计算机图形学

第六章 图形变换

颜波

复旦大学计算机科学技术学院
byan@fudan.edu.cn

本章概述

- 二维几何变换
- 数学基础：矢量、矩阵及运算
- 窗口到视区的变换
- 三维几何变换

视点变换和视点方向

- 图形学关注如何将由几何模型组成的三维场景绘制成高质量的彩色图像
- 变换在图形学中至关重要：通过变换，可以简洁高效地设置和编辑三维场景、光照位置和视点方向

为什么需要变换?

- 假设我们已经有了一段可以绘制正方形 [0,1]*[0,1] 的代码:
  - **drawUnitSquare(0,0,1,1);**
- 现在我们需要绘制一个平行于坐标轴，且左下和右上顶点坐标分别为 (lox, loy) 和(hix, hiy) 的矩形，我们应该怎么做?

一种解法

- 一种方法是写一段新的代码：

```
drawRect(lox, loy, hix, hiy) {
        glBegin(GL_QUADS);
        glVertex2f(lox, loy);
        glVertex2f(hix, loy);
        glVertex2f(hix, hiy);
        glVertex2f(lox, hiy);
        glEnd();
}
```

- 矩形简单可以这么做，可是对于复杂的例子（例如绘制一个茶壶，有大量的面片），怎么办?

利用变换的解法

```
drawRect(lox, loy, hix, hiy) {
        glTranslate(lox, loy);    //移动当前绘图点
        glScale(hix-lox, hiy-loy); //实现画布缩放
        drawUnitSquare(0,0,1,1);
}
```

- 这样的基于变换的解决方案在图形学中随时都需要用到；
- 使用变换可以使代码更加快速、灵活、模块化

什么叫变换 (Transformation)?

- 变换是一个将空间中的点 x 映射成其他点 x' 的函数
- 广 泛 应 用 于 ： Morphing, Deformation, Viewing, Projection, Real-time shadows…

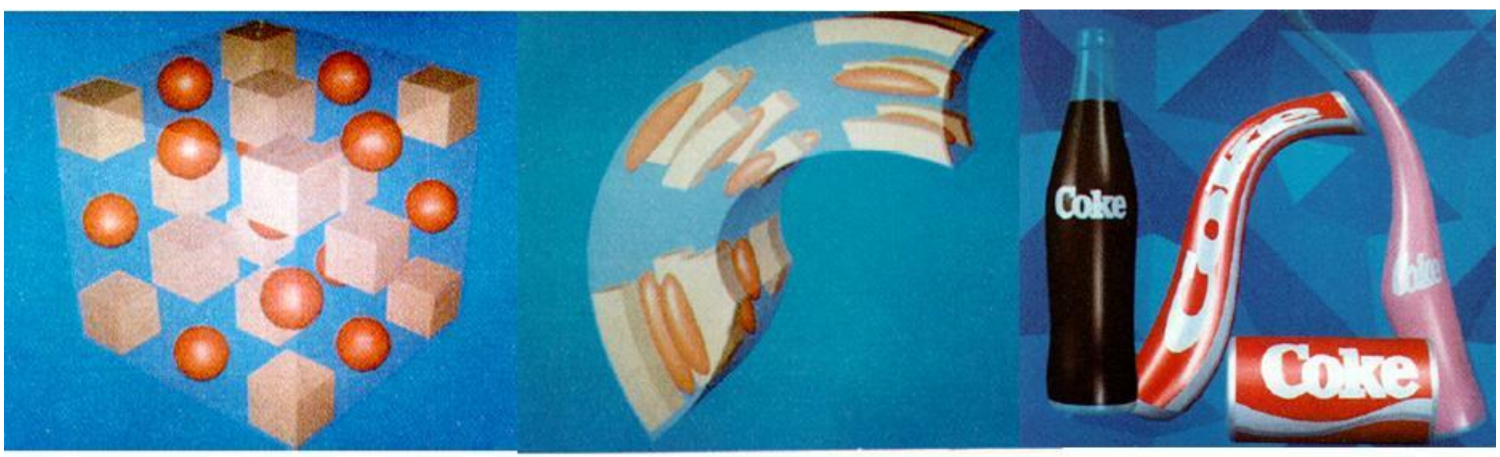


Fig 1. Undeformed Plastic

Fig 2. Deformed Plastic

图形变换

图形变换是计算机图形学基础内容之一。

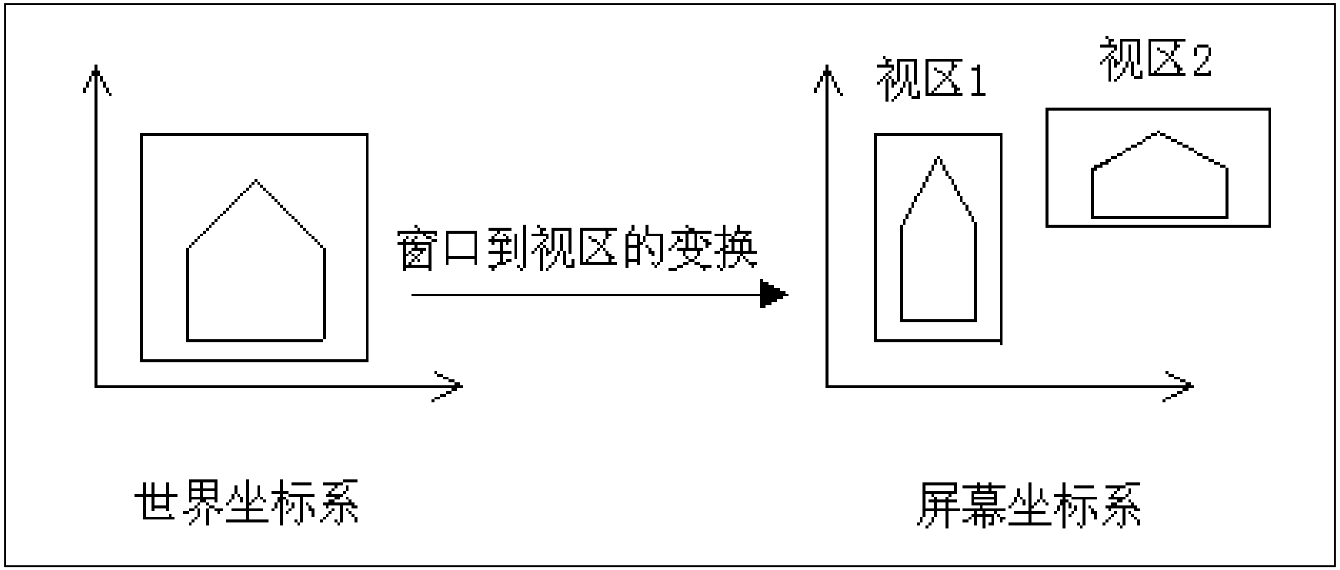
几何变换，投影变换，视窗变换

线性变换，属性不变，拓扑关系不变。

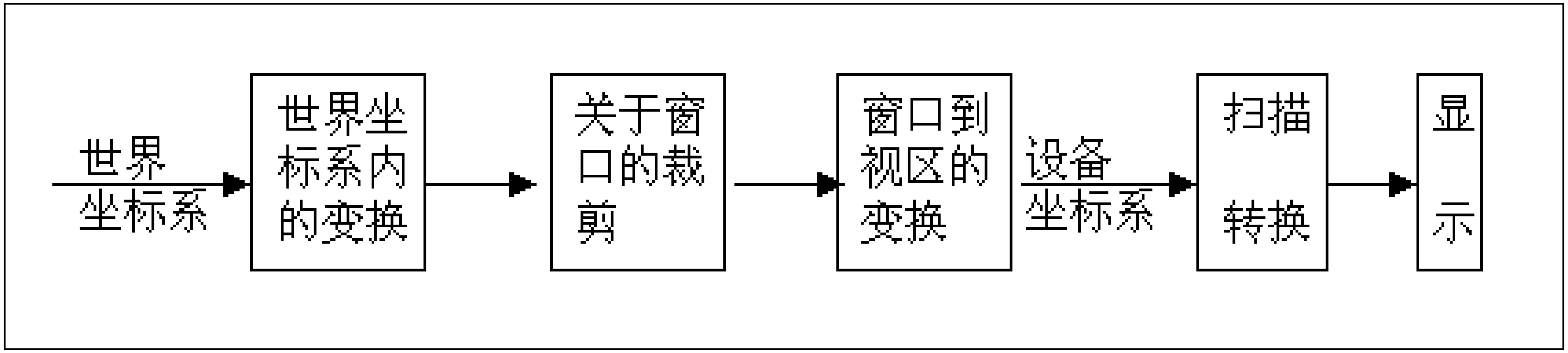
作用：

- 把用户坐标系与设备坐标系联系起来；
- 可由简单图形生成复杂图形；
- 可用二维图形表示三维形体；
- 动态显示。

二维图形的显示流程图



视区1
视区2
窗口到视区的变换
世界坐标系
屏幕坐标系



世界坐标系
世界坐标系内的变换
关于窗口的裁剪
窗口到视区的变换
设备坐标系
扫描转换
显示

图形的几何变换

- 图形变换：对图形的几何信息经过几何变换后产生新的图形。
- 图形变换的两种形式：
  - 图形不变，坐标系改变；
  - 图形改变，坐标系不变。
- 我们所讨论的是针对坐标系的改变而讲的。

变换的数学基础

- 矢量

$$U=\begin{bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{bmatrix}\qquad V=\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix}$$

- 矢量和

$$U+V=\begin{bmatrix}u_x+v_x\\u_y+v_y\\u_z+v_z\end{bmatrix}$$

变换的数学基础

- 矢量的数乘

$$k \bullet U = \begin{bmatrix} ku_x \\ ku_y \\ ku_z \end{bmatrix}$$

- 矢量的点积
  性质

$$U \bullet V = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

$$U \bullet V = V \bullet U$$
$$U \bullet V = 0 \Leftrightarrow U \perp V$$
$$U \bullet U = 0 \Leftrightarrow U = 0$$

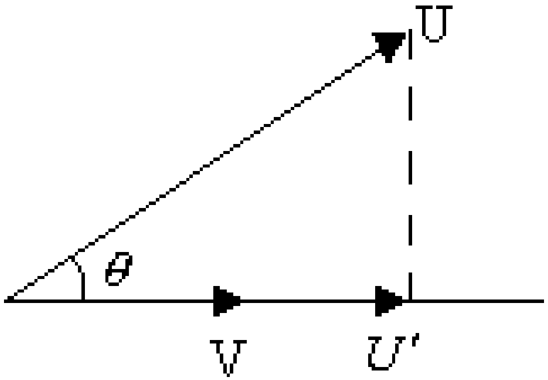
变换的数学基础

- 矢量的长度

$$\|U\| = \sqrt{U \bullet U} = \sqrt{u_x^{\ 2} + u_y^2 + u_z^2}$$

- 矢量的夹角

$$\cos\theta = \frac{U \bullet V}{\|U\| \bullet \|V\|}$$



变换的数学基础

- 矩阵
  - $m \times n$ 阶矩阵
  - n阶方阵
  - 零矩阵
  - 行向量与列向量
  - 单位矩阵
  - 矩阵的运算

变换的数学基础

矩阵的含义

矩阵：由m×n个数按一定位置排列的一个整体，简称m×n矩阵。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

变换的数学基础

矩阵运算

- 加法

设A，B为两个具有相同行和列元素的矩阵

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- 数乘

$kA = [\, k*a_{ij}]|_{i=1\ldots m,\ j=1,\ldots n}$

变换的数学基础

- 乘法

设A为3×2矩阵，B为2×3矩阵

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

$C=C_{m\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} \quad c_{ij} = \sum a_{ik} * b_{kj} \quad {}_{k=1,n}$

- 单位矩阵

在一矩阵中，其主对角线各元素$a_{ii}=1$，其余皆为0的矩阵称为单位矩阵。n阶单位矩阵通常记I_n。

$A_{m\times n} = A_{m\times n} \cdot I_n$

变换的数学基础

- 逆矩阵

  若矩阵A存在$A \cdot A^{-1}=A^{-1} \cdot A=I$，则称$A^{-1}$为A的逆矩阵

- 矩阵的转置

  把矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$的行和列互换而得到的$n\times m$矩阵称为A的转置矩阵,记作A^T。

