



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECATRÔNICA
DISCIPLINA DE CÁLCULO NUMÉRICO
PROFESSOR DR. ALESSANDRO SANTANA
PROFESSOR DR. SANTOS ALBERTO ENRIQUEZ REMIGIO



**RESOLUÇÃO E INTERPRETAÇÃO DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINAL
(EDO) DE PÊNDULO AMORTECIDO, A PARTIR DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA
ORDEM DE 4 ESTÁGIOS.**

GUILHERME SALOMÃO AGOSTINI	-	11721EMT003
LUIZ RENATO RODRIGUES CARNEIRO	-	11721EMT004

UBERLÂNDIA

2019

Sumário

INTRODUÇÃO:.....	2
MODELAGEM MATEMÁTICA:	3
OBSERVAÇÕES DO TESTE 1 E TESTE 2:.....	7
OBSERVAÇÕES DO TESTE 3:	9
OBSERVAÇÕES DO TESTE EXTRA:.....	12
REFINAMENTO DO NÚMERO DE PASSOS DO CÓDIGO:	15
CONCLUSÃO:	18

INTRODUÇÃO:

Esse projeto tem por objetivo implementar um código de método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico, para resolver sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem, sendo de grande utilidade para achar solução de EDOs que não são possíveis de serem resolvidas analiticamente, além da aplicação do método serão aplicados testes para verem a congruência da ordem do método empregado, e um refinamento para encontrar o melhor espaçamento que alie tempo de processamento e precisão.

Assim, o estudo de métodos numéricos é de extrema importância na vida prática de um engenheiro, tendo em vista que a maior parte das integrais e equações diferenciais não são possíveis de serem resolvidas analiticamente, vale ressaltar que os testes são muito importantes para validar a implementação do método, pois são uma forma muito mais garantida de confirmar a congruência do método do que uma análise gráfica.

MODELAGEM MATEMÁTICA:

Antes de resolver um problema via métodos numéricos é preciso modelar o fenômeno analisado, e nesse caso foi feita a escolha de modelar a movimentação de um pêndulo amortecido, no caso desse fenômeno existem varias variaveis que influenciam no comporta da esfera na posição C representada na Figura 1, e essas grandezas estão em função do tempo, assim para analisalas é conveniente utilizar Equações Diferenciais Ordinarias (EDO) em função do tempo, pois a variavel independente utilizada será apenas o tempo, e todas as outras variaveis e taxas de variação serão em relação a essa variável.

Existem muitas EDOs que não apresentam solução analítica, e para resolver esses casos específicos só é possível por meio de métodos numéricos, nesse trabalho será utilizado um método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico, que é um método de quarta ordem de passo único progressivo e explícito. Isso implica que é um método mais fácil de ser implementado por ser explícito, porém demandará espaçamentos menores para atingir a precisão de um método implícito, além disso, como ele é de passo único uma etapa é responsável por geral a próxima, e nesse caso é um método de passo único progressivo, logo a próxima etapa gerada será de $k+1$, em que k é o estado atual. Por ser um método de Runge-Kutta, tem origem pela expansão do polinômio de Taylor, porém sem a necessidade de fazer as derivadas parciais presentes no método de Euler, e para a realização da iteração serão calculadas constantes denominadas de Kappas, além disso, em relação a ordem, esse valor se refere a convergência do método em relação ao espaçamento utilizado, e por ser de quarta ordem é um método que converge mais rápido do que um de ordens inferiores como ordem 2 e ordem 3.

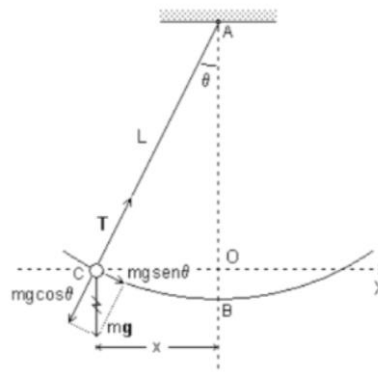


Figura 1 - Imagem do modelo matematico de um pêndulo.

Dessa forma, a EDO que representa a movimentação desse pendulo amortecido é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 * \sin \theta + \mu * \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (1)$$

Como é uma equação do de segunda ordem nós podemos dividila em duas equações de primeira ordem e resolver um sistema de duas equações de primeira ordem para encontrar a solução.

