

# 2022CS杯预选赛 (重现)

## 试题册

软件协会

## 题目列表

$A \oplus B$  问题

养秋

01trie上动态点分治

选数

可持久化线段树分治

数位和

**重要提示** Java 和 Python 程序在题目所标时间空间限制基础上有 2 秒的额外运行时间和 64 MB 的额外空间

# A. $A \oplus B$ 问题

1 秒, 256 MB

求  $\sum_{i=0}^n i \oplus x \pmod p$ , 其中  $\oplus$  是异或, 质数  $p = 10^9 + 7$ 。

## 输入

输入一行两个整数  $n, x (1 \leq n, x \leq 10^{12})$

## 输出

输出一行一个整数, 代表你的答案

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
4 5	23

## 说明

定义两个整数的异或  $a \oplus b$  为先将  $a, b$  转化为二进制, 然后对每一位, 若  $a, b$  该位不同则该位结果为 1, 否则为 0, 各位都这么操作后得到结果。如  $3 \oplus 5 = (011)_2 \oplus (101)_2 = (110)_2 = 6$ 。

对样例,  $(0 \oplus 5) + (1 \oplus 5) + (2 \oplus 5) + (3 \oplus 5) + (4 \oplus 5) = 5 + 4 + 7 + 6 + 1 = 23$ , 而  $23 \bmod p = 23$ 。

## B. 养秋

1 秒, 256 MB

你喜欢秋天吗？这是一个既充满希望，又充满绝望的季节呢。真是奇妙。

有一种神奇的理财产品，名为秋姐妹。秋的买入的价格随着买入的数量而变化。初始价格为 11 蓝点。设当前已经购买了  $n$  个秋，涨价系数为  $c$ ，则下一个秋的价格为  $\lfloor 11c^n \rfloor$  蓝点，其中  $\lfloor x \rfloor$  代表  $x$  的下取整。且每购买 25 个秋价格会翻一番，即满足性质  $11c^{25+n} = 2 \times 11c^n$ 。

一共有 23 天。初始资金为 25 蓝点。在第  $n$  天结束前，你将获得基础蓝点数为  $f_n$ ，有：

$$f_n = \begin{cases} 20, & 1 \leq n \leq 6 \\ 35, & 7 \leq n \leq 12 \\ 50, & 13 \leq n \leq 18 \\ 80, & 19 \leq n \leq 23 \end{cases}$$

每天刚开始时，你可以选择购入任意数量的秋(只要蓝点足够)，从当天开始，购入的秋每天结束前都会产出 1 蓝点收益；即设这天结束前你有  $h_n$  个秋，当天秋利润为  $h_n$ 。

此外，每天会有特殊事件，使得当天蓝点变动为  $g_n$ ，故第  $n$  天的总收入为  $f_n + g_n + h_n$ 。

每天获取收益后，可以选择卖出任意数量秋。卖出的秋在以后的天数不再带来理财收入，为简单起见，规定每卖出一个秋能获得 6 蓝点。

定义总利润为在这 23 天里秋的秋的总产出减去购入秋的总成本(如果卖出了秋，卖秋所得蓝点也算入利润)。

给定  $g_n$ ，请你设计一个方案，使得总利润最大，输出最大的利润。

### 输入

输入一行 23 个整数，第  $i$  个整数代表  $a_i(-f_i \leq g_i \leq 10^8)$ 。

### 输出

输出一行一个整数，代表最大的利润。

### 样例

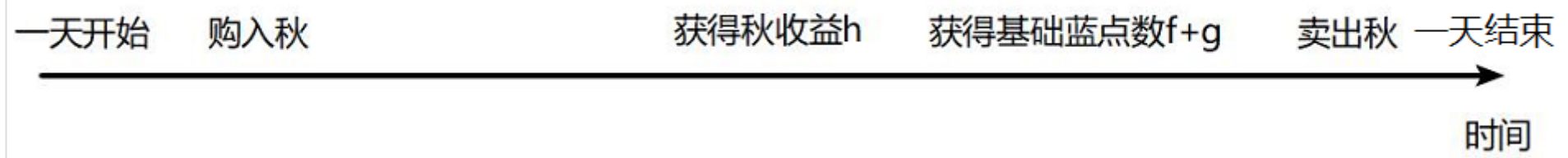
样例输入 1	样例输出 1
-20 -20 -20 -20 -20 -20 -35 -35 -35 -35 -35 -35 -50 -50 -50 -50 -50 -50 -80 -80 -80 -80 -80	70

