

耦合摆实验报告

鲁睿 未央软-11 2021012539 2022.10.14

摘要: 本实验利用示波的傅里叶变换测定耦合摆装置的固有频率，与理论值进行比较。在不同频率下测量不同位置处的振幅，通过三角函数拟合模型计算振动波长，并使用色散关系进行拟合，将拟合系数与实际值进行比较。当激发频率小于共振最小频率时，振幅随位置指数递减，通过测量不同振子振幅线性拟合加以验证。

关键词: 耦合摆; 共振频率; 多模型拟合; 色散关系; 衰减关系

目录

- 1 实验原理
 - 1.1 单摆运动方程
 - 1.2 n 耦合摆色散关系
 - 1.3 通带外振动特性
- 2 实验内容
 - 2.1 测量固有频率
 - 2.2 理论计算固有频率
 - 2.3 共振振幅拟合
 - 2.4 验证色散关系
 - 2.5 耦合摆带外频率的振动特性
- 3 MATLAB 程序
- 4 分析讨论
- 5 原始数据

1 实验原理

1.1 单摆运动方程

对质量为 m 的单摆（弹簧振子），当摆角很小时，其运动方程如下

$$x = A_p \sin(\omega t + \varphi_{0p}) \quad (1)$$

1.2 n 耦合摆色散关系

耦合摆中对应的振动频率定义为

$$\omega_p = \sqrt{\frac{K}{m}}, \omega_s = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2)$$

使用 mathematica 求解 $N = 6$ 时以下行列式的特征向量并导出为 $LAT_{E}X$ 公式

$$M_6 = \begin{pmatrix} \omega_p^2 + \omega_s^2 & -\omega_s^2 & & & & \\ -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 & & & \\ & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 & & \\ & & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 & \\ & & & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 & -\omega_s^2 \\ & & & & -\omega_s^2 & \omega_p^2 + 2\omega_s^2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

输入 `Eigenvalues[M]` 可以解得

$$\{\omega_p^2, \omega_p^2 + \omega_s^2, \omega_p^2 + 2\omega_s^2, \omega_p^2 + 3\omega_s^2, \omega_p^2 - \sqrt{3}\omega_s^2 + 2\omega_s^2, \omega_p^2 + 2\omega_s^2 + \sqrt{3}\omega_s^2\}$$

根据递推得到各摆球的振动方程如下

$$x_\kappa(n, t) = \frac{\sin\left(\pi\kappa \frac{n - n_0}{N}\right)}{\sqrt{\sum_{n=1}^N \sin^2\left(\pi\kappa \frac{n - n_0}{N}\right)}} \cos(\omega_\kappa t) \quad (4)$$

规定以下变换

$$k = \frac{\pi\kappa}{N}, \kappa = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5)$$

得到色散关系如下

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)} \quad (6)$$

作代换

$$\begin{cases} Y = \omega^2 \\ X = 4 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) \end{cases} \quad (7)$$

从而公式 (6) 转换为

$$Y = \omega_s^2 \cdot X + \omega_p^2 \quad (8)$$

故使用 Y, X 进行线性拟合，其斜率为 ω_s^2 ，截距为 ω_p^2 ，

1.3 通带外振动特性

当激励频率 $\omega \leq \omega_p$ ，即频率低于通带时，有

$$x(n, t) = Ae^{-bn} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9)$$

故振幅 A 的对数和摆球编号 n 为线性关系

$$\ln A = -b \cdot n + \ln A_0 \quad (10)$$

2 实验内容

2.1 测量固有频率

（多次）轻轻敲击小球，使用示波器的 FFT 变换功能对信号进行频谱分析，记录频谱中的峰值频率，对应为该系统的固有频率

摆球序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
测量频率/Hz	1.22	1.72	1.94	2.20	2.46	2.63	3.06	3.13	3.19	3.28

表1 耦合摆固有频率（10个测量值）

2.2 理论计算固有频率

由公式 (2) 代入标准值计算得到相应的 f_s, f_p ，例如其中单摆频率计算过程如下

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8\text{m/s}^2}{0.5\text{m}}} = 0.704608969\text{Hz} \approx 0.70\text{Hz}$$

