逆元

心算从整数 $[1, 7]$ 里枚举，发现 $2 \times 4 \bmod 7 = 1$ ，所以是 4，直接输出即可，参考代码：

参考代码：

```
cout << 4;
```

取模

注意 p 不是质数，所以不能用快速幂算法，只能用 exgcd 来算。

注意 $-10^{18} \le y \le 10^{18}$ ，所以取模后的 x 直接与之乘除会炸 `long long` ，同时考虑到 y 是负数，应当考虑先进行变换，将其转换成 $[0, p)$ 的正整数， `y = (y % p + p) % p` ，注意不能直接来个 `abs` 再转，例如，显然 $1 \bmod 7$ 和 $-1 \bmod 7$ 是两个不一样的结果。

参考代码：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll t, p, c, y, x, iy, z;
void exgcd(ll a, ll b, ll &x, ll &y)
{
    if (b == 0)
    {
        x = 1, y = 0;
        return;
    }
    exgcd(b, a % b, y, x);
    y -= a / b * x;
}
signed main()
{
    cin >> t >> p;
    while (t--)
    {
        cin >> c >> y;
        y = (y % p + p) % p;
        if (c == 1)
        {
            x = (x + y) % p;
        }
        else if (c == 2)
        {
            x = (x - y + p) % p;
        }
        else if (c == 3)
        {
            x = x * y % p;
        }
```

```cpp
        else if (c == 4)
        {
            exgcd(y, p, iy, z);
            x = x * ((iy % p + p) % p) % p;
        }
        cout << x << endl;
    }
    return 0;
}
```

登神长阶

> 这题作为签到题，赛时喜提八千多份提交只有一千多份通过，原因基本是审题失误

首先注意题面的递推是分钟，而输入是秒。

考虑到这个事实之后，最大分钟为 1.6×10^6 ，可以直接按题意进行递推，则：

时间复杂度为 $\mathrm{O}(n)$ ，如果递推结果都存储，空间复杂度为 $\mathrm{O}(n)$ ， `long long` 要 $13\ MB$

参考代码：

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll t, dp[1666670];
signed main()
{
    cin >> t;
    t /= 60;
    dp[1] = dp[2] = dp[3] = 1;
    for (ll i = 4; i <= t; ++i)
    {
        dp[i] = (dp[i - 1] + dp[i - 2] + dp[i - 3]) % 425;
    }
    cout << dp[t];
    return 0;
}
```

> 当然可以考虑状态压缩等做法将空间复杂度优化为 $\mathrm{O}(1)$ ，感兴趣自行尝试

Cute Tree

每次执行 `BuildTree` 构建编号为 id 的节点。需要计算有多少个节点，即求 tot ，即递归次数

> 根据注释里 node which number is id 可以推测出这句话，从而理解到这是一个递归创建节点的函数

观察函数，可知除了最后的一两次，其余情况都执行 `else` 分支，阅读伪代码可知该分支将 $[L, R]$ 分为平均三段继续递归，设 $n = len(L, R)$ ，递归次数为 $T(n)$ ，即 $T(n) \approx 1 + 3T(\frac{n}{3})$ 。(注意不是求时间复杂度，所以可以忽略下面的 `for` ，因为不影响递归次数)

由主定理，$a=b=3,k=0$，所以求得 $\mathrm{O}(T(n))=\mathrm{O}(n)$，虽然这不是递归次数的精确结果，但是说明了求递归次数可以在 $\mathrm{O}(n)$ 内完成。所以可以直接写函数模拟求解过程，那么总时间复杂度为 $\mathrm{O}(nk)$，只求递归次数可以忽略 a 数组，故空间复杂度为 $\mathrm{O}(1)$，可以过题。

