Prática 1

Parte 1 – Lógica proposicional

Ejercicio 1

Sean p y q variables proposicionales. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas bien formadas?

1. $(p\neg q)$ **NO.** Falta conector lógico entre p y q
2. $p \vee q \wedge True$ **No.**Falta paréntesis.
3. $(p \rightarrow \neg p \rightarrow q)$ **No.** Faltan paréntesis
4. $\neg(p)$ **No.** No entra en ninguna de las reglas descritas: no es True ó False, no es una variable proposicional a secas. P es una FBF, pero la sintaxis no es la que corresponde según la tercera regla (en todo caso tendría que ser $\neg p$)
5. $(p \vee \neg p \wedge q)$ **No.** Faltan paréntesis.
6. $(True \wedge True \wedge True \wedge \ldots$ **No.**Falta paréntesis que cierren, faltan paréntesis entre conectores lógicos.
7. $(\neg p)$ **No.**p es una FBP, por lo tanto $\neg p$ es una FBF. Pero los paréntesis de afuera están de más.
8. $(p \vee False)$ **Si.**p es una variable proposicional, entoces es FBF. False lo es por la primera regla. La sintaxis cae dentro de la cuarta regla: dos FBF unidas con un conector lógico y cerradas por paréntesis.
9. $(p = q)$ **No.** $=$ no es un conector lógico.

Ejercicio 2

Determine el valor de verdad de las siguientes fórmulas.

a) $(\neg a \vee b)$

1. $(\neg a \vee b) \equiv (\neg True \vee True) \leftrightarrow (False \vee True) \leftrightarrow True$
2. $(\neg a \vee b) \equiv (\neg False \vee False) \leftrightarrow (True \vee False) \leftrightarrow True$

b) $((c \vee (y \wedge x)) \vee b)$

1. $((c \vee (y \wedge x)) \vee b) \equiv ((True \vee (False \wedge False)) \vee True) \leftrightarrow ((True \vee False) \vee True) \leftrightarrow (True \vee True) \leftrightarrow True$
2. $((c \vee (y \wedge x)) \vee b) \equiv ((False \vee (True \wedge True)) \vee False) \leftrightarrow ((False \vee True) \vee False) \leftrightarrow (True \vee False) \leftrightarrow True$

c) $\neg(c \vee y)$

1. $\neg(c \vee y) \equiv \neg(True \vee False) \leftrightarrow \neg True \leftrightarrow False$
2. $\neg(c \vee y) \equiv \neg(False \vee True) \leftrightarrow \neg True \leftrightarrow False$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

1. $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y)) \equiv (\neg(True \vee False) \leftrightarrow (\neg True \wedge \neg False))$
   $\leftrightarrow$
   $(\neg True \leftrightarrow (False \wedge True))$
   $\leftrightarrow$
   $(False \leftrightarrow False)$
   $\leftrightarrow$
   $True$

2. $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y)) \equiv (\neg(False \vee True) \leftrightarrow (\neg False \wedge \neg True))$
   $\leftrightarrow$
   $(\neg True \leftrightarrow (True \wedge False))$
   $\leftrightarrow$
   $(False \leftrightarrow False)$
   $\leftrightarrow$
   $True$

e) $((c \vee y) \wedge (x \vee b))$

1. $((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \equiv ((True \vee False) \wedge (False \vee True)) \leftrightarrow (True \wedge True) \leftrightarrow True$
2. $((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \equiv ((False \vee True) \wedge (True \vee False)) \leftrightarrow (True \wedge True) \leftrightarrow True$

f) $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow ((c \vee (y \wedge x)) \vee b))$