小球个数	劲度系数/(N/m)	摆球摆长/m	摆球质量/kg	fs/Hz	fp/Hz
15	18.9	0.500	0.148	1.80	0.70

表2 基准频率的计算

由公式 (5) 和 (6) 计算不同位置出的理论频率并与表 1 进行比较

位置标号	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
理论频率/Hz	1.316	1.624	1.932	2.229	2.508	2.764	2.994	3.194	3.361	3.493
相对误差	-7.3%	5.9%	0.4%	-1.3%	-1.9%	-4.8%	2.2%	-2.0%	-5.1%	-6.1%

表3 共振频率的理论计算

例如对 $n = 5$ 处的频率理论计算如下

$$f_5 = \sqrt{f_p^2 + f_s^2 \cdot 4 \sin^2 \left(\frac{\pi \cdot 5}{2 \cdot 15} \right)} = \sqrt{1.8^2 + 0.7^2 \cdot 4 \cdot 0.5} = \sqrt{3.73} \approx 1.93\text{Hz}$$

2.3 共振振幅拟合

选定 4 个频率，测量 13 个振子的振幅，测量时**对照波形**，得到相应的正负号。

频率1/Hz		频率2/Hz		频率3/Hz		频率4/Hz	
2.2		2.46		3.06		3.13	
摆球序号	峰峰值/mV	摆球序号	峰峰值/mV	摆球序号	峰峰值/mV	摆球序号	峰峰值/mV
1	-380	1	88	1	-280	1	-100
2	-356	2	116	2	460	2	192
3	264	3	-160	3	-296	3	-300
4	368	4	-136	4	160	4	272
5	-184	5	124	5	88	5	-376
6	-444	6	60	6	-164	6	272
7	68	7	-196	7	340	7	-144
8	432	8	-48	8	-348	8	-68
9	-60	9	172	9	192	9	176
10	-440	10	-92	10	76	10	-256
11	-204	11	-200	11	-280	11	176
12	404	12	80	12	348	12	-336
13	256	13	136	13	-496	13	148