E para isso foi definida uma nova variável, denominada de v , essa variável é a taxa de variação do θ em relação em tempo, assim substituindo a equação 2 na equação 1, temos a equação 3.

$$\frac{d\theta}{dt} = v \quad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 * \sin \theta - \mu * v \quad (3)$$

Assim para resolver a equação número 1 de forma mais simples basta resolver o sistema de equações formado por duas EDOs de primeira ordem expressas pelas equações 2 e 3.

As constantes ω e μ :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (4)$$

$$\mu = 2 * \omega - 0,5 \quad (5)$$

Em que g é a aceleração gravitacional com valor de $9,81 \text{ m/s}^2$, l é o comprimento da corda que vale $0,8 \text{ m}$, e m é a massa da esfera que é 1 kg .

Como vamos utilizar um método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico, temos a forma genérica para a progressão dos passos em função do tempo, assim para calcularo x_{k+1} é necessário ter o valor de x_k , logo como esse método é progressivo, para ter a solução no instante desejado é necessário ter as condições iniciais, para assim ter os sucessivos x_k .

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, x_k) \\ k_2 &= hf(t_k + 0,5h, x_k + 0,5k_1) \\ k_3 &= hf(t_k + 0,5h, x_k + 0,5k_2) \\ k_4 &= hf(t_k + h, x_k + k_3) \end{aligned} \quad (6)$$

O método de Runge-Kutta utilizado tem quatro estágios, ou quatro kappas, mostrado pelas equações (6). Porém, a EDO do exercício proposto era de segunda ordem e o método é válido somente para EDOs de primeira ordem. Para solucionar e resolver pelo método, efetua-se uma substituição: a primeira derivada por outra variável, obtendo um sistema de equações diferenciais ordinárias. As duas

equações obtidas são, então, resolvíveis pelo método requerido, só que para cada variável adicionada, quatro estágios são adicionados e a função de todos os kappas passa a ser dependentes da derivada desta nova variável.

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= h * f1(t, teta, v); \\
 k_{12} &= h * f2(t, teta, v); \\
 k_{21} &= h * f1(t + 0.5 * h, teta + 0.5 * k_{11}, v + 0.5 * k_{12}); \\
 k_{22} &= h * f2(t + 0.5 * h, teta + 0.5 * k_{11}, v + 0.5 * k_{12}); \\
 k_{31} &= h * f1(t + 0.5 * h, teta + 0.5 * k_{21}, v + 0.5 * k_{22}); \\
 k_{32} &= h * f2(t + 0.5 * h, teta + 0.5 * k_{21}, v + 0.5 * k_{22}); \\
 k_{41} &= h * f1(t + h, teta + k_{31}, v + k_{32}); \\
 k_{42} &= h * f2(t + h, teta + k_{31}, v + k_{32}); \\
 teta &= teta + (k_{11} + 2.0 * k_{21} + 2.0 * k_{31} + k_{41}) / 6.0; \\
 v &= v + (k_{12} + 2.0 * k_{22} + 2.0 * k_{32} + k_{42}) / 6.0;
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

OBSERVAÇÕES DO TESTE 1 E TESTE 2:

Ambos os testes foram aplicados em EDOs de primeira ordem e tem por finalidade testar a ordem do desenvolvimento inicial dos Kappas no Runge-Kutta.

Para acessar o teste 1 basta digitar o algarismo “1” no menu inicial e todo o código referente ao teste será rodado gerando uma saída de dados no arquivo “Relatório do teste 1.txt” e no console. No console será mostrado a ordem para os diferentes números de passos e no relatório as soluções.

Como o objetivo do código é averiguar a ordem do decaimento do erro, a primeira iteração do “Numero de Passos” dado por np será indefinido (div zero), e a primeira informação da ordem deve ser desconsiderada, por isso existe um laço condicional que salta essa primeira divisão.

Da mesma forma ocorre o teste 2, já que são cópias, porém, utilizados na resolução de problemas distintos.

Conclusão: para os dois testes, o resultado da ordem aproxima-se à 4.0, comprovando a eficácia do método numérico empregado. Outro fator é a aproximação dos valores calculados pelo método com os valores calculados da solução analítica, mostrados pela Figura 2 e Figura 3.

