

Отчёт по лабораторной работе №5

Математическое моделирование

Чекалова Лилия Руслановна

Содержание

Цель работы	5
Задание	6
Теоретическое введение	7
Выполнение лабораторной работы	9
Выводы	14
Список литературы	15

Список таблиц

Список иллюстраций

0.1	Программа на Julia	9
0.2	График зависимости числа хищников от числа жертв на Julia	10
0.3	Графики изменения числа хищников и жертв на Julia	10
0.4	Нахождение стационарного состояния	11
0.5	Координаты точки стационарного состояния	11
0.6	Программа на OpenModelica	12
0.7	График зависимости числа хищников от числа жертв на OpenModelica . .	13
0.8	Графики изменения числа хищников и числа жертв на OpenModelica . .	13

Цель работы

- Познакомиться с простейшей моделью взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва»
- Визуализировать модель с помощью Julia и OpenModelica

Задание

- Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
- Построить графики изменения численности хищников и численности жертв при заданных начальных условиях
- Найти стационарное состояние системы

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — модель Лотки-Вольтерры. Данная модель основывается на следующих предположениях:

- Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
- В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников уменьшается
- Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
- Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
- Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x — число жертв, y — число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, — естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение), оно будет

в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0)$, $y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

Более подробно см. в [1].

Выполнение лабораторной работы

По заданной системе пишем программу (рис. 0.1). В данном случае x — численность хищников, а y — численность жертв.

```
using Plots
using DifferentialEquations

const x0 = 9
const y0 = 29
const c = 0.27
const d = 0.868
const a = 0.37
const b = 0.804

T = (0, 400)

u0 = [x0, y0]

p = (a, b, c, d)

function F(du, u, p, t)
    a, b, c, d = p
    du[1] = -c*u[1]*d*u[1]*u[2]
    du[2] = a*u[2]*b*u[1]*u[2]
end

prob1 = ODEProblem(F, u0, T, p)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.1)

plt = plot(sol1, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="Зависимость численности хищников от численности жертв", xlabel="численность жертв", ylabel="численность хищников")
plt2 = plot(sol1, vars=(0,1), color=:blue, label="численность хищников", title="Изменение численности хищников", xlabel="T")
plot!(plt2, sol1, vars=(0,2), color=:green, label="численность жертв")

savefig(plt, "lab5_1.png")
savefig(plt2, "lab5_2.png")
```

Рис. 0.1: Программа на Julia

Получаем график зависимости численности хищников от численности жертв (рис. 0.2) и графики изменения численности хищников и численности жертв (рис. 0.3).

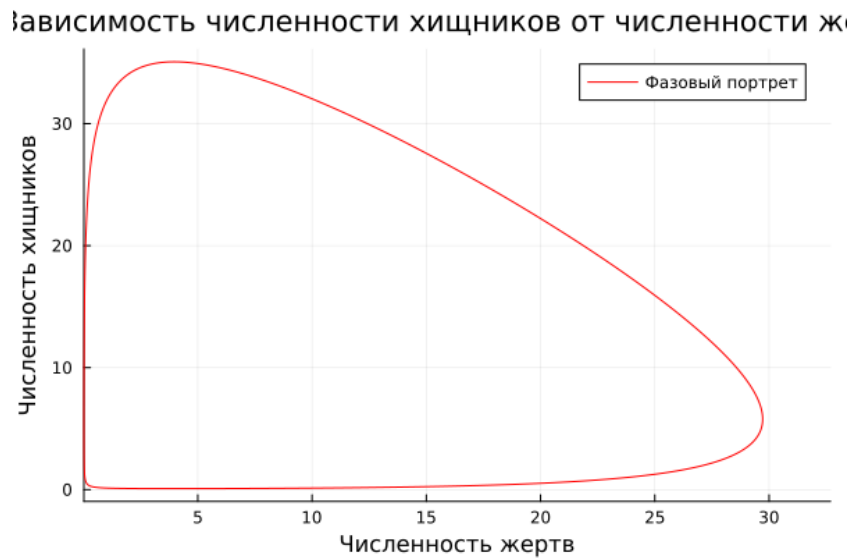


Рис. 0.2: График зависимости числа хищников от числа жертв на Julia

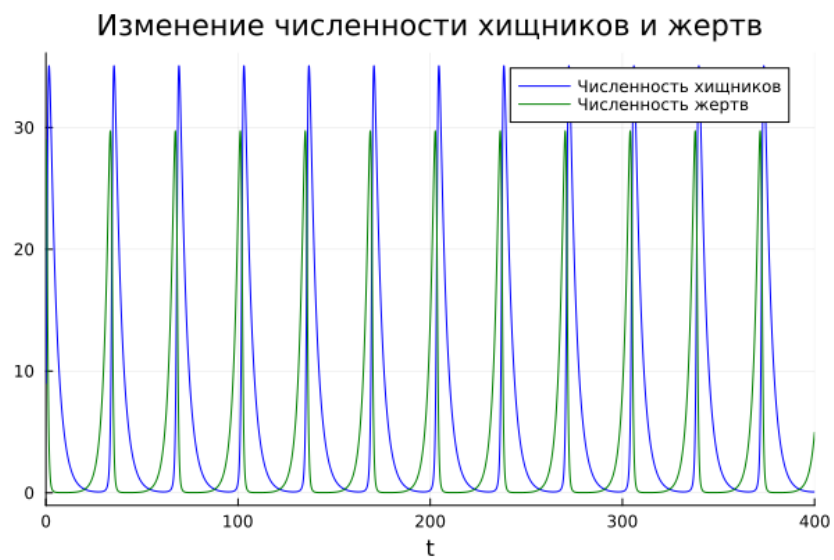


Рис. 0.3: Графики изменения числа хищников и жертв на Julia

Добавим в программу нахождение стационарного состояния системы (рис. 0.4).

```

x0_2 = a/b
y0_2 = c/d

@show x0_2
@show y0_2

u0_2 = [x0_2, y0_2]

prob2 = ODEProblem(F, u0_2, T, p)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.1)

plt3 = plot(sol2, vars=(2,1), seriestype=:scatter, color=:red, label="Фазовый портрет",
title="Зависимость численности хищников от численности жертв", xlabel="Численность жертв", ylabel="Численность хищников")

savefig(plt3, "lab5_3.png")