1. $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow ((c \vee (y \wedge x)) \vee b)) \equiv (((True \vee False) \wedge (False \vee True)) \leftrightarrow ((True \vee (False \wedge False)) \vee True))$
   $\leftrightarrow$
   $((True \wedge True) \leftrightarrow ((True \vee False) \vee True))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \leftrightarrow (True \vee True))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \leftrightarrow True)$
   $\leftrightarrow$
   $True$
2. $(((c \vee y) \wedge (x \vee b)) \leftrightarrow ((c \vee (y \wedge x)) \vee b)) \equiv (((False \vee True) \wedge (True \vee False)) \leftrightarrow ((False \vee (True \wedge True)) \vee False))$
   $\leftrightarrow$
   $((True \wedge True) \leftrightarrow ((False \vee True) \vee False))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \leftrightarrow (True \vee False))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \leftrightarrow True)$
   $\leftrightarrow$
   $True$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

1. $(\neg c \wedge \neg y) \equiv (\neg True \wedge \neg False) \leftrightarrow (False \wedge True) \leftrightarrow False$
2. $(\neg c \wedge \neg y) \equiv (\neg False \wedge \neg True) \leftrightarrow (True \wedge False) \leftrightarrow False$

h) $((\neg c \to x) \wedge (y \vee (c \leftrightarrow \neg a)))$

1. $((\neg c \to x) \wedge (y \vee (c \leftrightarrow \neg a))) \equiv ((\neg True \to False) \wedge (False \vee (True \leftrightarrow \neg True)))$
   $\leftrightarrow$
   $((False \to False) \wedge (False \vee (True \leftrightarrow False)))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \wedge (False \vee False))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \wedge False)$
   $\leftrightarrow$
   $False$
2. $((\neg c \to x) \wedge (y \vee (c \leftrightarrow \neg a))) \equiv ((\neg False \to True) \wedge (True \vee (False \leftrightarrow \neg False)))$
   $\leftrightarrow$
   $((True \to True) \wedge (True \vee (False \leftrightarrow True)))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \wedge (True \vee False))$
   $\leftrightarrow$
   $(True \wedge True)$
   $\leftrightarrow$
   $True$

Ejercicio 3

Determine, utilizando tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías,contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$ **TAUTOLOGIA**

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
True	False	True
False	True	True

b) $(p \wedge \neg p)$ **CONTRADICCIÓN**

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
True	False	False
False	True	False

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$ **TAUTOLOGIA**

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$
True	True	False	True	True	True
True	False	False	False	False	True
False	True	True	True	True	True
False	False	True	True	True	True

d) $((p \vee q) \rightarrow p)$ **CONTINGENCIA**

p	q	$p \vee q$	$((p \vee q) \rightarrow p)$
True	True	True	True
True	False	True	True
False	True	True	False
False	False	False	True

e) $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$ **CONTINGENCIA**

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
True	True	True	False	False	True	False
True	False	False	True	False	False	False
False	True	False	True	True	True	True
False	False	False	True	True	True	True

f) $(\neg p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$ **CONTINGENCIA**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
True	True	False	False	False	False	True
True	False	False	True	False	True	False
False	True	True	False	True	True	True
False	False	True	True	False	True	False

g) $(p \rightarrow p)$ **TAUTOLOGIA**

p	$p \rightarrow p$
True	True
False	True

h) $((p \wedge q) \rightarrow p)$ **TAUTOLOGIA**

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
True	True	True	True
True	False	False	True
False	True	False	True
False	False	False	True

i) $((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$ **TAUTOLOGIA**

p	q	r	$q \to r$	$(p \to (q \to r)$	$p \to q$	$p \to r$	$(p \to q) \to (p \to r))$	$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

j) $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$ **TAUTOLOGIA**

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

Ejercicio 4

Decimos que un conectivo es *expresable* mediante otros si es posible escribir una fórmula utilizando exclusivamente estos últimos y que tenga la misma tabla de verdad que el primero (es decir, son equivalentes). Por ejemplo, la disyunción es expresable mediante la conjunción más la negación, ya que $(p \vee q)$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

Muestre que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\to$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia) puede escribirse utilizando solo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$p \wedge q$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

Como $\to$ es expresable mediante $\neg$ y $\vee$ y $\leftrightarrow$ es expresable mediante $\to$ entonces $\leftrightarrow$ es expresable mediante $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio 5