参考代码：

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll t, n, a, ans;
void build(ll l, ll r)
{
    ++ans;
    if (l == r)
    {
        return;
    }
    if (r - l == 1)
    {
        build(l, l);
        build(r, r);
    }
    else
    {
        ll b = l + ceil(1.0 * (r - l) / 3) - 1; //注意1.0
        // ll b = l + (r - l + 3 - 1) / 3 - 1; //写法二
        ll c = (b + r) / 2;
        build(l, b);
        build(b + 1, c);
        build(c + 1, r);
    }
}
signed main()
{
    scanf("%lld", &t);
    while (t--)
    {
        scanf("%lld", &n);
        for (ll i = 0; i < n; ++i)
        {
            scanf("%lld", &a);
        }
        ans = 0;
        build(1, n);
        printf("%lld\n", ans);
    }
    return 0;
}
```

变换

由于 $y\le 10^{18}$，显然不能直接递推。只有 $\mathrm{O}(t)$ 或 $\mathrm{O}(t\log y)$ 可以过题。

找规律，发现变换的周期性为 3。可以求出三项的具体表达式，或直接 `for` 不大于三次均可。那么时间复杂度 $\mathrm{O}(t)$，空间复杂度 $\mathrm{O}(1)$。

输出的精度的意思即为相对误差、绝对误差里较大的一项小于 10^{-9} ，`double` 即可。

参考代码：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
ll t, x, y;
signed main()
{
    cin >> t;
    while (t--)
    {
        cin >> x >> y;
        double r = x;
        for (ll i = 0; i < y % 3; ++i)
        {
            r = 1.0 / (1 - r);
        }
        printf("%.12lf\n", r);
    }
    return 0;
}
```

函数

求幂的复杂度为 $\mathrm{O}(n)$ 或 $\mathrm{O}(\log n)$ (快速幂)。暂不考虑快速幂，那么每次计算 f 的复杂度为 $\mathrm{O}(n^2)$ ，暴力计算计算一次就会超时， t 次更为 $\mathrm{O}(tn^2)$。即便考虑，从头开始计算一次 $\mathrm{O}(n\log n)$ ，计算 t 次是 $\mathrm{O}(tn\log n)$ 仍然会超时。考虑优化 f 。

注意到从头计算 $f(x)$ 的时候，必然已经计算出了所有 $1\le i\le x, f(i)$ ，所以计算一次 $f(n)$ ，原理上可以得到所有可能的 $1\le i\le n, f(i)$ ，预处理起来，则记忆化复杂度为 $\mathrm{O}(n^2)$ 或 $\mathrm{O}(n\log n)$(快速幂)。询问复杂度会优化为 $\mathrm{O}(1)$ 一次，共 $\mathrm{O}(t)$ ，总复杂度为 $\mathrm{O}(t+n^2)$ 或 $\mathrm{O}(t+n\log n)$(快速幂)。

相似地，可以对幂进行预处理，使得每次计算 f 里幂的复杂度是 $\mathrm{O}(1)$ ，从而记忆化幂复杂度为 $\mathrm{O}(n)$ ，此后用 $\mathrm{O}(n)$ 预处理 f ，此后用 $\mathrm{O}(t)$ 输出预处理结果。总时间复杂度为 $\mathrm{O}(n+n+t)=\mathrm{O}(n)$ ，空间复杂度为 $\mathrm{O}(2n)=\mathrm{O}(n)$ ，可以过题。

参考代码：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
#define mn 100010
ll p = (114514 * (54 - 1 + 114 * (1 + 14 * 5 + 1 + 4))) + (4 + 11451 * (4 - 1 - 15 + 14)) + (11 + 41 * 54 + (141 + 541)) + (4 - 1 - 15 + 14);
ll n, a[mn], rpow[mn], t, x, f[mn], r = 1437580;
signed main()
{
    cin >> n;
    for (ll i = 1; i <= n; ++i)
    {
        cin >> a[i];
    }
    rpow[0] = 1;
```

