Отчёт по лабораторной работе №6

Математическое моделирование

Чекалова Лилия Руслановна

Содержание

Цель работы **5**

Задание **6**

Теоретическое введение **7**

Выполнение лабораторной работы **9**

Выводы **15**

Список литературы **16**

Список таблиц

Список иллюстраций

0.1 Программа на Julia для первого случая 9
0.2 Изменение числа особей в группе S на Julia для первого случая 10
0.3 Изменение числа особей в группе R и I на Julia для первого случая 10
0.4 Программа на Julia для второго случая 11
0.5 Изменение числа особей в группах S, I, R на Julia для второго случая . . 11
0.6 Программа на OpenModelica для первого случая 12
0.7 График изменения числа особей в группе S на OpenModelica для первого случая 12
0.8 Графики изменения числа особей в группах I и R на OpenModelica для первого случая 13
0.9 Программа на OpenModelica для второго случая 13
0.10 График изменения числа особей в группах S, I и R на OpenModelica для второго случая 14

Цель работы

- Познакомиться с простейшей моделью эпидемии
- Визуализировать модель с помощью Julia и OpenModelica

Задание

- Построить график изменения числа особей в группах S, I и R
- Рассмотреть два случая: где $I(t) \leq I^*$ и где $I(t) > I^*$

Теоретическое введение

Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа — это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа — это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) — это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} -S\alpha, & I(t) > I^* \\ 0, & I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} S\alpha - I\beta, & I(t) > I^* \\ -I\beta, & I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = I\beta$$

Постоянные пропорциональности α и β — это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Более подробно см. в [1].

Выполнение лабораторной работы

Рассмотрим первый случай, где $I(t) \leq I^*$, и напишем программу (рис. 0.1). В функции F1 опишем, как меняется численность особей в группах S, I и R.

```
using Plots
using DifferentialEquations

const N = 18354
const I0 = 102
const R0 = 100

const alpha = 0.01
const beta = 0.02

S0 = N - I0 - R0

T = (0, 200)

u0 = [S0, I0, R0]

p1 = (beta)

# I0 < I*

function F1(du, u, p, t)
    beta = p
    du[1] = 0
    du[2] = -beta*u[2]
    du[3] = beta*u[2]
end

prob1 = ODEProblem(F1, u0, T, p1)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.01)

plt = plot(sol1, vars=(0,1), color=:red, label="S(t)", title="Изменения числа особей в группе S", xlabel="t")
plt2 = plot(sol1, vars=(0,2), color=:blue, label="I(t)", title="Изменения числа особей в группах I и R", xlabel="t")
plot!(plt2, sol1, vars=(0,3), color=:green, label="R(t)")

savefig(plt, "lab6_1S.png")
savefig(plt2, "lab6_1RI.png")
```

Рис. 0.1: Программа на Julia для первого случая

Результаты сохраняем в два графика (рис. 0.2 и рис. 0.3), чтобы можно было увидеть изменения в группах R и I. Так как все инфицированные изолированы, количество особей в группе S не изменяется, число особей в группе I уменьшается, а в группе R — растет.