Sean las variables proposicionales f , e y m con los siguientes significados:
$f \equiv$.[es] fin de semana”$e \equiv$”Juan estudia”$m \equiv$”Juan escucha música”

1. Escribir usando lógica proposicional las siguientes oraciones:

   - “Si es fin de semana, Juan estudia o escucha música, pero no ambas cosas”
     $((f \to e \wedge \neg m) \vee (f \to \neg e \wedge m))$
   - “Si no es fin de semana entonces Juan no estudia”
     $(\neg f \to \neg e)$
   - “Cuando Juan estudia los fines de semana, lo hace escuchando música”
     $((e \wedge f) \to m)$

2. Suponiendo que valen las tres proposiciones anteriores ¿se puede deducir que Juan no estudia? Justificar usando argumentos de la lógica proposicional.

   Juan no estudia ya que $(\neg f \to \neg e)$

   Ahora tomando el caso $f = True$ tenemos que $(f \to e \wedge \neg m)$, pero $((e \wedge f) \to m)$. Entonces se tiene que cumplir simultáneamente m y $\neg m$ por lo que se llega a una contradicción.

Parte 2 – Semántica de cortocircuito

Ejercicio 6

Asigne un valor de verdad (verdadero, falso o indefinido) a cada una de las siguientes expresiones lógicas, sabiendo que la proposición p es verdadera, mientras que q es falsa y r está indefinida.

a) $((9 \leq 9) \wedge p)$

$((9 \leq 9) \wedge True) \equiv True \wedge True \equiv True$

b) $((3 \leq 2) \to (p \wedge q))$

$((3 \leq 2) \to (p \wedge q)) \equiv (False \to (True \wedge False)) \equiv True$

c) $((3 < 4) \to ((3 \leq 4) \vee r)$

$((3 < 4) \to ((3 \leq 4) \vee r) \equiv (True \to (True \vee \perp)) \equiv (True \to True) \equiv True$

d) $((3 > 9) \vee (r \wedge (q \wedge p)))$

$((3 > 9) \vee (r \wedge (q \wedge p))) \equiv (False \vee (\perp \wedge (False \wedge True))) \equiv (False \vee (\perp \wedge False)) \equiv (False \vee \perp) \equiv \perp$

e) $((p \wedge q) \wedge r)$

$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (False \wedge \perp) \equiv False$

f) $((p \vee q) \vee r)$

$((p \vee q) \vee r) \equiv (True \vee \perp) \equiv True$

g) $((p \wedge r) \wedge ((q \to p) \vee (p \to (q \wedge r)))$

$((p \wedge r) \wedge ((q \to p) \vee (p \to (q \wedge r))) \equiv$
$((True \wedge \perp) \wedge ((False \to True) \vee (True \to (False \wedge \perp))) \equiv$
$(\perp \wedge (True \vee (True \to False))) \equiv$
$(\perp \wedge (True \vee False)) \equiv$
$(\perp \wedge True) \equiv \perp$

h) $((p \wedge \neg q) \to (1 = 0))$
$((True \wedge \neg False) \to False) \equiv$
$((True \wedge True) \to False) \equiv (True \to False) \equiv False$

i) $(p \wedge ((5 - 7 + 3 = 0) \leftrightarrow (2^2 - 1 > 3)))$

$(True \wedge (False \leftrightarrow False)) \equiv$
$(True \wedge True) \equiv True$

j) $(\neg(p \vee r) \to r)$

$(\neg(True \vee \perp) \to \perp) \equiv$
$(\neg True \to \perp) \equiv$
$(False \to \perp) \equiv True$

k) $((p \to (1 > \log_2 0)) \leftrightarrow (2^2 = 4 \wedge (p \wedge \neg q)))$

$((True \to (1 > \perp)) \leftrightarrow (True \wedge (True \wedge \neg False))) \equiv$
$((True \to \perp) \leftrightarrow (True \wedge (True \wedge True))) \equiv$
$(\perp \leftrightarrow (True \wedge True)) \equiv$
$(\perp \leftrightarrow True) \equiv \perp$

l) $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

$((True \to (False \to \perp)) \to ((True \to False) \to (True \to \perp))) \equiv$
$((True \to True) \to (False \to \perp)) \equiv$
$(True \to True) \equiv True$

