

Лабораторная работа №4

Математическое моделирование

Чекалова Лилия Руслановна

Содержание

Цель работы	5
Задание	6
Теоретическое введение	7
Выполнение лабораторной работы	9
Выводы	19
Список литературы	20

Список таблиц

Список иллюстраций

0.1	Программа на Julia для первого случая	9
0.2	Решения уравнения на Julia для первого случая	10
0.3	Фазовый портрет на Julia для первого случая	10
0.4	Программа на Julia для второго случая	11
0.5	Решения уравнения на Julia для второго случая	11
0.6	Фазовый портрет на Julia для второго случая	12
0.7	Программа на Julia для третьего случая	12
0.8	Решения уравнения на Julia для третьего случая	13
0.9	Фазовый портрет на Julia для третьего случая	13
0.10	Программа на OpenModelica для первого случая	14
0.11	Решения уравнения на OpenModelica для первого случая	14
0.12	Фазовый портрет на OpenModelica для первого случая	15
0.13	Программа на OpenModelica для второго случая	15
0.14	Решения уравнения на OpenModelica для второго случая	16
0.15	Фазовый портрет на OpenModelica для второго случая	16
0.16	Программа на OpenModelica для третьего случая	17
0.17	Решения уравнения на OpenModelica для третьего случая	17
0.18	Фазовый портрет на OpenModelica для третьего случая	18

Цель работы

- Построение математической модели колебаний гармонического осциллятора
- Визуализация модели на языках Julia и OpenModelica

Задание

- Построить фазовый портрет и решение уравнения гармонического осциллятора при колебаниях гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы
- Построить фазовый портрет и решение уравнения гармонического осциллятора при колебаниях гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы
- Построить фазовый портрет и решение уравнения гармонического осциллятора при колебаниях гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором.

Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

, где x — переменная, описывающая состояние системы (например, смещение грузика), γ — параметр, характеризующий потери энергии (например, трение в механической системе), ω_0 — собственная частота колебаний.

Зададим начальные условия:
$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Для первого случая потери в системе отсутствуют ($\gamma = 0$), поэтому уравнение принимает вид: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Представим его в виде системы:
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}.$$

Для второго случая появляются потери в системе, и система уравнений принимает вид:
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x \end{cases}.$$

Для третьего случая помимо потерь на систему влияет внешняя сила, описываемая

функцией $P(t)$. Тогда система уравнений примет вид:
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = P(t) - 2\gamma\dot{x} - \omega_0^2 x \end{cases} .$$

Для всех этих систем начальные условия примут вид:
$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Более подробно см. в [1].

Выполнение лабораторной работы

По полученному уравнению для первого случая пишем программу на Julia (рис. 0.1).

```
using Plots
using DifferentialEquations

const x0 = 0.7
const y0 = -0.7
const omega = 7.7
const gamma = 7

P(t) = 0.7*sin(7*t)

T = (0, 77)

u0 = [x0, y0]

p1 = (omega)
p2 = (omega, gamma)

function F1(du, u, p, t)
    omega = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -omega*u[1]
end

prob1 = ODEProblem(F1, u0, T, p1)
sol1 = solve(prob1, dtmax=0.05)

plt = plot(sol1, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="Случай №1", xlabel="x", ylabel="y")
plt2 = plot(sol1, vars=(0,1), color=:blue, label="x(t)", title="Случай №1", xlabel="t")
plot!(plt2, sol1, vars=(0,2), color=:green, label="y(t)")

savefig(plt, "lab4_1_1.png")
savefig(plt2, "lab4_1_2.png")
```

Рис. 0.1: Программа на Julia для первого случая

Получаем графики решения уравнения (рис. 0.2) и фазовый портрет гармонического осциллятора (0.3). Из замкнутости фазового портрета можно сделать вывод о консервативности системы, то есть об отсутствии влияния на систему со стороны внешних сил.

