Resolución de ecuaciones recurrentes

Resolución de ecuaciones recurrentes
Objetivos

- Comprender el problema de las ecuaciones recurrentes.
- Factorización de polinomios.
- Aprender a resolver recurrencias homogéneas.
- Aprender a resolver recurrencias no homogéneas.
- Aprender a realizar cambio de variable.
- Aprender a resolver recurrencias por partes.
- Aprender a realizar transformaciones de recorrido.

Resolución de ecuaciones recurrentes
Comprender el problema de las ecuaciones recurrentes

Hemos estudiado cómo determinar el tiempo de ejecución de un algoritmo a partir del **cómputo de sus operaciones elementales**.

En general, este cómputo se reduce a un mero ejercicio de cálculo.

Sin embargo, para los **algoritmos recursivos** nos vamos a encontrar con una **dificultad añadida**, pues la función que establece su tiempo de ejecución viene dada por una **ecuación en recurrencia**, es decir, en la definición de T(n) aparece la propia función T. Por ejemplo:

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Factorización de polinomios

Ecuaciones de segundo grado:

$ax^2 + bx + c = 0$

Si a es 1, podemos buscar dos números (**raíces**) que sumados sean b y multiplicados sean c:

$$\left.\begin{array}{l} m + n = b \\ m * n = c \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} m & \text{-->}\ (x+m) & (\text{raíz } -m) \\ n & \text{-->}\ (x+n) & (\text{raíz } -n) \end{array}$$

También podemos aplicar la **fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Factorización de polinomios

Ecuaciones de grado mayor a dos:

$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$

Calculamos los divisores del término libre, positivos y negativos:

24 es divisible por +- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Probamos con -1.

Dividimos $x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ por (x+1) (raíz -1):

```
  1    0   -15   10   24   |  1  1
 -1   -1                      1 -1 -14 24
  0   -1   -15
       1     1
       0   -14   10
            14   14
             0   24   24
                -24  -24
                  0    0
```

$(x+1)(x^3-x^2-14x+24)$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Factorización de polinomios

Ecuaciones de grado mayor a dos:

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Calculamos los divisores del término libre, positivos y negativos:

24 es divisible por +- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Probamos con -1.

Dividimos $x^3 - x^2 - 14x + 24$ por (x+1) (raíz -1):

```
  1    -1    -14    24      |  1   1
 -1    -1                      1  -2  -12
  0    -2    -14
        2      2
        0    -12    24
              12    12
               0    36
```

¡Queda resto! -1 no es otra vez raíz!

Resolución de ecuaciones recurrentes
Factorización de polinomios

Ecuaciones de grado mayor a dos:

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Calculamos los divisores del término libre, positivos y negativos:

24 es divisible por +- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Probamos con 1.

Dividimos $x^3 - x^2 - 14x + 24$ por $(x-1)$ (raíz 1):

```
  1   -1   -14   24     |  1 -1
 -1    1                   1  0 -14
  0    0   -14   24
            14  -14
             0   10
```

¡Queda resto! 1 no es raíz!

Resolución de ecuaciones recurrentes
Factorización de polinomios

Ecuaciones de grado mayor a dos:

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Calculamos los divisores del término libre, positivos y negativos:

24 es divisible por +- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Probamos con 2.

Dividimos $x^3 - x^2 - 14x + 24$ por (x-2) (raíz 2):

```
 1   -1   -14   24     |  1 -2
-1    2                   1  1 -12
 0    1   -14
     -1     2
      0   -12   24
           12  -24
            0    0
```

$(x+1)(x-2)(x^2+x-12)$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Factorización de polinomios

Ecuaciones de grado mayor a dos:

$x^2 + x - 12 = 0$

Como ya es de segundo grado, podemos resolver con la fórmula general o, como a vale 0, así:

$$\left.\begin{array}{l} m + n = b \\ m * n = c \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} m + n = 1 \\ m * n = -12 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{lll} m = 4 & \text{-->}\ (x+4) & (\text{raíz } -4) \\ n = -3 & \text{-->}\ (x-3) & (\text{raíz } 3) \end{array}$$

Juntamos todas las raíces obtenidas (-1, 2, 3, -4):

$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ equivale a:

$(x+1)(x-2)(x-3)(x+4) = 0$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Las **recurrencias homogéneas** son de la siguiente forma:

$a_0T(n) = a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k)$

Donde a_i son números reales y k es un natural entre 1 y n.