```
    for (ll i = 1; i <= n; ++i)
    {
        rpow[i] = rpow[i - 1] * r % p;
    }
    for (ll i = 1; i <= n; ++i)
    {
        f[i] = (f[i - 1] + rpow[i] * a[i]) % p;
    }
    cin >> t;
    while (t--)
    {
        cin >> x;
        cout << f[x] << endl;
    }
    return 0;
}
```

数组

于时间复杂度和空间复杂度而言，都不可以直接预处理整个数组，达到了 $\mathrm{O}(nm+t)$ 。

不预处理的话， t 次询问也需要 $\mathrm{O}(t(n+m))$。所以需要用较优的复杂度处理每次询问。

为了方便，可以先预处理第一列，耗费时空复杂度 $\mathrm{O}(n)$ ，得到所有 $a_{i,1}$。

接下来化简第三个数组性质：$a_{i,j}=q\cdot a_{i,j-1}+p$

设 $b_j=a_{i,j}-C$ ，构造 $b_j=qb_{j-1}$ ，代入得： $C=\dfrac{p}{1-q}$

显然 $b_1=a_{i,1}-\dfrac{p}{1-q}$ ，则由等比数列第 n 项，有 $b_j=q^{j-1}b_1$ ，即：

$$a_{i,j}=q^{j-1}(a_{i,1}-C)+C$$

C 用逆元处理，特别注意若 $q=1$ 时，分母为零，此时是常数列，显然 $a_{i,j}=a_{i,j-1}+p$ 有：

$$a_{i,j}=a_{i,j-1}+p=a_{i,j-2}+p+p=\cdots=a_{i,1}+(j-1)p$$

参考代码：

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
#define mn 100010
ll n, m, p, q, a[mn], mod = 1e9 + 7, t, x, y, c, qn[mn];
ll qpow(ll a, ll b)
{
    ll r = 1;
    for (; b > 0; b >>= 1)
    {
        if (b & 1)
        {
            r = r * a % mod;
        }
        a = a * a % mod;
    }
    return r;
```

```
}
signed main()
{
    cin >> n >> m >> p >> q >> t;
    a[1] = 1, qn[0] = 1;
    c = p * qpow(1 - q + mod, mod - 2) % mod;
    for (ll i = 2; i <= n; ++i)
    {
        a[i] = (p * a[i - 1] + q) % mod;
    }
    for (ll i = 1; i <= m; ++i)
    {
        qn[i] = qn[i - 1] * q % mod;
    }
    while (t--)
    {
        cin >> x >> y;
        if (q != 1)
        {
            cout << ((a[x] - c + mod) * qn[y - 1] % mod + c) % mod << endl;
        }
        else
        {
            cout << (a[x] + (y - 1) * p) % mod << endl;
        }
    }
    return 0;
}
```

> 其实第一维也可以用类似的方法来优化，那么在不开高精度下，理论上可以做 $1 \le n, m \le 10^{18}, 1 \le t \le 10^7$，感兴趣可自行尝试。
>
> 也可以用等比数列前 n 项和来推，即 $a_n = S_n - S_{n-1}$，但显然不如上面的做法精简

下面是课后习题，建议在充分独立思考后再看题解 ovo

Cook pancakes!

> XCPC 签到题就是这样的题目。(有可能简单一些，也有可能难一些)

暴力枚举所有情况的话，可能会达到指数复杂度，而且实现起来非常麻烦。考虑数学推理。

可以把双面饼拆分成两个单面饼，即有 $2n$ 个单面饼，每秒可以烤 k 个。特别注意一张双面饼最少也要烤 2 次，所以答案应该是：$\max(2, \lceil \frac{2n}{k} \rceil)$

参考代码：

```
printf("%lld", max(2ll, (n * 2 + k - 1) / k)); //max两参数类型必须一致
```

Fall with Trees

> XCPC 第二、第三题难度。

答案是一个三角形加上 $k-2$ 个等腰梯形的面积。$t \le 2\times 10^5, k \le 10^4$ ，如果暴力计算面积和，复杂度为 $\mathrm{O}(tk)$ 会超时，考虑将计算面积和用数列优化为 $\mathrm{O}(t)$ 。