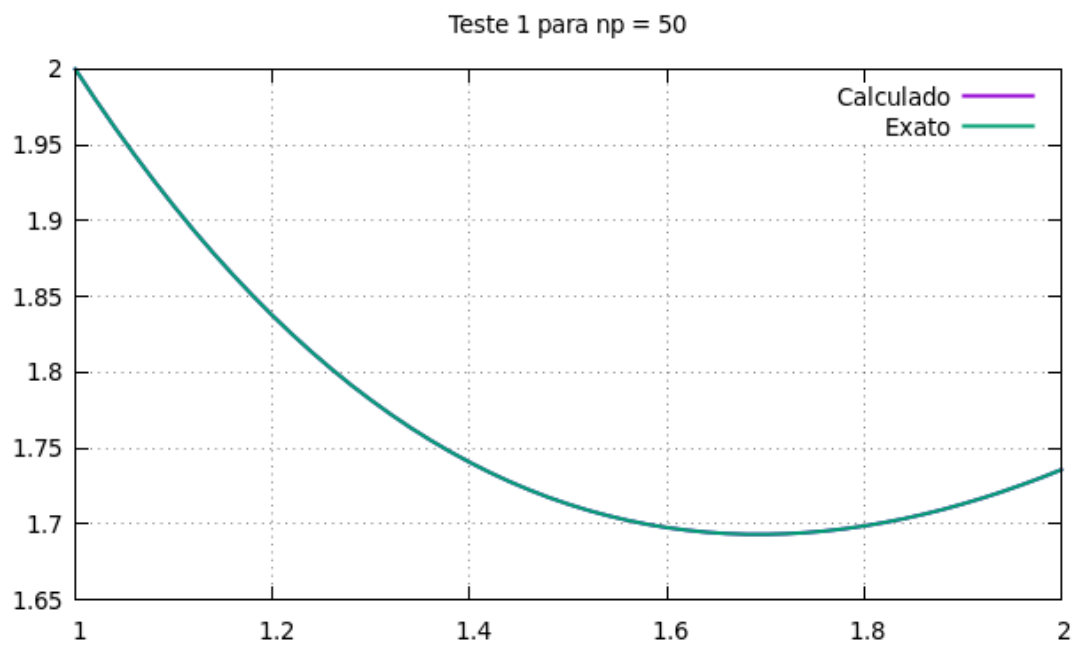


Figura 2 - Comparação do gráfico no teste 1 formado pelos pontos da função analítica e calculada pelo runge kutta. Plot pelo Gnuplot

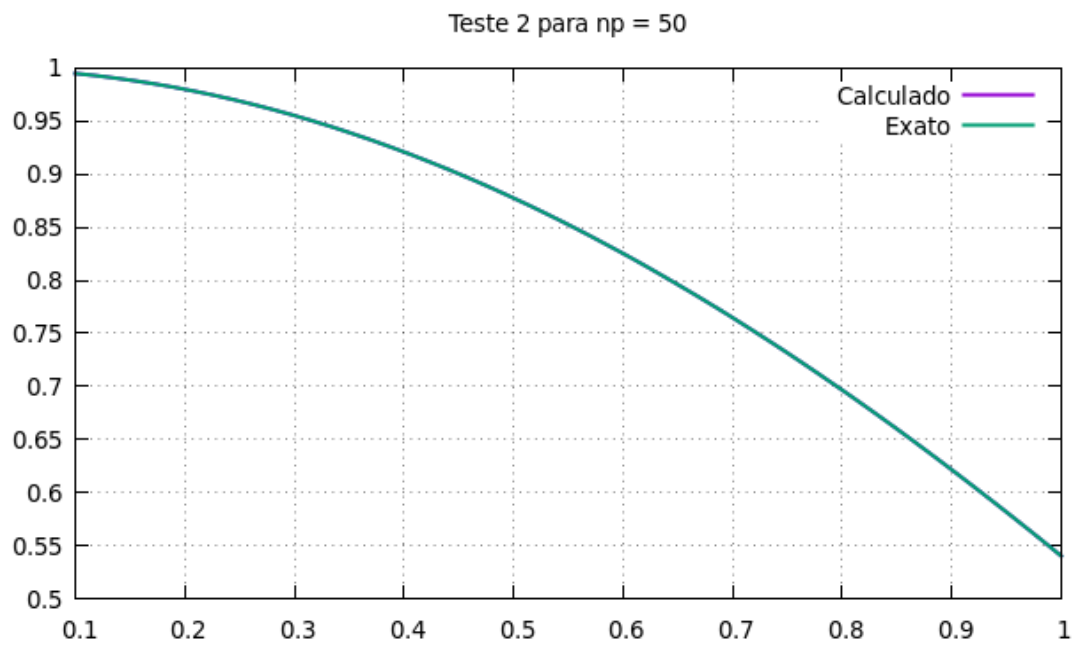


Figura 3 - Comparação do gráfico no teste 2 formado pelos pontos da função analítica e calculada pelo runge kutta. Plot pelo Gnuplot