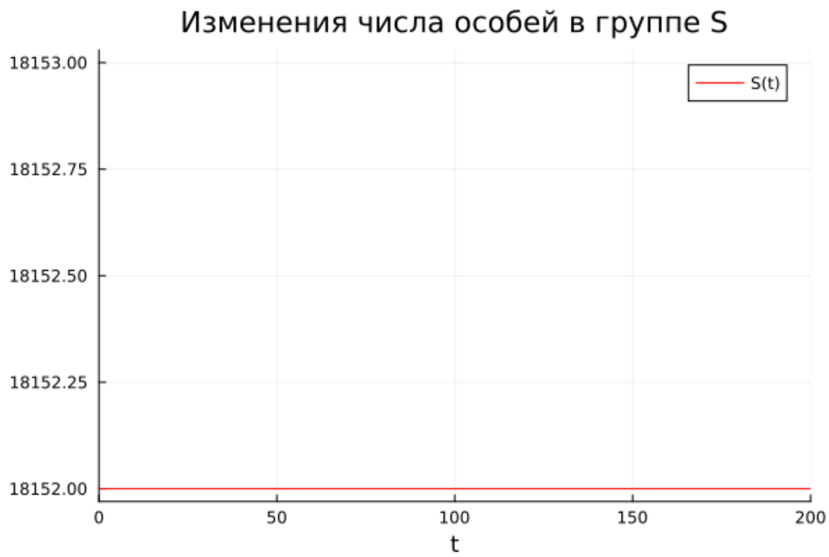

Рис. 0.2: Изменение числа особей в группе S на Julia для первого случая

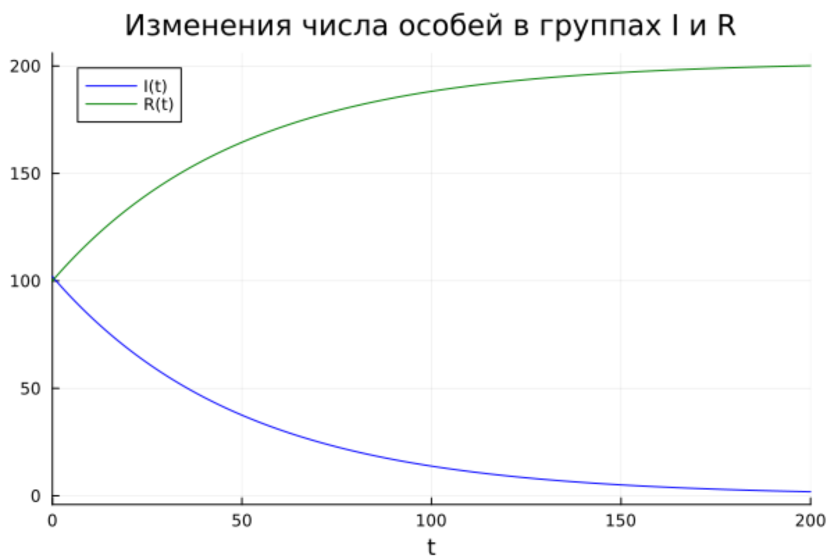

Рис. 0.3: Изменение числа особей в группе R и I на Julia для первого случая

Изменим функцию, чтобы она описывала ситуацию, где $I(t) > I^*$ (рис. 0.4).

```
# I0 > I*

p2 = (alpha, beta)

function F2(du, u, p, t)
    alpha, beta = p
    du[1] = -alpha*u[1]
    du[2] = alpha*u[1]-beta*u[2]
    du[3] = beta*u[2]
end

prob2 = ODEProblem(F2, u0, T, p2)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.01)

plt = plot(sol2, vars=(0,1), color=:red, label="S(t)", title="Изменения числа особей в группах", xlabel="t")
plot!(plt, sol2, vars=(0,2), color=:blue, label="I(t)")
plot!(plt, sol2, vars=(0,3), color=:green, label="R(t)")

savefig(plt, "lab6_2.png")
```

Рис. 0.4: Программа на Julia для второго случая

Получаем графики изменения численности особей для групп S, I, R (рис. 0.5). Численность в группе R увеличивается, в группе I сначала растет, потом начинает уменьшаться, а в группе S уменьшается, то есть особи из группы S сначала переходят в группу I, а затем в группу R.