设 $h=|y_{lson}-y_{root}|, d=|x_{rson}-x_{lson}|$ ，设第 i 层的 x 跨度为 x_i ，即求：

$$S=\frac{1}{2}hd+\sum_{i=2}^{k-1}\frac{(x_i+x_{i+1})\times h}{2}$$

设每层的增幅为 Δ ，有 $\Delta_2=d$ ， $n\ge 3, \Delta_n=\frac{1}{2}\Delta_{n-1}$ ，则有 $x_n=x_{n-1}+\Delta_n$

显然 $x_1=0, x_2=d, x\ge 3$ 时，有：

$$x_n=x_{n-1}+\Delta_n=x_{n-2}+\Delta_{n-1}+\Delta_n=\cdots=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i$$

$$n\ge 2, x_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)\cdot d$$

故：

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}hd+\frac{h}{2}(x_2+x_3+x_3+x_4+\cdots+x_{k-1}+x_k)\\
&=\frac{1}{2}hx_2+\frac{h}{2}(x_2+2x_3+2x_4+\cdots+2x_{k-1}+x_k)\\
&=\frac{h}{2}\cdot(2\sum_{i=2}^{k}x_i-x_k)\\
&=h\sum_{i=2}^{k}x_i-\frac{x_kh}{2}
\end{aligned}$$

进一步化简：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k}x_i&=2d(k-1)-d\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\\
\sum_{i=2}^{k}x_i&=2d(k-1)-4d\sum_{i=2}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\\
&=2d(k-1)-4d\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}-\sum_{i=1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\right)\\
&=2d(k-1)-4d(1-0.5^k-(1-0.5^1))
\end{aligned}$$

到这里已经是 $\mathrm{O}(t)$ 的复杂度了，为避免化简导致手算错误，可以不继续化简。代回原式即可：

$$S=h\cdot(2d(k-1)-4d(1-0.5^k-(1-0.5^1)))-\frac{h}{2}\cdot\left(2-(0.5)^{k-2}\right)\cdot d$$

参考代码：

```
ll t, k, xp, yp, xl, yl, xr, yr;
db h, d, s;
signed main()
{
    sc(t);
    while (t--)
    {
        sc(k), sc(xp), sc(yp), sc(xl), sc(yl), sc(xr), sc(yr);
        h = abs(yp - yl), d = abs(xr - xl);
```

```
        s = h * (2.0 * d * (k - 1.0) - 4.0 * d * (1.0 - pow(0.5, k) - (1.0 - 0.5))) - h / 2.0 * (2.0 - pow(0.5, k - 2)) * d;
        printf("%.3lf\n", s);
    }
    return 0;
}
```

Banzhuan

> XCPC 第二、第三题难度。

题意：~~学霸题，数正方体，~~可花费 xy^2z 在 (x,y,z) 放一个方块，如果它底下没有方块，它将竖直下落。求使得三视图（正、左、俯）都铺满 $n\times n$ 的最大最小花费。

都开到 $n\le 10^{18}$ 了，显然也是一道数学推导题目了。注意重力轴是 z 不是 y 。

最大花费很显然，从最高一层放正方体，让其往下掉到填满。答案为：

$$\max = n\times\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy^2n$$

设 $s_1=\sum_{i=1}^n i=\dfrac{n(n+1)}{2}, s_2=\sum_{i=1}^n i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，