OBSERVAÇÕES DO TESTE 3:

Para acessar o teste 3, basta a partir do menu digitar o algoritmo 3.

O teste 3 é uma EDO implícita de quarta ordem que foi separada, de forma análoga em quatro variáveis de EDOs de primeira ordem.

De forma análoga, os kappas foram expandidos, originando um método de Runge-Kutta de 16 estágios.

```
k11= h*h1( t, x1, x2, x3, x4);
k12= h*h2( t, x1, x2, x3, x4);
k13= h*h3( t, x1, x2, x3, x4);
k14= h*h4( t, x1, x2, x3, x4);

k21= h*h1( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k11, x2 + 0.5*k12, x3 + 0.5*k13, x4 + 0.5*k14);
k22= h*h2( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k11, x2 + 0.5*k12, x3 + 0.5*k13, x4 + 0.5*k14);
k23= h*h3( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k11, x2 + 0.5*k12, x3 + 0.5*k13, x4 + 0.5*k14);
k24= h*h4( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k11, x2 + 0.5*k12, x3 + 0.5*k13, x4 + 0.5*k14);

k31= h*h1( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k21, x2 + 0.5*k22, x3 + 0.5*k23, x4 + 0.5*k24);
k32= h*h2( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k21, x2 + 0.5*k22, x3 + 0.5*k23, x4 + 0.5*k24);
k33= h*h3( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k21, x2 + 0.5*k22, x3 + 0.5*k23, x4 + 0.5*k24);
k34= h*h4( t + 0.5*h, x1 + 0.5*k21, x2 + 0.5*k22, x3 + 0.5*k23, x4 + 0.5*k24);

k41= h*h1( t + h, x1 + k31, x2 + k32, x3 + k33, x4 + k34);
k42= h*h2( t + h, x1 + k31, x2 + k32, x3 + k33, x4 + k34);
k43= h*h3( t + h, x1 + k31, x2 + k32, x3 + k33, x4 + k34);
k44= h*h4( t + h, x1 + k31, x2 + k32, x3 + k33, x4 + k34);

x1 = x1 + ( k11 + 2.0*k21 + 2.0*k31 + k41 )/6.0;
x2 = x2 + ( k12 + 2.0*k22 + 2.0*k32 + k42 )/6.0;
x3 = x3 + ( k13 + 2.0*k23 + 2.0*k33 + k43 )/6.0;
x4 = x4 + ( k14 + 2.0*k24 + 2.0*k34 + k44 )/6.0;
```

Figura 4 - Expansão dos kappas para uma EDO de quarta ordem.

Apesar de a metodologia ser a mesma da utilizada nos testes 1 e 2 e no teste extra (EDO de segunda ordem), o teste de verificação matemática da ordem para o código deste problema não pôde alcançar sua máxima eficácia (ordem 4), provavelmente, devido à problemas de arredondamentos intrínsecos ao funcionamento interno da memória, que acaba arredondando os valores e propagando os erros.

Ainda foi possível receber resultados satisfatórios, avaliados pelas figuras 5, 6, 7 e 8, mostrando pequenas inconformidades quando a derivada varia de forma acentuada.