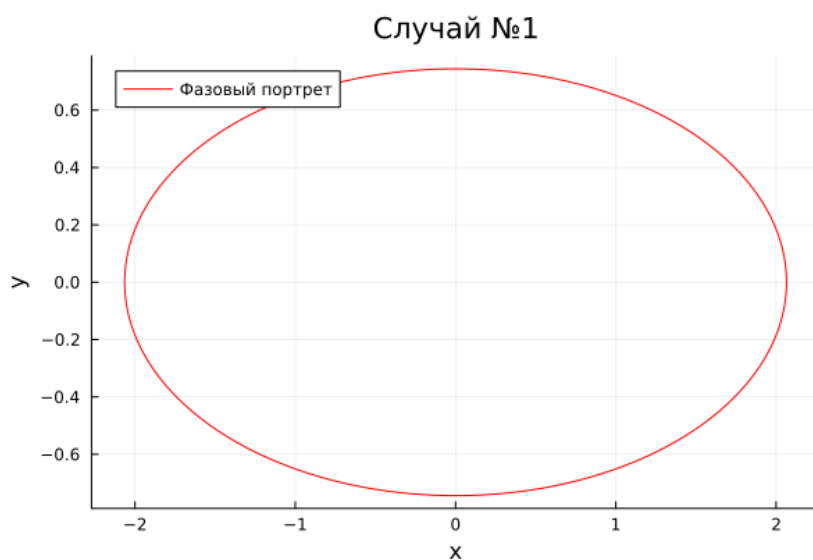


Рис. 0.2: Решения уравнения на Julia для первого случая

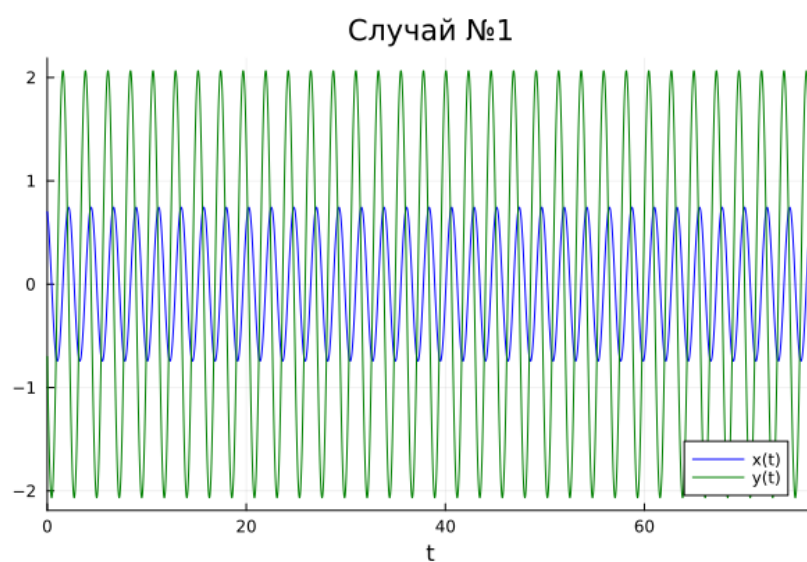


Рис. 0.3: Фазовый портрет на Julia для первого случая

Изменим уравнение в нашей программе, чтобы оно описывало второй случай (рис. 0.4).

```

function F2(du, u, p, t)
    omega, gamma = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = -gamma*du[1]-omega*u[1]
end

prob2 = ODEProblem(F2, u0, T, p2)
sol2 = solve(prob2, dtmax=0.05)

plt = plot(sol2, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="Случай №2", xlabel="x", ylabel="y")
plt2 = plot(sol2, vars=(0,1), color=:blue, label="x(t)", title="Случай №2", xlabel="t")
plot!(plt2, sol2, vars=(0,2), color=:green, label="y(t)")

savefig(plt, "lab4_2_1.png")
savefig(plt2, "lab4_2_2.png")

```

Рис. 0.4: Программа на Julia для второго случая

Для второго случая получаем графики решения уравнения (рис. 0.5) и фазовый портрет гармонического осциллятора (0.6). Фазовый портрет незамкнут, отсюда можно сделать вывод о том, что система не является консервативной, то есть на нее влияет какая-то внешняя сила, например, сила трения.

