

# 第十七次课 (随机算法与博弈论)

## 试题册

软件协会

## 题目列表

- 随机
- 锦乐寻宝
- 猜一猜
- 函数2
- 珂朵莉树
- 骗红包
- 灭鼠先锋 II
- 巴什博弈
- 锦乐游戏
- 取石子游戏
- 异世界的人偶训练
- 云烟蓝星对决(30分)
- 高僧斗法

**重要提示** Java 和 Python 程序在题目所标时间空间限制基础上有 2 秒的额外运行时间和 64 MB 的额外空间

# A. 随机

1 秒, 256 MB

输入

输出

你可以输出任意字符

# B. 锦乐寻宝

1 秒, 128 MB

锦乐发现在地点  $A, B$  里其中一个地点有初始价值为 1437 的宝藏。因为受到自然侵蚀，所以宝藏每天减少 10 的价值。锦乐可以瞬间到达  $A, B$  其中一个地方，但是每个地方都需要挖掘 5 天的时间才能知道究竟有没有宝藏，锦乐每天只能挖掘一个地方。此外，锦乐有一张未解地图，如果解出来就可以知道宝藏究竟在  $A$  还是在  $B$ 。锦乐可以独自一人破译地图，那么花费 4 天就知道宝藏正确位置。如果锦乐某天破译地图，那这天他不能选择挖掘。

请问如果锦乐选取最优方案，那么他挖掘到宝藏时期望宝藏的最大价值是多少？请输出整数(如果答案是小数，请四舍五入取整)。

## 输入

## 输出

## C. 猜一猜

1 秒, 128 MB

一般题目不会用到随机化的思想，基本上用到的都是极其玄学的题目。

现有A和B两份代码，他们的代码都会随机出  $10^4$  个数。

```
//A的代码

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

mt19937 rnd(time(0));

// rnd() 随机出来的数范围都是unsigned int

unsigned int ans[10005];

int main()
{
    for (int i = 1; i <= (int)1e4; ++i)
    {
        ans[i] = rnd()|rnd();
    }
    for (int i = 1; i <= (int)1e4; ++i)
    {
        cout << ans[i] << " ";
    }
    return 0;
}
```

```
//B的代码

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

mt19937 rnd(time(0));

// rnd() 随机出来的数范围都是unsigned int

unsigned int ans[10005];

int main()
{
    for (int i = 1; i <= (int)1e4; ++i)
    {
        ans[i] = rnd()^rnd();
    }
    for (int i = 1; i <= (int)1e4; ++i)
    {
        cout << ans[i] << " ";
    }
    return 0;
}
```

由于意外，他们的代码都删除了，只留下了随机出来的数。现让你判断这些数是A的代码随机出来的还是B的代码随机出来的。

# 输入

输入包含  $10^4$  个 unsigned int 范围的数，每个数用空格隔开。

# 输出

输出  或 ，表示这些数是A的代码随机出来的还是B的代码随机出来的。

# 说明

样例过大，请查看 [这里](#)，该样例的结果为

题目源自 [计院OJ](#)

## D. 函数2

2 秒, 128 MB

给定常数  $a, b, c, d, e, l, r$  , 求下列函数在定义域  $[l, r]$  的最大值:

$$f(x) = \sin(\frac{x}{a}) + \sin(\frac{x}{b}) + \sin(\frac{x}{c}) + \sin(\frac{x}{d}) + \sin(\frac{x}{e})$$

### 输入

输入一行七个整数  $a, b, c, d, e, l, r(1 \leq a, b, c, d, e \leq 10^3, -10^3 \leq l < r \leq 10^3)$