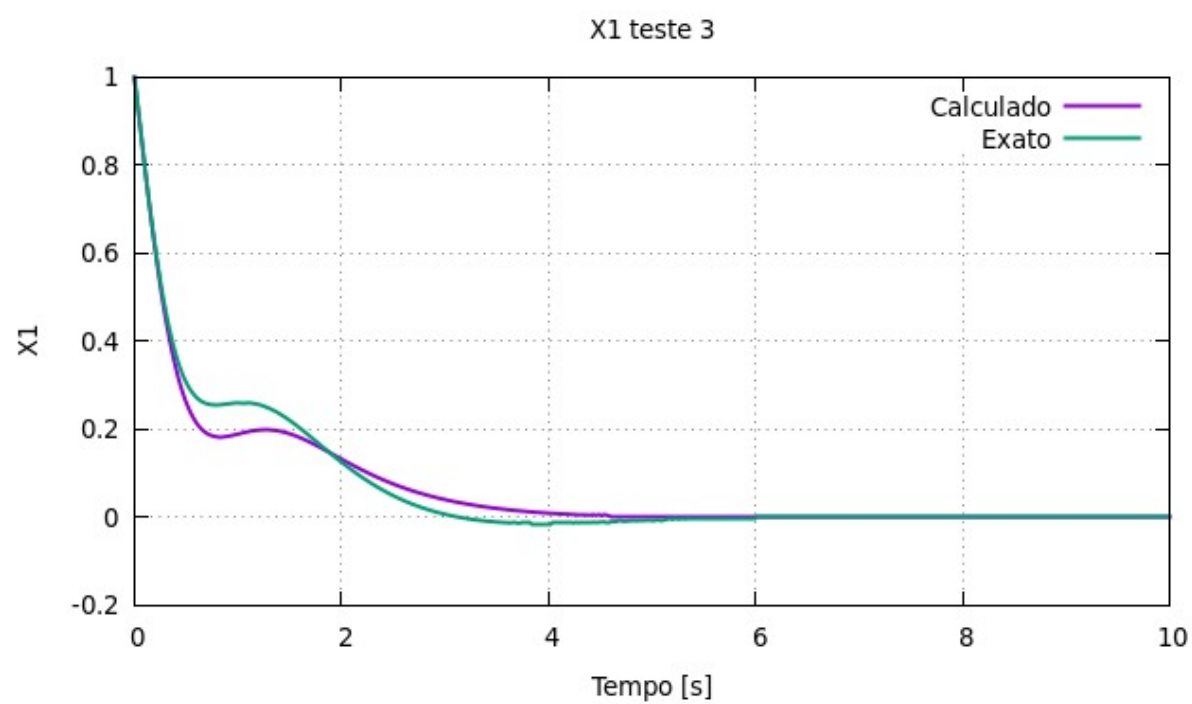


Figura 5 - Resultados do X1 do teste 3

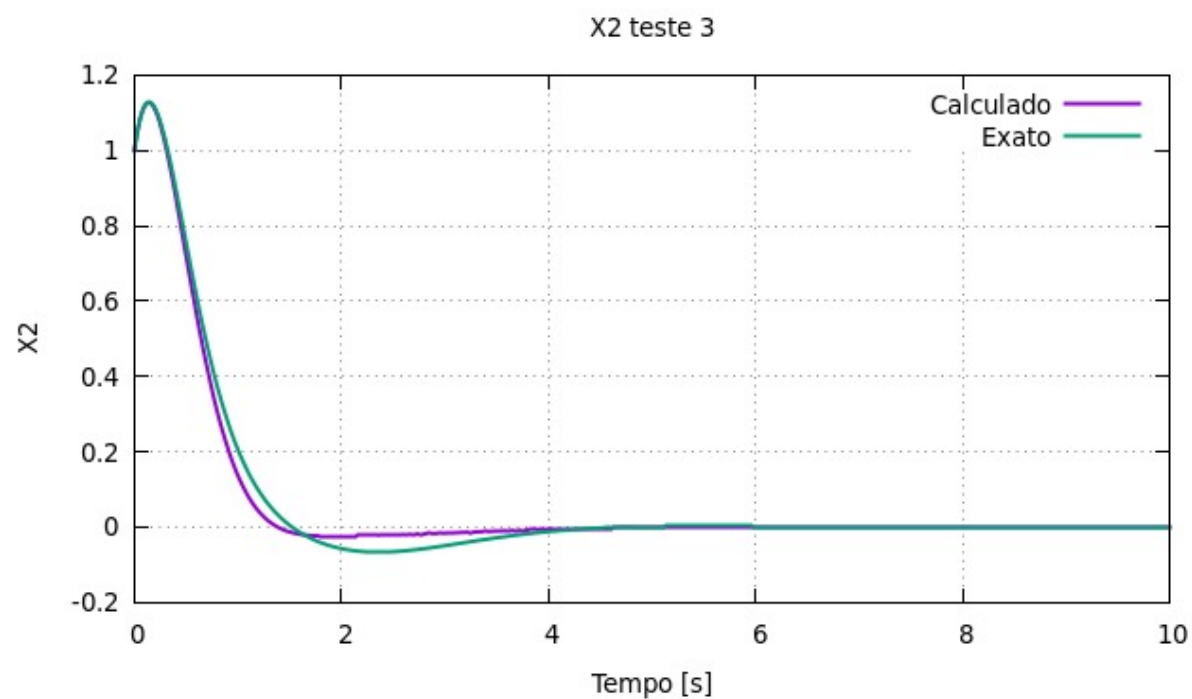


