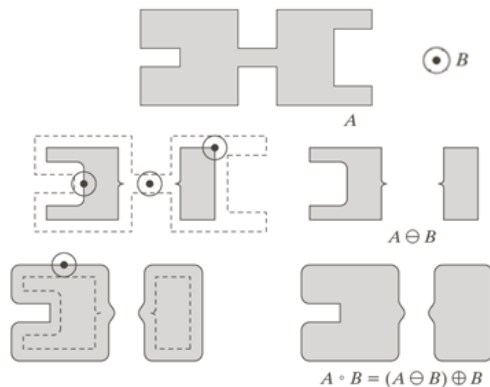
Notes



## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép mở - Nhận xét

- $A \circ B = \cup \{(B)_z | (B)_z \subseteq A\}$
- Làm trơn các đường gãy khúc
- Loại bỏ (cắt bỏ) các dải hẹp có bề rộng nhỏ hơn bề rộng của SE
- Các góc hướng ra được làm tròn, các góc hướng vào được giữ nguyên



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Xử lý ảnh

ver.19a 14 / 28

Notes

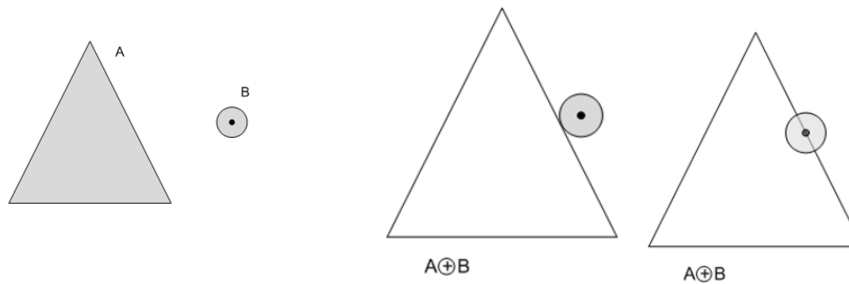
## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép đóng

Phép đóng của một tập  $A$  bởi phần tử cấu trúc  $B$ , kí hiệu là  $A \bullet B$ , được định nghĩa bởi:

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

- (1) Giãn  $A$  theo  $B$ , (2) Kết quả thu được được co theo  $B$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

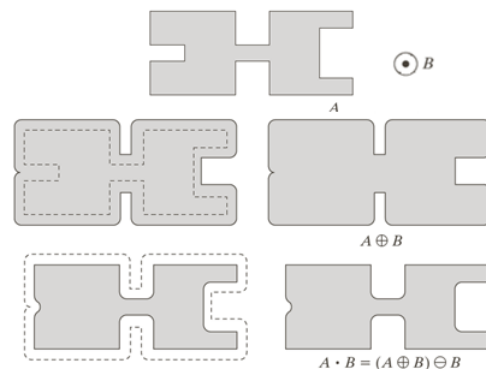
Xử lý ảnh

ver.19a 15 / 28

## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép đóng - Nhận xét

- $w \in A \bullet B$  nếu và chỉ nếu  $(B)_z \cap A \neq \emptyset$  đối với bất kỳ  $(B)_z$  nào chứa  $w$
- Làm tròn các đường gãy khúc
- Làm nổi bật các dải hẹp
- Các góc hướng vào được làm tròn, các góc hướng ra giữ nguyên
- Loại bỏ các khoảng trống có kích thước nhỏ hơn kích thước SE

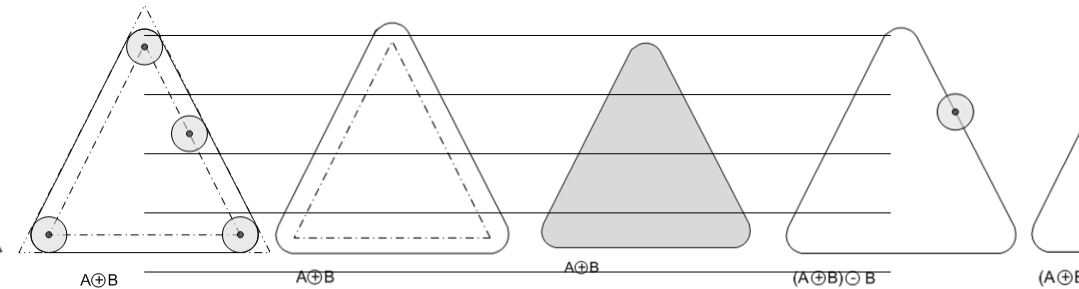


Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Xử lý ảnh

ver.19a 16 / 28

## Notes



## Notes





## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Phép mở, phép đóng - Tính đối ngẫu