Un ejemplo es la sucesión de **Fibonacci**:

```
int FibonacciRec(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else
    return FibonacciRec(n-1)+FibonacciRec(n-2);
}
```

$$F(n)=\begin{cases} F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n>=2 \\ 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$$

T(n)=T(n-1)+T(n-2) si n>=2

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Partimos de:

$a_0T(n) = a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k)$

Traemos todo a la izquierda:

$a_0T(n) - a_1T(n-1) - a_2T(n-2) - \ldots - a_kT(n-k) = 0$

Cambiamos $T(n)$ por x^n y obtenemos el **polinomio característico**:

$a_0x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_k = 0$

Y **resolvemos**, obteniendo las raíces (llamadas r_1, r_2, … , r_k).

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Si todas las raíces son **distintas**, la solución de la ecuación viene dada por la **expresión**:

$$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$$

Los coeficientes c_i se determinan a partir de las **condiciones iniciales**.

Si alguna raíz está **repetida** (multiplicidad m_i = 1, …, l), la ecuación se puede escribir como:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{ij} n^j r_i^n$$

Los coeficientes c_i se determinan a partir de las **condiciones iniciales**.

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Ejemplo (raíces distintas).

$$T(n)=\begin{cases} 3T(n-1) + 4T(n-2) & \text{si } n>=2 \\ 5 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$$

Partimos de:

$T(n) = 3T(n-1) + 4T(n-2)$

Pasamos a la izquierda:

$T(n) - 3T(n-1) - 4T(n-2) = 0$

Cambiamos $T(n)$ por x^n:

$x^k - 3x^{k-1} - 4x^{k-2} = 0$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Seguimos:

$x^k - 3x^{k-1} - 4x^{k-2} = 0$

Simplificamos, dividiendo todo por x^{k-2}:

$x^2 - 3x - 4 = 0$

Resolvemos, en este caso podemos buscar dos números que sumados resulten iguales a b (3) y multiplicados resulten iguales a c (4):

$(x+1)(x-4) = 0$

Obtenemos las raíces:

$$r_1 = -1 \qquad r_2 = 4$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

La solución de la ecuación viene dada por la **expresión**:

$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$

Donde los coeficientes c_i se determinan a partir de las **condiciones iniciales** (f(0) = 0, f(1) = 1).

$$\left.\begin{array}{l} T(0) = c_1(-1)^0 + c_2(4)^0 = c_1 + c_2 = 0 \\ \\ T(1) = c_1(-1)^1 + c_2(4)^1 = -c_1 + 4c_2 = 5 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c_1 = -c_2 \\ c_2 = 1 \\ c_1 = -1 \end{array}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Sustituimos en la expresión:

$$T(n)=c_1(-1)^n+c_2(4)^n$$

Los datos que conocemos:

$$c_1=-1 \qquad c_2=1$$

Y obtenemos:

$$T(n)=-1*(-1)^n+1*4^n$$ que es ~ O(4^n)

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Ejemplo (raíces distintas). Sucesión de **Fibonacci**:

$$F(n) = \begin{cases} F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n>=2 \\ 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=0 \end{cases}$$

Partimos de:

$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$

Pasamos a la izquierda:

$T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0$

Cambiamos T(n) por x^n:

$x^k - x^{k-1} - x^{k-2} = 0$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Seguimos:

$x^k - x^{k-1} - x^{k-2} = 0$

Simplificamos, dividiendo todo por x^{k-2}:

$x^2 - x - 1 = 0$

Resolvemos, en este caso aplicando la fórmula general de resolución de ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obtenemos las raíces:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

La solución de la ecuación viene dada por la **expresión**:

$T(n) = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \dots + c_k r_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$

Donde los coeficientes c_i se determinan a partir de las **condiciones iniciales** ($f(0) = 0$, $f(1) = 1$).

$$\left.\begin{aligned} T(0) &= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = c_1 + c_2 = 0 \\ T(1) &= c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= -c_2 \\ c_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Sustituimos en la expresión:

$$T(n) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Los datos que conocemos:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Y obtenemos:

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{que es} \quad O\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$= O(1.618^n)$$

Ejemplo (raíces repetidas).

$$t_n = \begin{cases} n & \text{si } n = 0, 1 \text{ o } 2 \\ 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Partimos de:

$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3)$

Pasamos a la izquierda:

$T(n) - 5T(n-1) + 8T(n-2) - 4T(n-3) = 0$

Cambiamos $T(n)$ por x^n:

$x^k - 5x^{k-1} + 8x^{k-2} - 4x^{k-3} = 0$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Seguimos:

$x^k - 5x^{k-1} + 8x^{k-2} - 4x^{k-3} = 0$

Simplificamos, dividiendo todo por x^{k-3}:

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

Resolvemos, por división, y obtenemos las raíces: 1, 2, 2.

$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

$(x-1)(x-2)^2 = 0$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

La solución de la ecuación viene dada por la **expresión**:

T(n) = $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n$

Nuestras raíces son: 1, 2, 2. Es decir:

1 con multiplicidad 1, 2 con multiplicidad 2.

Raíz 1 (mul. 1) $\rightarrow$ $c_1(1)^n$

Raíz 2 (mul. 2) $\rightarrow$ $c_2(2)^n + c_3n(2)^n$

T(n) = $c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3n(2)^n$

Veamos un caso **hipotético** de mayor multiplicidad:

Raíz 5 (mul. 4) $\rightarrow$ $c_1(5)^n + c_2n(5)^n + c_3n^2(5)^n + c_4n^3(5)^n$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Seguimos:

$T(n) = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3 n(2)^n$

A partir de las **condiciones iniciales** (T(n) = n si n <= 2):

$$\left.\begin{aligned}
T(0) &= c_1(1)^0 + c_2(2)^0 + c_3 0(2)^0 = c_1 + c_2 = 0\\
T(1) &= c_1(1)^1 + c_2(2)^1 + c_3 1(2)^1 = c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1\\
T(2) &= c_1(1)^2 + c_2(2)^2 + c_3 2(2)^2 = c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
c_1 &= -2\\
c_2 &= 2\\
c_3 &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias homogéneas

Sustituimos en la expresión:

$T(n) = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3n(2)^n$

Los coeficientes, y obtenemos:

$T(n) = -2(1)^n + 2(2)^n -(1/2)n(2)^n$

Que podemos simplificar:

$T(n) = 2^{n+1} -n2^{n-1} - 2$

OJO: En este caso, conforme n aumenta, T(n) pasa a ser negativo y continua decreciendo. En apuntes de algunos profesores se dice que este T(n) es $O(n2^n)$, pero esta expresión de tiempo NO TIENE SENTIDO y no hay orden de eficiencia que valga. La ecuación recurrente de T(n) es incorrecta, se puede comprobar dándole valores n = 1,2,3,4,5...

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias no homogéneas

Las **recurrencias no homogéneas** son de la siguiente forma:

$a_0T(n) + a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \ldots + a_kT(n-k) = b^np(n)$

Donde a_i son números reales, k es un natural entre 1 y n, b es una constante y p(n) es un polinomio en n de grado d.

Ejemplos:

$T(n) - 2T(n-1) = 1$ (El polinomio es 1, de grado 0).

$T(n) - 2T(n-1) = 3^n(n^2+n)$ (El polinomio es n^2+n, de grado 2).

El polinomio característico es:

$(a_0x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_k)(x-b)^{d+1} = 0$

El resto de la resolución es como para las homogéneas.

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias no homogéneas

Ejemplo:

$T(n) - 2T(n-1) = 3^n(n^2+n)$ (El polinomio es n^2+n, de grado 2).