### 输出

输入一行一个实数, 代表函数最大值。你的答案被视作是正确的当且仅当与标准答案绝对误差不超过  $10^{-2}$

### 样例

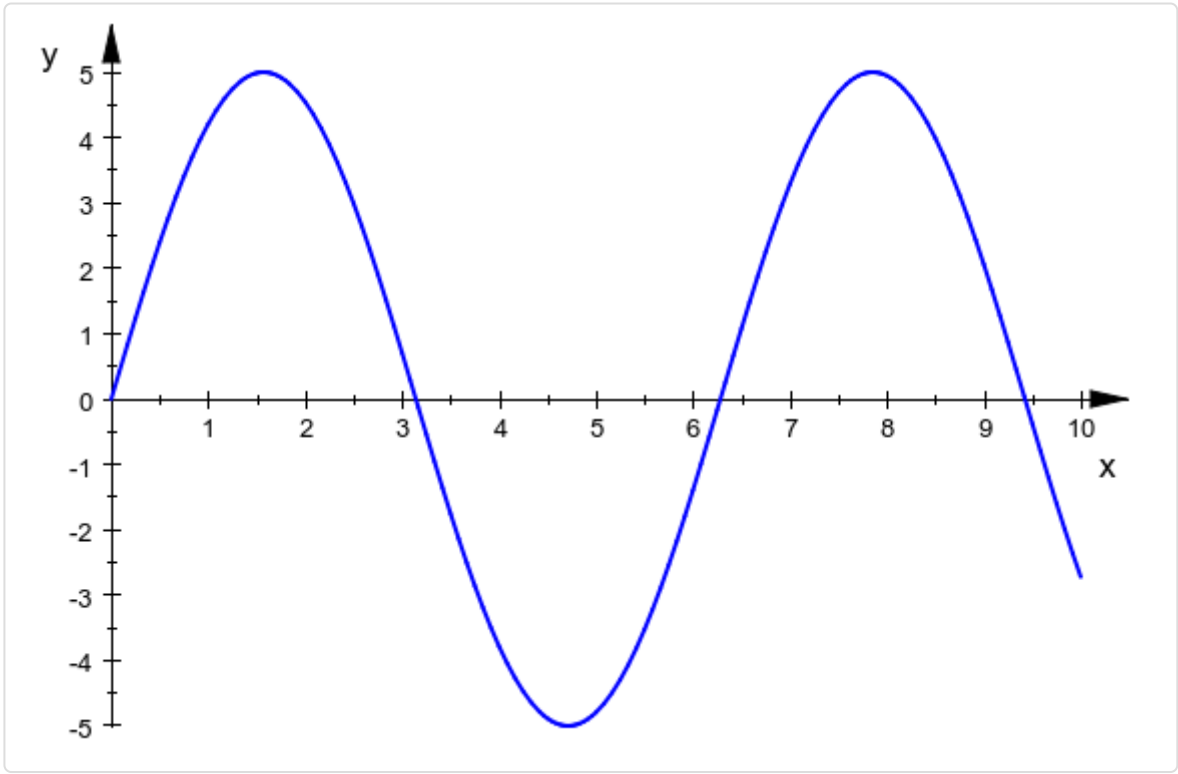
样例输入 1	样例输出 1
1 1 1 1 1 0 10	5

样例输入 2	样例输出 2