Phép toán mở ( $\circ$ ) và đóng ( $\bullet$ ) là những phép toán đối ngẫu theo các phép toán bù và phép phản xạ của tập

$$(A \bullet B)^c = A^c \circ \hat{B}$$

$$(A \circ B)^c = A^c \bullet \hat{B}$$

- $A \circ B$  là một tập con (ảnh con) của  $A$
- Nếu  $C \subseteq D \Rightarrow (C \circ B) \subseteq (D \circ B)$
- $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

- $A \bullet B$  là một tập con (ảnh con) của  $A$
- Nếu  $C \subseteq D \Rightarrow (C \bullet B) \subseteq (D \bullet B)$
- $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$

- Việc thực hiện phép mở/đóng nhiều lần không làm thay đổi kết quả nếu phép toán đó đã được áp dụng một lần

Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Xử lý ảnh

ver.19a

17 / 28

Notes

## Xử lý ảnh hình thái

Một số phép xử lý ảnh hình thái cơ bản: Biến đổi Hit-or-Miss

- Một công cụ cơ bản cho phép phát hiện hình dạng đối tượng

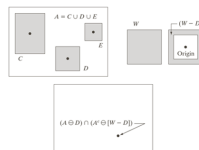
Nếu  $B$  là một tập được cấu thành từ  $D$  và nền của nó, sự tương hợp (hay tập của các phần tử tương hợp) của  $B$  trong  $A$ , kí hiệu là  $A \circledast B$ , được xác định là:

$$A \circledast B = (A \ominus D) \cap [A^c \ominus (W - D)]$$

- $W$ : Một cửa sổ nhỏ bao quanh  $D$

- Nếu  $B = (B_1, B_2)$ :  $B_1 \leftrightarrow$  đối tượng,  $B_2 \leftrightarrow$  nền:

- ▶  $\Rightarrow B_1 = D, B_2 = W - D$
- ▶  $\Rightarrow A \circledast B = (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$
- ▶  $A \circledast B = (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$



Biên soạn: Phạm Văn Sự (PTIT)

Xử lý ảnh

ver.19a

18 / 28

Notes

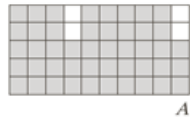
## Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Trích xuất biên ảnh

Đường biên của một tập  $A$ , kí hiệu là  $\beta(A)$ , có thể tìm được bởi công thức:

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$

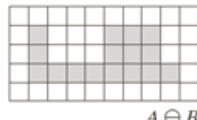
- $B$  là một SE thích hợp



$A$



$B$



$A \ominus B$



$\beta(A)$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

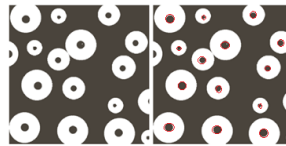
---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Làm đầy vùng trống

- Vùng trống (vùng lỗ trống): vùng nền được bao quanh bởi biên liên thông của vùng ảnh đối tượng (foreground)



**Input:** Tập  $A$  gồm các đường bao với các điểm biên có kết nối 8, mỗi đường bao bao quanh một vùng nền (một vùng lỗ trống). Mỗi vùng lỗ trống có thông tin về một điểm nằm trong vùng. Phần tử cấu trúc thích hợp  $B$

**Output:** Ảnh  $I'$  với các vùng lỗ trống được điền đầy bằng các phần tử 1

- 1 Khởi tạo  $X_0$  ( $|X_0| = |I|$ ,  $A \subseteq I$ ) gồm các phần tử 0 ngoại trừ tại vị trí điểm thông tin vùng lỗ trống đã biết (tại đó có phần tử 1)
- 2 Thực hiện lặp với  $k = 1, 2, \dots$  cho đến khi  $X_k = X_{k-1}$ :
  - ▶  $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c$
- 3  $I' = X_k \cap A$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