Ejercicio 7

1. Suponiendo que p y q no se encuentran indefinidas, simplificar las siguientes fórmulas:

   a) $((p \wedge p) \wedge p) \equiv$
   $((p \wedge p) \equiv p$

   b) $(((p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q) \vee (p \wedge (p \vee q))) \equiv$
   $((((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) \vee q) \vee (p \wedge (p \vee q)))) \equiv$
   $(((False \vee (p \wedge q)) \vee q) \vee (p \wedge (p \vee q))) \equiv$
   $(((p \wedge q) \vee q) \vee (p \wedge (p \vee q))) \equiv$
   $((((p \vee q) \wedge (q \vee q)) \vee (p \wedge (p \vee q))) \equiv$
   $(((p \vee q) \vee (p \wedge (p \vee q))) \equiv$
   $(((p \vee q) \vee p) \wedge ((p \vee q) \vee (p \vee q))) \equiv$
   $((p \vee q) \wedge (p \vee q)) \equiv (p \vee q)$

   c) $(\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)) \equiv$
   $(\neg p \rightarrow \neg(\neg p \vee q)) \equiv$
   $(\neg p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \equiv$
   $(p \vee (p \wedge \neg q)) \equiv$
   $((p \vee p) \wedge (p \vee \neg q)) \equiv$
   $(p \wedge (p \vee \neg q)) \equiv p$

   d) $(\neg((\neg(p \wedge q) \vee p \vee q) \rightarrow (\neg\neg p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg((\neg p \vee \neg q) \vee p \vee q) \rightarrow (p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg((\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)) \rightarrow (p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg(True \vee True) \rightarrow (p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg True \rightarrow (p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg(\neg True \vee (p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg(False \vee (p \vee \neg p))) \equiv$
   $(\neg(p \vee \neg p)) \equiv \neg True \equiv False$

   e) $(((p \rightarrow q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow q) \equiv$
   $(((\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow q) \equiv$
   $((\neg(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow q) \equiv$
   $(True \rightarrow q) \equiv q$

2. ¿Cuáles de las reglas de simplificación anteriores siguen valiendo cuando admitimos que α, β y γ puedan indefinirse?

   False es absorbente para $\wedge$, True es absorbente para $\vee$.

Parte 3 – Lógica de primer orden

Ejercicio 8

Sabiendo que $P(x)$ y $Q(x)$ son predicados unarios de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $R(x, y)$ es un predicado binario de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, indicar en las siguientes fórmulas cuáles son *variableslibres* y cuáles *ligadas*.

a) $P(x)$

   x libre

b) $(\forall y : \mathbb{Z})P(y)$

   y ligada

c) $(\forall x : \mathbb{Z})P(y)$

   y libre x ligada

d) $(P(\underbrace{x}_{libre}) \vee (\exists x : \mathbb{Z})P(\underbrace{x}_{ligada}))$

e) $(\exists x : \mathbb{Z})(P(x) \rightarrow Q(x))$

   x ligada

f) $R(x, y)$

   x e y libres

g) $(P(\underbrace{x}_{libre}) \vee (\exists x : \mathbb{Z}) R(\underbrace{x}_{ligada}, \overbrace{y}^{libre})) \vee Q(\underbrace{x}_{libre})$

h) $\underbrace{(\exists x : \mathbb{Z})\underbrace{(\forall y : \mathbb{Z}) R(x, y)}_{y\ ligada, x\ libre}}_{x, y\ ligadas}$

i) $(\forall x : \mathbb{Z})(P(x) \wedge Q(x))$

x ligada

j) $(\forall x : \mathbb{Z})(P(y) \wedge Q(x))$

x ligada, y libre

k) $\underbrace{(\forall z : \mathbb{Z})(P(z) \to (\underbrace{(\exists x : \mathbb{Z})(P(x) \wedge R(x, z)))}_{z\ libre, x\ ligada})}_{x, y, z\ ligadas}$

l) $\underbrace{(\forall z : \mathbb{Z})(P(z) \to (\underbrace{(\exists x : \mathbb{Z})(P(z) \wedge R(x, z)))}_{x\ ligada, z\ libre})}_{x, y, z\ ligadas}$

