一、单项选择题；每题只有一个正确选项，每小题5分

1. 若集合$M=\{x\mid x\le 2,x\in N\},N=\{x\mid 3x\ge 1\}$，新定义运算符P

$\mathrm{P}(M)$表示M所有子集的集合，则$\mathrm{P}(M\cap N)$为

A. $\{\{1\},\{1,2\},\{2\}\}$　　B. $\{\{1\},\{1,2\},\{2\},\varnothing\}$　　C. $\{\{1\},\{2\}\}$　　D. Ø

2. 设i为虚数单位，复数z满足：$\overline{z}-z=4\mathrm{i}$，则$z$的虚部为

A. -4　　B. -2　　C. 4　　D. 2

3. 在ΔABC中,已知$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，$|\overrightarrow{AB}|=4,|\overrightarrow{AC}|=3,\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$

A. $\frac{4}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{16}{3}$　　D. 6

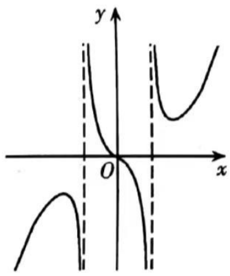
4. 为了保证信息安全传输，有一种称为秘密密钥密码系统，其加密、解密原理如图：

$$\text{明文}x\xrightarrow{\text{加密密钥系统}}\text{密文}t\xrightarrow{\text{发送}}\text{密文}t\xrightarrow{\text{解密密钥系统}}\text{明文}y$$

现在加密密钥为$t=2a^{x+1}(a>0\text{且}a\ne 1)$，解密密钥为$y=3t-5$，如下所示：发送方发送明文"1"，通过加密后得到密文"18"，再发送密文"18"，接受方通过解密密钥解密得明文"49"，问若接受方接到明文"4"，则发送方发送明文为（　　）

A. $-\log_3 2$　　B. $\log_3\frac{3}{2}+1$　　C. 162　　D. $\log_3\frac{7}{2}-1$

5. 已知函数$y=f(x)$的图像如右图所示，则此函数可能是



A. $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{x^2+|x|-2}$　　B. $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x^2+|x|-2}$

C. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{e^{|x|-1}-e^{1-|x|}}$　　D. $f(x)=\dfrac{x^3-x}{e^{|x|-1}-e^{1-|x|}}$

6. 设函数为$f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$，下列说法错误的是

A. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增　　B. $f(x)=f(x+\pi)$

C. $f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$上最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $x=\frac{\pi}{4}$是$f(x)$的一条对称轴

7. 对以下三个正数进行排序，满足 $a\ln b=be^{c}=ca$

A. $a>b>c$ **B.** $c>b>a$ **C.** $b>c>a$ **D.** $b>a>c$

8. 设正四棱锥的侧棱与底面所成角为α，相邻两侧面所成角为β，则下列说法中正确的是

A. $\tan\dfrac{\beta}{2}=\sin\alpha$ **B.** $\tan\beta=\cos\alpha$

C. $\cos\beta=\dfrac{\cos^{2}\alpha}{\cos^{2}\alpha-2}$ **D.** $\cos\beta=\dfrac{\cos^{2}\alpha-1}{\cos^{2}\alpha+1}$

二、多选题：每小题 5 分，全部选对得满分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数、偶函数，且 $f(x)+g(x)=2^{x}$，则

A. $f(x)-g(x)=2^{-x}$ B. $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的导函数 $f'(x)\geqslant 1$ D. $g(x)\geqslant 1$

10. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在棱 CC_1 上，则下列结论正确的是(　　)

A. 直线 BM 与平面 ADD_1A_1 平行

B. 平面 BMD_1 截正方体所得的截面为三角形

C. 异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成的角为$\dfrac{\pi}{3}$

D. $|MB|+|MD_1|$ 的最小值为 $1+\sqrt{2}$

11．在平面直角坐标系 xoy 中，凸四边形 $ABCD$ 的 4 个顶点均在抛物线 E：$y^2=2x$ 上，则

A．四边形 $ABCD$ 不可能为平行四边形

B．存在四边形 $ABCD$，满足 $\angle A=\angle C$

C．若 AB 过抛物线 E 的焦点 F，则直线 OA,OB 斜率之积恒为-2

D．若 $\triangle OAC$ 为正三角形，则该三角形的面积为$12\sqrt{3}$

12. 已知函数 $f(x)=e^{x}\cdot x^{3}$，则以下结论正确的是(　　)

A. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增 B. $f(e^{-\frac{1}{2}})<f(-\log_5 0.2)<f(\ln\pi)$

C. 方程 $f(x)=-1$ 有实数解 D. 存在实数 k，使得方程 $f(x)=kx$ 有 4 个实数解

三、填空题 每题 5 分

13. 求 $\left(x^2+x+y\right)^5$ 的展开式中，x^5y^2 的系数：

14. 已知 P 为 $y=e^x$ 上任意一点，则 P 到直线 $y=2x$ 的最短距离为

15. 已知双曲线 C：$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，直线过 F_2 与双曲线 C 的左、右两支分别交于两点 A，B，已知 $\angle F_1AF_2=90^\circ$，且 ΔF_1AB 内切圆半径为 1，则 $\left|AB\right|=$

16. 设 a_n 为与 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ 的差的绝对值最小的整数，b_n 是与 $\sqrt{2n}$ 的差的绝对值最小的整数。记 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 $2T_{100}-S_{100}$:

四、解答题（17 题 10 分，18-22 每题 12 分）

17. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，$\{b_n\}$的前项和为S_n，且$a_1=b_1=1$,

$a_2=a_3-b_3, a_3=S_3+b_2$。

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式

(2) 设$c_n=\dfrac{a_n b_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}$，求该数列的前$n$项和。

18. 在锐角三角形ABC中，$a^2-b^2=bc$

(1) 求证：$A=2B$

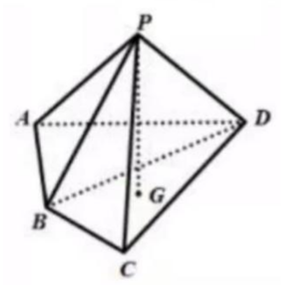
(2) 求$\dfrac{1}{\tan B}-\dfrac{1}{\tan A}+2\sin A$的取值范围

19. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AB=1, AD=DP=AP=\sqrt{3}, \angle BAD=\angle BCD=90^\circ$

G是ΔBCD的重心，$PG\perp$底面$ABCD$

(1) 证明：AB // 平面PCG

(2) 求直线CD与平面PAD所成角的正弦值。



20. 一家保险公司在一天内承担了 5000 张A保险，5000 张B类保险。已知这一万张保险都是由不同的人参保，并且所有人的年龄、身体状态差不多（近似相同）。一年内如果投保了A类保险的顾客发生意外概率为 0.0015，发生了意外则可获赔 6 万元；而投保了B类的顾客发生意外概率为 0.0010，发生了意外可获赔 8 万元。

(1) 假设现有 10 人，5 人投保了A类，5 人投保了B类；在保险公司共赔款不超过 20 万元的前提下，设发生意外的A类顾客人数为X，求X的概率分布及数学期望。

(2) 现对保险公司一年内支付A类赔款不超过 20 万的概率进行求解；显然规模足够大，可以视为二项分布；但因为数值过大，我们很难求解。

现拓展求解方法：设已有二项分布$B(n,p)$,当n足够大，p足够小时，可以认为

$$C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \text{ 其中 } \lambda=n\cdot p$$

请你求解该问题:

参考数据：$7.5\times7.5\times7.5\div6\approx70.3$　$7.5\times7.5\times7.5\times7.5\div24\approx131.8$　　$e^{-7.5}\approx0.0006$

21. 已知动直线l与椭圆$C:\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$交于$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$两不同点，且$\Delta OPQ$的面积$S_{\Delta OPQ}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，其中$O$为坐标原点。

(1) 证明：$x_1^2+x_2^2$和$y_1^2+y_2^2$为定值；

(2) 设线段的PQ中点为M，求$|OM|\cdot|PQ|$的最大值；

(3) 椭圆C上是否存在三点D,E,G，使得$S_{\Delta ODE}=S_{\Delta ODG}=S_{\Delta OEG}=\frac{\sqrt{6}}{2}$？若存在，判断$\Delta DEG$的形状；不存在，请说明理由。

22. 已知函数$f(x)=-2(x+a)\ln x+x^2-2ax-2a^2+a \quad (a>0)$

(1) $g(x)=f'(x)$ 讨论函数$g(x)$的单调性；

(2) 证明：存在$a\in(0,1)$，使$f(x)\geq 0$在$(1,+\infty)$恒成立，且$f(x)=0$在$(1,+\infty)$有唯一解