

电磁感应

姓名: 鲁睿 班级: 未央-软 11 学号: 2021012539

实验时间: 2022 年 4 月 13 日 下午 实验编号: 16 号

摘 要

与严格的简谐运动相比, 受阻尼限制或者外力驱使下的振动现象更符合生活实际, 本实验则使用波尔共振仪对两种现象进行分析。从理论上, 使用二阶齐次常系数常微分方程相关知识求解各种物理量 (如振幅、相位差、周期数) 的解析解, 同时为方便分析, 探究受迫振动达到稳态前的瞬态过程, 得到其近似解析解。从实验上, 在不同阻尼约束下观测固有频率的变化, 测量并验证受迫振动中振幅 A 、频率 ω 、相位 φ 之间的关系, 计算品质因数 Q 。实验中发现周期随振幅增加而减少, 对模型修正后计算了周期和振幅之间的关系, 利用数据作图, 与修正后的模型相符。

鉴于 Excel 软件绘制曲线图直观上曲线不可微, 使用 python 中绘图库 matplotlib 以及开源科学计算库 scipy, 编写贝塞尔曲线类并平滑且可微地连接各散点, 与手绘曲线图结果相仿, 提高实验作图的美观性; 同时使用最小二乘法拟合直线, 并将实验测得的离散点与理论值相比较, 两者基本相符, 有效地验证了理论公式。

关键词: 电磁感应; RCL 电路;

目 录

1 实验仪器	3
2 实验内容	3
2.1 实验原理	3
2.2 实验步骤	8
2.2.1 实验准备	8
2.3 数据处理	8
2.3.1 观测欠阻尼运动规律, 计算仪器的固有频率以及品质因数	8
3 数据处理	8
3.1 第一部分: 测量无芯 (空气芯) 线圈和铝芯线圈电阻和电感	8
3.2 第二部分: 互感和耦合常数	9
3.2.1 第三部分: 初级线圈的等效阻抗和次级线圈的若干反射物理量之间的关系	10
3.3 第四部分: 涡流效应	11
3.3.1 观测欠阻尼运动规律, 观测幅频特性	12

4 讨论	12
------	----

5 原始数据	12
--------	----

插图

1 L-R 电路以及电压合成关系图	3
2 测量电路以及电压合成关系图	4
3 线圈参数 L 、 R 和互感 M 测量电路	5
4 变负载测量电路	6

表格

1 电磁感应仪器	3
2 测量双线圈自感与内阻数据表	8
3 变负载测量数据表	10
4 初级线圈等效电阻与感抗表	10
5 初级线圈反射电阻与感抗表	11
6 有铝芯情况下的变压器电路测量数据表	12

1 实验仪器

名称	型号	参数	精度
信号发生器	**	**	
万用表	**	**	
定值电阻	**	300Ω	
L_1, L_2 线圈	**	**	

表 1: 电磁感应仪器

2 实验内容

2.1 实验原理

1 L-R 电路

角频率为 ω 的正弦交流电流经 R 和 L 的串联构成的 $L-R$ 电路，电路图如下：

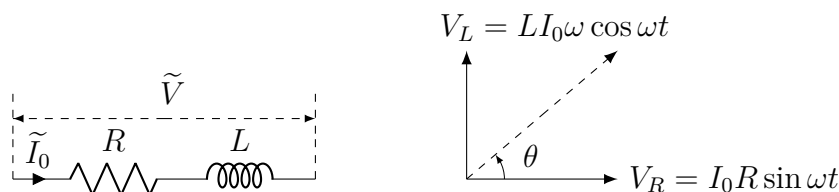


图 1: L-R 电路以及电压合成关系图

设电流 $i = I_0 \sin \omega t$ ，则电阻上的电压 (降) 等于 $I_0 R \sin \omega t$ ，电感上的电压 (降) 是 $I_0 \omega L \cos \omega t$ ，进而我们可以得到 $R-L$ 组合回路上的电压是 $I_0 Z \sin(\omega t + \theta)$ ，式中，

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega_0 L)^2}, \theta = \arctan\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right) \quad (1)$$

定义 $X = \omega L$ 为感抗。交流电压和电流的有效值用 V 和 I 表示，可以推知

$$V = \sqrt{(IR)^2 + (IX)^2} = I\sqrt{R^2 + Z^2} \quad (2)$$

使用文字语言描述：如果电路中还有其它的电阻和 (或) 电感， $L-R$ 组合回路的电压降等于电阻上的总电压降和电感上的总电压降的平方和再开根号。同时可以得到各分