Figura 6 - Resultado do X2 no teste 3

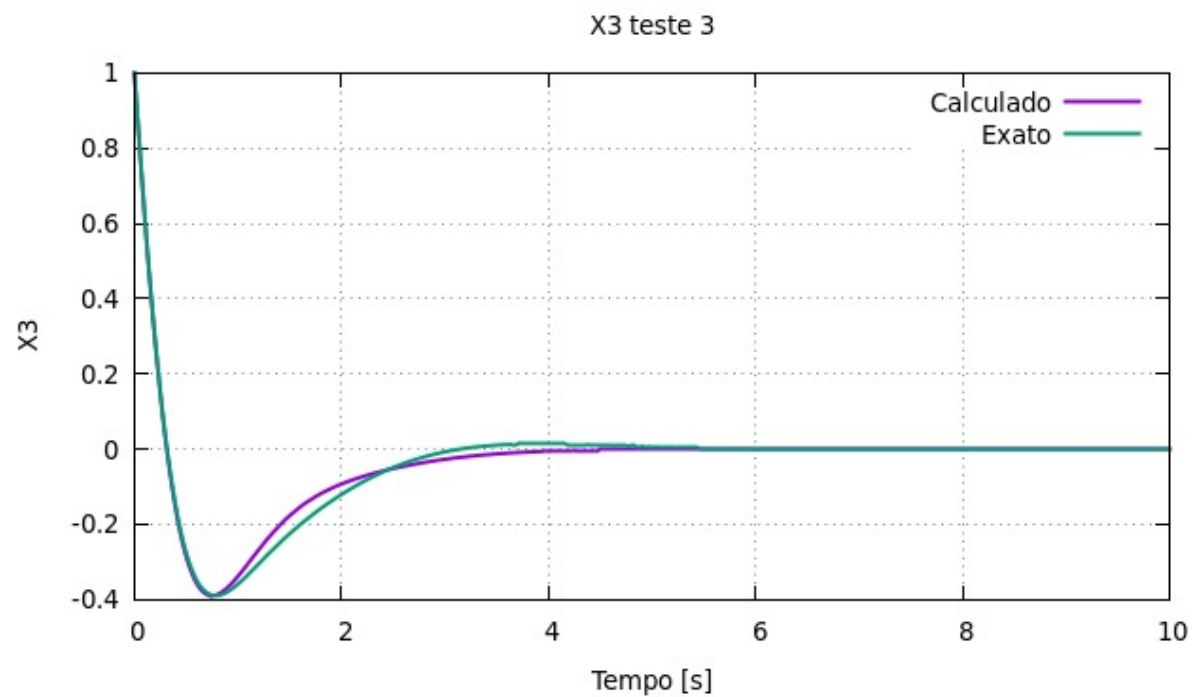


Figura 7 - Resultado do X3 do teste 3.