样例输入 2	样例输出 2
0 0	215

样例输入 3	样例输出 3
7 0 0 0 0 1 25 35 4 4 4 8 8 8 8 55 12 12 12 12 12 12	222

### 说明

每天发生的事件按时间排序可为：



# C. 01trie上动态点分治

2 秒, 256 MB

给定长为  $n$  的数组  $a$ ，下标从 1 计算。给定整数  $k$ 。记  $\oplus$  表示按位异或， $\oplus_{1 \leq j \leq i} a_j$  表示  $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_i$ 。求：

$$\max_{k \leq s \leq n, s \leq r \leq n} \min_{r-s+1 \leq i \leq r} \oplus_{1 \leq j \leq i} a_j$$

即求所有长度至少为  $k$  的区间  $[r-s+1, r]$  里每个区间异或和最小值的最大值。

未经优化的伪代码为：

```
ans = 0;
for (int s = k; s <= n; ++s) {
    min_v = 2e9;
    for (int r = s; r <= n; ++r) {
        for (int i = r - s + 1; i <= r; ++i) {
            xsum = 0;
            for (int j = 1; j <= i; ++j) {
                xsum ^= a[j];
            }
        }
        min_v = min(min_v, xsum);
    }
    ans = max(ans, min_v);
}
```

## 输入

输入一行两个整数  $n, k (2 \leq n \leq 2 \times 10^6, 2 \leq k \leq n)$ 。

接下来输入一行  $n$  个整数，第  $i$  个整数代表  $a_i (0 \leq a_i \leq 10^9)$ 。

## 输出

输出一行一个整数，代表答案。

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
8 2 0 1 1 2 6 5 2 7	4

## D. 选数

2 秒, 256 MB

给定长为  $n$  的随机序列  $a$ ，下标从 0 开始。给定随机数种子  $seed$ ，则  $a$  由如下随机算法 C++ 代码生成：(如果你是其他语言选手，请自行实现如下随机算法)

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int maxn = 1e5 + 10;

long long seed, n, a[maxn];

long long nextRand()
{
    static long long x = seed;

    x ^= x << 11;

    x ^= x >> 45;

    x ^= x << 14;

    return (x % n + n) % n;
}

signed main()
{
    cin.tie(0)->ios::sync_with_stdio(false);

    cin >> n >> seed;

    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        a[i] = nextRand();
    }