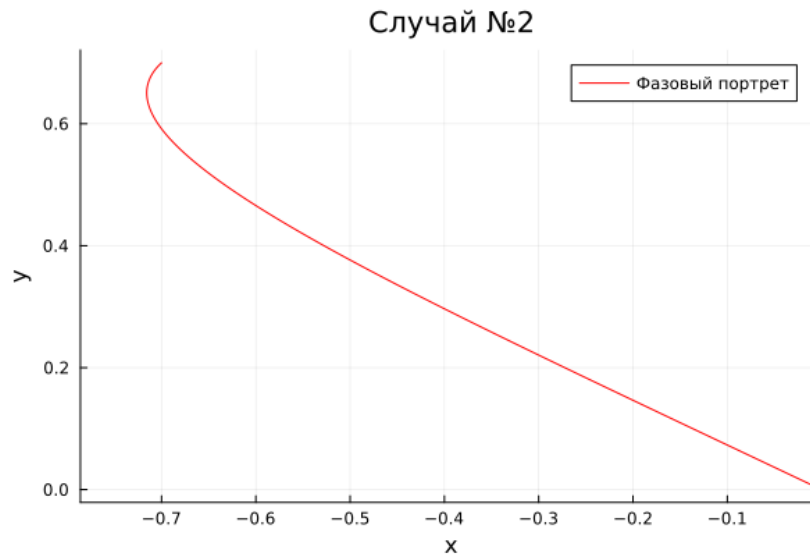


Рис. 0.5: Решения уравнения на Julia для второго случая

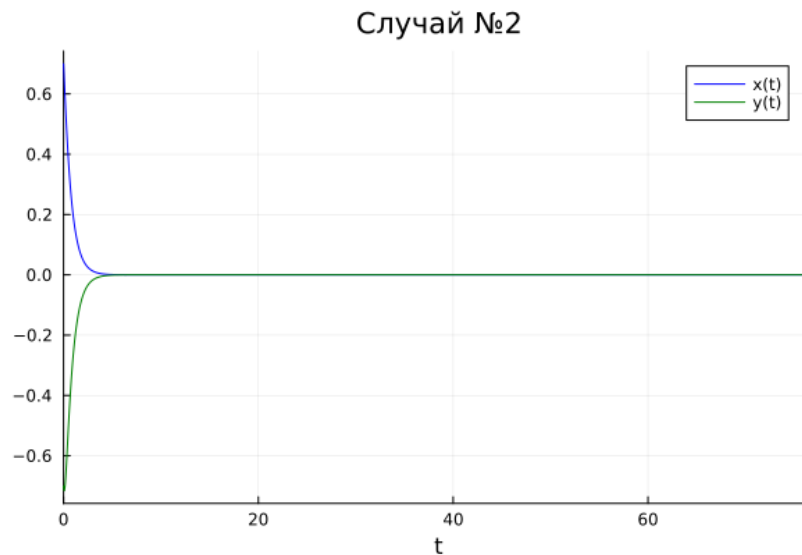


Рис. 0.6: Фазовый портрет на Julia для второго случая

Добавляем в программу функцию, описывающую систему уравнений для третьего случая (рис. 0.7)

```
function F3(du, u, p, t)
    omega, gamma = p
    du[1] = u[2]
    du[2] = P(t)-gamma*du[1]-omega*u[1]
end

prob3 = ODEProblem(F3, u0, T, p2)
sol3 = solve(prob3, dtmax=0.05)

plt = plot(sol3, vars=(2,1), color=:red, label="Фазовый портрет", title="Случай №3", xlabel="x", ylabel="y")
plt2 = plot(sol3, vars=(0,1), color=:blue, label="x(t)", title="Случай №3", xlabel="t")
plot!(plt2, sol3, vars=(0,2), color=:green, label="y(t)")

savefig(plt, "lab4_3_1.png")
savefig(plt2, "lab4_3_2.png")
```

Рис. 0.7: Программа на Julia для третьего случая

Получаем графики решения уравнения (рис. 0.8) и фазовый портрет гармонического осциллятора (0.9) для третьего случая. Из незамкнутости графика фазового портрета видно, что система неконсервативна, следовательно на нее действуют внешние силы.