  $(A^T)^T = A$

  $(A+B)^T = A^T + B^T$

  $(aA)^T = aA^T$

  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

  当A为n阶矩阵，且$A=A^T$，则 A是对称矩阵

变换的数学基础

矩阵运算的基本性质

- 交换律与结合律

  $A+B=B+A;$

  $A+(B+C)=(A+B)+C$

- 数乘的分配律及结合律

  $a(A+B) = aA+aB;$

  $a(A \cdot B) = (aA) \cdot B=A \cdot (aB)$

  $(a+b)A = aA + bA$

  $a(bA) = (ab)A$

变换的数学基础

- 矩阵乘法的结合律及分配律

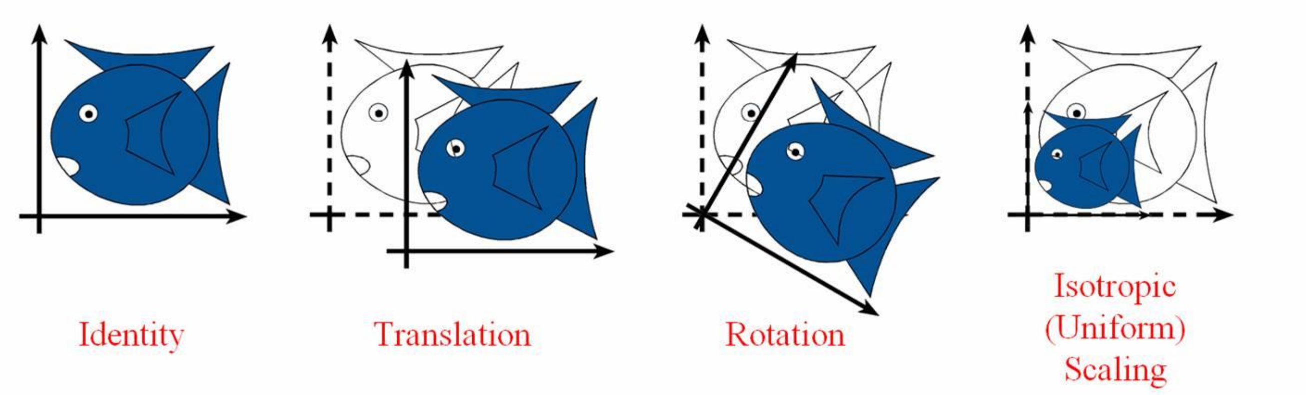
  $A(B \cdot C) = (A \cdot B)C$

  $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

  $C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$

- 矩阵的乘法不适合交换律

简单变换



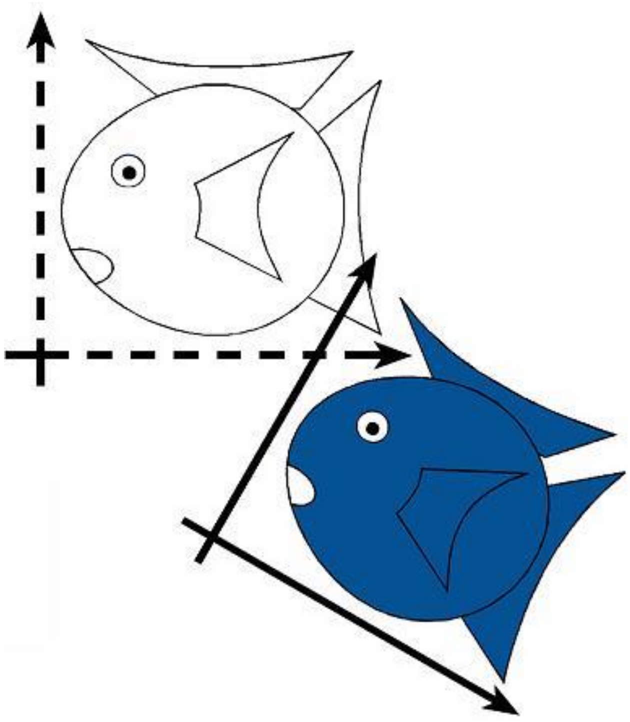
- 从左到右的变换分别是：
  - **不变 (Identity)，平移 (Translation)，旋转 (Rotation)，均衡缩放 (Isotropic scaling)**
- 变换可以相互复合和嵌套：
  - 例如：先旋转，再缩放，最后再平移
- 简单变换都是可逆的

变换的分类

- 常见的变换有如下几类：
  - 刚体变换 (Rigid-body Transformation)
  - 相似变换 (Similarity Transformation)
  - 线性变换 (Linear Transformation)
  - 仿射变换 (Affine Transformation)
  - 投影变换 (Projective Transformation)

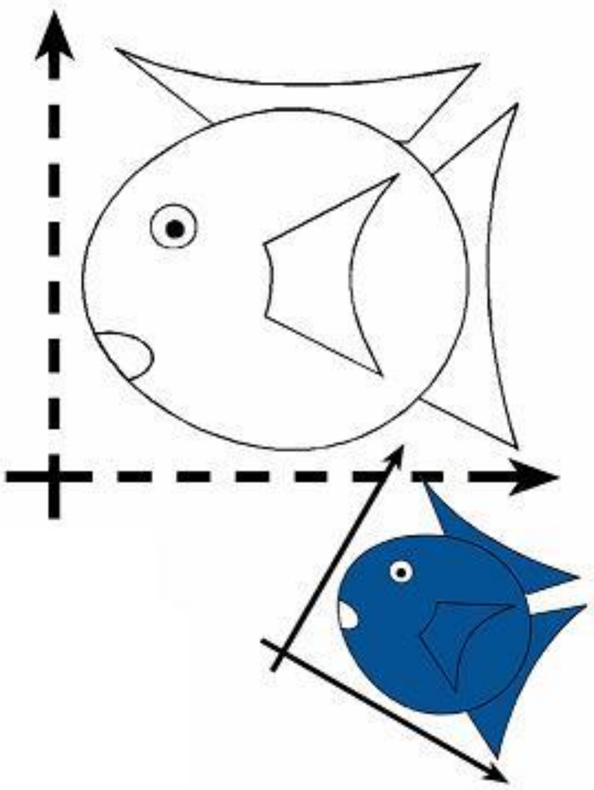
刚体变换

- 保持度量 (长度、角度、大小)。
- 刚体变换包括:
  - 不变
  - 平移
  - 旋转
  - 以及它们的复合



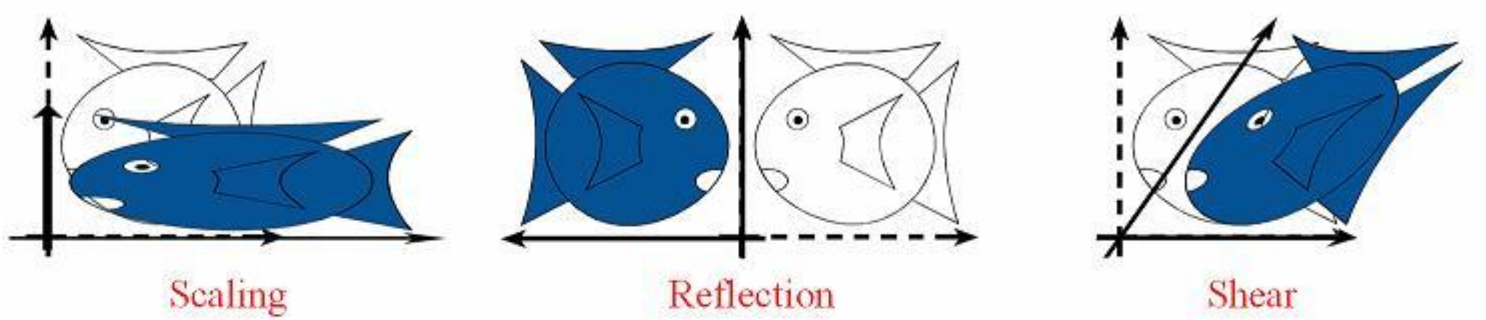
相似变换

- 保持角度
- 相似变换包括：
  - 不变
  - 平移
  - 旋转
  - 均衡缩放
  - 以及它们的复合



线性变换

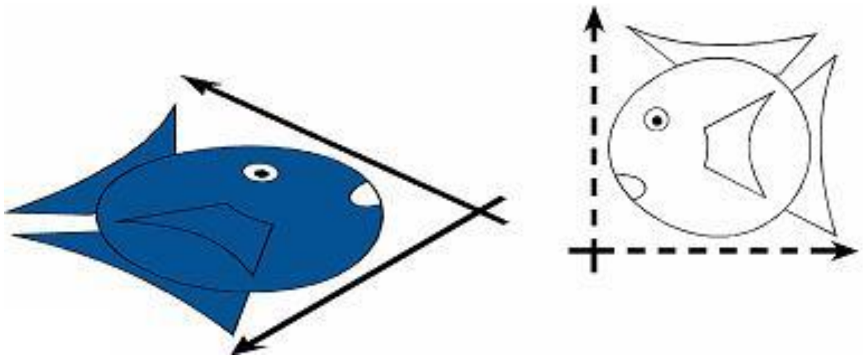
- 线性变换满足如下方程：
  L(p+q) = L(p) + L(q)　　　aL(p) = L(ap)
- 线性变换包括：
  - 不变、旋转、缩放 (不一定要均衡缩放)
  - 对称 (Reflection)，错切 (Shear)



仿射变换

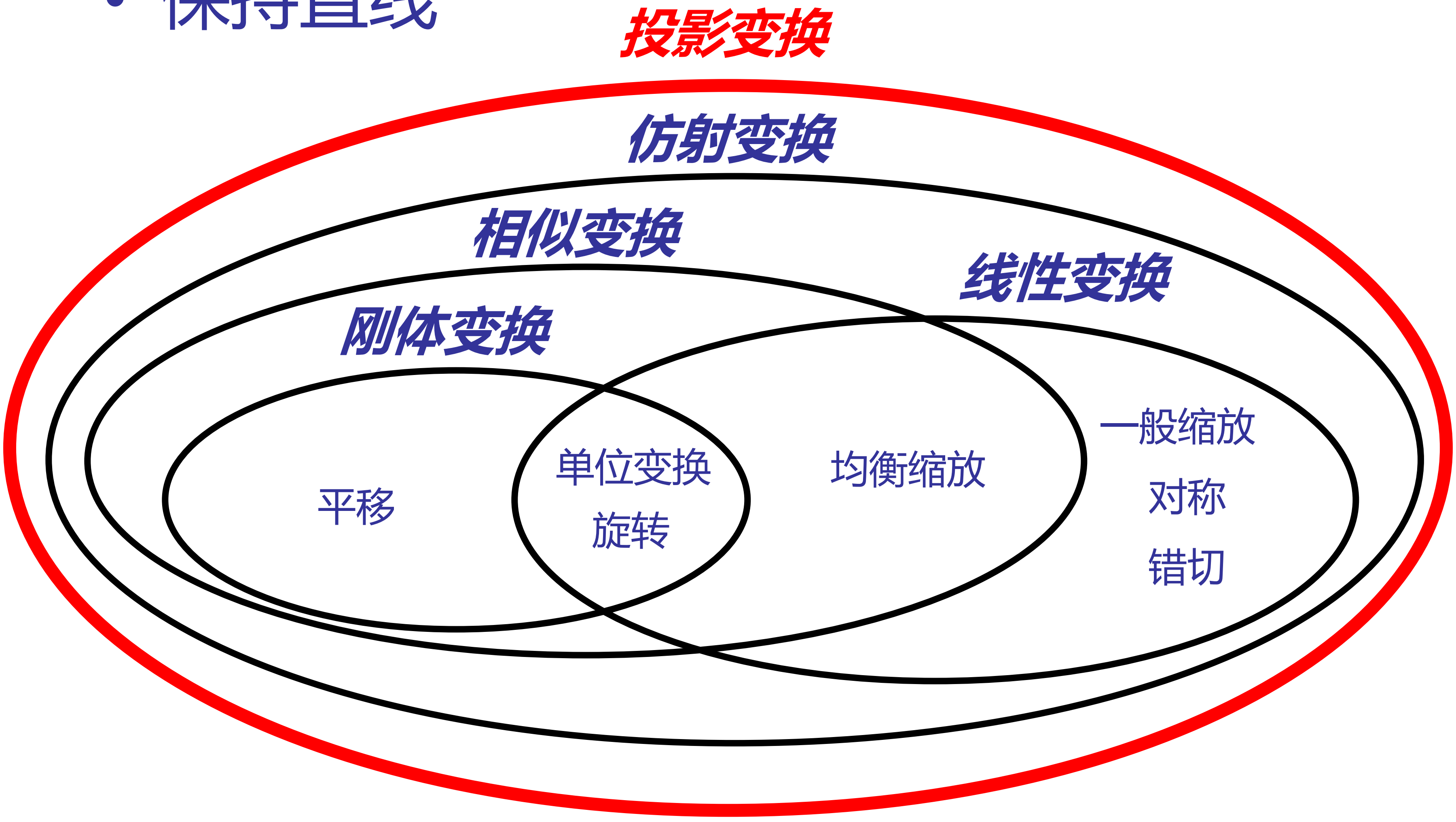
- 保持直线以及直线与直线平行关系
  - 两条在仿射变换之前平行的直线，在仿射变换之后依旧平行