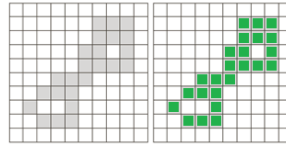
---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Trích xuất các phần tử kết nối

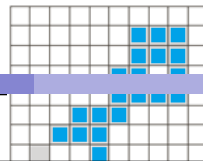
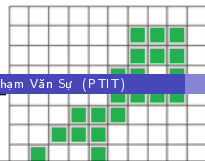
- Phần tử kết nối (phần tử liên thông) là phần tử gồm các điểm ảnh có tính kết nối (kết nối 4, 8 hay  $m$ ) mà các điểm thuộc nó luôn có chứa một đường nối giữa chúng chứa các điểm ảnh trong phần tử kết nối đó.



**Input:** Tập  $A$  gồm một hoặc một số phần tử kết nối, mỗi phần tử kết nối đã có thông tin về một điểm nằm trong phần tử đó. Phần tử cấu trúc thích hợp  $B$

**Output:** Tìm tất cả các phần tử kết nối của  $A$

- 1 Khởi tạo  $X_0$  ( $|X_0| = |I|$ ,  $A \subseteq I$ ) gồm các phần tử 0 ngoại trừ tại các vị trí đã biết tương ứng với các phần tử kết nối (tại đó có phần tử 1)
- 2 Thực hiện lặp với  $k = 1, 2, \dots$  cho đến khi  $X_k = X_{k-1}$ :
  - ▶  $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$
- 3  $X_k$  chứa các phần tử kết nối của ảnh vào



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

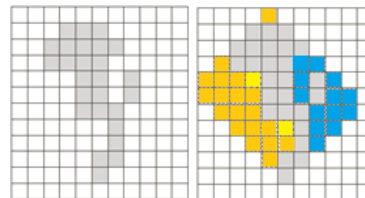
---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Xây dựng vùng bao lỗi

- Một tập  $A$  là lỗi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ trong  $A$  nằm trọn trong  $A$
- Bao lỗi  $H$  của một tập  $S$  bất kỳ là một lỗi nhỏ nhất chứa  $S$
- $H - S$ : phần thiếu lỗi của  $S$



**Input:** Tập  $A$ ; Tập các phần tử cấu trúc thích hợp  $\{B^i\}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

**Output:** Vùng bao lỗi  $C(A)$  của tập  $A$

- 1 Lặp với mỗi phần tử cấu trúc  $B^i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ):
  - ▶ Khởi tạo  $X_0^i = A$
  - ▶ Lặp với  $k = 1, 2, \dots$  cho đến khi  $X_k^i = X_{k-1}^i$ :
    - ★  $X_k^i = (X_{k-1}^i \otimes B^i) \cup A$
  - ▶  $D^i = X_k^i$
- 2 Lập vùng bao lỗi  $C(A) = \cup_{i=1}^4 D^i$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

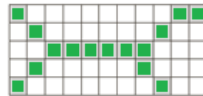
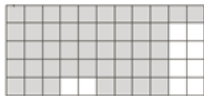
Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Làm mảnh

Tập kết quả làm mảnh của một tập  $A$  theo phần tử cấu trúc  $B$ , ký hiệu  $A \otimes B$ , được xác theo biến đổi Hit-or-Miss như sau:

$$\begin{aligned} A \otimes B &= A - (A \circledast B) \\ &= A \cap (A \circledast B)^c \end{aligned}$$

Thực hiện làm mảnh  $A$  một cách hệ thống bởi một dãy các phần tử cấu trúc  $\{B\} = \{B^1, B^2, \dots, B^n\}$ , trong đó  $B^i$  là kết quả phép quay của  $B^{i-1}$ , được xác định bởi:

$$A \otimes \{B\} = (((A \otimes B^1) \otimes B^2) \dots) \otimes B^n$$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Xử lý ảnh hình thái

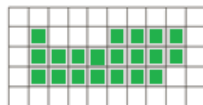
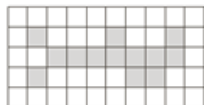
Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Làm dày