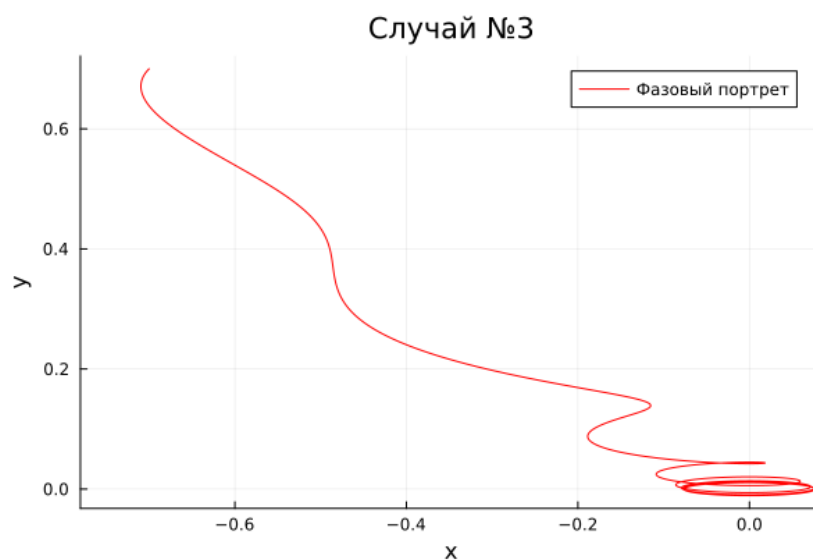


Рис. 0.8: Решения уравнения на Julia для третьего случая

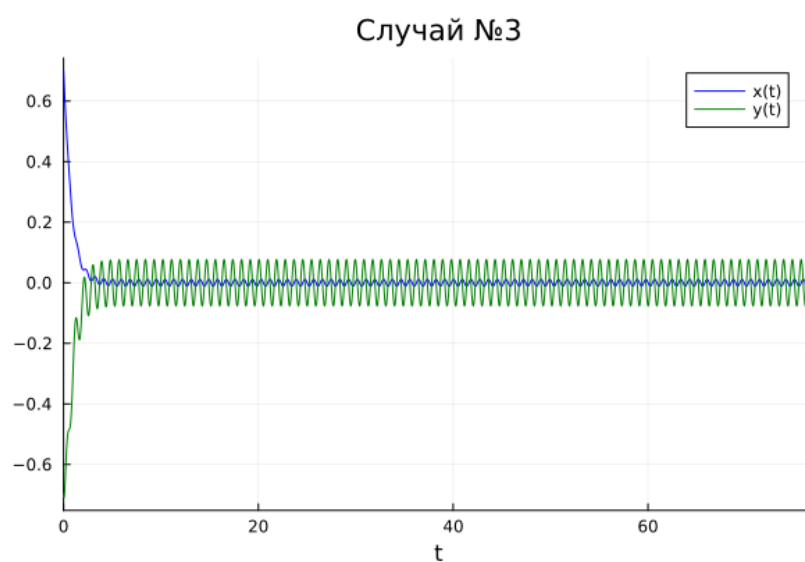


Рис. 0.9: Фазовый портрет на Julia для третьего случая

Пишем аналогичную программу на OpenModelica (рис. 0.10).

```

model Oscil
parameter Real x0 = 0.7;
parameter Real y0 = -0.7;
parameter Real omega = 7.7;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
der(x) = y;
der(y) = -omega*x;
end Oscil;

```

Рис. 0.10: Программа на OpenModelica для первого случая

Видим графики решения уравнения (рис. 0.11) и фазовый портрет гармонического осциллятора (0.12). Графики идентичны графикам, полученным в Julia.