- 仿射变换包括：
  - 线性变换
  - 相似变换
  - 以及它们的复合



投影变换

- 保持直线



变换的表示

- 考虑简单的二维仿射变换：

$$x' = ax + by + c \qquad (1)$$

$$y' = dx + ey + f \qquad (2)$$

- 可以将 (1), (2) 统一地写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$p' = M p + t$$

变换的表示

- 变换的表示涉及到了两个变量：**M** 和 **t**

$$p' = \mathbf{M} p + \mathbf{t}$$

然而，使用齐次坐标 (Homogenous Coor-dinates) 来表示 p 和 p', 则上述公式成为：

$$p' = \mathbf{M} p$$

- **什么是齐次坐标?**

齐次坐标

所谓齐次坐标表示法就是由$n+1$维向量表示一个n维向量。如n维向量$(P_1,P_2,\ \ldots\ ,P_n)$表示为（$hP_1,hP_2,\cdots hP_n,h$），其中h称为哑坐标。

- h可以取不同的值，所以同一点的齐次坐标不是唯一的。
  如普通坐标系下的点（2,3）变换为齐次坐标可以是(1,1.5,0.5)(4,6,2)(6,9,3)等等。

- 普通坐标与齐次坐标的关系为“一对多”
  由普通坐标$\times h\rightarrow$齐次坐标
  由齐次坐标$\div h\rightarrow$普通坐标

- 当h=1时产生的齐次坐标称为“规格化坐标”，因为前n个坐标就是普通坐标系下的n维坐标。

齐次坐标

(x,y)点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, h)

$$x_h = hx, y_h = hy, h \neq 0$$

(x,y)点对应的齐次坐标为三维空间的一条直线

$$\begin{cases} x_h = hx \\ y_h = hy \\ z_h = h \end{cases}$$

齐次坐标的作用

1. 将各种变换用阶数统一的矩阵来表示。提供了用矩阵运算把二维、三维甚至高维空间上的一个点从一个坐标系变换到另一坐标系的有效方法。

2. 便于表示无穷远点。

   例如：$(x \times h, y \times h, h)$，令h等于0

3. 齐次坐标变换矩阵形式把直线变换成直线段，平面变换成平面，多边形变换成多边形，多面体变换成多面体。

4. 变换具有统一表示形式的优点
   - 便于变换合成
   - 便于硬件实现

齐次坐标 (Homogeneous Coordinates)

齐次坐标的本质是使用 $d+1$ 维数组来表示d 维空间中的点和向量。

不使用齐次坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$p' = M p + t$$

使用齐次坐标表示

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$p' = M p$$

齐次坐标

- 由于引入了新的维度，在三维空间下，我们使用4x4的作用矩阵，同时使用(x,y,z,w)来表示一个点或向量：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$p' = M p$$

齐次坐标

- 在大部分情况下 w = 1，可以忽略。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 当齐次坐标被仿射矩阵作用时，w不会改变；
- 而如果被投影矩阵作用，w会改变

齐次坐标的几何意义

- 当 w 非零时，通过将所有四个坐标同时除以 w 以归一化
  - 例如：(2x, 2y, 2z, 2) 等价于 (x, y, z, 1)

- 当 w 为零时，齐次坐标 (x, y, z, 0) 可以理解为沿 (x, y, z) 方向无穷远的点

二维图形的几何变换

设二维图形变换前坐标为 $(x,y,1)$, 变换后为 $(x^*,y^*,1)$

二维变换矩阵

$$T_{2D}=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

注意： T_{2D}可看作三个行向量，其中

- [1 0 0]：表示x轴上的无穷远点
- [0 1 0]：表示y轴上的无穷远点
- [0 0 1]：表示原点

二维图形的几何变换

- 从变换功能上可把T_{2D}分为四个子矩阵

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \end{pmatrix}$：对图形进行缩放、旋转、对称、错切等变换。

$(c \quad f)$：对图形进行平移变换。

$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$：对图形做投影变换。

g：在$x=\dfrac{1}{g}$处产生一个灭点。

灭点：不平行于成像平面的平行线相交的点

h：在$x=\dfrac{1}{h}$处产生一个灭点。

(i)：对整体图形进行伸缩变换。

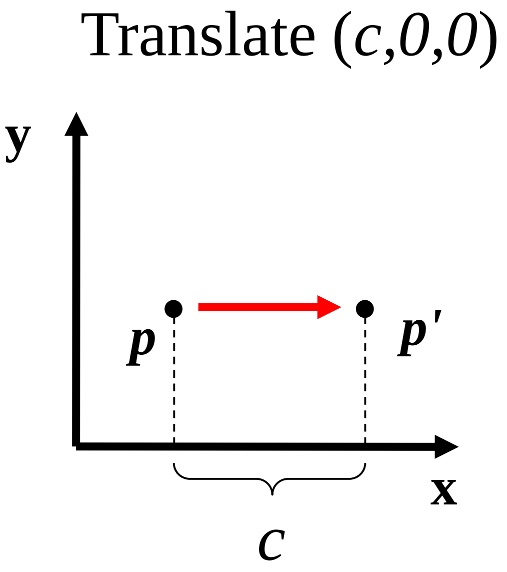
$$\because (x^* \quad y^* \quad 1) = (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 若$i>1$，则总体缩小；否则，总体放大。

平移变换 (tx, ty, tz)

- 可以看到，在齐次坐标的框架下，平移变换可以表示成为简单的矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



二维基本变换-平移变换

- 平移变换

$$(x^* \quad y^* \quad 1) = (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{pmatrix} = (x+T_x \quad y+T_y \quad 1)$$

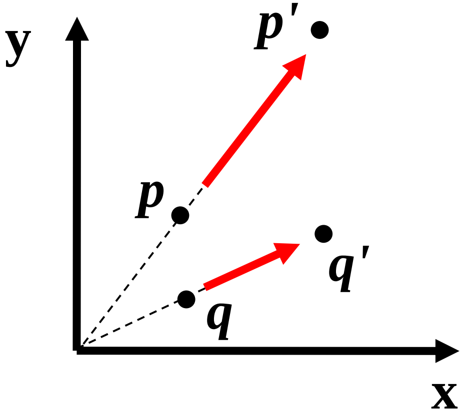
- 平移变换只改变图形的位置，不改变图形的大小和形状

缩放变换 (sx, sy, sz)

- 以原点为缩放中心的缩放变换可以表示成为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scale (s,s,s)



二维基本变换-比例变换

$$(x^* \quad y^* \quad 1) = (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (S_x \cdot x \quad S_y \cdot y \quad 1)$$

- 以坐标原点为放缩参照点
- 当$Sx=Sy=1$时：恒等比例变换
- 当$Sx=Sy>1$时：沿x,y方向等比例放大。
- 当$Sx=Sy<1$时：沿x,y方向等比例缩小
- 当$Sx\neq Sy$时：沿x,y方向作非均匀的比例变换，图形变形。

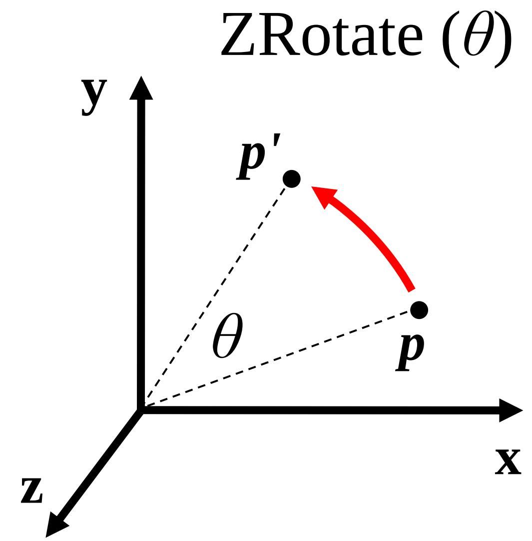
二维基本变换-对称变换

$$(x^* \quad y^* \quad 1)=(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(ax+by \quad dx+ey \quad 1)$$

- 当$b=d=0, a=-1, e=1$时，
  $(x^* \ y^* \ 1)=(-x \ y \ 1)$：与$y$轴对称的反射变换。
- 当$b=d=0, a=1, e=-1$时，
  $(x^* \ y^* \ 1)=(x \ -y \ 1)$：与$x$轴对称的反射变换。
- 当$b=d=0, a=e=-1$时，
  $(x^* \ y^* \ 1)=(-x \ -y \ 1)$：与原点对称的反射变换。
- 当$b=d=1, a=e=0$时，
  $(x^* \ y^* \ 1)=(y \ x \ 1)$：与$y=x$对称的反射变换。
- 当$b=d=-1, a=e=0$时，
  $(x^* \ y^* \ 1)=(-y \ -x \ 1)$：与$y=-x$对称的反射变换。

旋转变换

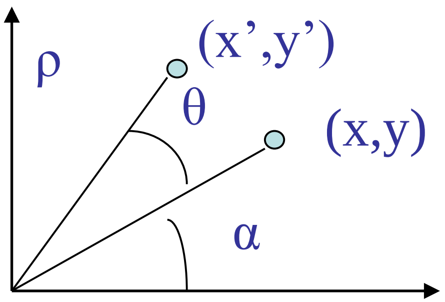
- 三维空间中物体的旋转具有三个独立的自由度
- 围绕 z 轴的旋转可以表示为：



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

二维基本变换-旋转变换

- 注意：θ是逆时针旋转角度。



$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases}$$

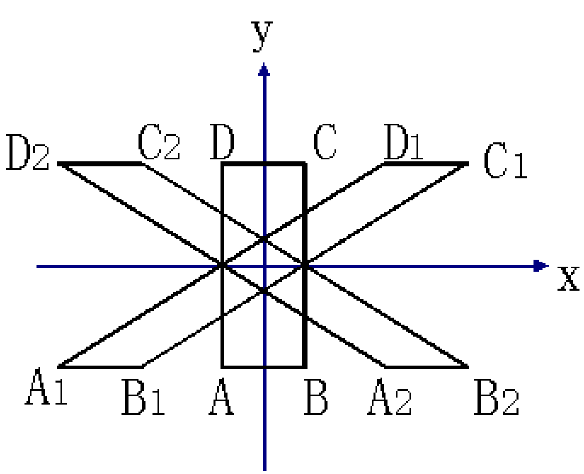
$$\begin{aligned} x' &= \rho\cos(\theta+\alpha) = \rho\cos\theta\cos\alpha - \rho\sin\theta\sin\alpha = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= \rho\sin(\theta+\alpha) = \rho\sin\theta\cos\alpha + \rho\cos\theta\sin\alpha = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta & x\sin\theta + y\cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

二维基本变换-错切变换

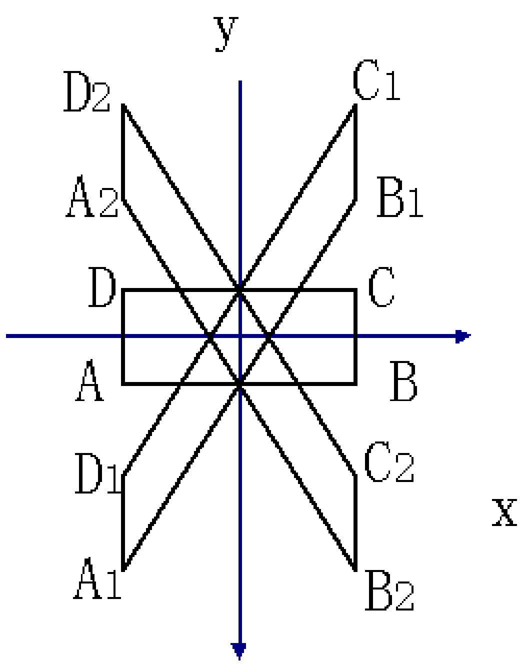
$$\begin{pmatrix} x^* & y^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+by & dx+y & 1 \end{pmatrix}$$