Tập kết quả làm dày của một tập  $A$  theo phần tử cấu trúc  $B$ , ký hiệu  $A \odot B$ , được xác theo biến đổi Hit-or-Miss như sau:

$$A \odot B = A \cup (A \circledast B)$$

Thực hiện làm dày  $A$  một cách hệ thống bởi một dãy các phần tử cấu trúc  $\{B\} = \{B^1, B^2, \dots, B^n\}$ , trong đó  $B^i$  là kết quả phép quay của  $B^{i-1}$ , được xác định bởi:

$$A \odot \{B\} = (((A \odot B^1) \odot B^2) \dots) \odot B^n$$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

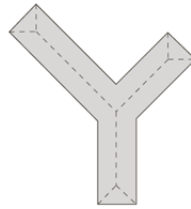
---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Tìm bộ khung của đối tượng

Bộ khung của một tập  $A$ , kí hiệu  $S(A)$ , được xác định bởi:

- 1  $S_k(A) = (A \ominus kB) - (A \ominus kB) \ominus B$ 
  - ▶  $(A \ominus kB) = ((\dots((A \ominus B) \ominus B) \ominus \dots) \ominus B)$ : phép co ảnh của  $A$  bởi phần tử cấu trúc  $B$   $k$  lần liên tiếp
- 2  $S(A) = \bigcup_{k=0}^K S_k(A)$ 
  - ▶  $K = \max\{k | (A \ominus kB) \neq \emptyset\}$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

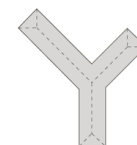
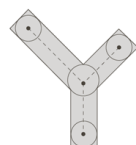
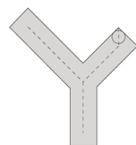
---

---

## Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Tìm bộ khung của đối tượng - Nhận xét

- $A$  có thể tái tạo từ các tập con  $S_k(A)$  của bộ khung  $S(A)$ :  
 $A = \bigcup_{k=0}^K (S_k(A) \oplus kB)$ 
  - ▶  $(S_k(A) \oplus kB) = ((\dots((S_k(A) \oplus B) \oplus B) \oplus \dots) \oplus B)$
- Nếu  $z \in S(A)$ ,  $(D)_z$  là khối hình đĩa lớn nhất có tâm tại  $z$  và bị chứa trong  $A$   
 $\Rightarrow$  Không thể tìm được khối hình đĩa nào lớn hơn  $(D)_z$  mà bị chứa trong  $A$ 
  - ▶  $(D)_z$ : khối hình đĩa lớn nhất
- Khối hình đĩa  $(D)_z$  tiếp xúc với biên của  $A$  tại hai hoặc nhiều hơn hai điểm



Notes

---

---

---

---

---

---

---

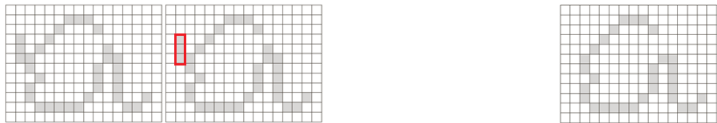
---

---

---

# Xử lý ảnh hình thái

Một số thuật toán ứng dụng cơ bản của xử lý ảnh hình thái: Cắt gọt



**Input:** Tập gốc  $A$ ; Tập các phần tử cấu trúc  $\{B\} = \{B^1, B^2, B^3, \dots, B^N\}$

**Output:** Tập  $A'$  đã được loại bỏ những nhánh xù

- 1. Làm mảnh  $A$  với dãy phần tử cấu trúc  $\{B\}$ :  $X_1 = A \otimes \{B\}$ 
  - Quá trình làm mảnh được lặp số lần mong muốn bằng số điểm tại đầu cuối cần loại bỏ
- 2. Khôi phục đối tượng đã làm mảnh về dạng ban đầu ngoại trừ các nhánh xù đã được loại bỏ:
  - 1. Lập tập gồm tất cả các điểm cuối của  $X_1$ :  $X_2 = \cup_{k=1}^N (X_1 \otimes B^k)$
  - 2. Sử dụng phép giãn ảnh mở rộng các điểm cuối của đối tượng sau khi làm mảnh:  $X_3 = (X_2 \oplus H) \cap A$ 
    - $H$ : phần tử cấu trúc  $3 \times 3$  gồm các thành phần có giá trị 1
    - Quá trình giãn được lặp số lần bằng số điểm loại bỏ ở bước làm mảnh
- 3. Kết quả  $A' = X_1 \cup X_3$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---