显然可以拆分，得：$\max = n^2s_1s_2$

最小花费比较复杂，这时候可以容易想到 x,y,z 越小越划算，

所以可以在最底面放一层满足俯视图，即放置：

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{n}xy^2\cdot 1=s_1s_2$$

然后在平面 $x=1$ 放一层满足左视图，即放置：

$$\sum_{y=1}^{n}\sum_{z=1}^{n}1\cdot y^2\cdot z=s_1s_2$$

减去重叠部分，即 $y=z=1, 1\le x\le n$ ，即减去：

$$\sum_{x=1}^{n}x\cdot 1\cdot 1=s_1$$

然后在平面 $y=1$ 放一层满足正视图，即放置：

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{z=1}^{n}x\cdot 1\cdot z=s_1^2$$

减去与两个面的重叠部分，即 $x=y=1, 1\le z\le n, x=z=1, 1\le y\le n$ ，即减去：

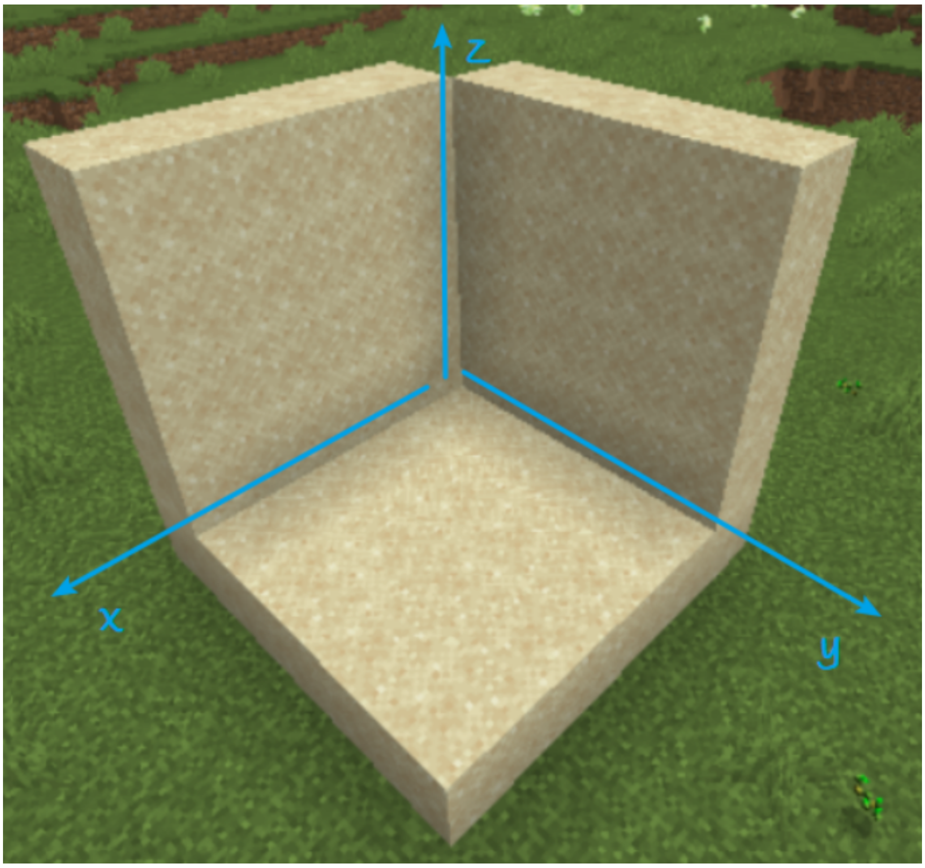
$$\sum_{z=1}^{n}1\cdot 1\cdot z+\sum_{y=1}^{n}1\cdot y^2\cdot 1=s_1+s_2$$