- 当d=0，(x^* y^* 1)=(x+by y 1)：图形的y坐标不变；
  - 当b>0：图形沿+x方向作错切位移。*ABCD*→A1B1C1D1
  - 当b<0：图形沿-x方向作错切位移。*ABCD*→ A2B2C2D2



二维基本变换-错切变换

- 当b=0时，$(x^*\ y^*\ 1)=(x\ dx+y\ 1)$图形的$x$坐标不变；
  - 当$d>0$：图形沿+y方向作错切位移。$ABCD\rightarrow$ A1B1C1D1
  - 当$d<0$：图形沿-y方向作错切位移。$ABCD\rightarrow$ A2B2C2D2



二维基本变换-错切变换

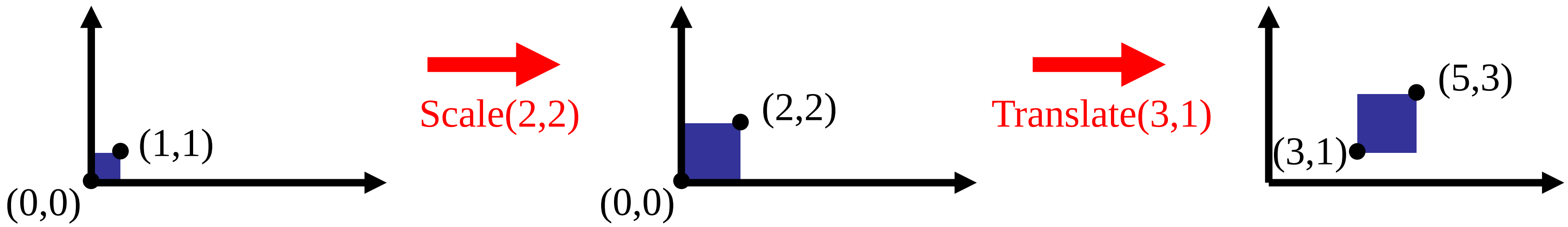
- 当$b\neq0$且$d\neq0$时,
  - $(x^*\ y^*\ 1)=(x+by\ \ dx+y\ \ 1)$：图形沿$x,y$两个方向作错切位移。
  - 错切变换引起图形角度关系的改变，甚至导致图形发生变形。

复合变换

- 复合变换又称级联变换，指对图形做一次以上的几何变换。
- 注意：任何一个线性变换都可以分解为上述几类变换。

变换的复合 (combination)

一个缩放和平移进行复合的例子：

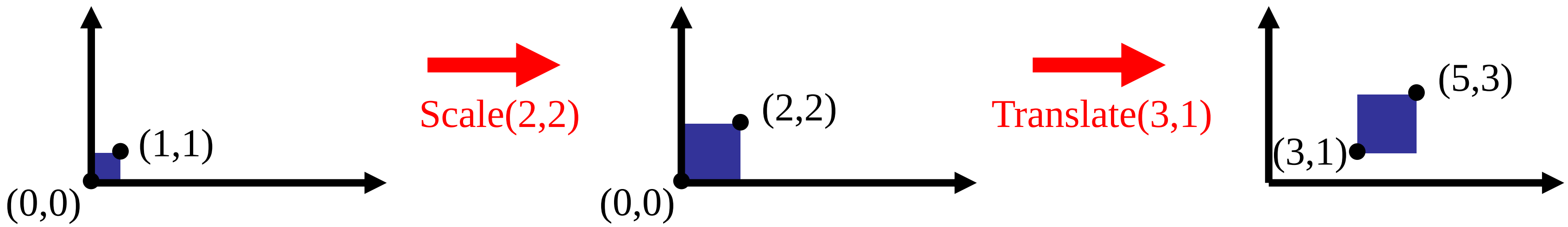


复合等价于矩阵乘法： p' = T (S p) = TS p

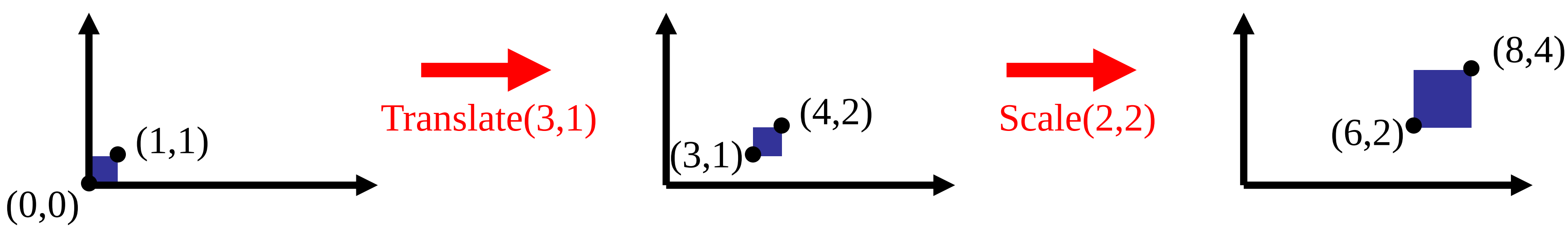
$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

变换的复合不满足交换律

先缩放再平移： $p' = T(Sp) = TSp$



先平移再缩放： $p' = S(Tp) = STp$



变换的复合不满足交换律

变换的复合不满足交换律，这是因为矩阵的乘法不满足交换律：**TS ≠ ST**

先缩放再平移：$p' = T(Sp) = TSp$

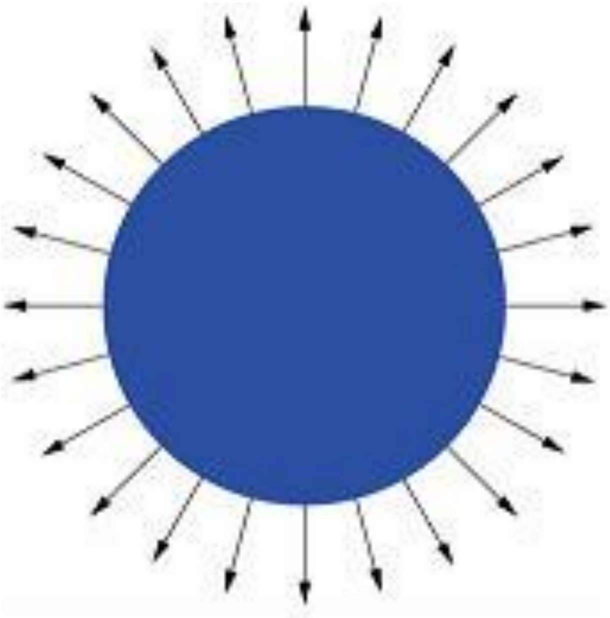
$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

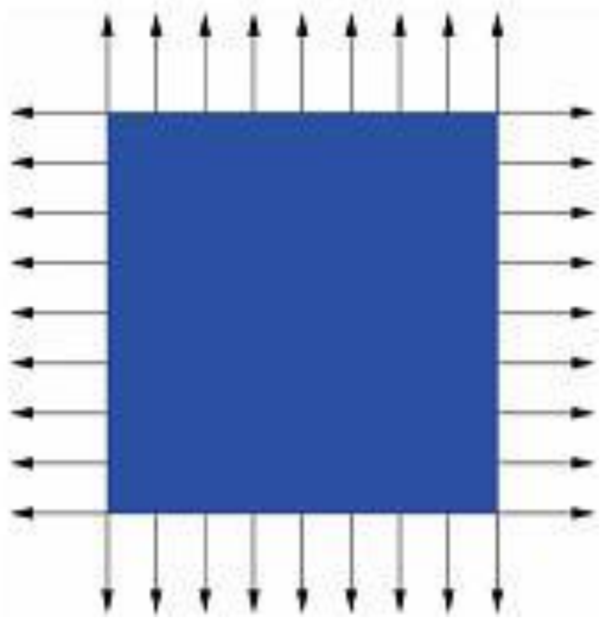
先平移再缩放：$p' = S(Tp) = STp$

$$ST = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

法向量变换

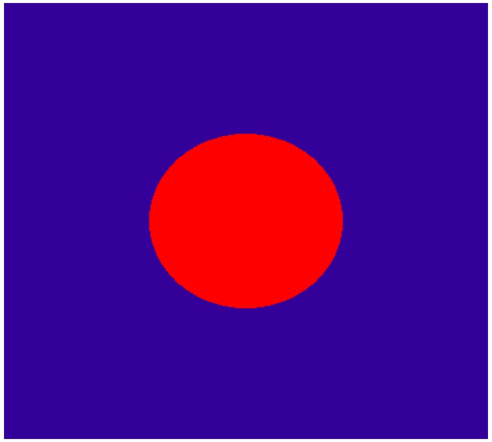
- 曲面的（单位）法向量是与曲面正交的（单位）向量，它们是曲面最为重要的几何性质之一

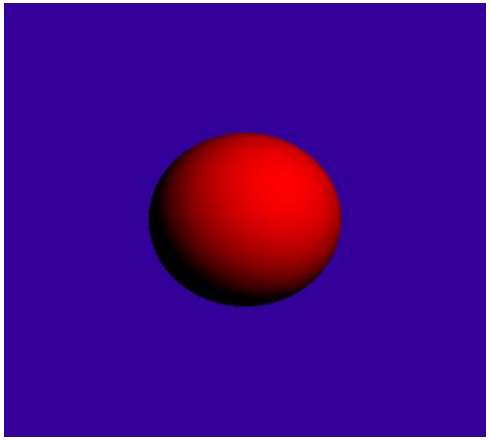




为什么法向量如此重要?

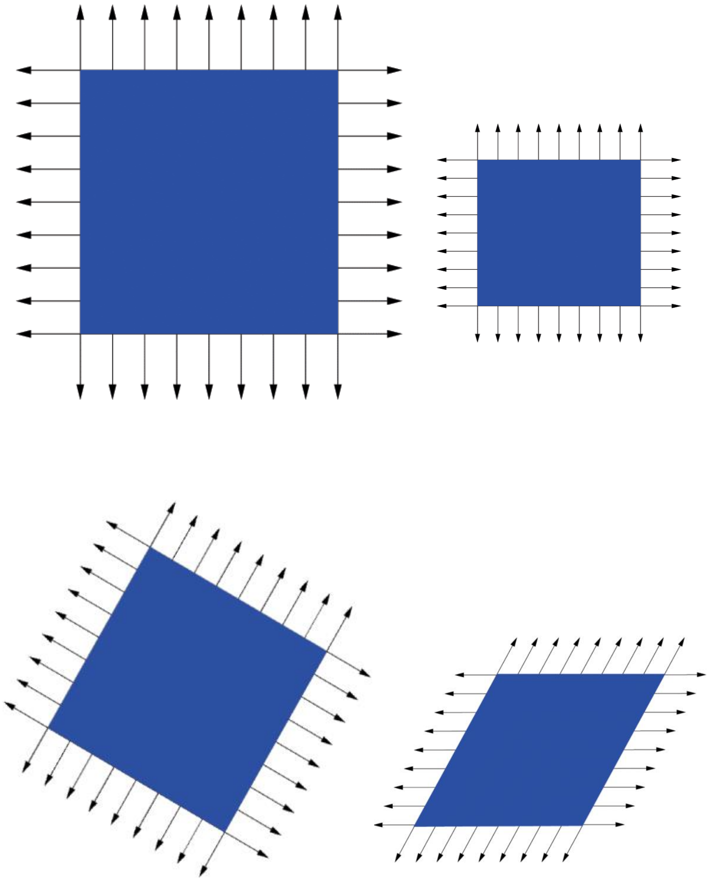
- 法向量是进行光照处理的必要输入，所有的光照模型都涉及到物体的法向量
- 只有知道了物体的法向量信息，才能绘制出具有三维立体感的图像


只有物体颜色


漫反射着色

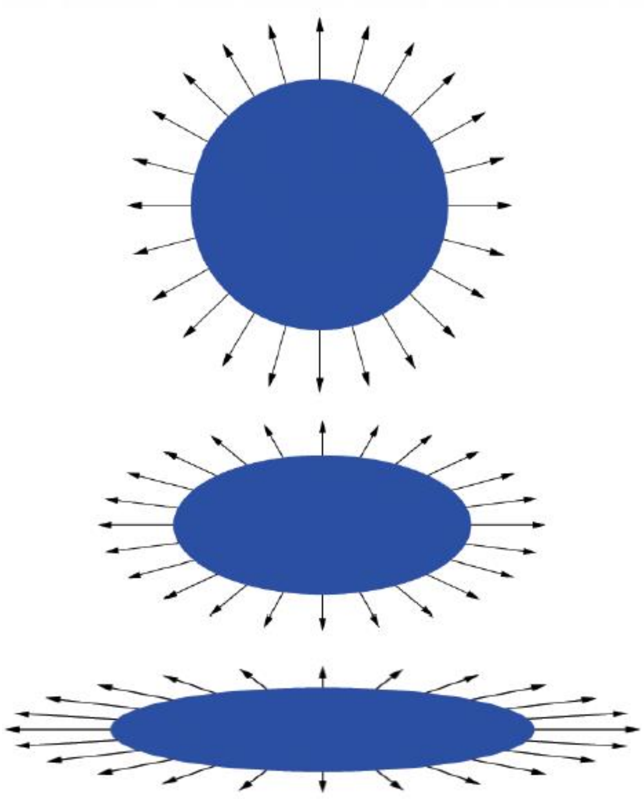
像变换物体一样变换法向?