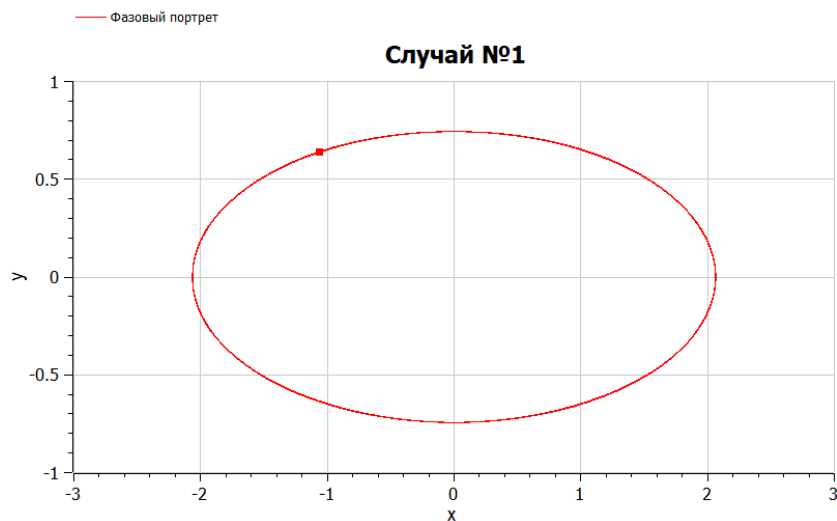


Рис. 0.11: Решения уравнения на OpenModelica для первого случая

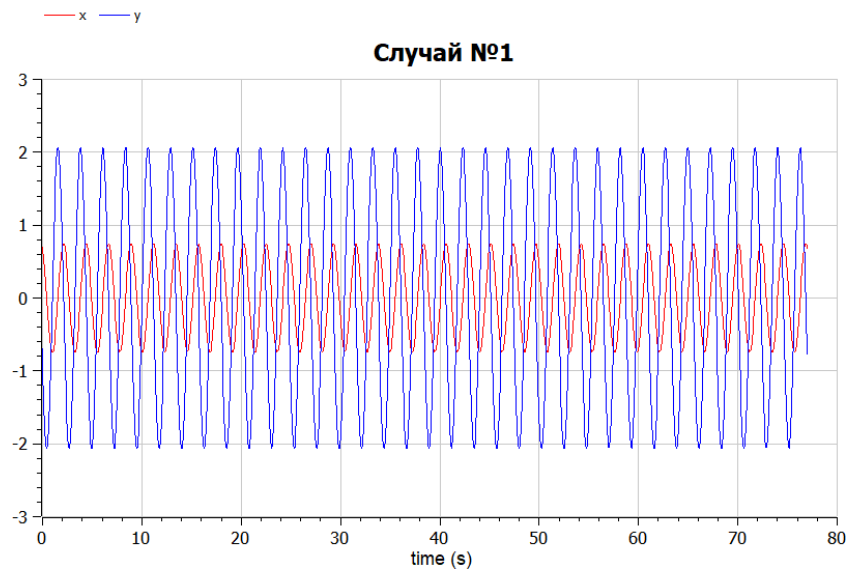


Рис. 0.12: Фазовый портрет на OpenModelica для первого случая

Меняем программу, чтобы она подходила под второй случай (рис. 0.13).

```
model Oscil
parameter Real x0 = 0.7;
parameter Real y0 = -0.7;
parameter Real omega = 7.7;
parameter Real gamma = 7;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
der(x) = y;
der(y) = -gamma*der(x) - omega*x;
end Oscil;
```

Рис. 0.13: Программа на OpenModelica для второго случая

Из графиков решения уравнения (рис. 0.14) и фазового портрета гармонического осциллятора (рис. 0.15) для второго случая можно сделать вывод, что на систему влияет внешняя сила.