Ejercicio 9

Dadas w, x, y, $z : \mathbb{Z}$ y sabiendo que $w = 0$, $x = 1$, $y = 3$ y $z = 4$, determinar el valor de verdad de las siguientes fórmulas en $\mathbb{Z}$.

a) $x = y$

$\equiv 1 = 3 \equiv False$

b) $x + y = z$

$\equiv 1 + 3 = 4 \equiv True$

c) $(\forall x : \mathbb{Z})(\exists y : \mathbb{Z})(x = y)$

Verdadero. Sea $x \in \mathbb{Z}$, elijo $y = x$

d) $(\exists y : \mathbb{Z})(\forall x : \mathbb{Z})(x = y)$

Falso. Supongamos que $\exists y \in \mathbb{Z}$ que cumple lo pedido. Entonces si vale $x = y$ tiene que valer $x + 1 = y$ ya que $x + 1 \in \mathbb{Z}$ también. Pero $x + 1 = y \to \underbrace{x + 1 = x}_{ya\ que\ y=x} \to 1 = 0$

e) $(\forall x : \mathbb{Z})(x \geq y \to x \geq z)$

$(\forall x : \mathbb{Z})(x \geq 3 \to x \geq 4)$

Falso. Contraejemplo:$x = 3$

f) $(\exists i : \mathbb{Z})(x \leq i \vee i \leq y)$

$(\exists i : \mathbb{Z})(1 \leq i \vee i \leq 3)$

Verdadero.Por ejemplo para $i = 1$ vale.

g) $(\exists i : \mathbb{Z})(y \leq i \vee i \leq x)$

$(\exists i : \mathbb{Z})(3 \leq i \vee i \leq 1)$

Falso. No existe número menor que 1 y a la vez mayor que 3.

h) $(\forall i : \mathbb{Z})(x \leq i \vee i \leq y)$

$(\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i \vee i \leq 3)$

Falso. Contraejemplo $i = 4$

i) $(\forall i : \mathbb{Z})(x \leq i \vee x = 0)$

$(\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i \vee 1 = 0)$

Falso

Ejercicio 10

Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes fórmulas. Cuando alguna no sea verdadera, encontrar valores para las variables que la hagan falsa o la indefinan, cuando sea posible.

a) $(\forall x : \mathbb{R})(\exists y : \mathbb{R})(x \leq y)$

   Verdadero. Sea $x \in \mathbb{R}$, si tomamos $y = x + 1$ luego $x \leq y \leftrightarrow x \leq x + 1 \leftrightarrow 0 \leq 1$

b) $(\exists x : \mathbb{R})(\forall y : \mathbb{R})(x \leq y)$

   Falso. Supongamos que existe x que cumple $x \leq y, \forall y \in \mathbb{R}$. Pero si tomamos $y = x - 1$ tenemos que $y < x \rightarrow x \not\leq y$

c) $(\forall y : \mathbb{R})(\forall x : \mathbb{R})(x \leq y)$

   Falso. Contraejemplo: $x = 2, y = 1$. $\perp$ si y está indefinido.

d) $(\forall x : \mathbb{R})(x \leq y)$

   Falso.y es una variable libre, pero independientemente de eso, y no está acotadp superiormente. Contraejemplo: elijo $x = y + 1$. $\perp$ si y está indefinido.

e) $(\exists x : \mathbb{R})(x = y)$. $\perp$ si y está indefinido.