- 在我们对物体进行变换时，法向量可以类似变换吗?
- 我们发现，对于相似变换，法向量可以和物体**使用同样的变换方程**
- 然而对于右图中带有错切的仿射变换，**同样的方程则不适用**



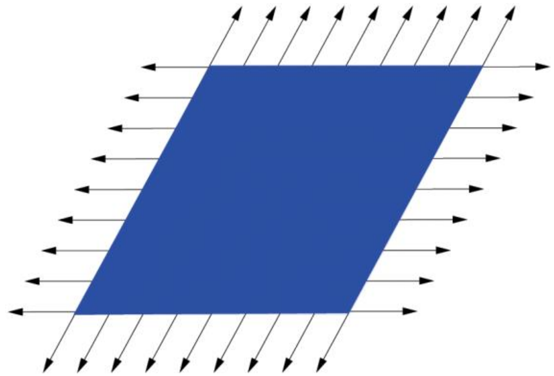
像变换物体一样变换法向?

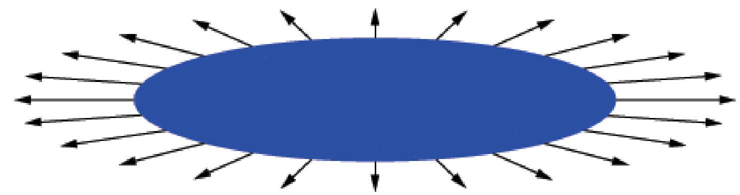
- 另一个例子（缩放）：
  - 对右图的球作非均衡的缩放，使用与物体同样的变换方程用于变换法向量会出现错误结果：



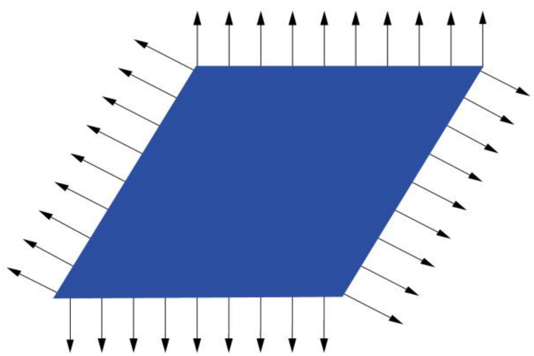
错切和缩放应有的法向变换

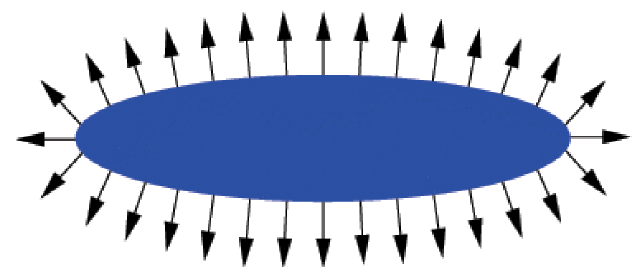
错误的法向变换





正确的法向变换

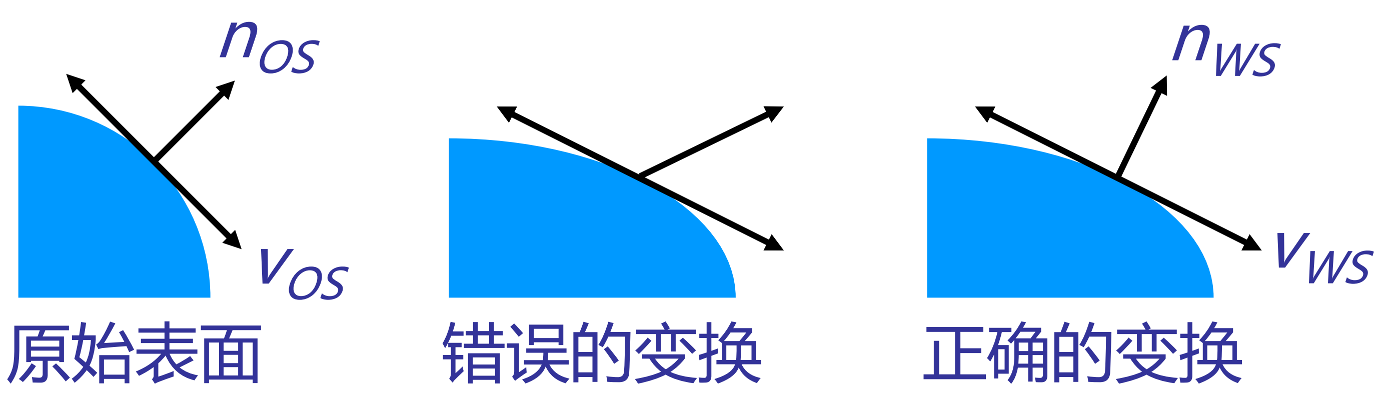




如何对法向量进行变换才能确保正确?

如何正确变换法向量?

- 变换 **切平面** (***tangent plane***)，再通过切平面计算法向量，而不是直接计算



- 切平面上的任一向量 v_{OS}变换后成为 v_{WS}：

$$v_{WS} = \mathbf{M} v_{OS}$$

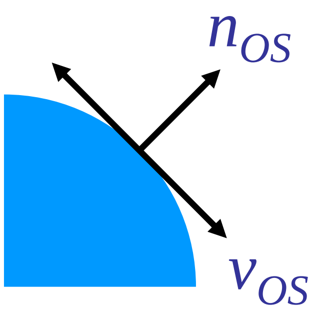
由切向量计算法向量

$\boldsymbol{v_{OS}}$ 和 $\boldsymbol{n_{OS}}$ 垂直： $n_{OS}^{\mathbf{T}}\, v_{OS} = 0$

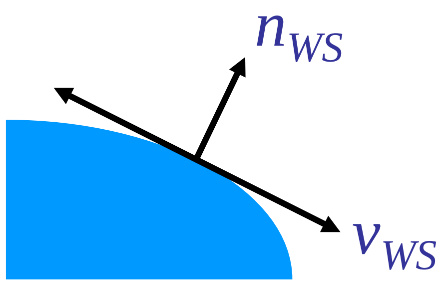
$$n_{OS}^{\mathbf{T}}\ (\mathbf{M}^{-1}\ \mathbf{M})\ v_{OS} = 0$$

$$(n_{OS}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{M}^{-1})\ (\mathbf{M}\ \ v_{OS}) = 0$$

$$(n_{OS}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{M}^{-1})\ v_{WS} = 0$$



$\boldsymbol{v_{WS}}$ 和 $\boldsymbol{n_{WS}}$ 垂直： $n_{WS}^{\mathbf{T}} = n_{OS}^{\mathbf{T}}(\mathbf{M}^{-1})$



$$\boxed{n_{WS} = (\mathbf{M}^{-1})^{\mathbf{T}}\, n_{OS}}$$

法向量的变换矩阵是原变换矩阵的逆的转置

例1：复合平移

求点$P(x,y)$经第一次平移变换（$Tx1, Ty1$），第二次平移变换（$Tx2, Ty2$）后的坐标$P*$（x^*, y^*）

解：设点$P(x,y,1)$经第一次平移变换后的坐标为$P'(x' \quad y' \quad 1)$，则

$$P'(x' \quad y' \quad 1) = (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1)T_{t1}$$

经第二次平移变换后的坐标为$P^*(x^* \ y^* \ 1)$

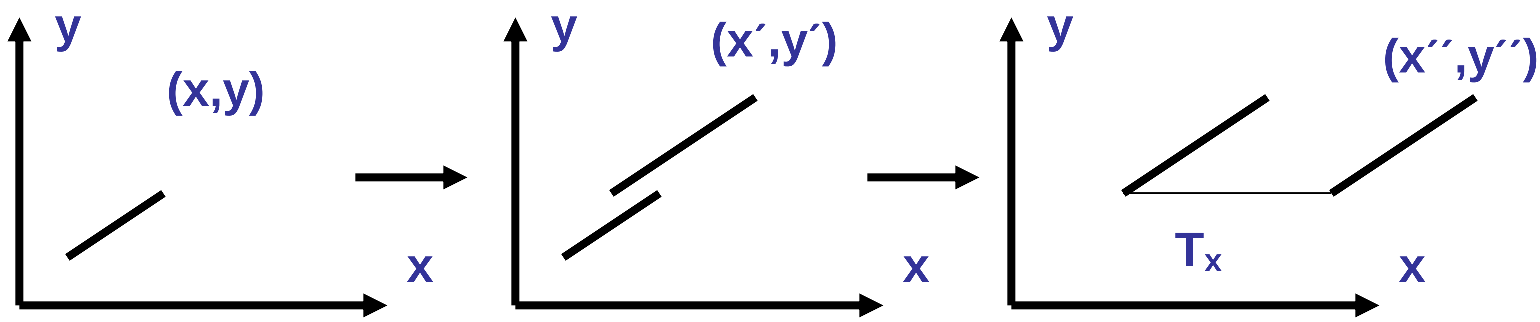
$$P^*(x^* \quad y^* \quad 1) = (x' \quad y' \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x1} & T_{y1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{x2} & T_{y2} & 1 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1)T_{t1}T_{t2}$$

$\therefore$变换矩阵为$T_t = T_{t1} \bullet T_{t2}$

例2：多种复合组合

- 例:对一线段先放大2倍(即$S_x=S_y=2$)，再平移$T_x=10,T_y=0$。



设点(x,y)为线段上任意一点，点(x´,y´)为点(x,y)放大后的坐标，

则:$[x',y',1]=[x,y,1]S_2(2,2)$

设点(x´´,y´´)为点(x´,y´)经平移后的坐标为:

$[x'',y'',1]= [x',y',1]T_2(10,0)$

则： $[x'',y'',1]= [x',y',1]T_2(10,0)=[x,y,1]S_2(2,2)T_2(10,0)$

令：$M=S_2(2,2)T_2(10,0)$，则M即为组合变换

例3：旋转变换

对参考点*F*(*xf,yf*)做旋转变换。

解：

1、把旋转中心*F*(*xf,yf*)平移至坐标原点，即坐标系平移（-*xf,-yf*），则

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_f & -y_f & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} -x_f & -y_f \end{pmatrix}$$

2、进行旋转变换在此处键入公式。

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} T(\theta)$$

例3：旋转变换

- 将坐标系平移回原来的原点

$$(x^* \quad y^* \quad 1) = (x_2 \quad y_2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_f & y_f & 1 \end{pmatrix} = (x_2 \quad y_2 \quad 1)T\left(x_f \quad y_f\right)$$

- 因此

$$(x^*, \ , y^* \ 1) = (x, y, 1)T\left(x_{-f}, y_{-f}\right)T(\theta)T\left(x_f, y_f\right)$$