压与总压的三角函数关系：

$$\begin{cases} V \cos \theta = IR \\ V \sin \theta = IX \end{cases} \quad (3)$$

2 线圈感抗和电阻的测量

在下图所示的组合串联电路外加正弦电压，如图所示：

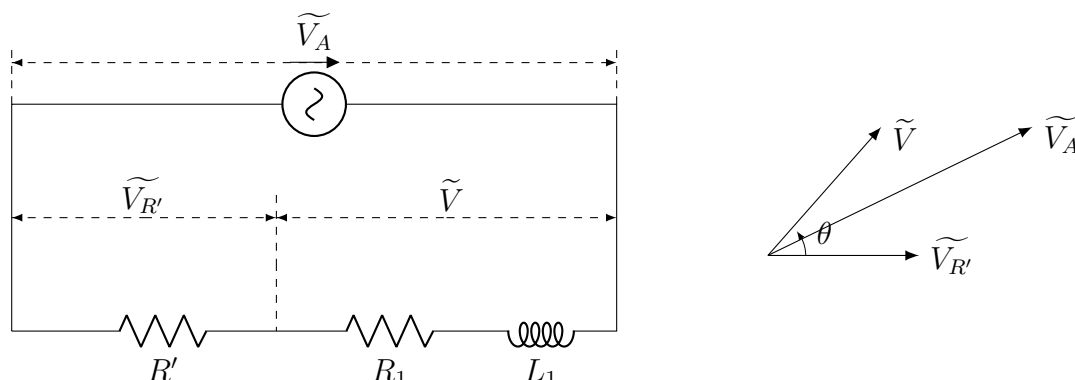


图 2: 测量电路以及电压合成关系图

由右侧电压合成关系图以及余弦定理可以得到：

$$V_A^2 = V_{R'}^2 + V^2 + 2V_R V \cos \theta \quad (4)$$

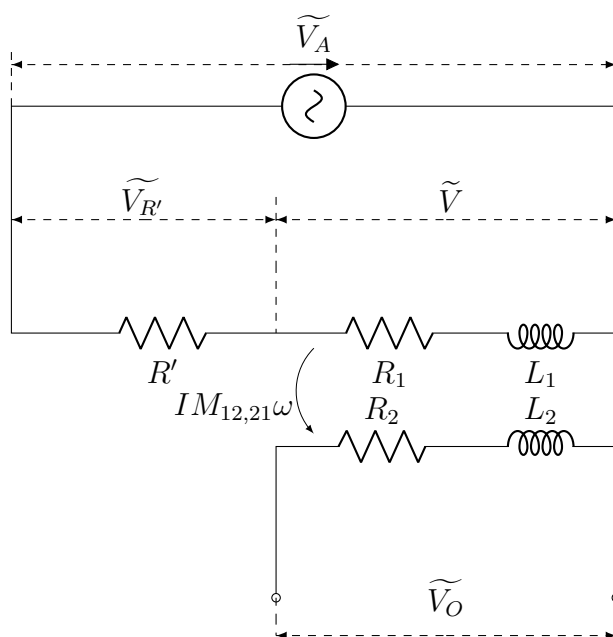
在该公式中，除 θ 外，所有的量都能测量得到。由 (3) 式和 (4) 式以及 $V_R' = IR'$ 可以解得：

$$R = \frac{R'}{2} \frac{V_A^2 - V^2 - V_R^2}{V_{R'}^2} \quad (5)$$

$$L = \frac{R'}{2\omega_0 V_{R'}^2} \sqrt{4V^2 V_{R'}^2 - (V_A^2 - V^2 - V_{R'}^2)^2} \quad (6)$$

3 耦合回路

对于由两个线圈组成的耦合回路，电路为初级线圈供给的能量，部分消耗在初级线圈中，部分消耗自感系数为 L 的电感，当电流为 I (有效值) 时，其平均储能等于 $\frac{1}{2}LI^2$ 。从初级线圈看，在初级线圈和次级线圈中消耗的总能量就好像是消耗在初级线圈的等效电阻上一样。