1 2 3 4 5 0 58	3.353015

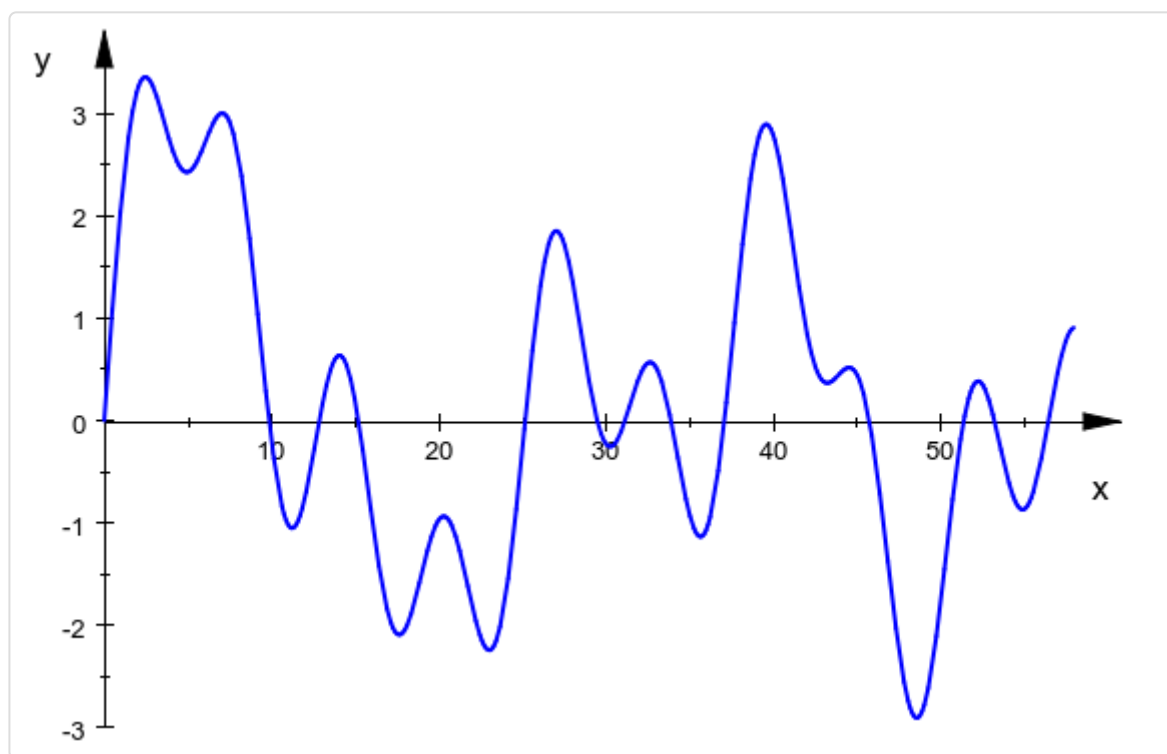
样例输入 3	样例输出 3
1 2 3 68 95 -233 233	4.303793

### 说明

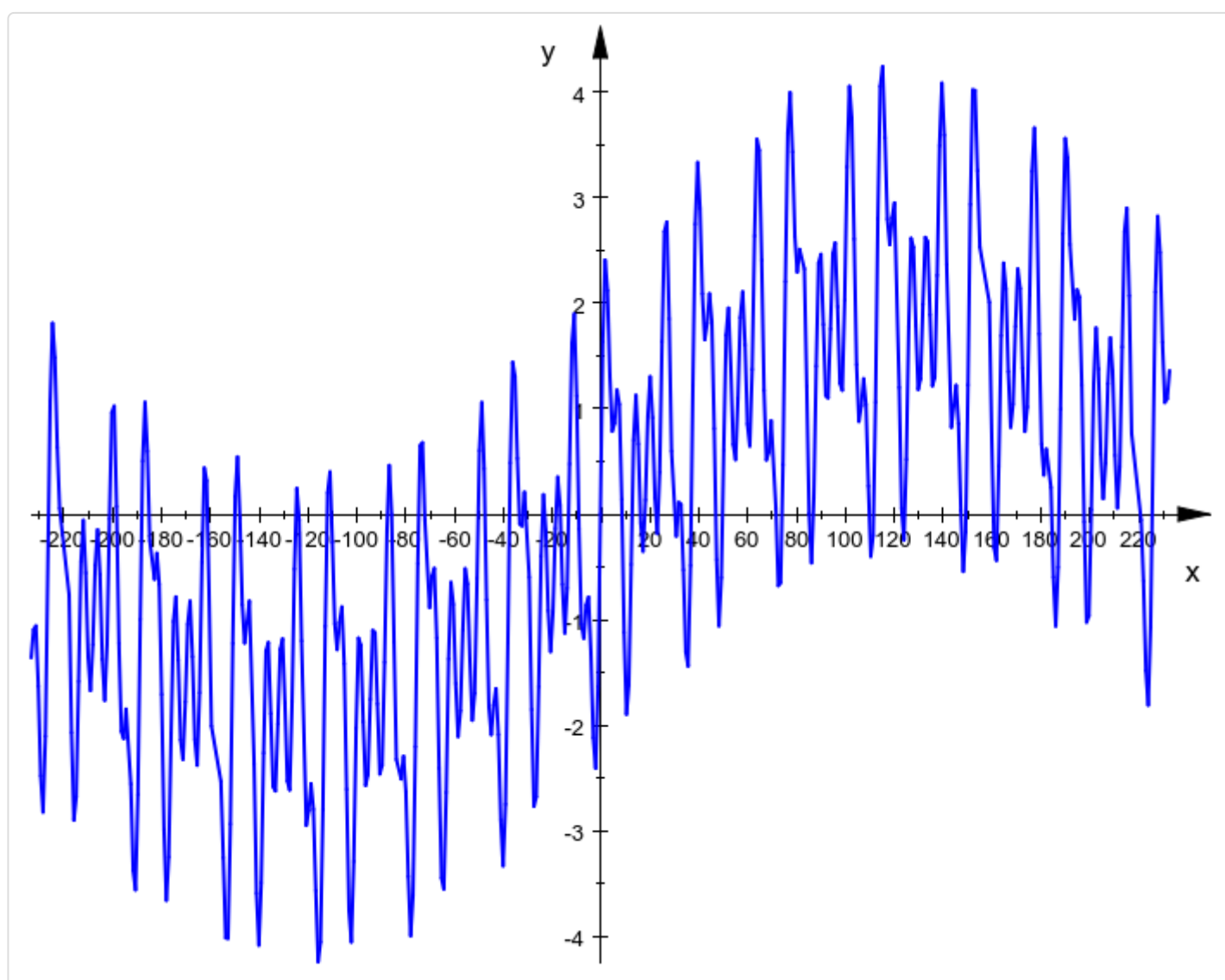
样例 1 :