```

Рис. 0.4: Нахождение стационарного состояния

В результате видим, что стационарное состояние находится в точке со следующими координатами (рис. 0.5).

```

x0_2 = 5.78125
y0_2 = 3.9705882352941178

```

Рис. 0.5: Координаты точки стационарного состояния

Теперь напомним программу для нашего уравнения на OpenModelica (рис. 0.6).

```
model PredPrey
parameter Integer x0 = 9;
parameter Integer y0 = 29;
parameter Real a = 0.37;
parameter Real b = 0.064;
parameter Real c = 0.27;
parameter Real d = 0.068;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
der(x) = -c*x+d*x*y;
der(y) = a*y-b*x*y;
end PredPrey;
```

Рис. 0.6: Программа на OpenModelica

Получаем график зависимости числа хищников от числа жертв (рис. 0.7) и графики изменения числа хищников и числа жертв (рис. 0.8).

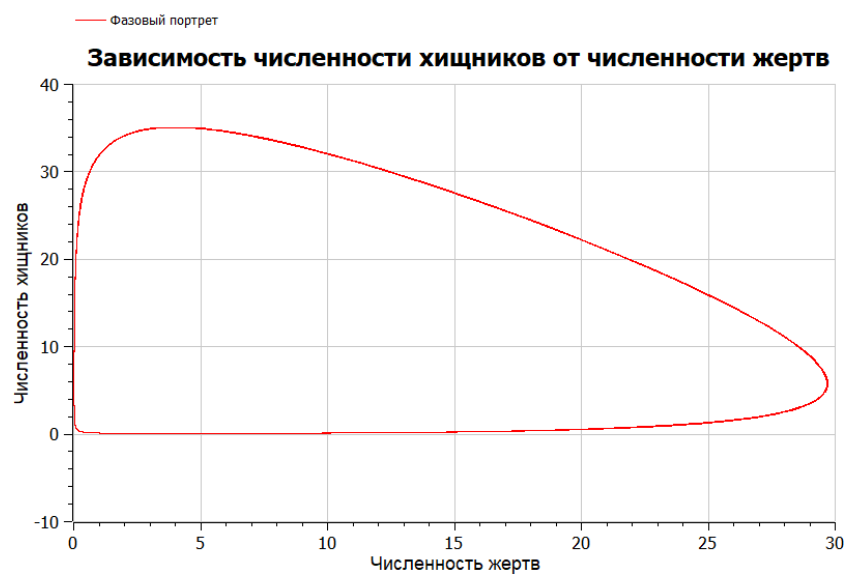


Рис. 0.7: График зависимости числа хищников от числа жертв на OpenModelica

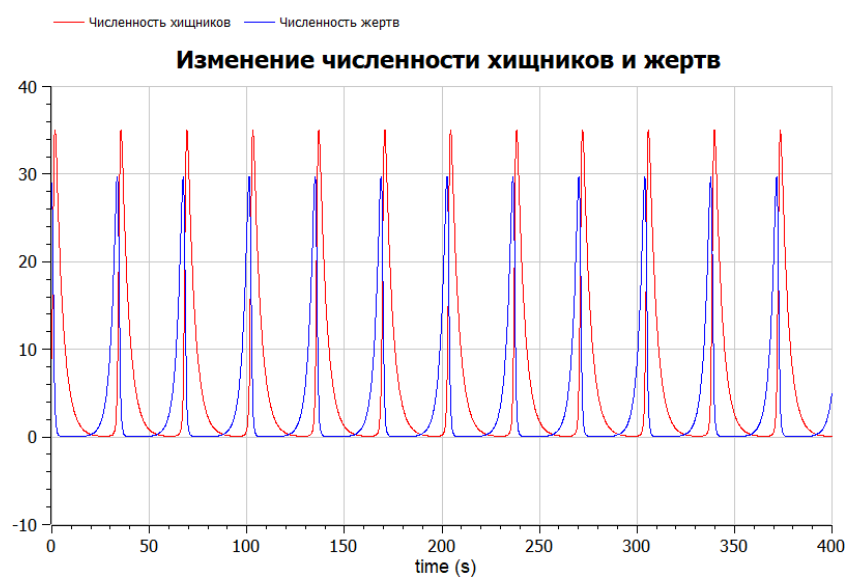


Рис. 0.8: Графики изменения числа хищников и числа жертв на OpenModelica

Выводы

В ходе работы мы изучили простейшую модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» — моделью Лотки-Вольтерры, и применили навыки работы с Julia и OpenModelica для построения графиков, визуализирующих эту модель. Кроме того мы нашли стационарное состояние системы — оно находится примерно в точке $x_0 = 5.78$, $y_0 = 3.97$. Результатом работы стали график зависимости численности хищников от численности жертв, графики изменения численности хищников и численности жертв и график стационарного состояния системы.

На мой взгляд, OpenModelica лучше справляется с задачами, имеющими в основе дифференциальные уравнения, однако Julia дает больше возможностей для визуализации, то есть для работы с графиками.

Список литературы

1. Теоретические материалы к лабораторной работе "Модель Лотки-Вольтерры"
[Электронный ресурс]. URL: <https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=967245>.