图 3: 线圈参数 L 、 R 和互感 M 测量电路

当连接电路为上图时，外电路为开路，内电路为闭路，互感产生对应电动势为 V_O ，有对应关系 $I = \frac{V_{R'}}{R'} = \frac{V_O}{Z_L} = \frac{V_O}{\omega M}$ ，可以解得

$$M = \frac{V_O R'}{V_{R'} \omega} \quad (7)$$

交换 $R-L$ 测量 M_{12} 和 M_{21} ，而互感系数仅由两线圈在空间中的形状以及相对位置决定，两者理论值相等，更一般的，有互感系数公式

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(L_1)} \oint_{(L_2)} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = M \quad (8)$$

实验测量有一定误差，将交换后测量的平均值作为两者的互感系数

$$M_{1\leftrightarrow 2} = \frac{M_{12} + M_{21}}{2} \quad (9)$$

耦合系数定义为

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (10)$$

使用能量守恒原理可以推知，耦合系数取值范围为 $[0, 1]$ ，当 $K = 1$ 时称为全耦合。耦合系数的大小取决于线圈的匝数、尺寸、几何形状、骨架材料、相对位置。

当外接电路闭合时，如下图所示

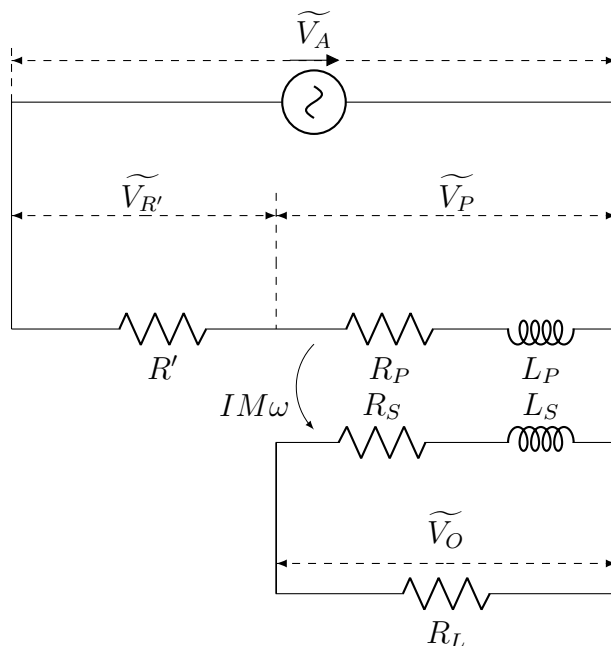


图 4: 变负载测量电路

由公式 (2) 可知，互感产生的电动势为电阻产生电动势和电感产生电动势方和根，有

$$V_{\text{tot}} = IM\omega = M \frac{V_{R'}}{R'} = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \quad (11)$$

其中 V_R 由外部电路 V_O 以及 R_L, R_S 给出， V_L 由复阻抗 $Z_L = \omega L$ 给出

$$V_R = \frac{V_O}{R_L} \cdot (R_S + R_L), V_L = \frac{V_O}{R_L} \cdot \omega L \quad (12)$$

由上述方程可以解得

$$(R_L + R_S)^2 = \left(\frac{V_{R'}}{V_O} \frac{R_L}{R'} \omega \right)^2 M^2 - (\omega L)^2 \quad (13)$$

取 $(R_L + R_S)^2$ 为 Y ， $\frac{V_{R'}}{V_O} \frac{R_L}{R'} \omega$ 为 X 线性拟合，利用斜率和截距便可以计算出互感和电感形成一个变负载测量电路初级线圈的等效电阻 R_{PE} 和等效电感 L_{PE} 与来自于次级线圈的“反射”电阻 R_R 和“反射”电感 L_R 有关。在初级线圈中的反射电阻 R_R 所消耗的功率必须等于次级线圈回路中的电阻 R_S 和 R_L (图 4) 消耗的功率，即：

$$I_P^2 R_R = I_S^2 (R_S + R_L) \quad (14)$$

可以计算得到初级线圈的反射电阻和反射感抗，公式如下

$$\boxed{R_R = \frac{V_o^2 R'^2}{V_{R'}^2 R_L^2} (R_S + R_L)}, \quad \boxed{X_R = \frac{V_o^2 R'^2}{V_{R'}^2 R_L^2} X_S} \quad (15)$$