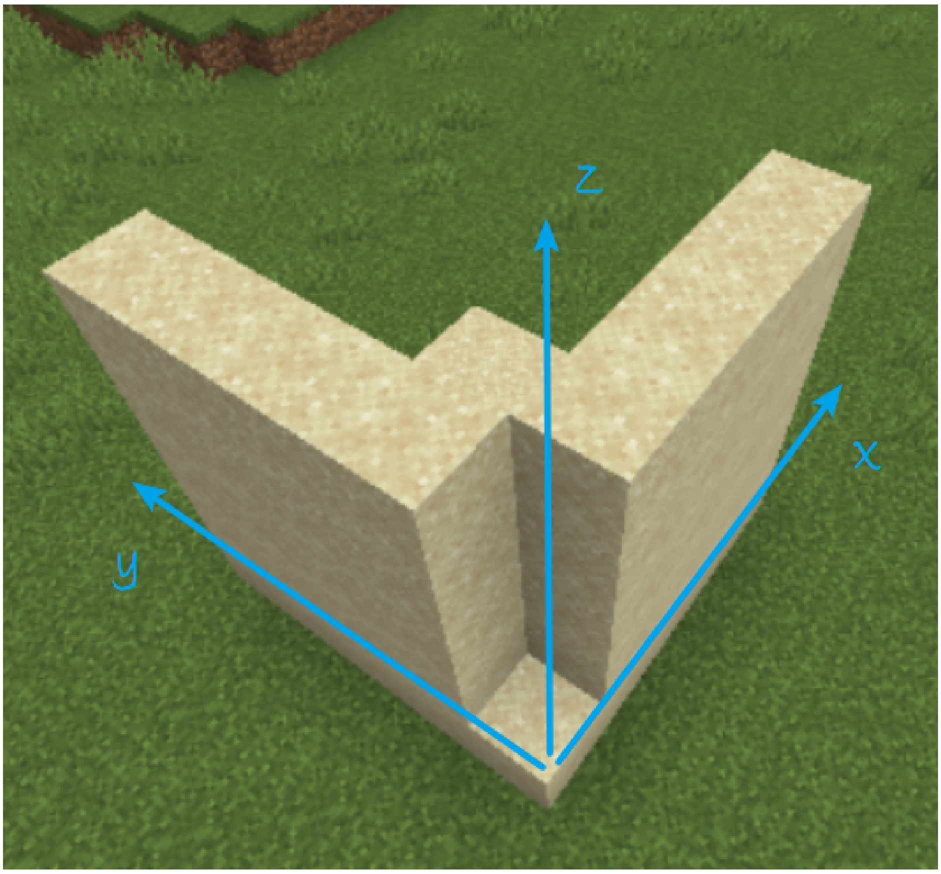
注意到 $(1,1,1)$ 放置了 1 次，减去了 3 次，所以再补放置 3 次 $(1,1,1)$ ，即放置：3

发现 $x=y=1, 2\le z\le n$ 的这个角落高度柱子删去之后也不会影响三视图，即删去：

$$\sum_{i=2}^{n} 1 \cdot 1 \cdot z = s_1 - 1$$

最后的立体几何体形状大致如图所示：(以 $n = 5$ 为例，展示前后视角)





答案为：

$$\min = 2s_1s_2 + s_1^2 - s_2 - 3s_1 + 3 - 1$$

注意除以 $2,6$ 需要逆元，可以用各种办法算出来。时间复杂度为 $\mathrm{O}(T)$ 。

参考代码：

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
#define sc(x) scanf("%lld", &x)
#define il inline
ll t, n, mod = 1e9 + 7, mi, mx, s1, s2;
ll inv2 = 500000004, inv6 = 166666668;
signed main()
{
    sc(t);
    while (t--)
    {
        sc(n);
        n %= mod;
        s1 = n * (n + 1) % mod * inv2 % mod;
        s2 = n * (n + 1) % mod * (2 * n % mod + 1) % mod * inv6 % mod;
        mi = s1 * s2 % mod * 2 % mod + s1 * s1 % mod;
        mi = (mi + mod - s2 + mod - s1 + mod - s1 + 2 + mod - s1) % mod;
        mx = n * s1 % mod * s2 % mod * n % mod;
        printf("%lld\n%lld\n", mi % mod, mx % mod);
    }
    return 0;
}
```