例4：任意的反射轴的反射变换

任一图形关于任意的反射轴*y*= *a*+ *bx*的反射变换

① 将坐标原点平移到(0,*a*)处

② 将反射轴（已平移后的直线）按顺时针方向旋转*θ*角，使之与*x*轴重合

③ 图形关于*x*轴的反射变换

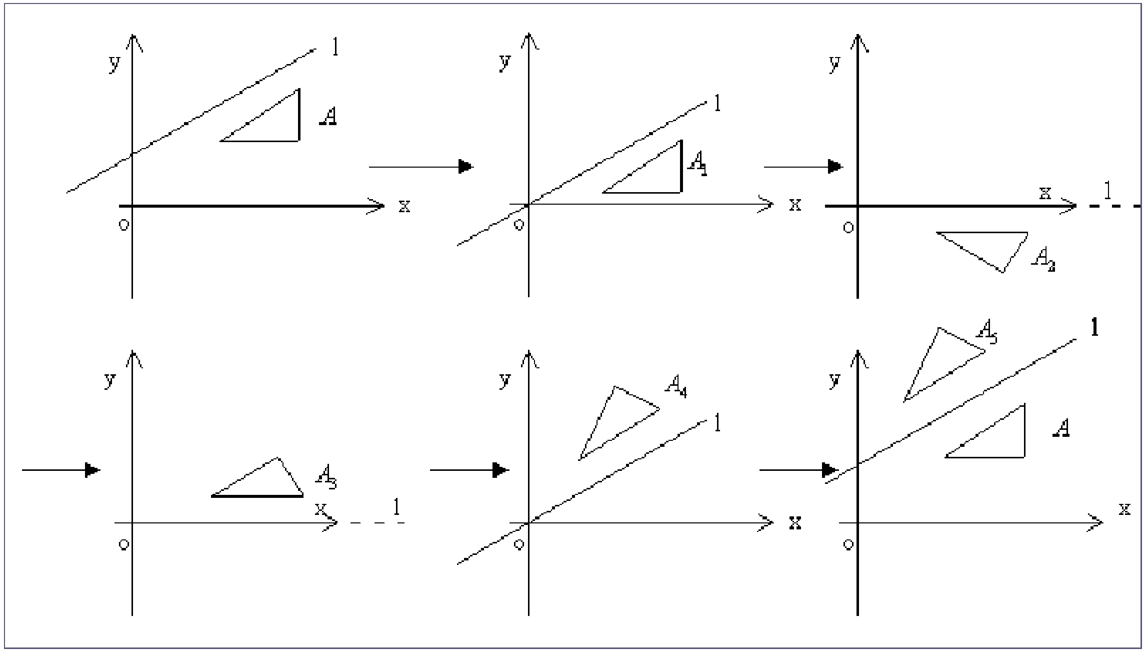
④ 将反射轴逆时针旋转*θ*角

$$T_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-a&1\end{pmatrix}$$

$$R(-\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$T_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

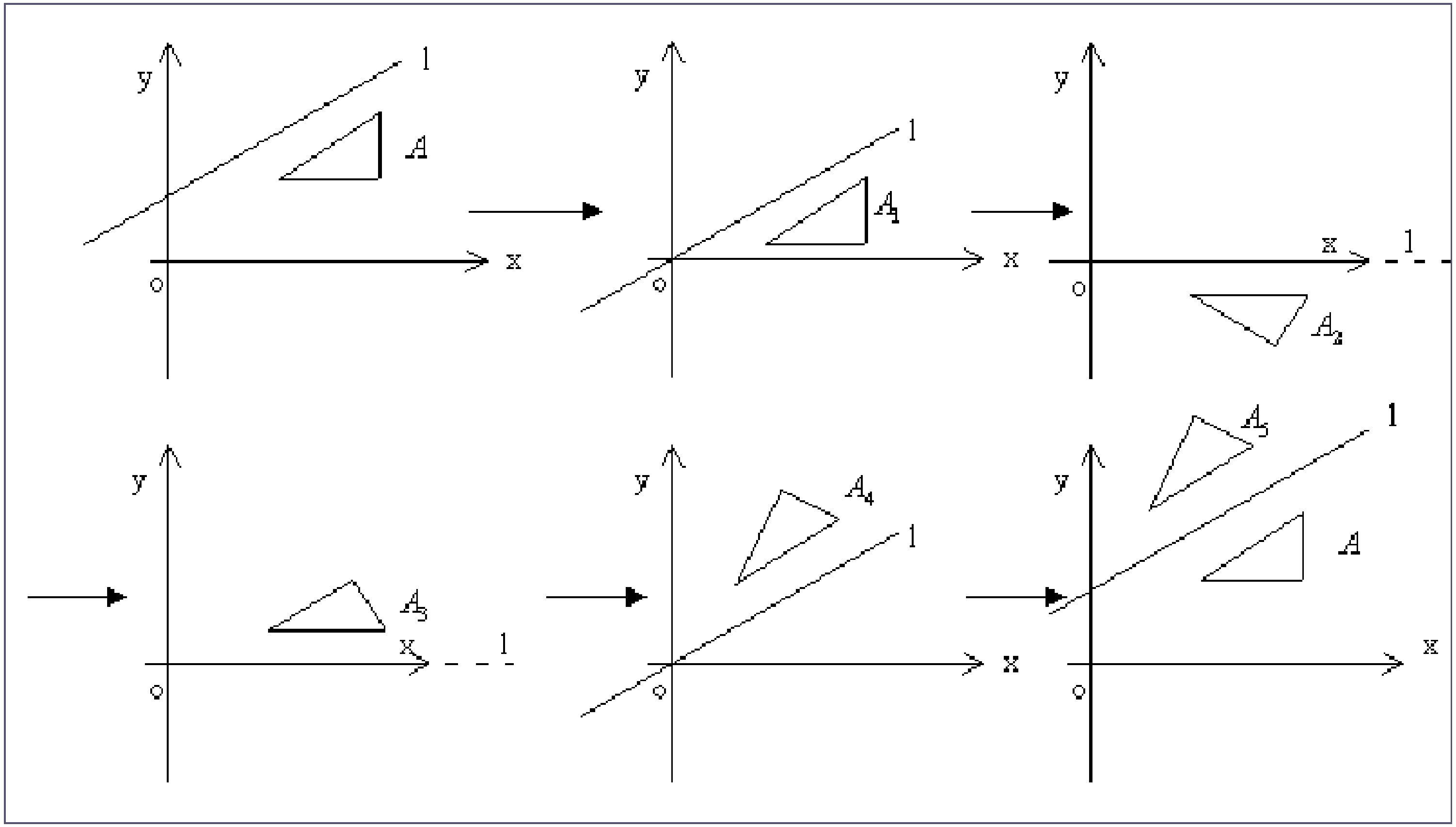
$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$



例4：任意的反射轴的反射变换

- 5.恢复反射轴的原始位置
- 因此 $T = T_1 R(-\theta) T_2 R(\theta) T_3$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$



例5（通用定向缩放）

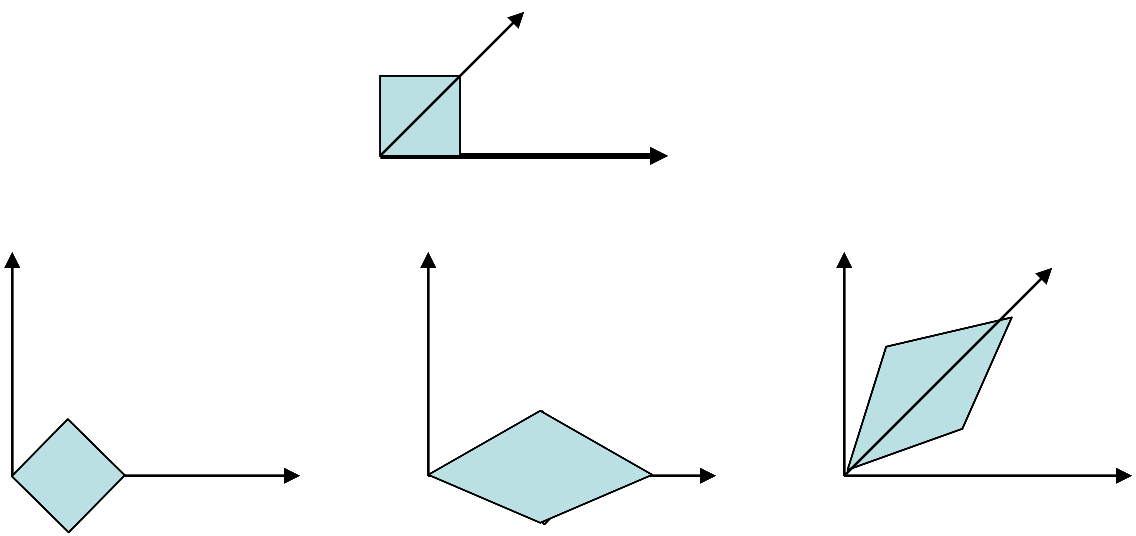
- 比例变换中的比例因子S_x, S_y只能在x轴方向或y轴方向起作用。
- 实际图形变换中，不仅是在x, y方向变换，往往要求在任意方向进行比例变换。
- 通过旋转变换和比例变换的组合，可以实现任意方向的比例变换。

解：定义比例因子$S1$和$S2$。

1. 使$S1$和$S2$旋转θ角后分别与x轴和y轴重合。
2. 进行比例变换。
3. 使$S1$和$S2$旋转$-\theta$角，返回原始位置。

通用定向缩放

- 如：图(*a*)为一单位正方形，对由(0,0)和(1,1)两点构成的对角线方向实施比例变换（1，2）



视点和投影模式

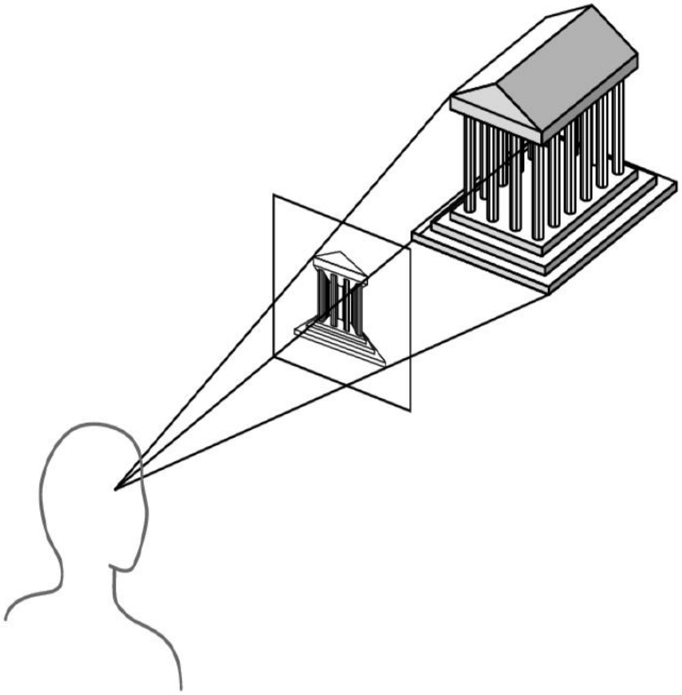
- 我们的眼睛能将三维场景感知为二维图像，大脑则会将二维图像再重构回三维
- 在计算机图形学中，我们利用投影模拟眼睛的功能和效果
- 投影的两个重要概念：
  - 视点变换：与相机（眼睛）位置及朝向相关
  - 投影模式：是将 3D 变换成为 2D 的变换模式，常用的包括：正交投影和透视投影

正交投影 (Orthographic Projection)

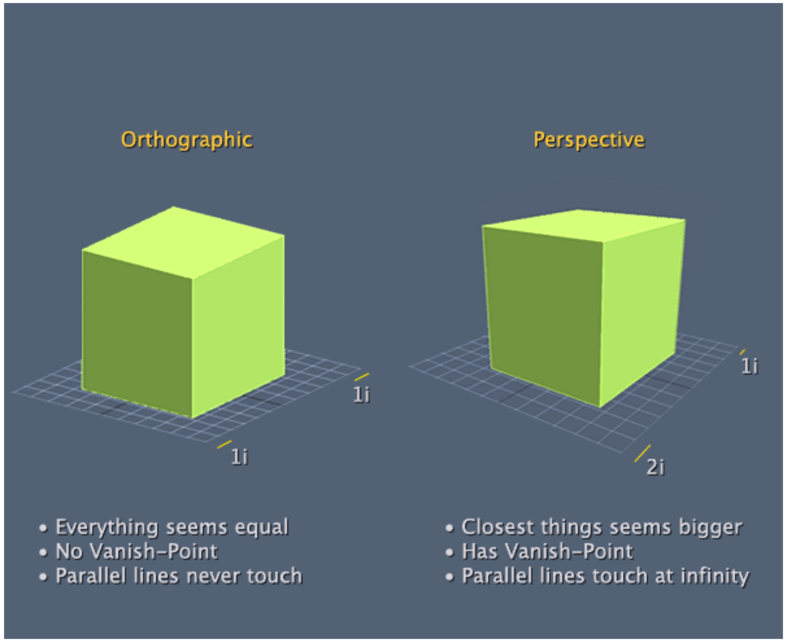
- 正交投影是视点在无穷远处的投影模式
- 缺乏立体透视效果
- 当 xy 平面是投影平面时，正交投影把 (x, y, z) 映射成为 (x, y, 0)