$(a_0x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_k)(x-b)^{d+1} = 0$

$(x^k - 2x^{k-1})(x-3)^3 = 0$

$(x - 2)(x - 3)^3 = 0$

Raíces: 2 (multiplicidad 1), 3 (multiplicidad 3).

$T(n) = c_1(2)^n + c_2(3)^n + c_3n(3)^n + c_4n^2(3)^n$

¡Si nos faltan condiciones iniciales, podemos calcularlas nosotros a mano!

Si $T(n) = 2*T(n-1)+1$ y sabemos: $T(0) = 1$, entonces $T(1) = 3$.

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a realizar cambio de variable

El cambio de variable es una técnica de sustitución para resolver recurrencias que no son directamente del tipo conocido.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 3T(n/2)+n & \text{si } n \text{ es potencia de } 2,\ n > 1 \end{cases}$$

Aplicamos el cambio $n = 2^i$. Se define una nueva recurrencia en la que $t_i = T(2^i)$.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 3t_{i-1}+2^i & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

Finalmente, será necesario deshacer el cambio de variable para obtener n, reemplazando i:

$$i = \log_2(n).$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a resolver recurrencias por partes

En ocasiones en las que podemos distinguir algunos casos:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ T(n/2) & \text{si } n \text{ es par} \\ 3T(n-2) & \text{si } n \text{ es impar} > 1 \end{cases}$$

Podemos realizar el estudio de eficiencia por partes:

$$T(n) \text{ es } \begin{cases} O(1) & \text{si } n = 1 \\ O(\log_2(n)) & \text{si } n \text{ es par} \\ O(n) & \text{si } n \text{ es impar} > 1 \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a realizar transformaciones de recorrido

En ocasiones, hacer un cambio de variable no es suficiente, tendremos que **cambiar el recorrido de la recurrencia**:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ nT^2(n/2) & \text{si } n \text{ es potencia de } 2,\ n > 1 \end{cases}$$

Aplicamos el cambio de variable $n = 2^i$. Se define una nueva recurrencia en la que $t_i = T(2^i)$.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \quad \text{(cambia a 0 por el cambio} \\ 2^i t^2_{i-1} & \text{si } i > 0 \quad \text{de variable (2\^{}0 = 1))} \end{cases}$$

Aún no podemos resolver la recurrencia, transformamos definiendo $u_i = \log(t_i)$:

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ (sale 0 por log2(1))} \\ i+2\log(t_{i-1}) = i + 2u_{i-1} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

Resolución de ecuaciones recurrentes
Aprender a realizar transformaciones de recorrido

De ahí:

$$u_i = c_i 2^i + c_2 1^i + c_3 i 1^i$$

Deshacemos primero este cambio de variable:

$$t_i = 2^{u^i} = 2^{c_i 2^i + c_2 1^i + c_3 i 1^i}$$

Luego desharíamos el otro cambio de variable.

Los coeficientes se pueden calcular antes o después de deshacer cualquier cambio de variable, sobre la función correspondiente (para u, la función u, para t, la función t...).

Resolución de ecuaciones recurrentes
¿Qué hemos aprendido?

- **Concepto de ecuación recurrente.**
- **Factorización de polinomios.**
- **Resolución de recurrencias homogéneas.**
- **Resolución de recurrencias no homogéneas.**
- **Realización de cambios de variable.**
- **Resolución de recurrencias por partes.**
- **Realización de transformaciones de recorrido.**

Resolución de ecuaciones recurrentes
Ejemplos

```
int FibonacciRec(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else
    return FibonacciRec(n-1)+FibonacciRec(n-2);
}
```

Resolución de ecuaciones recurrentes
Ejemplos

```
int Recursiva(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else {
    return Recursiva(n-1)+2*Recursiva(n-2);
  }
}
```

Resolución de ecuaciones recurrentes
Ejemplos

```
int RecursivaC(int n) {
  if (n < 2)
    return n;
  else {
    return RecursivaC(n/2)+2*RecursivaC(n/4);
  }
}
```