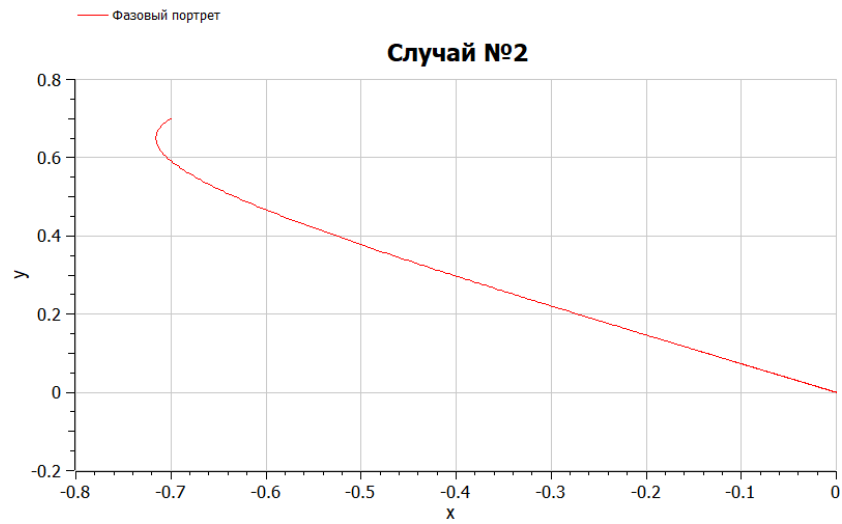


Рис. 0.14: Решения уравнения на OpenModelica для второго случая

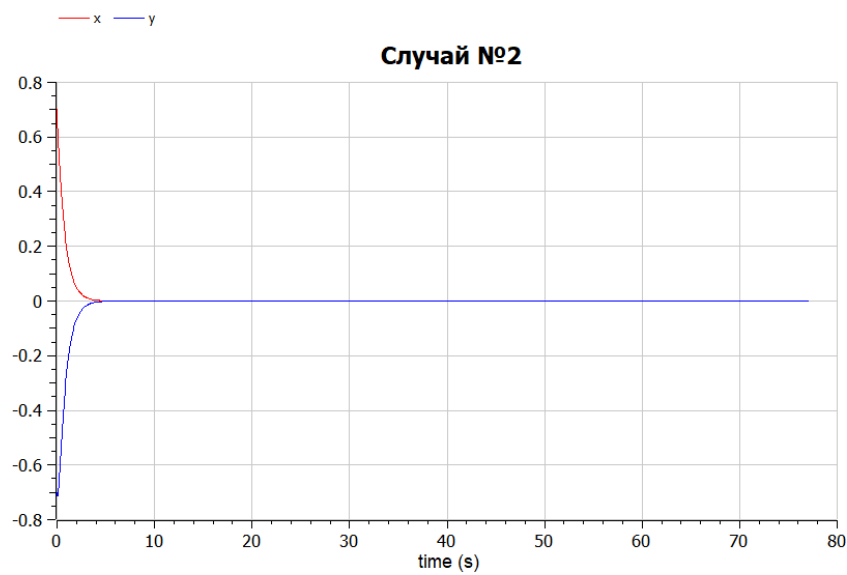


Рис. 0.15: Фазовый портрет на OpenModelica для второго случая

Изменяем уравнение, чтобы оно соответствовало третьему случаю (рис. 0.16).


```

model Oscil
parameter Real x0 = 0.7;
parameter Real y0 = -0.7;
parameter Real omega = 7.7;
parameter Real gamma = 7;
Real P;
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);
equation
P = 0.7*sin(7*time);
der(x) = y;
der(y) = P-gamma*der(x)-omega*x;
end Oscil;

```

Рис. 0.16: Программа на OpenModelica для третьего случая

Графики решения уравнения (рис. 0.17) и фазовый портрет гармонического осциллятора (рис. 0.18) позволяют сделать вывод, что на систему влияет внешняя сила.