   Verdadero. Elijo $x = y$

f) $(\forall x : \mathbb{R})(x = y)$

   Falso. Contraejemplo: $x = y + 1$. $\perp$ si y está indefinido.

g) $(\forall x, y : \mathbb{R})(y = 0 \vee (\exists z : \mathbb{R})(x/y = z))$

   Verdadero. Si $y = 0$ toda la expresión es verdaera y no se evalúa el $\exists$. Si $y \neq 0$ entoces evualuamos $x/y = z$, que no se indefine porque y no es cero y siemore hay un resutlado porque no hay otras restricciones para la división y $x/y \in \mathbb{R}$

h) $(\forall x, y : \mathbb{R})(\exists z : \mathbb{R})(x \cdot y = z)$

   Verdaero. La operación $\cdot$ no se indefine para ningún valor en $\mathbb{R}$ y además es cerrada para el producto, por lo tanto $x \cdot y \in \mathbb{R}$

i) $(\forall x, y : \mathbb{R})(\exists z : \mathbb{R})(x \cdot z = y)$

   Si y esstá indefinido, la expresión es $\perp$. Si $y = 0$ es verdadero (x puede valer cualquie valor y $z = 0$). Si $y \neq 0$ es falso porque en el caso $x = 0$ tenemos que $x \cdot y = 0$

j) $(\forall x, y : \mathbb{R})(x \leq y \vee y \leq x)$

   Verdadero: relación de orden total en $\mathbb{R}$

k) $(\forall x, y : \mathbb{R})(\exists z : \mathbb{R})(x < z \wedge z < y)$

   Falso: falla cuando $y \leq x$.

l) $(\forall x, y : \mathbb{R})(x > y \rightarrow (\exists z : \mathbb{R})(x < z \wedge z < y))$

   Falso. No existe un número mayor que el mayor(x) y a la vez menor que el menor(y)

m) $(\forall x, y : \mathbb{R})((\exists z : \mathbb{R})(x/y = z) \vee y = 0)$

   $\perp$. Se indefine cuando $y = 0$

Parte 4 – Relaciones de fuerza

Ejercicio 11

Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y solo si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

1. $True$, $False$

   $False$ es más fuerte que $True$, porque $False \rightarrow True$ pero no es cierto que $True \rightarrow False$

2. $(p \wedge q), (p \vee q)$

   $(p \wedge q)$ es más fuert que $(p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$	$(p \vee q) \to (p \wedge q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

3. $True$, $True$

   Igual de fuertes (se implican el uno al otro)

4. p, $(p \wedge q)$

   $(p \wedge q)$ es más fuerte, ya que para que el τ"sea verdadero ambos tienen que serlo. Luego p es verdadero. p no es más fuerte que $(p \wedge q)$, ya que p puede ser verdaero, pero si q es falso $(p \wedge q)$ es falso.

5. $False$, $False$

   Son igual de fuertes

6. p, $(p \vee q)$

   p es más fuerte, ya que si p es verdadero entonces $(p \vee q)$ lo es ya uqe basta con que uno de los dos sea verdadero. $(p \vee q)$ no es más fuerte (es más débil) ya que $(p \vee q)$ puede ser verdadero y p falso (caso $p = False$ y $q = True$).

7. p, q

   No se puede establecer una relación de fuerza.

8. p, $(p \to q)$

   Ninguno es más fuerte. Si $p = True$ no es cierto que $p \to (p \to q)$ porque si q es falso falla. También tenemos que $(p \to q) \not\to p$, ya que si $p = False$ el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?
$False$ es la más fuerte y $True$ es la más débil.