表4 固定频率时振幅随摆球编号的变化

使用 MATLAB 绘制相应图像，标注频率如下：

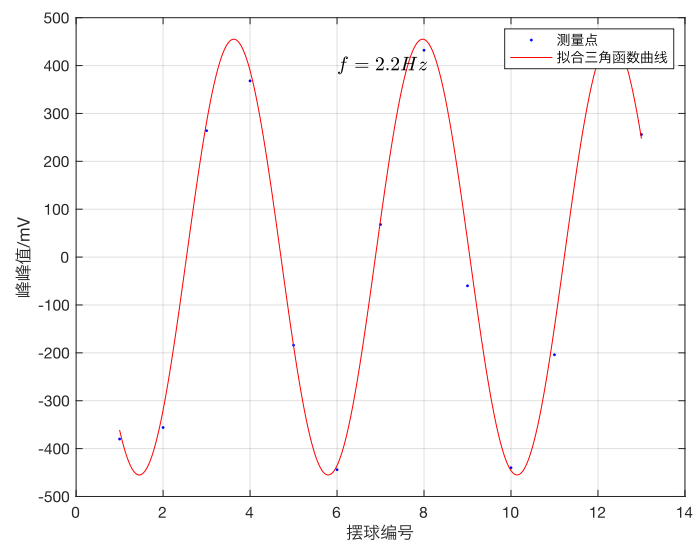


图1 频率为 2.2Hz 峰峰值与摆球编号的关系

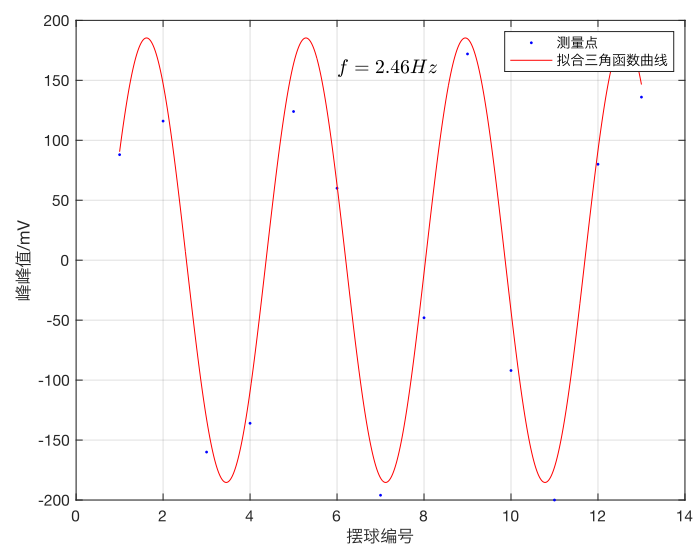


图2 频率为 2.46Hz 峰峰值与摆球编号的关系

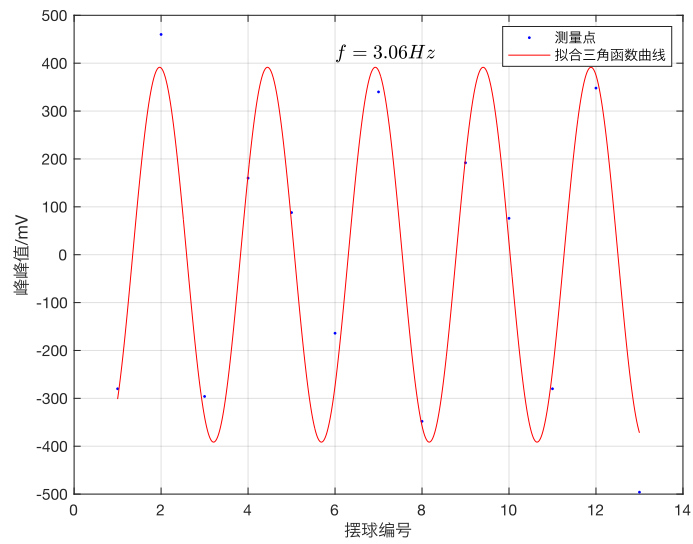


图3 频率为 3.06Hz 峰峰值与摆球编号的关系

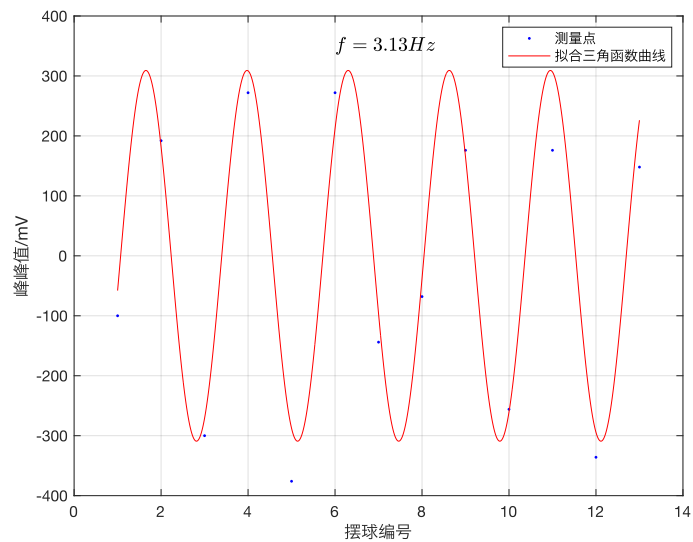


图4 频率为 3.13Hz 峰峰值与摆球编号的关系

2.4 验证色散关系

将 MATLAB 拟合的波矢结果，上述拟合选定 4 个频率测量得到幅度数据如下

频率/Hz	波矢 k
2.2	1.481
2.46	1.714
3.06	2.534
3.13	2.702

表5 4组频率和波矢的计算值

由公式 (7) 计算相应的拟合点 (X,Y) 列表如下

X	Y
1.820648603	4.84
2.285429443	6.0516
3.642049464	9.3636
3.809850186	9.7969

表6 线性拟合对应 X、Y 数值

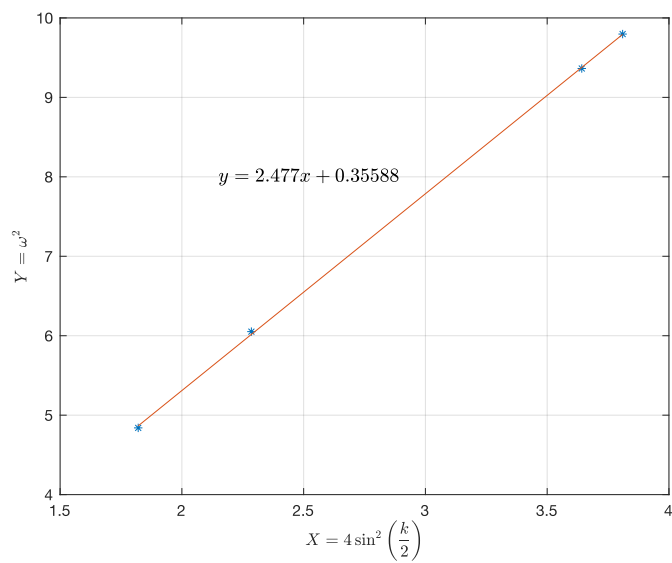


图5 X、Y 线性拟合关系图以及拟合方程

由拟合斜率和截距计算如下

$$\begin{cases} k = \omega_s^2 = 2.477(\text{Hz})^2 \implies f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k} \approx 1.5738\text{Hz} \\ b = \omega_p^2 = 0.35588(\text{Hz})^2 \implies f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{b} \approx 0.5966\text{Hz} \end{cases}$$

这与 B2) 计算的理论值比较如下

fs/Hz	fp/Hz	Δfs	Δfp
1.574	0.597	-15.3%	-12.5%

表7 拟合计算频率结果与理论值误差

故拟合和理论数值有约 10% 的误差。

2.5 耦合摆带外频率的振动特性

取定激发频率为 $f_i = 0.66\text{Hz}$ ，观察到耦合摆的振幅逐渐降低

摆球序号	峰峰值/mV	峰值对数
