Ejercicios Resueltos de Divide y Vencerás

Ejercicios Resueltos de DyV

Problema 1:

Buscar el elemento mayoritario de un vector de tamaño n, esto es, un elemento que aparece en el vector **más** de n/2 veces (redondeando hacia abajo).

(Problema 4, examen de Sistemas/Gestión de Sep 2007).

Ejercicios Resueltos de DyV

Primera aproximación:

Ordenamos el vector con un algoritmo rápido de O(nlogn).

Lo vamos recorriendo y contando cuál es el número que más se repite. Esta operación es O(n).

Esta solución es O(nlogn).

Ejercicios Resueltos de DyV

Otra aproximación:

Si un elemento aparece más de n/2 veces en un vector, sabemos que, de haber un elemento mayoritario, al ordenarse el vector, ese elemento se encontrará en la posición n/2 del vector.

Por tanto, ordenamos el vector con un algoritmo rápido de O(nlogn).

Seguidamente, nos posicionamos en n/2, nos fijamos en el elemento que hay ahí, y andando hacia delante y atrás contamos las ocurrencias de ese elemento. Esto es O(n).

Si el número de apariciones es mayor que n/2, es el mayoritario. Esta solución es O(nlogn).

Ejercicios Resueltos de DyV

Otra más:

Primero buscaremos un elemento candidato y luego comprobaremos si es mayoritario o no.

Para buscar el elemento candidato, tenemos en cuenta lo siguiente: Al haber un elemento mayoritario, como se daría más de n/2 veces, obligatoriamente aparecerá en al menos dos posiciones consecutivas del vector.

Ejercicios Resueltos de DyV

Para encontrar el elemento candidato:

Para un vector de tamaño par se cogen los elementos dos a dos, 0 con 1, 2 con 3, etc. Si coinciden, se copia este elemento, una sóla vez, a un vector auxiliar.

Cuando hayamos completado el recorrido por el vector original, aplicaremos el mismo algoritmo a este vector auxiliar, hasta que al final obtengamos un vector con uno o dos elementos.

Si tiene un elemento, ese es nuestro candidato. Si tiene dos elementos y coinciden, ese es nuestro candidato. Si no, no hay elemento mayoritario. Todo esto es O(n) porque (act.)

$$T(n) = \begin{cases} cte & n = 1 \\ aT(n/b)+cn^k & n > 1 \end{cases} \qquad T(n) \text{ es } \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

Ejercicios Resueltos de DyV

Para comprobar el elemento candidato:

Recorremos el vector contando las apariciones del candidato.

Esto es O(n).

El orden del algoritmo es O(n).

Ejercicios Resueltos de DyV

Problema 2:

Buscar los k elementos de un vector más cercanos a su mediana. Esto es, si el vector estuviera ordenado, los k/2 elementos que irían desde la mediana (posición central) hacia la izquierda, y los k/2 elementos que irían desde la mediana hacia la derecha.

Se pide que se resuelva en O(n).

(Problema 2, examen de Sistemas/Gestión de Feb 2010).

3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5	8	9

Ejercicios Resueltos de DyV

Para calcular una mediana, tenemos que conocer la posición exacta que ocuparía en el vector final (la central). Tomamos un pivote al azar del vector, pasamos a su izquierda los elementos menores a este pivote, y a la derecha los elementos mayores al mismo. Si el pivote o alguno de los elementos que valen exactamente lo mismo que el pivote quedan en la posición central, esa es la mediana. Si la posición de la mediana queda a la izquierda, repetimos en el subproblema izquierdo. Si la posición de la mediana queda a la derecha, repetimos en el subproblema derecho. Tenemos un orden O(n).

$$T(n) = \begin{cases} cte & n = 1 \\ aT(n/b)+cn^k & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) \text{ es } \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log_b n) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

Ejercicios Resueltos de DyV

En este problema, lo que vamos a encontrar son los elementos que ocupan las posiciones mediana-k/2 y mediana+k/2 siguiendo el mismo razonamiento (aplicándolo dos veces).

Posteriormente, recorreremos el vector linealmente sacando los elementos que se encuentren entre estos dos elementos.

El orden es O(n).