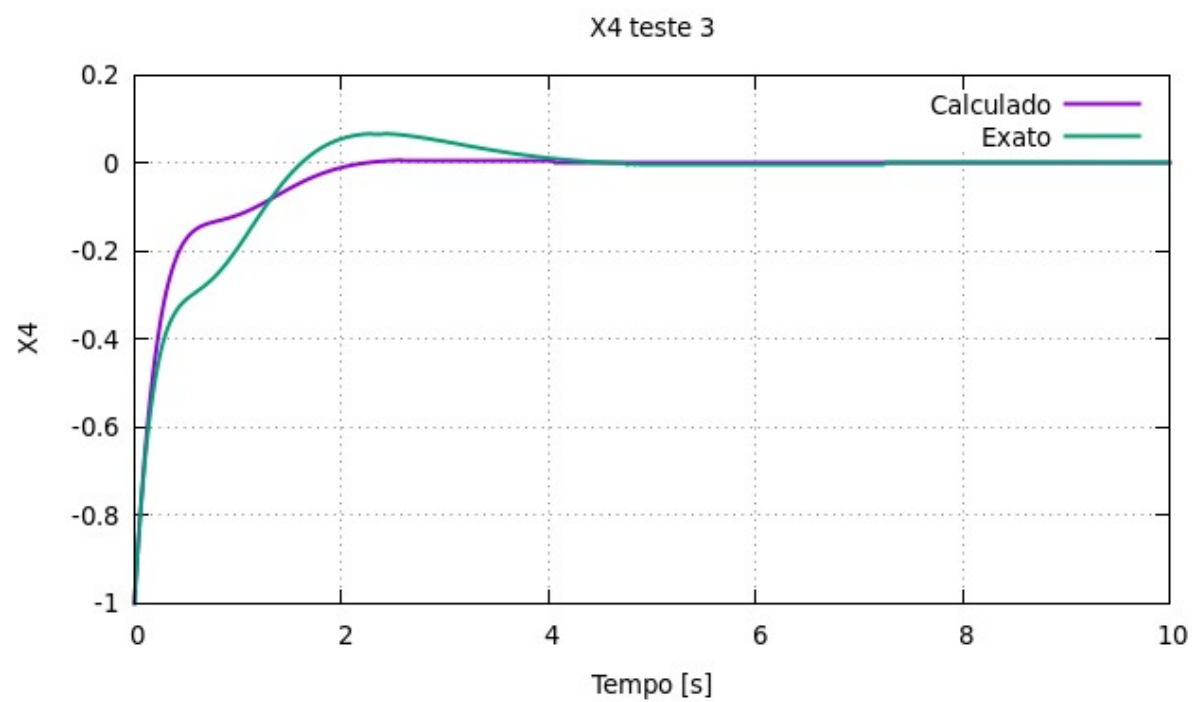


Figura 8 - Resultado do X4 do teste 3

OBSERVAÇÕES DO TESTE EXTRA:

O teste citado está no menu inicial como a opção 4.

Este teste foi efetuado usando como premícia a resolução de uma EDO de segunda ordem analítica obtida de um problema físico da área de Circuitos elétricos.

O problema descrito foi obtido da Figura 9.

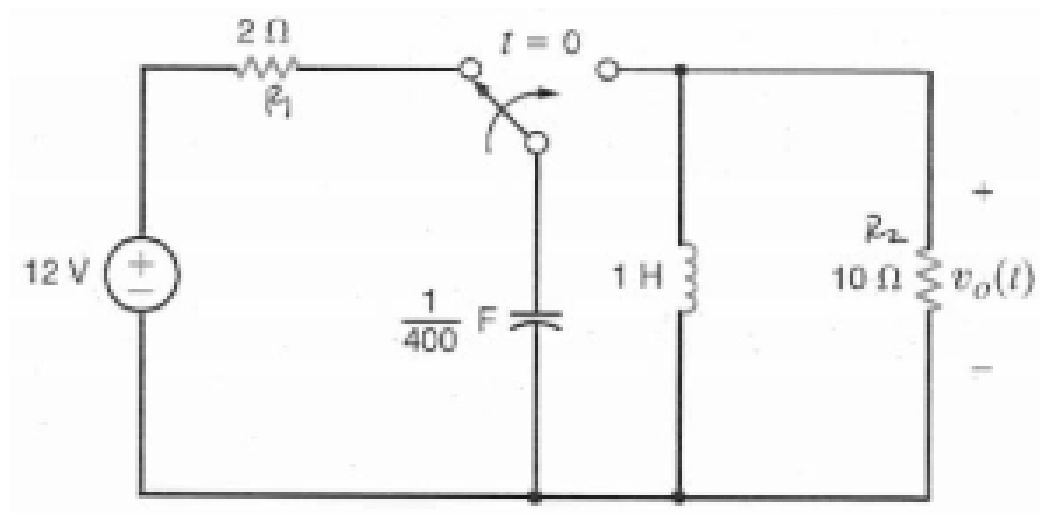


Figura 9 - Problema EDO segunda ordem. Exercício retirado do solucionário do IRWIN - ANALISE DE CIRCUITOS EM ENGENHARIA.