1	784	6.66440902
2	616	6.423246964
3	524	6.261491684
4	324	5.780743516
5	296	5.690359454
6	244	5.497168225
7	200	5.298317367
8	184	5.214935758
9	168	5.123963979
10	104	4.644390899

表8 激发频率 0.66Hz 时峰峰值随摆球序号的关系

由公式 (10)，对峰峰值取对数之后，与摆球序号线性拟合如下图

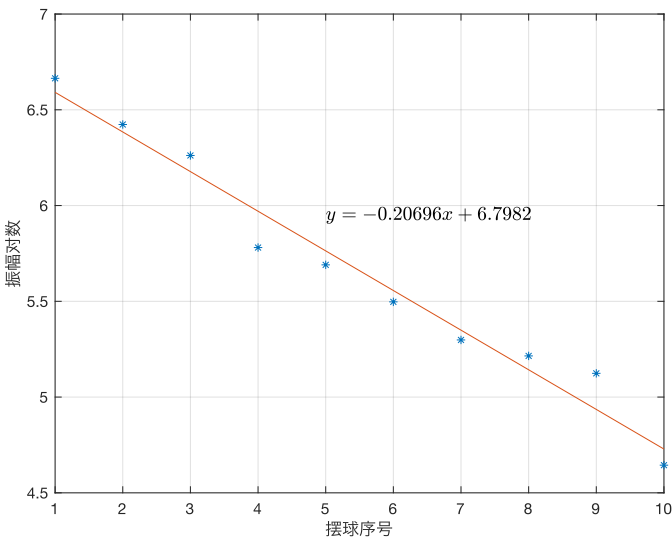


图6 摆球序号和振幅对数线性拟合关系图以及拟合方程

计算得到 $b = 0.20696$ 代表衰减系数。

3 MATLAB 程序

使用 $f(x) = a_1 \sin(b_1 x + c_1)$ 模型进行模拟，编写 `sin_fit.m` 代码如下，将标注点和曲线以及相应频率均绘制在图上

```
function [fitresult, gof] = createFit(x, y)

% 原始数据
x = ... ; y = ... ;
[xData, yData] = prepareCurveData( x, y );
% 设置 fittype 和选项。
ft = fittype( 'sin1' );
opts = fitoptions( 'Method', 'NonlinearLeastSquares' );
opts.Display = 'Off';
opts.Lower = [-Inf 0 -Inf];
% 对数据进行模型拟合。
[fitresult, gof] = fit( xData, yData, ft, opts );
% 绘制数据拟合图。
figure( 'Name', '振幅随摆球编号变化关系' );
h = plot( fitresult, xData, yData );
legend( h, '测量点', '拟合三角函数曲线', 'Location', 'NorthEast', 'Interpreter',
'none' );
text('Interpreter', 'latex', 'String', '$$f=3.13Hz$$', 'FontSize', 14,
'Position', [6, 350]);
% 为坐标区加标签
xlabel( '摆球编号', 'Interpreter', 'latex' );
ylabel( '峰峰值/mV', 'Interpreter', 'latex' );
grid on;
```