样例 2 :



样例 3 :



E. 珂朵莉树

1 秒, 128 MB



高指标!瞎指挥!虚报风!浮夸风!



这是哪里来的弱智



为什么要给我看这个







珂朵莉树就是由若干珂朵莉作为节点构成的树！（逃

你有一个长度为  $n$  的序列，下标从 1 开始，一开始每个数都是 1236895，你需要维护  $m$  次下列操作：

- 1.  $1\ l\ r\ x$  将区间  $[l, r]$  的每个值都设为  $x$
- 2.  $2\ l\ r\ x$  将区间  $[l, r]$  的每个值都加上  $x$
- 3.  $3\ l\ r$  查询区间  $[l, r]$  的值之和

## 输入

输入一行两个整数  $n, m(1 \leq n, m \leq 10^5)$

接下来输入  $m$  行，每行格式为上面所述三种之一。保证  $1 \leq l \leq r \leq 10^5, 1 \leq x \leq 10^7$ ，保证数据随机。

## 输出

对于每个操作 3，输出一行一个整数代表区间和

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
10 5 3 1 5 1 2 5 114514 2 4 6 1919180 3 5 7 3 1 10	6184475 6426664 13636966

## 说明

修改后的序列为：1236895, 114514, 114514, 2033694, 2033694, 3156075, 1236895, 1236895, 1236895, 1236895

## F. 骗红包

1 秒, 128 MB

zf 每年都会和 zn 玩一个游戏：在 1 到 1000 以内随机选  $n$  个硬币，让 zf 先开始他的回合，然后互相轮转。zn 如果输了就会给 zf  $n$  个硬币。当然是 zf 先开始游戏啦。

在各自的回合中都能执行一次操作：让硬币数变为原来的一半（向下取整）或者减一。谁清除掉最后一枚硬币谁就赢了。

zn 和 zf 都很聪明，每一次都会选择最有利的方式进行操作。

如果进行了 1000 轮游戏，请问 zf 骗到硬币数的期望是多少？

### 输入

无。

### 输出

输出 1000 轮游戏后 zf 骗到硬币数的期望。

# G. 灭鼠先锋 II

2 秒, 128 MB

灭鼠先锋是一个老少咸宜的棋盘小游戏，由两人参与，轮流操作。

灭鼠先锋的棋盘由  $n$  行  $m$  列组成。游戏规则为：两人轮流操作，每次可选择在棋盘的一个空位上放置一个棋子，或在同一行的连续两个空位上各放置一个棋子，放下棋子后使棋盘放满的一方输掉游戏。

锦乐和桑泽一起玩游戏，锦乐先手，桑泽后手。例如，对两行四列的棋盘，    表示棋盘上的一个方格为空，    表示该方格已经放置了棋子，锦乐可以放置棋子的方法很多，通过旋转和翻转可以对应如下四种情况：

```
X000 XX00 0X00 0XX0
0000 0000 0000 0000
```