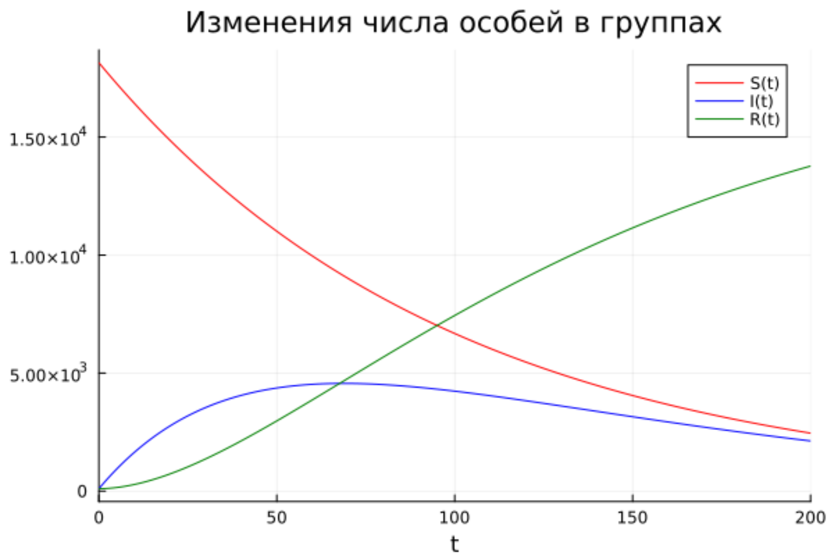

Рис. 0.5: Изменение числа особей в группах S, I, R на Julia для второго случая

Теперь напишем программу, рассматривающую первый случай, на OpenModelica (рис. 0.6).

```
model Epidem
parameter Integer N = 18354;
parameter Integer I0 = 102;
parameter Integer R0 = 100;
parameter Integer S0 = N - I0 - R0;
parameter Real alpha = 0.01;
parameter Real beta = 0.02;
Real S(start=S0);
Real I(start=I0);
Real R(start=R0);
equation
der(S) = 0;
der(I) = -beta*I;
der(R) = beta*I;
end Epidem;
```

Рис. 0.6: Программа на OpenModelica для первого случая

Получаем также два графика изменения числа особей в группах (рис. 0.7 и рис. 0.8). Результаты совпадают с результатами, полученными на Julia.

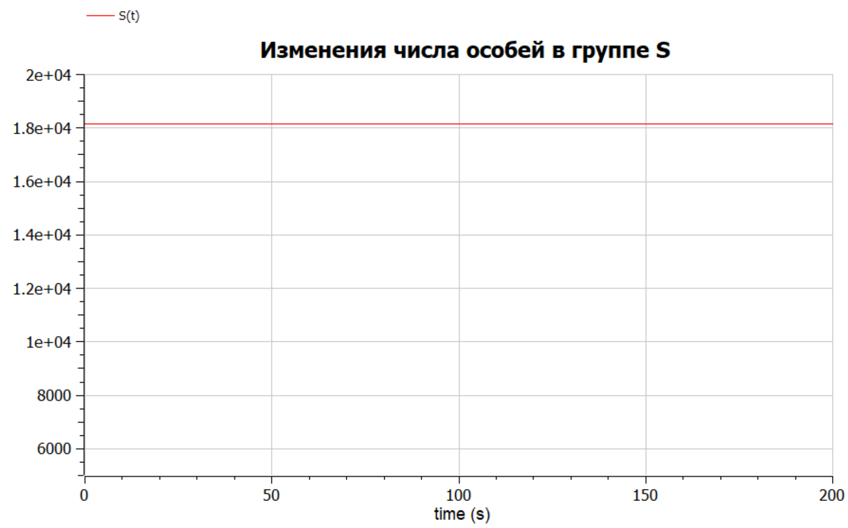

Рис. 0.7: График изменения числа особей в группе S на OpenModelica для первого случая