Ejercicio 12

Sea $x : \mathbb{Z}$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\exists k : \mathbb{Z})(2 \cdot k = x)\}$
2. $P_2 \equiv \{x = 2\}$
3. $P_3 \equiv \{(\exists k : \mathbb{Z})(2 \cdot k = x \vee 2 \cdot k + 1 = x)\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso:
P_1: "x es par", P_2: "x es 2", P_3: "x es par ó impar"

- P_2 es más fuerte que P_1: Si $x = 2$ entonces es par. Pero no vale la recíproca, no todos los números pares son 2.
- P_2 es más fuerte que P_3: Si $x = 2$ entonces es par ó es impar. Pero no vale la recíproca.
- P_1 es más fuerte que P_3: Si x es par entonces es par o impar. Pero si x es par o impar no necesariamente es par (si x llega a ser impar no vale P_1)

Ejercicio 13

Sea $[a : \mathbb{Z}]$ y el predicado auxiliar $esPrimo(i : \mathbb{Z})$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |a| \wedge esPrimo(a[i]))\}$
2. $P_2 \equiv \{(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |a| \to esPrimo(a[i]))\}$
3. $P_3 \equiv \left\{ \left(\sum_{i=1}^{|a|-1} \beta(esPrimo(a[i])) \right) = |a| \right\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.

- P_2 es más fuerte que P_1: que entre 0 y a todos sean primos implica que existe al menos algún primo en a, pero no la inversa.
- P_2 y P_3 son igual de fuertes: ambas expresiones dicen lo mismo. En P_3 si todos son primos estoy sumando 1 $|a|$ veces. Y la única forma de sumar $|a|$ en P_3 es que todos entre 0 y $|a|$ sean primos.
- P_3 es más fuerte que P_1: que entre 0 y a todos sean primos implica que existe al menos algún primo en a, pero no la inversa.

Ejercicio 14

Sean $x, i : \mathbb{Z}$ y $[a : \mathbb{Z}]$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i < |a| \rightarrow a[i] \neq x) \wedge (a[0] = x)\}$
2. $P_2 \equiv \{(\forall i : \mathbb{Z})(1 \leq i < |a| \rightarrow a[i] \neq x) \vee (a[0] = x)\}$
3. $P_3 \equiv \{(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < j < |a| \rightarrow a[i] < a[j]) \wedge (a[0] = x)\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.

- p_1 es más fuerte que P_2: caso $(p \wedge q)$ es más fuerte que $(p \vee q)$ (Ejercicio 11 2.)
- No hay relación de fuerza entre P_1 y $_3$. Que entre 1 y $|a$ ninguno sea x no implica que estén ordenados ($P_1 \not\rightarrow P_3$), y que estén todos ordenados no implica que ninguno sea x ($P_3 \not\rightarrow P_1$).
- P_3 es más fuerte que P_2. P_3 verdadero implica que se cumple $(a[0] = x)$, una de las dos proposiciones en la disyunción P_2. No vale la recíproca porque $(a[0] = x)$ no es necesariamente cierto en P_2 y no hay relacion de fuerza entre las primeras partes de la disyunción de P_2 y la conjunción de P_3

Ejercicio 15

Sean $x, i : \mathbb{Z}$ y $[a : \mathbb{Z}]$, se tienen los siguientes predicados:

1. $P_1 \equiv \{(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |a| \wedge a[j] = x)\}$
2. $P_2 \equiv \{0 \leq i < |a| \wedge a[i] = x\}$
3. $P_3 \equiv \{(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |a| - 1 \rightarrow a[j] \neq x) \wedge a[|a| - 1] = x\}$

Indicar la relación de fuerza entre ellos. Justifique su respuesta en **cada** caso.

- P_2 es más fuerte que P_1. Si en particular i cumple que $a[i] = x$ eso implica que existeal menos un número en el rago pedido que cumple $a[i] = x$. No vale la recíproca porque i es uan variable libre. Si i está indefinido o está fuera de rango todo se indefine.
- No hay relación de fuerza entre P_1 y P_3. P_1 dice que entre 0 y $|a|$ todos son x, pero P_3 dice que entre 0 y $|a| - |$ ninguno es x ($P_1 \not\rightarrow P_3$). Por el mimsmo motivo no vale la recíproca. En el caso particular en el que $|a| = 1$ no hay elementos entre 0 y $|a|$, ambas expresiones son iguales y ambas son igual de fuertes.
- P_2 es más fuerte que P_3 si $i = |a| - 1$. En caso contrario no hay relación de fuerza porque ambas expresiones son contradictorias.