两人都是按照对自己最优的策略来玩游戏。给定任意行列的棋盘和棋盘初始状态，请你求出在该状态下**桑泽**是否能获胜。

## 输入

输入一行三个整数  $n, m, t(1 \leq n, m, n \times m \leq 20, 1 \leq t \leq 10^4)$ ，代表棋盘行数、列数和询问个数。

接下来有  $t$  个询问，每个询问由  $n$  行，每行  $m$  个字符(字符为大写字母   或   )，代表该询问的棋盘初始状态。

## 输出

对每个询问，输出一行一个字符，若**桑泽**必胜，输出  ，否则输出  。

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
2 4 4 X000 0000 XX00 0000 0X00 0000 0XX0 0000	L L L V

## 说明

本题改编自第十三届蓝桥杯省赛CA真题B题。

# H. 巴什博弈

1 秒, 128 MB

有  $n$  个物品，两人轮流取物，每次至少取一个，最多取  $m$  个，最后取完者胜，两人都采取最优策略，问先手是否必胜

## 输入

输入  $m, n(1 \leq m, n \leq 10^9)$

## 输出

若先手必胜，输出 1，否则输出 0

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
2 6	0

样例输入 2	样例输出 2
3 6	1

# I. 锦乐游戏

1 秒, 128 MB

锦乐创造了一个游戏。一开始有  $n$  个雪球，两人轮流取雪球。若当前还剩  $m$  个雪球，只要满足  $x \in N, x \geq 1, 2^x - 1 \leq m$ ，则当前方可以任选一个  $x$  然后取  $2^x - 1$  个雪球。最后取完雪球者胜。

锦乐先手，桑泽后手。两人都采取最优策略进行游戏。请问谁获胜？

## 输入

输入一行一个整数  $n(1 \leq n \leq 10^9)$ ，代表雪球数

## 输出

若锦乐必胜，输出 `jinle`；否则输出 `sangze`

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
1	jinle

样例输入 2	样例输出 2
2	sangze

样例输入 3	样例输出 3
5	jinle

# J. 取石子游戏

1 秒, 128 MB

桃子和杏子玩取石子游戏，有 $n$ 堆石子，第 $i$ 堆有 $a_i$ 个，她们轮流取石子，桃子先取，她们每次都只能选一堆未取完的石子。然后，桃子可以从这堆石子中取走1或2个石子，而杏子每次只能取走1个石子。谁把最后的石子取完，使得另外一个人没法操作，谁就获得了胜利。两人都在最优策略下取石子，请问最终谁获胜？

## 输入

第一行输入一个数 $T(1 \leq T \leq 20000)$ ，然后会有 $2T$ 行：一行一个数 $n(1 \leq n \leq 100)$ ，代表石子堆数，另一行 $n$ 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，表示每一堆石子的数量( $1 \leq a_i \leq 100$ )。

## 输出

对于每组测试，输出一行，若桃子胜，输出momoko，若杏子胜，输出sakiko。

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
2 2 1 3 2 1 1	momoko sakiko

## 说明

对于第一组，桃子可以先取完第一堆，然后杏子只能从第二堆取走一个，第三步桃子取完石子，桃子胜。

计院 2020CS 杯真题D题

## K. 异世界的人偶训练

10 秒, 128 MB

在果冻的指示下，贤者禾枫创造了大量魔法人偶辅助魔法师工作。为了训练魔法人偶的思考能力，她打算让人偶两两之间进行一种训练，具体如下：

- 有  $n$  种魔法，第  $i$  种魔法的能量为  $a_i$ ，创造耗费为  $b_i$ ，有  $b_i =$  前  $i$  种魔法的集合的所有非空子集的能量和对  $10^9 + 7$  取模，即：