代码1 三角函数模型拟合与绘制

此外，线性拟合程序也使用 MATLAB 进行绘制，其代码如下

```

x = ... ; y = ... ;
p=polyfit(x,y,1);
x1=linspace(min(x),max(x));
y1=polyval(p,x1);
plot(x,y,'*',x1,y1);
grid on;
xlabel('摆球序号','Interpreter','latex');
ylabel('振幅对数','Interpreter','latex');
equal = ['$y=',$\text{num2str}(p(1)),$x+$\text{num2str}(p(2)),$$];
text('Interpreter','latex','String',equal,'FontSize',14,'Position',[5,
2.55]);

```

代码2 直线拟合与绘制

4 分析讨论

- 本次实验对于高频频率激发需要多次敲打，以激发更多频率
- 实验过程初期中发现传感器测定不准，使用二分法确定两侧的光感灵敏度不同，最终确定右侧传感器传感异常，使用左侧的传感器进行后续的测量

5 原始数据

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1	耦合摆原始数据										未央软-11				
2											鲁睿				
3															
4	B1) 测量固有频率														
5	摆球序号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
6	测量频率/Hz	0.730	0.800	0.980	1.220	1.720	1.940	2.200	2.46	2.630	3.060	3.13	3.19	3.28	
7	小球个数	劲度系数(N/m)	摆球摆长/m	摆球质量/kg	fs/Hz	fp/Hz	$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$		$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$						
8	15	18.9	0.500	0.148	1.799	0.705									
9															
10	B2) 理论计算固有频率														
11	位置标号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
12	理论频率/Hz	0.705	0.799	1.028	1.316	1.624	1.932	2.229	2.508	2.764	2.994	3.194	3.361	3.493	
13	相对误差	3.6%	0.2%	-4.6%	-7.3%	5.9%	0.4%	-1.3%	22.0%	-4.9%	2.2%				
14															
15	B3) 测试并验证色散关系														
16	选择频率/Hz														
17	2.2		2.46		3.060		3.13								
18	摆球序号	峰峰值/mV	摆球序号	峰峰值/mV	摆球序号	峰峰值/mV	摆球序号	峰峰值/mV							
19	1	-380	1	88	1	-280	1	-100							
20	2	-356	2	116	2	460	2	192							
21	3	264	3	-160	3	-296	3	-300							
22	4	368	4	-136	4	160	4	272							
23	5	-184	5	124	5	88	5	-376							
24	6	-444	6	60	6	-164	6	272							
25	7	68	7	-196	7	340	7	-144							
26	8	432	8	-48	8	-348	8	-68							
27	9	-60	9	172	9	192	9	176							
28	10	-440	10	-92	10	76	10	-256							
29	11	-204	11	-200	11	-280	11	176							
30	12	404	12	80	12	348	12	-336							
31	13	256	13	136	13	-496	13	148							

图7 原始数据截图1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
33	三角函数拟合结果											
34	波矢 k	1.481	1.714	2.534	2.702							
35												
36	X	1.820648603	2.285429443	3.642049464	3.809850186	$Y = \omega^2 = \omega_p^2 + 4\omega_s^2 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right) = \omega_s^2 \cdot X + \omega_p^2$						
37	Y	4.84	6.0516	9.3636	9.7969							
38	线性拟合	b0	b1	fs/Hz	fp/Hz	Δfp	Δfs					
39		2.476952618	0.355884222	0.596560325	1.573833733	-15.3%	-12.5%					
40												
41	C) 耦合摆的通带以及带外频率的波振动特性											
42	选取频率Y/Hz	摆球序号	峰峰值/mV	峰值对数	线性拟合							
43	0.66	1	784	2.894316063	b0	b1						
44		2	616	2.789580712	-0.089881568	2.95241313						
45		3	524	2.719331287	$A = A_0 \cdot e^{-cn}$							
46		4	324	2.51054501								
47		5	296	2.471291711								
48		6	244	2.387389826								
49		7	200	2.301029996								
50		8	184	2.264817823								
51		9	168	2.225309282								
52		10	104	2.017033339								
53												

图8 原始数据截图2