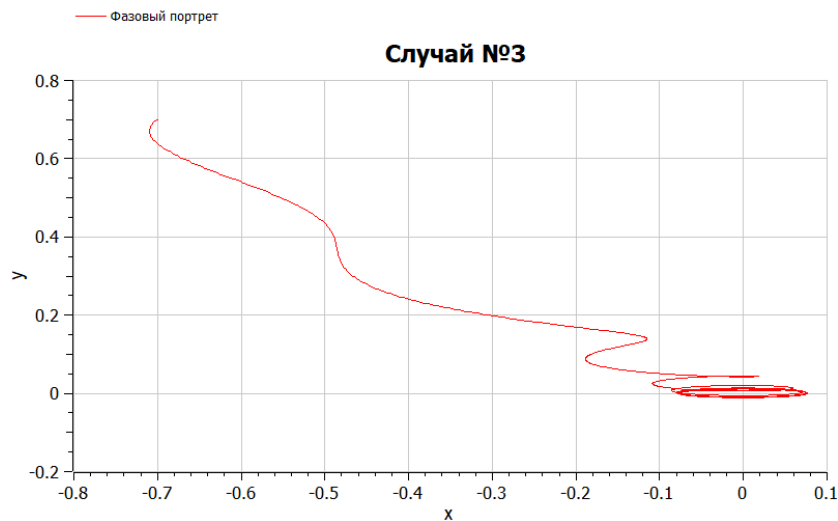


Рис. 0.17: Решения уравнения на OpenModelica для третьего случая

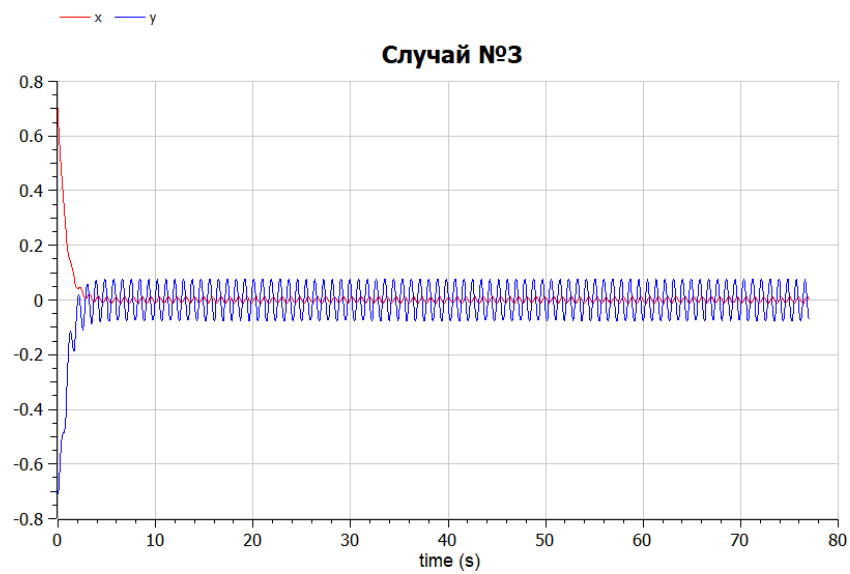


Рис. 0.18: Фазовый портрет на OpenModelica для третьего случая

Выводы

В ходе работы мы познакомились с универсальной математической моделью — гармоническим осциллятором, и применили навыки работы с Julia и OpenModelica для визуализации модели с помощью графиков. Результатами работы стали графики фазовых портретов и решения уравнения гармонического осциллятора для разных случаев.

По моему мнению, OpenModelica подходит для решения этой задачи больше, чем Julia, так как она специализируется на работе с дифференциальными уравнениями, в то время как на Julia может потребоваться установка дополнительных библиотек.

Список литературы

1. Теоретические материалы к лабораторной работе "Гармонический осциллятор"
[Электронный ресурс]. URL: <https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=967241>.