设  $s_i = (a_1, a_2, \dots, a_i), s \subseteq s_i, s \neq \emptyset, |s| = card(s)$  ( $|s|$  是集合元素数)，有：

$$b_i = \sum_s \sum_{j=1}^{|s|} a_j \bmod 10^9 + 7$$

- 设第  $i$  个魔法创造进度为  $c_i$ ，训练一开始时  $\forall 1 \leq i \leq n, c_i = 0$ ，当第  $i$  个魔法创造进度  $c_i = b_i$  时，该魔法创造完成，否则未创造完成
- 每回合其中一个人偶必须进行一次创造。奇数回合进行创造的人偶是先手，偶数回合进行创造的人偶是后手。每次创造必须选择一个未创造完成的魔法  $x$ ，并选择一个正整数  $y(1 \leq y \leq b_x - c_x)$ ，该回合行动的人偶将第  $x$  种魔法的创造进度增加  $y$
- 当某一方完成本回合创造后，若所有魔法均创造完成，则这一方取得训练胜利，另一方训练失败

两个人偶都采取对自己的最优策略进行创造，请问最终谁取得训练的胜利。

由于贤者想让人偶尽可能进行多次训练，所以她想尽可能把总回合数上限设为  $2n$ 。在胜利方不变、且双方仍采取最优策略的前提下，问是否存在回合数不超过  $2n$  的回合情况。

### 输入

输入一行一个整数  $n$ 。

接下来输入一行  $n$  个整数，第  $i$  个整数为  $a_i$ 。

对于 20% 分数的数据， $1 \leq n \leq 2$  且保证生成的  $b_i$  满足  $1 \leq b_i \leq 10$

对于 40% 分数的数据， $1 \leq n \leq 15$

对于 70% 分数的数据， $1 \leq n \leq 10^4$

对于 100% 分数的数据， $1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq a_i < 10^9 + 7$

### 输出

第一行输出一个字符，若先手必胜，输出 `first wins`；若后手必胜，输出 `second wins`

第二行输出一个字符，在你所输出的必胜状态下，若存在一种回合情况，回合数不超过  $2n$ ，输出 `yes`，否则输出 `no`

如果若存在一种回合情况，回合数不超过  $2n$ ，接下来第三行输出一个整数  $t$ ，代表回合数。且接下来输出  $t$  行，第  $3 + i$  行每行两个整数  $x, y$ ，代表在第  $i$  回合，该回合行动的人偶对第  $x$  种魔法贡献创造进度  $y$ 。

### 样例

样例输入 1	样例输出 1
2 1 2	first wins yes 3 2 5 2 1 1 1
样例输入 2	样例输出 2

2	second wins
3 500000002	yes
	2
	2 3
	1 3

说明

对样例一， $i = 1$  时，只有一个非空子集即  $a_1$  自身，故  $b_1 = 1$ ， $i = 2$  时，非空子集有三个： $(a_1), (a_2), (a_1, a_2)$ ，故  $b_2 = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$ 。一种先手必胜的回合情况为先手取  $x = 2, y = 5$ ，后手无论如何都只能取  $y = 1$ ，之后先手再取剩下的即可，回合数为 3。

对样例二， $b_1 = 3, b_2 = (3 + 500000002 + 500000002 + 3) \bmod 10^9 + 7 = 3$ ，可以发现无论先手怎么取，后手都有对应的策略使得后手必胜。一种回合情况为先手取完任意一堆，后手取完剩下的一堆，回合数为 2。

注意样例二不能采用诸如这样的策略： $(1, 3), (2, 1), (2, 1), (2, 1)$ ，这是因为若第二回合后手进行  $(2, 1)$ ；在第三回合，先手若采用对自己的最优策略，可以直接用  $(2, 2)$  取得胜利，从而逆转为胜利；这也意味着第二回合后手不可能是  $(2, 1)$ 。



## L. 云烟蓝星对决(30分)

2 秒, 256 MB

云烟在前往异世界前，拿走了一个最终极之渊的特级遗物。然而，正当云烟全身心搞科研之时，遗物反噬了云烟，他走火入魔并发动了世界魔法，使蓝星上所有生灵陷入昏迷。星月由于是机械猫猫所以躲过一劫。星月用金币砸醒了弥明，因弥明的心灵与金币产生了激烈反应，但星月无法再唤醒其他人。于是，弥明和星月只身前往与云烟对决。与此同时，最终极之渊迎来了周期为两千年的异变.....