4 涡流效应

涡流与线圈产生的磁场为线性叠加的，由楞次定律可知两者为相减的关系，从而电感的计算上可看作涡流与线圈并联，有

$$\boxed{L = L_P - L_{\text{core}}} \quad (16)$$

而涡流的电流密度与线圈中的电流正相关，焦耳热为线性相加的，因此等效的“涡流电阻”应看作与线圈内阻串联，有

$$\boxed{R = R_P + R_{\text{core}}} \quad (17)$$

将输入功率减去内阻上焦耳定律散发的热功率得到铝芯耗散的功率为

$$\Delta P = V_A \frac{V_{R'}}{R'} \cos \theta - \frac{V_{R'}^2}{R'} - \frac{V_o^2}{R_L} \quad (18)$$

其中代入 (4) 中的公式可以计算出相应的 θ

2.2 实验步骤

2.2.1 实验准备

2.3 数据处理

2.3.1 观测欠阻尼运动规律，计算仪器的固有频率以及品质因数

3 数据处理

3.1 第一部分：测量无芯（空气芯）线圈和铝芯线圈电阻和电感

表 2: 测量双线圈自感与内阻数据表

	L_1 (空气芯)	L_2 (空气芯)	L_1 (铝芯)	L_2 (铝芯)
R'/Ω	580	650	480	430
V_A/V	6.702	6.734	6.643	6.605
$V_{R'}/V$	4.552	4.575	4.328	4.073
V/V	4.511	4.555	4.297	4.065
V_o/V	3.854	3.455	3.054	3.197

根据前文推导的公式， L_1 （空气芯）的内阻与电感值为：

$$R_1 = \frac{R'}{2} \cdot \frac{V_A^2 - V_{R'}^2 - V^2}{V_{R'}^2} = \frac{580\Omega}{2} \cdot \frac{6.702^2 - 4.552^2 - 4.511^2}{4.552^2} = 53.84\Omega$$

$$L_1 = \sqrt{\left(\frac{V}{V_{R'}}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R'}\right)^2} \frac{R'}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{4.511}{4.552}\right)^2 - \left(\frac{53.84}{580}\right)^2} \frac{580\Omega}{1000\text{s}^{-1}} = 0.5646\text{H}$$

L_2 （空气芯）的内阻与电感值为：

$$R_2 = \frac{R'}{2} \cdot \frac{V_A^2 - V_{R'}^2 - V^2}{V_{R'}^2} = \frac{650\Omega}{2} \cdot \frac{6.734^2 - 4.575^2 - 4.555^2}{4.575^2} = 56.96\Omega$$

$$L_2 = \sqrt{\left(\frac{V}{V_{R'}}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R'}\right)^2} \frac{R'}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{4.555}{4.575}\right)^2 - \left(\frac{56.96}{650}\right)^2} \frac{650\Omega}{1000\text{s}^{-1}} = 0.6393\text{H}$$

L_1 （铝芯）的内阻与电感值为：

$$R_1^* = \frac{R'}{2} \cdot \frac{V_A^2 - V_{R'}^2 - V^2}{V_{R'}^2} = \frac{480\Omega}{2} \cdot \frac{6.643^2 - 4.328^2 - 4.297^2}{4.328^2} = 88.84\Omega$$

$$L_1^* = \sqrt{\left(\frac{V}{V_{R'}}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R'}\right)^2} \frac{R'}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{4.297}{4.328}\right)^2 - \left(\frac{88.84}{480}\right)^2} \frac{480\Omega}{1000\text{s}^{-1}} = 0.4567\text{H}$$

L_2 (铝芯) 的内阻与电感值为:

$$R_2^* = \frac{R'}{2} \cdot \frac{V_A^2 - V_{R'}^2 - V^2}{V_{R'}^2} = \frac{430\Omega}{2} \cdot \frac{6.605^2 - 4.073^2 - 4.065^2}{4.073^2} = 136.2\Omega$$

$$L_2^* = \sqrt{\left(\frac{V}{V_{R'}}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{R'}\right)^2} \frac{R'}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{4.065}{4.073}\right)^2 - \left(\frac{136.2}{430}\right)^2} \frac{430\Omega}{1000\text{s}^{-1}} = 0.3851\text{H}$$