    return 0;
}
```

记  $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \oplus (x \times i) \pmod n$ 。其中  $\oplus$  是异或运算。请从  $[0, n)$  里选择两个不同的数  $u, v$ ，使得  $f(u) = f(v)$ 。

### 输入

输入一行两个整数  $n, seed(3 \leq n \leq 10^5, 1 \leq seed \leq 10^9)$ 。保证至少有一个解。

### 输出

输出一行两个整数  $u, v(0 \leq u, v < n, u \neq v)$ 。

如果有多个解，输出任意一个即可。

### 样例

样例输入 1	样例输出 1
5 1919810	0 2

### 说明

对样例， $a = (4, 1, 2, 0, 0)$ 。计算得： $f(0) = 2, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 1, f(4) = 2$ ，选择方案有  $(0, 2), (0, 4), (2, 4), (1, 3)$  四种。

题目不保证  $f(x)$  一定能以低于  $O(n)$  的复杂度计算，请不要尝试化简或加速  $f(x)$  的运算。

## E. 可持久化线段树分治

2 秒, 256 MB

有  $n$  个人坐成一排开会，编号从 1 到  $n$ ，第  $i$  个人基础能力是  $a_i$ 。第  $i$  个人与第  $i - 1$  个人的沟通速率为  $b_i$ 。区间在  $[l, r], l < r$  的人可以组成讨论组，若讨论组内沟通速率均不小于  $k$ ，即  $b_{l+1}, b_{l+2}, \dots, b_r \geq k$ ，则该讨论组的等级是  $k$ 。在讨论组内任选两个人  $u, v$ ，他们的贡献是  $a_u a_v$ ，则该讨论组的贡献是最大的  $a_u a_v$ 。

有  $n$  个询问，每次问对给定的等级  $x$ ，能成立多少个至少  $x$  级的讨论组，以及所有这些讨论组里，贡献最大的组贡献是多少。

### 输入

输入一行一个整数  $n(1 \leq n \leq 10^6)$ 。

接下来输入一行  $n$  个整数，第  $i$  个整数代表  $a_i(|a_i| \leq 10^9)$ 。

接下来输入一行  $n - 1$  个整数，第  $i$  个整数  $b_{i+1}(1 \leq b_{i+1} < n)$  且保证  $b$  值域连续，即若存在某个  $b_j = c$ ，则对所有  $1 \leq c' < c$  必然存在至少一个整数  $b_k = c'$ 。

### 输出

输出  $n$  行，第  $i$  行输出两个整数，为等级  $i$  的讨论组数目和等级  $i$  的最大贡献讨论组的贡献值。

### 样例

样例输入 1	样例输出 1
10 7 4 8 3 4 4 7 1 9 2 2 3 2 1 1 3 2 1 3	45 72 10 56 3 32 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

样例输入 2	样例输出 2
12 -12 9 -6 3 -10 7 -4 1 11 -8 5 -2 2 5 8 2 4 7 10 1 3 6 9	66 120 34 120 15 55 12 40 9 27 7 16 5 7 3 -4 2 -4 1 -4 0 0 0 0

### 说明

对样例一：

对  $x = 3$ ，有且仅有讨论组  $[2, 3], [6, 7], [9, 10]$ ，故有 3 个讨论组，且最大贡献在  $[2, 3]$  取得，为  $4 \times 8 = 32$ 。

对  $x = 2$ ，有讨论组  $[1, 2], [1, 3], [1, 4], [2, 3], [2, 4], [3, 4], [6, 7], [6, 8], [7, 8], [9, 10]$ ，共 10 个，最大值可以在讨论组  $[1, 3]$  取得  $7 \times 8 = 56$ ，也可以在  $[1, 4]$  取得。

对  $x = 1$ ，所有  $C_n^2 = 45$  个讨论组都可行，最大值为  $8 \times 9 = 72$ 。



## F. 数位和

1 秒, 256 MB

对于一个  $n$  位十进制正整数  $x = \overline{x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1}$ , 定义其数位和为  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ 。例如  $f(114514) = 1 + 1 + 4 + 5 + 1 + 4 = 16$ 。设  $k$  阶数位和为  $f^k(x) = f^{k-1}(f(x)), k > 1$ 。

给定  $n, x, k$ , 求  $f^k(x)$ 。

### 输入

输入一行两个整数  $n, k (1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq k \leq 2^{31} - 1)$ 。

输入第二行一个整数  $x (10^{n-1} \leq x \leq 10^n - 1)$ 。

### 输出

输出一行一个整数代表你的答案。

### 样例

样例输入 1	样例输出 1
6 1 114514	16

样例输入 2	样例输出 2
6 2 114514	7

### 说明

注意  $x$  很大, 请使用正确的方式输入、存储和输出。

对样例,  $f(114514) = 1 + 1 + 4 + 5 + 1 + 4 = 16, f^2(114514) = f(f(114514)) = f(16) = 1 + 6 = 7$ 。