世界魔法有  $n$  个魔素源泉，第  $i$  个源泉的能量为  $a_i$ ，占领第  $i$  个源泉需要耗费的魔力  $b_i$  为前  $i$  个源泉组成的集合的所有非空子集的能量和对  $10^9 + 7$  取模。

严谨地说，设  $s_i = (a_1, a_2, \dots, a_i), s \subseteq s_i, s \neq \emptyset, |s| = card(s)$  (即  $|s|$  是集合元素数)，有：

$$b_i = \sum_s \sum_{j=1}^{|s|} a_j \bmod 10^9 + 7$$

云烟和弥明轮流行动，奇数回合行动的为先手，偶数回合行动的为后手。云烟为先手。每回合双方必须选择其中一个魔法源泉  $x$  向其中投入魔力。设第  $i$  个源泉累计被投入了  $c_i$  的魔力。首回合前有  $\forall 1 \leq i \leq n, c_i = 0$ 。设当前回合向源泉  $x$  投入的魔力为  $y$ ，则  $y$  必须满足  $y \in N, 1 \leq y \leq b_x - c_x$ 。当  $c_i = b_i$  时，该源泉被占领。谁占领了最后一个未被占领的源泉，谁就能掌控世界魔法，赢得对决。

在遗物和星月各自对双方的辅助下，云烟、弥明每回合都采取对自己最优的策略进行对决。请问谁最终取得对决的胜利。

由于世界魔法稳定期有限，所以对决必须在  $2n$  回合内分出胜负，否则将带来灾难性的后果。因此，在胜利方不变，且双方仍然采取最优策略的前提下，请问是否存在回合数不超过  $2n$  的回合情况？

### 输入

输入一行一个整数  $n(1 \leq n \leq 10^5)$

接下来输入一行  $n$  个整数，第  $i$  个整数为  $a_i(1 \leq a_i < 10^9 + 7)$ ，代表第  $i$  个源泉的能量

### 输出

第一行输出一个字符串，若先手必胜输出 `first wins`；若后手必胜，输出 `second wins`

第二行输出一个字符串，在你所输出的必胜状态下，若存在一种回合情况，回合数不超过  $2n$ ，输出 `yes`，否则输出 `no`

若存在一种回合情况，回合数不超过  $2n$ ，则第三行输出一个整数  $t$ ，代表回合数；接下来输出  $t$  行，第  $3 + i$  行每行两个整数  $x, y$ ，代表在第  $i$  回合行动的一方对第  $x$  个源泉投入魔力值为  $y$

### 样例

样例输入 1	样例输出 1
2 1 2	first wins yes 3 2 5 2 1 1 1

样例输入 2	样例输出 2
2 3 500000002	second wins yes 2 2 3 1 3

### 说明

对样例一， $i = 1$  时，只有一个非空子集即  $a_1$  自身，故  $b_1 = 1$ ， $i = 2$  时，非空子集有三个： $(a_1), (a_2), (a_1, a_2)$ ，故  $b_2 = 1 + 2 + 1 + 2 = 6$ 。一种先手必胜的回合情况为先手投  $x = 2, y = 5$ ，后手无论如何都只能投  $y = 1$ ，之后先手再投剩下的即可，回合数为 3。

对样例二， $b_1 = 3, b_2 = (3 + 500000002 + 500000002 + 3) \bmod 10^9 + 7 = 3$ ，可以发现无论先手怎么取，后手都有对应的策略使得后手必胜。一种回合情况为先手投第二个源泉 3 魔力，后手投第一个源泉 3 魔力，回合数为 2。