3.2 第二部分: 互感和耦合常数

根据前文推导的公式, 空气芯情况下由 L_1 数据和 L_2 数据推出的互感值分别为:

$$M_{12} = \frac{V_o R'}{V_{R'} \omega} = \frac{3.854 \times 580\Omega}{4.552 \times 1000\text{Hz}} = 0.4911\text{ H}$$

$$M_{21} = \frac{V_o R'}{V_{R'} \omega} = \frac{3.455 \times 650\Omega}{4.575 \times 1000\text{Hz}} = 0.4909\text{ H}$$

两者相对误差为 0.04%。两种情况下的互感应相同, 因此取其平均值:

$$M = \frac{M_{12} + M_{21}}{2} = \frac{0.4911\text{ H} + 0.4909\text{ H}}{2} = 0.4910\text{ H}$$

铝芯情况下由 L_1^* 数据和 L_2^* 数据推出的互感值分别为:

$$M_{12}^* = \frac{V_o R'}{V_{R'} \omega} = \frac{3.054 \times 480\Omega}{4.328 \times 1000\text{Hz}} = 0.3387\text{ H}$$

$$M_{21}^* = \frac{V_o R'}{V_{R'} \omega} = \frac{3.197 \times 430\Omega}{4.073 \times 1000\text{Hz}} = 0.3375\text{ H}$$

两者相对误差为 0.35%。两种情况下的互感应相同, 因此取其平均值:

$$M^* = \frac{M_{12}^* + M_{21}^*}{2} = \frac{0.3387\text{ H} + 0.3375\text{ H}}{2} = 0.3381\text{ H}$$

结合前部分得到的电感数据, 可以算出两种情况的耦合常数:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{0.4910\text{H}}{\sqrt{0.5646\text{H} \times 0.6393\text{H}}} = 0.8173$$

$$k^* = \frac{M^*}{\sqrt{L_1^* L_2^*}} = \frac{0.3381\text{H}}{\sqrt{0.4567\text{H} \times 0.3851\text{H}}} = 0.8062$$

即有铝芯的时候耦合系数略小。

接下来使用下图中的电路进行实验, 其中 $R' = 300\Omega$ 为定值电阻, 两个电感的参数上一部分已经测出 ($R_S = R_1 = 53.84\Omega$)。

测量结果如下表。

表 3: 变负载测量数据表

R_L/Ω	V_A/V	$V_{R'}/V$	V_P/V	V_o/V
100	6.447	3.703	3.644	1.006
200	6.509	3.327	3.961	1.725
300	6.556	3.076	4.252	2.234
400	6.592	2.910	4.489	2.602
500	6.619	2.802	4.678	2.877
600	6.639	2.730	4.828	3.087
700	6.655	2.684	4.950	3.251
800	6.668	2.653	5.049	3.383
900	6.678	2.633	5.131	3.492
1000	6.687	2.621	5.200	3.582

将前文公式 $\omega M I_P = I_S Z_S$ 用此处测得的物理量展开, 得到线性关系:

$$(R_L + R_S)^2 = M^2 \frac{V_{R'}^2 \omega^2 R_L^2}{V_o^2 R'^2} - X_S^2$$

将前表中的数据代入上式, 用 python 的 matplotlib 库中 polyfit() 函数拟合, 并以 $\frac{V_{R'}^2 \omega^2 R_L^2}{V_o^2 R'^2}$ 为 x 轴, $(R_L + R_S)^2$ 为 y 轴作图如下:

拟合结果为斜率 $M^2 = 0.2439 \Omega^2 \cdot s^2$, 即互感 $M = \sqrt{0.2439 \Omega^2 \cdot s^2} = 0.4939 \text{ H}$ 。截距 $X_S^2 = 3.381 \times 10^6 \Omega^2$, 即 $X_S = \sqrt{3.381 \times 10^6 \Omega^2} = 581.5 \Omega$ 。

与第一部分测量的结果 ($M = 0.4910 \text{ H}$, $X_S = \omega L_1 = 564.6 \Omega$) 相比, 相对误差分别为 0.6% 和 3.0%。

3.2.1 第三部分: 初级线圈的等效阻抗和次级线圈的若干反射物理量之间的关系

根据前文的推导, 初级线圈的等效电阻和感抗可以由公式 $R_{PE} = \frac{R'}{2} \cdot \frac{V_A^2 - V_{R'}^2 - V^2}{V_{R'}^2}$ 和 $X_{PE} = \omega \sqrt{(\frac{V}{V_{R'}})^2 - (\frac{R_1}{R'})^2} \frac{R'}{\omega}$ 得到, 因此根据我们在上一部分测得的数据可以得出每一个 R_L 取值时初级线圈的参数, 如下表:

表 4: 初级线圈等效电阻与感抗表

R_L/Ω	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
R_{PE}/Ω	159.4	211.5	244.8	262.8	268.9	268.0	262.0	254.3	245.3	236.0
X_{PE}/Ω	205.8	276.1	373.5	483.7	595.1	698.9	791.6	871.0	938.7	995.3

根据之前推导的公式，我们还能计算初级线圈的反射电阻和反射感抗：

$$R_R = \frac{I_S^2}{I_P^2}(R_S + R_L) = \frac{V_o^2 R'^2}{V_{R'}^2 R_L^2}(R_S + R_L), \quad X_R = \frac{V_o^2 R'^2}{V_{R'}^2 R_L^2} X_S$$

代入数据得到每个 R_L 取值时初级线圈反射电阻和感抗：

表 5: 初级线圈反射电阻与感抗表

R_L/Ω	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
R_R/Ω	102.2	153.5	186.6	204.1	210.2	209.0	203.1	195.2	186.4	177.1
X_R/H	386.3	351.7	306.7	261.5	220.7	185.9	156.7	133.0	113.6	97.75

将 X_{PE} 和 X_R 画在一张图中，发现接近一条直线。

因此 X_{PE} 和 X_R 的关系可以表示为 $X_{PE} = 1232 \Omega - 2.751 X_R$ 。

做出 R_R 与 R_L 的图像，如下：

可以发现， R_R 在 $500 \Omega \geq R_L \geq 600 \Omega$ 时达到最大值。

3.3 第四部分：涡流效应

从磁通量的角度出发很容易想到涡流与线圈产生的磁场应该是线性叠加的，更具体的说，由于楞次定律，因此电感的计算上可看作涡流与线圈并联，即 $L = L_P - L_{core}$ 。但涡流的电流密度显然与线圈中的电流呈正比，而涡流和线圈产生的焦耳热也是线性叠加的，因此等效的“涡流电阻”应看作与线圈内阻串联，即 $R = R_P + R_{core}$ 。使用这两个公式和第一部分的数据计算 R_{core} 和 L_{core} 。

用 L_1 测出的数据计算：

$$\begin{aligned} \frac{L_{core1}}{R_{core1}} &= \frac{L_1 - L_1^*}{R_1^* - R_1} = \frac{0.5646 \text{ H} - 0.4567 \text{ H}}{88.84 \Omega - 53.84 \Omega} = 3.083 \times 10^{-3} \text{ s} \\ \frac{L_{core2}}{R_{core2}} &= \frac{L_2 - L_2^*}{R_2^* - R_2} = \frac{0.6393 \text{ H} - 0.3851 \text{ H}}{136.2 \Omega - 56.96 \Omega} = 3.208 \times 10^{-3} \text{ s} \end{aligned}$$

两个结果相差 4%。取其平均值，得 $\frac{L_{core}}{R_{core}} = 3.15 \times 10^{-3} \text{ s}$ 。

为了计算铝芯中产生涡流时消耗的功率，在第二部分中的电路中的线圈中插入铝芯。 R' 设置为 300Ω ， R_L 则设置为 1000Ω 。测量各项数据如下：

表 6: 有铝芯情况下的变压器电路测量数据表

V_A/V	$V_{R'}/V$	V_P/V	V_o/V
6.546	3.206	4.273	3.041

初级回路中电流与路端电压相位差的余弦值为 $\cos \varphi = \frac{V_A^2 + V_{R'}^2 - V_P^2}{2V_A V_{R'}} = 0.8308$, 因此铝芯耗散的功率为:

$$\begin{aligned} \Delta P &= V_A \frac{V_{R'}}{R'} \cos \varphi - \frac{V_{R'}^2}{R'} - \frac{V_o^2}{R_L} = 6.546 \text{ V} \frac{3.206 \text{ V}}{300 \Omega} \times 0.8308 - \frac{(3.206 \text{ V})^2}{300 \Omega} - \frac{(3.041 \text{ V})^2}{1000 \Omega} \\ &= 1.461 \times 10^{-2} \text{ W} \end{aligned}$$

3.3.1 观测欠阻尼运动规律，观测幅频特性

(3)

4 讨论

(1) ?

5 原始数据