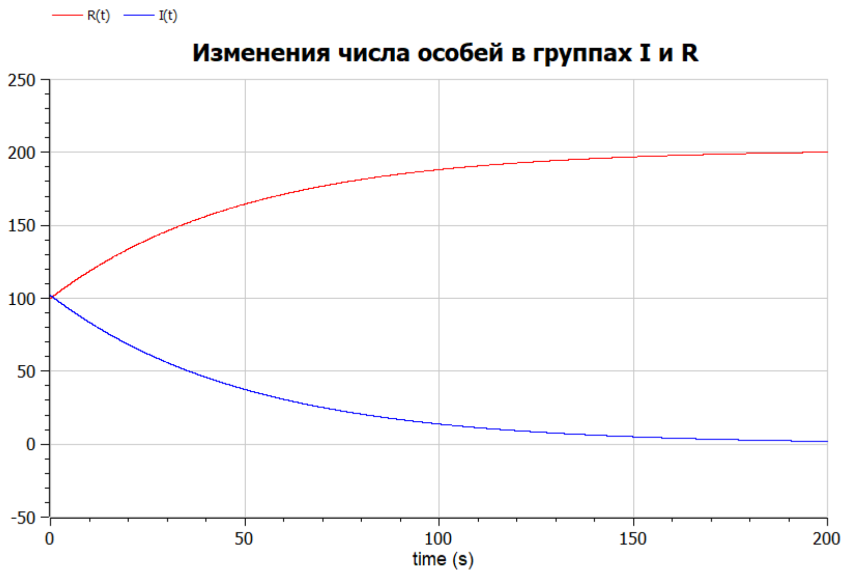

Рис. 0.8: Графики изменения числа особей в группах I и R на OpenModelica для первого случая

Изменим уравнения, чтобы они описывали второй случай (рис. 0.9).

```
model Epidem
parameter Integer N = 18354;
parameter Integer I0 = 102;
parameter Integer R0 = 100;
parameter Integer S0 = N - I0 - R0;
parameter Real alpha = 0.01;
parameter Real beta = 0.02;
Real S(start=S0);
Real I(start=I0);
Real R(start=R0);
equation
der(S) = -alpha*S;
der(I) = alpha*S - beta*I;
der(R) = beta*I;
end Epidem;
```

Рис. 0.9: Программа на OpenModelica для второго случая

Получаем графики изменения числа особей в группах (рис. 0.10). Эти графики идентичны графикам, полученным на Julia.

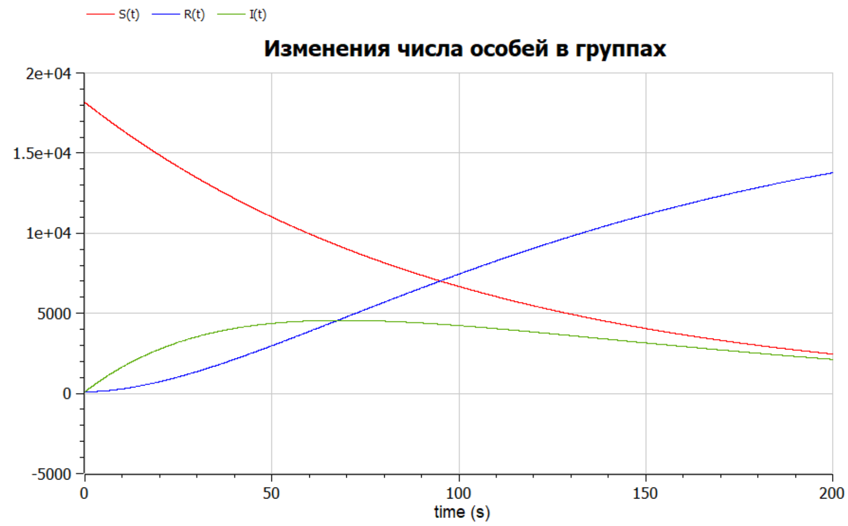

Рис. 0.10: График изменения числа особей в группах S, I и R на OpenModelica для второго случая

Выводы

В ходе работы мы изучили модель эпидемии и применили навыки работы с Julia и OpenModelica для построения графиков, визуализирующих эту модель. Результатом работы стали графики изменения численности особей в группах S, I и R для двух случаев. Мы увидели, что в первом случае численность особей в группе S не изменяется, так как группа I считается изолированной, а во втором случае численность особей в группе S снижается, так как особи сначала переходят в группу I, а потом в группу R.

Как я уже упоминала, OpenModelica, по моему мнению, лучше справляется с задачами, имеющими в основе дифференциальные уравнения.

Список литературы

1. Теоретические материалы к лабораторной работе ”Модель эпидемии”l [Электронный ресурс]. URL: https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=967249.