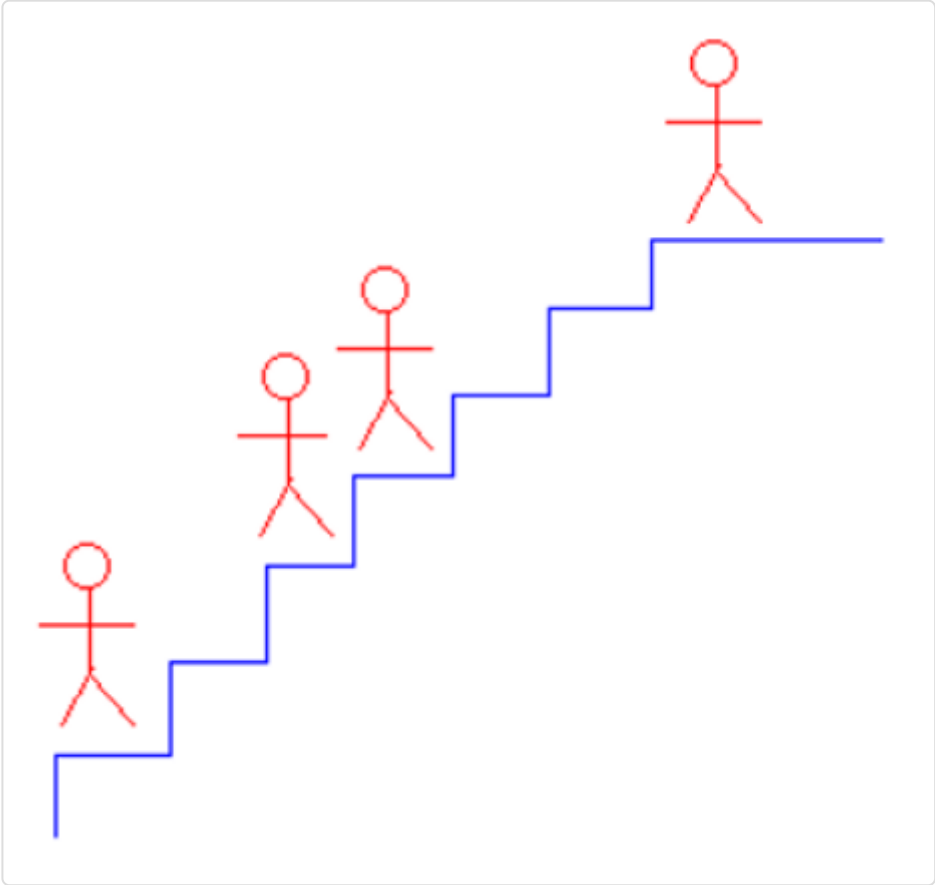
注意样例二不能采用诸如这样的策略： $(1, 3), (2, 1), (2, 1), (2, 1)$ ，这是因为若第二回合后手进行  $(2, 1)$ ；在第三回合，先手若采用对自己的最优策略，可以直接用  $(2, 2)$  取得胜利，从而逆转为胜利；这也意味着第二回合后手不可能是  $(2, 1)$ 。

# M. 高僧斗法

1 秒, 128 MB

古时丧葬活动中经常请高僧做法事。仪式结束后，有时会有“高僧斗法”的趣味节目，以舒缓压抑的气氛。

节目大略步骤为：先用粮食（一般是稻米）在地上“画”出若干级台阶（表示N级浮屠）。又有若干小和尚随机地“站”在某个台阶上。最高一级台阶必须站人，其它任意。（如图1所示）



两位参加游戏的法师分别指挥某个小和尚向上走任意多级的台阶，但会被站在高级台阶上的小和尚阻挡，不能越过。两个小和尚也不能站在同一台阶，也不能向低级台阶移动。

两法师轮流发出指令，最后所有小和尚必然会都挤在高段台阶，再也不能向上移动。轮到哪个法师指挥时无法继续移动，则游戏结束，该法师认输。

对于已知的台阶数和小和尚的分布位置，请你计算先发指令的法师该如何决策才能保证胜出。

## 输入

输入数据为一行用空格分开的N个整数，表示小和尚的位置。台阶序号从1算起，所以最后一个小和尚的位置即是台阶的总数。（N < 100, 台阶总数 < 1000）

## 输出

输出为一行用空格分开的两个整数: A B, 表示把A位置的小和尚移动到B位置。若有多解，输出A值较小的解，若无解则输出-1。

## 样例

样例输入 1	样例输出 1
1 5 9	1 4

样例输入 2	样例输出 2
1 5 8 10	1 3

## 说明

蓝桥杯第四届决赛B组真题

数据非官方数据，官方数据请前往 [这里](#) 交题