透视投影 (Perspective Projection)

- 透视投影是视点在有限距离处的投影模式
- 具有立体透视效果 – **近大远小**
- 当视点位于原点；投影平面为z = d 时，透视投影把 (x, y, z) 映射成为 ((d/z)x, (d/z)y, d)

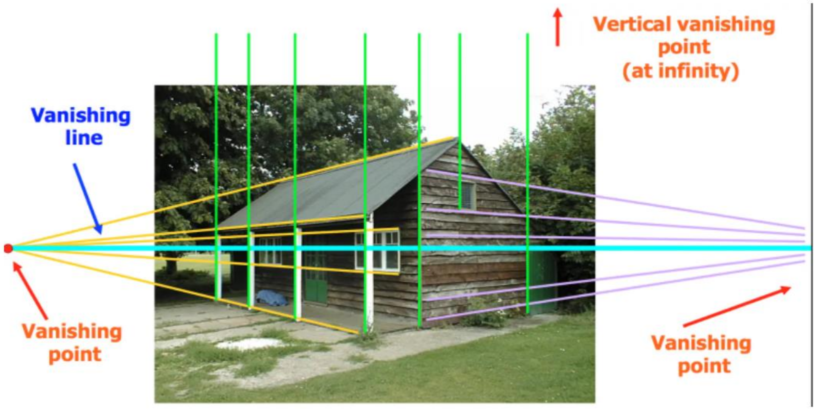


两种投影方式的对比



透视投影符合人们心理习惯：

- 离视点近的物体大，离视点远的物体小，
- 不平行于成像平面的平行线会相交于消隐点(vanish point)。



透视投影矩阵

- 使用齐次坐标描述的透视投影变换可以写成矩阵形式：
  - T (x, y, z) = ((d/z)x, (d/z)y, d)

$$
\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}
$$

窗口视图变换

用户域和窗口区

- 用户域：程序员用来定义草图的整个自然空间(*WD*)
  - 人们所要描述的图形均在用户域中定义。
  - 用户域是一个实数域，理论上是连续无限的。

- 窗口区：用户指定的任一区域(*W*)
  - 窗口区*W*小于或等于用户域*WD*
  - 小于用户域的窗口区*W*叫做用户域的子域。
  - 窗口可以有多种类型，矩形窗口、圆形窗口、多边形窗口等
  - 窗口可以嵌套，即在第一层窗口中可再定义第二层窗口，在第I层窗口中可再定义第I+1层窗口等。

窗口视图变换

1. 屏幕域(DC)：设备输出图形的最大区域，是有限的整数域。
   - 如图形显示器分辨率为

$$1024 \times 768 \rightarrow DC[0..1023] \times [0..767]$$

2. 视图区：任何小于或等于屏幕域的区域
   ① 视图区用设备坐标定义在屏幕域中
   ② 窗口区显示在视图区，需做窗口区到视图区的坐标转换。
   ③ 视图区可以有多种类型：圆形、矩形、多边形等。
   ④ 视图区也可以嵌套。

窗口区和视图区的坐标变换

- 设窗口的四条边界*WXL, WXR, WYB, WYT*
- 视图的四条边界*VXL, VXR, VYB, VYT*

则用户坐标系下的点（即窗口内的一点）(*Xw, Yw*)对应屏幕视图区中的点（*Xs, Ys*），其变换公式为：

$$
\begin{cases}
X_s = \dfrac{VXR - VXL}{WXR - WXL} \cdot \left(X_w - WXL\right) + VXL \\
Y_s = \dfrac{VYT - VYB}{WYT - WYB} \cdot \left(Y_w - WYB\right) + VYB
\end{cases}
$$

窗口区和视图区的坐标变换

- 简化为：

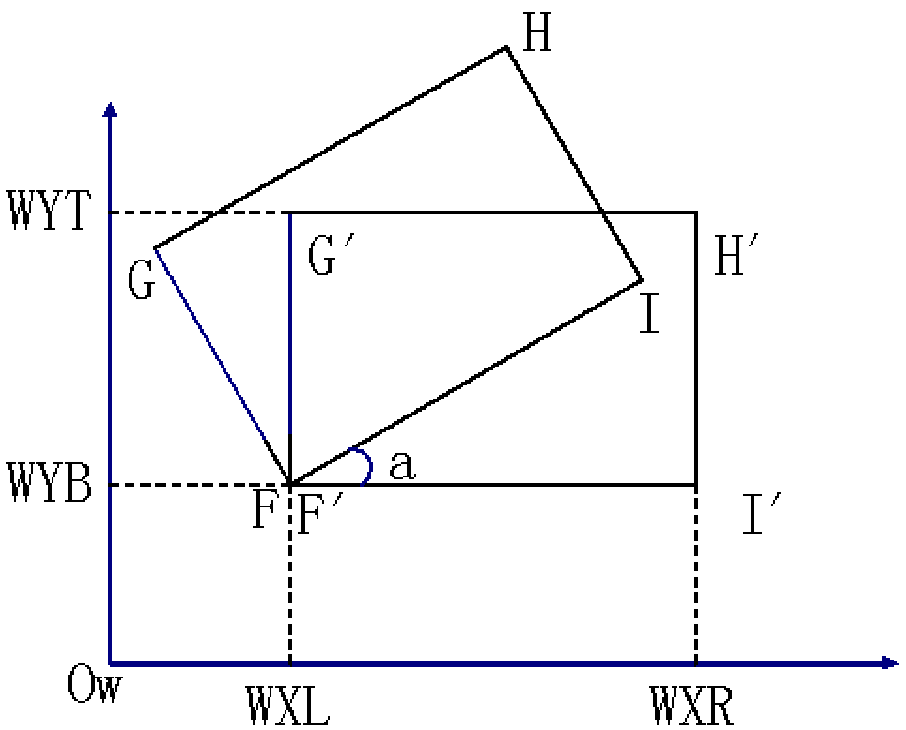
$$\begin{cases} X_s = a \cdot X_w + b \\ Y_s = c \cdot Y_w + d \end{cases} \rightarrow \text{(1)式}$$

1）当$a \neq c$时，即x 方向的变化与y方向的变化不同时，视图中的图形会有伸缩变化，图形变形。

2) 当$a=c=1$，$b=d=0$则$Xs=Xw, Ys=Yw$，图形完全相同。

- 思考：前面讲的窗口→视图变换时，假设窗口的边和坐标轴平行，如果窗口的边不和坐标轴平行呢？

窗口区和视图区的坐标变换



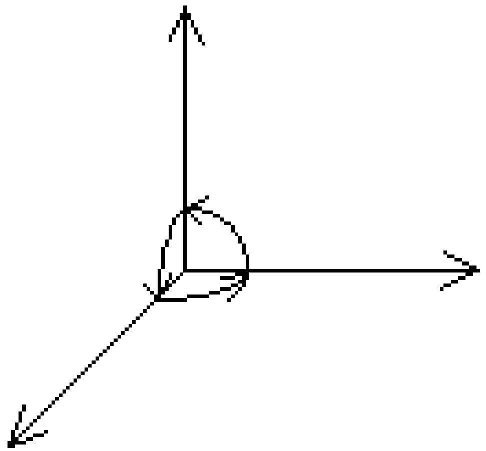
- 先让窗口*FGHI*转-α角，使它和*FG' H' I'*重合。
- 用(1)式进行计算。

三维几何变换

- 三维齐次坐标
  - (x,y,z)点对应的齐次坐标为 (x_h, y_h, z_h, h)

$$x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$$

  - 标准齐次坐标(x,y,z,1)
- 右手坐标系



三维几何变换

- 变换矩阵

$$T_{3D} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

- 平移变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix}$$

- 比例变换

$$\begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

三维变换矩阵-对称变换

- 在二维变换下，对称变换是以线和点为基准，在三维变换下，对称变换则是以**面、线、点**为基准的。
  - 对称于XOY平面

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ \ y \ -z \ 1]=[x \ y \ z \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 对称于YOZ平面

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [-x \ \ y \ z \ 1]=[x \ y \ z \ 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

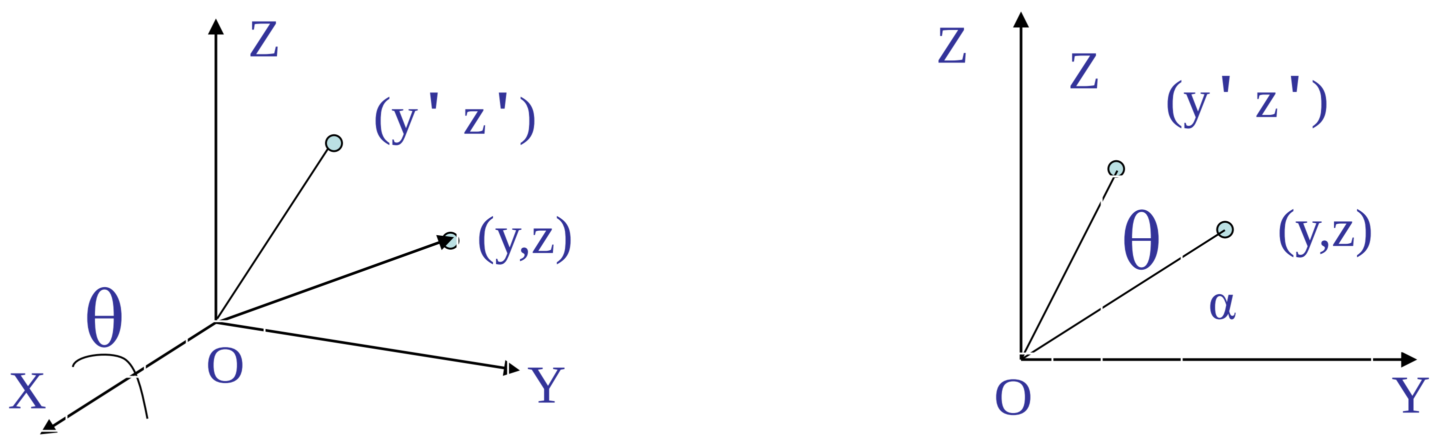
  - 对称于XOZ平面

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ -y \ z \ \ 1]=[x \ y \ z \ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维变换矩阵-旋转变换

– 绕X轴变换

空间上的立体绕X轴旋转时，立体上各点的X坐标不变，只是Y、Z坐标发生相应的变化。



$$x' = x$$

$$y' = \rho\cos(\alpha+\theta) = y*\cos\theta - z*\sin\theta$$

$$z' = \rho\sin(\alpha+\theta) = y*\sin\theta + z*\cos\theta$$

三维变换矩阵-旋转变换

- 矩阵表示为：

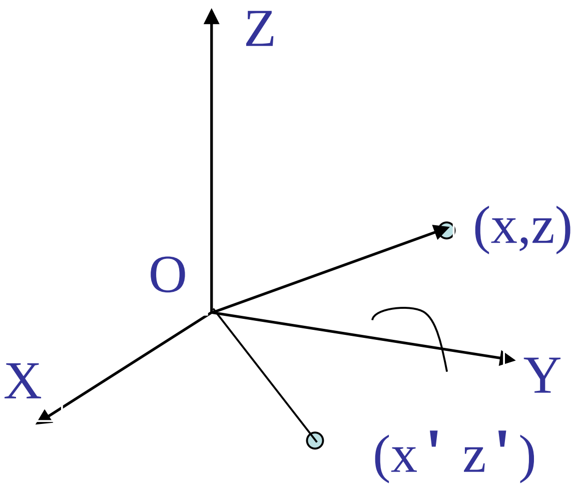
$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

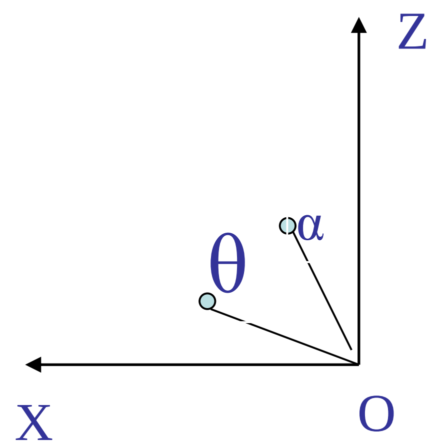
- 遵循右手法则，即若$\theta>0$，大拇指指向轴的方向，其它手指指的方向为旋转方向。

三维变换矩阵-旋转变换

– 绕Y轴旋转

此时，Y坐标不变，X，Z坐标相应变化。





$$x' = \rho\sin(\alpha+\theta) = x*\cos\theta + z*\sin\theta$$

$$y' = y$$

$$z' = \rho\cos(\alpha+\theta) = z*\cos\theta - x*\sin\theta$$

三维变换矩阵-旋转变换

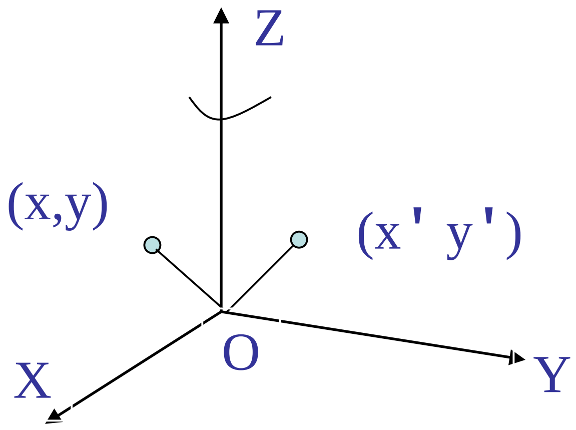
- 矩阵表示为

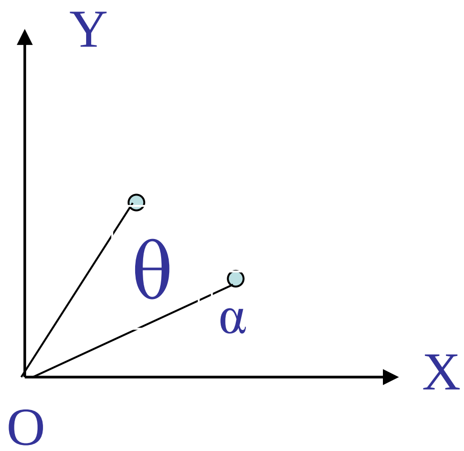
$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维变换矩阵-旋转变换

– 绕Z轴旋转

此时，Z坐标不变，X，Y坐标相应变化。





$$x' = \rho\cos(\alpha+\theta) = x*\cos\theta - y*\sin\theta$$
$$y' = \rho\sin(\alpha+\theta) = x*\sin\theta + y*\cos\theta$$
$$z' = z$$

三维变换矩阵-旋转变换

- 矩阵表示为：

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1]\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴的旋转变换-方法1

a）绕过原点的任意轴的旋转变换

空间点$P(x,y,z)$ 绕过原点的任意轴ON 逆时针旋转θ角的旋转变换。

基本思想：因ON轴不是坐标轴，应设法旋转该轴，使之与某一坐标轴重合，然后进行旋转θ角的变换，最后按逆过程，恢复该轴的原始位置。

绕任意轴的旋转变换-方法1

解：令ON为单位长度，其方向余弦为：

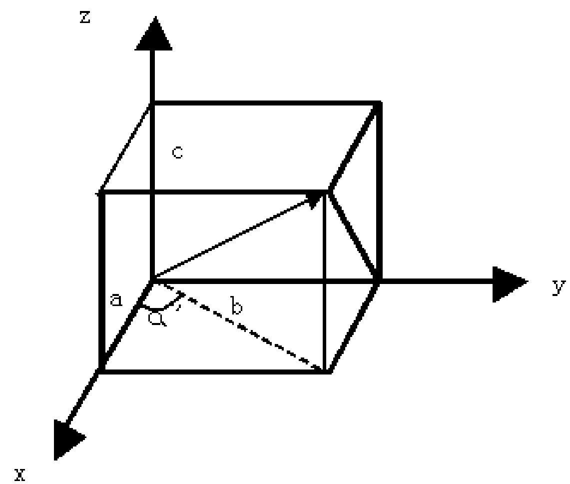
$$a=\cos\alpha=\frac{x}{r};\quad b=\cos\beta=\frac{y}{r};\quad c=\cos\gamma=\frac{z}{r};r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

α、β、γ为ON轴与各坐标轴的夹角。

变换过程如下：

1) 让ON轴绕z轴旋转$-\alpha'$，使之在XOZ平面上。其中

$$\sin\alpha'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\qquad \cos\alpha'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



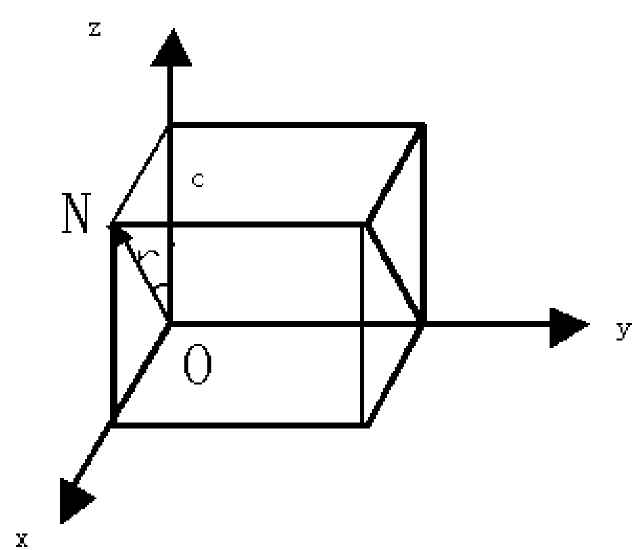
绕任意轴的旋转变换-方法1

因此

$$R(-\alpha')_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & -\sin\alpha' & 0 & 0 \\ \sin\alpha' & \cos\alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2）让在*XOZ* 平面上的*ON* 绕*y* 轴旋转-*γ'* ,使之与*z* 轴重合。其中

$$\sin\gamma' = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\gamma' = c$$



因此

$$R(-\gamma')_y = \begin{pmatrix} \cos\gamma' & 0 & \sin\gamma' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\gamma' & 0 & \cos\gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

绕任意轴的旋转变换-方法1

3）P点绕ON轴（即z轴）逆时针旋转θ角 $R(\theta)_z$

4）ON轴绕y轴旋转γ' $R(\gamma')_y$

5）ON轴绕z轴旋转α' $R(\alpha')_z$

因此

$$T = R(-\alpha')_z \cdot R(-\gamma')_y \cdot R(\theta)_z \cdot R(\gamma')_y \cdot R(\alpha')_z$$

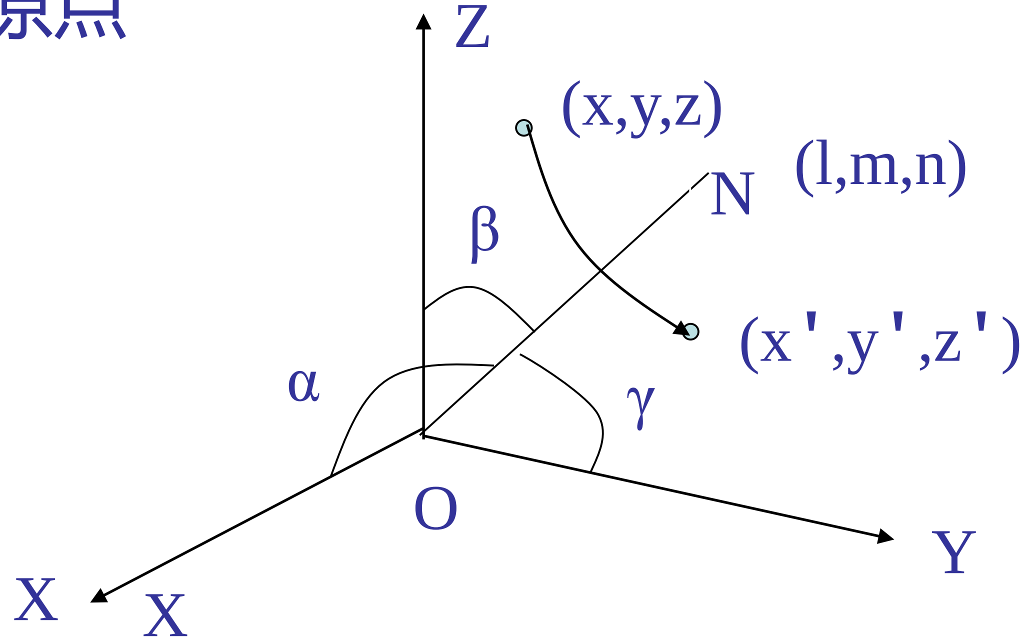
b）绕任意轴的旋转变换

上面的ON轴若不过原点，而是过任意点(x_0,y_0,z_0)，变换如何呢?

绕任意轴的旋转变换-方法2

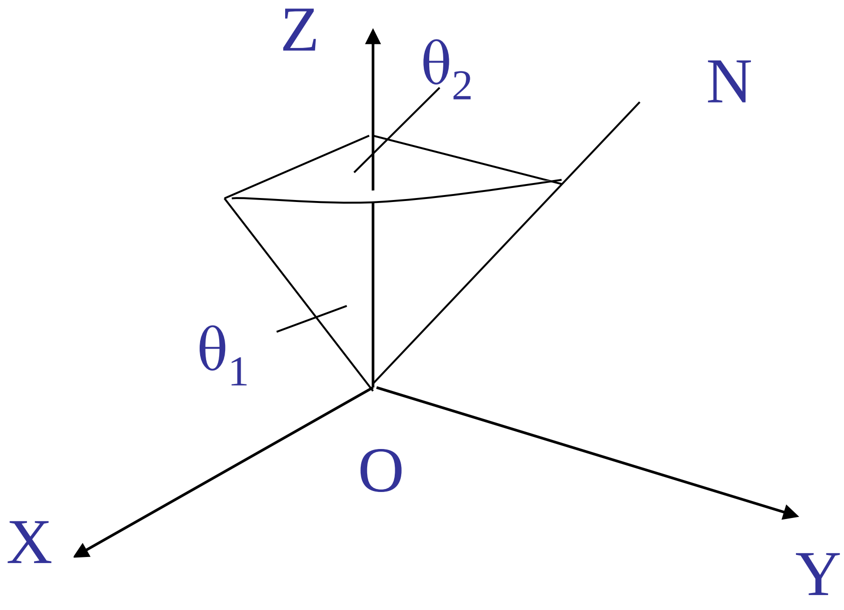
组合变换：空间一点绕空间任一轴线的旋转变换。要通过将几个基本的变换组合在一起，得到该组合变换。

- 假定空间任一直线的方向矢量分别为：(l,m,n)并经过原点



绕任意轴的旋转变换-方法2

能否转换成绕X、Y或Z轴旋转的变换？



ON绕Z轴旋转θ_2到XOZ平面上，然后再绕Y轴旋转θ_1，即可与Z轴重合。

绕任意轴的旋转变换-方法2

这样，可得空间上任一点绕ON轴旋转的变换过程如下：

1）首先通过两次旋转，使ON轴与Z轴重合；

2）然后使点绕Z轴旋转θ角；

3）最后通过与1）相反的旋转，使ON轴回到原来的位置。

假设，绕Z轴的旋转$-\theta_2$矩阵为T_1

绕Y轴的旋转$-\theta_1$矩阵为T_2

绕Z轴的旋转θ矩阵为T_3

绕Y轴的旋转θ_1矩阵为T_4

绕Z轴的旋转θ_2矩阵为T_5

绕任意轴的旋转变换-方法2

则总体变换矩阵为：

$$T = T_1\ T_2\ T_3\ T_4\ T_5$$

由上推导可看出，只要能求出θ_1 、θ_2的值，即可通过上式获得绕ON轴的变换矩阵。

由于矢量 （0 0 1）绕Y轴旋转θ_1 ，再绕Z轴旋转θ_2 即可与ON轴重合。即：

$$[l\ \ m\ \ n\ \ 1] = [0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕任意轴的旋转变换-方法2

$[l\ m\ n\ 1] = [\sin\theta_1\cos\theta_2，\sin\theta_1\sin\theta_2，\cos\theta_1，1]$

$l = \sin\theta_1\cos\theta_2$

$m = \sin\theta_1\sin\theta_2$

$n = \cos\theta_1$

从而通过上式即可得到θ_1、θ_2的值。

问题：当任一轴线的端点不在原点时，此时应如何计算变换矩阵?