A EDO geral do exercício é dada por:

$$\frac{d^2V_o}{dt^2} + \frac{dV_o}{dt} * \frac{1}{RC} + \frac{V_o}{LC} = 0 \quad (8)$$

E por substituição pode ser simplificada em duas EDO's de primeira ordem:

$$g1_{tst4}(t, V_o) = \frac{dV_o}{dt}(t) = z(t, V_o) \quad (9)$$

(10)

$$\frac{dV_o}{dt}(0) = 0$$

$$g2_{tst4}(t, V_o, z) = -40.0z - 400.0 * V_o \quad (11)$$

$$V_o(0) = -12.0 \quad (12)$$

Cuja solução analítica é dada por:

(13)

$$V_o = -12e^{-20t} - 240te^{-20t}$$

O código utilizado tem simplesmente o nome das variáveis distintas, porém o formato e a implementação dos métodos de Runge-Kutta é o mesmo que o do pêndulo, afinal, o objetivo desta implementação é realizar a verificação da ordem do método numérico no código.

Após executá-lo, ele pedirá o nome do arquivo ao qual deseje. O arquivo formado mostrará que a ordem se mantém próxima à 4.0, assim como mostrado pela Figura 10.

Arquivo	Editar	Formatar	Exibir	Ajuda
0.900000		-0.000003	0.000066	-0.000003
0.910000		-0.000003	0.000054	-0.000003
0.920000		-0.000002	0.000045	-0.000002
0.930000		-0.000002	0.000037	-0.000002
0.940000		-0.000002	0.000031	-0.000002
0.950000		-0.000001	0.000026	-0.000001
0.960000		-0.000001	0.000021	-0.000001
0.970000		-0.000001	0.000017	-0.000001
0.980000		-0.000001	0.000014	-0.000001
0.990000		-0.000001	0.000012	-0.000001
Ordem = 4.229272		np = 200		
0.000000		-12.000000	0.000000	-12.000000
0.005000		-11.943850	21.716000	-11.943854
0.010000		-11.789716	39.298902	-11.789723
0.015000		-11.556755	53.338681	-11.556764
0.020000		-11.261366	64.350451	-11.261377
0.025000		-10.917540	72.783377	-10.917552
0.030000		-10.537171	79.028555	-10.537183
0.035000		-10.130327	83.426000	-10.130340
0.040000		-9.705493	86.270826	-9.705506
0.045000		-9.269776	87.818714	-9.269788
0.050000		-8.829094	88.290739	-8.829107
0.055000		-8.388339	87.877649	-8.388351

Figura 10 - Print screen do arquivo output. A primeira coluna é o tempo [s], a segunda coluna é a tensão calculada V_o , a terceira coluna trata-se de z e por fim a quarta coluna o V_o calculado pela analítica.

Outra conclusão, se olharmos a coluna 2 – valores calculados via método e coluna 4 – valores calculados via formula analítica, é possível verificar sua eficácia.

REFINAMENTO DO NÚMERO DE PASSOS DO CÓDIGO:

Com a lógica do código já verificado nos testes feitos anteriormente, foi possível implementar o programa com segurança, porém é necessário encontrar um número de passos suficiente que tenha uma boa convergência para o resultado exato, mas não conhecemos a solução exata e para fazer essa análise foram feitos cálculos sobre erros relativos, como será mostrado a seguir.

Primeiramente iremos estimar um passo h , que satisfaça condição que a variação relativa da energia seja menor do que 10^{-10} , com sabemos, um pendulo sem amortecimento não dissipa energia, assim existe a conservação da energia mecânica que é dada pelo somatório da energia cinética e potencial gravitacional.

Como a energia potencial gravitacional é uma energia potencial ela é em relação a um ponto, nesse caso vamos adotar a energia potencial igual a zero no ponto A.

As equações necessárias para modelar a energia são as seguintes:

$$Em = Ec + Ep \quad (14)$$

$$Ec = \frac{1}{2} * I * \theta'^2 \quad (15)$$

$$Ep = m * g * h \quad (16)$$

$$I = m * r^2 \quad (17)$$

$$h = \cos \theta * l \quad (18)$$

Em quem, Em é energia mecânica, Ec é a energia cinética, Ep é a energia potencial gravitacional, I é o momento de inércia, θ é o ângulo da corda em relação a normal, g é a aceleração da gravidade, h é a distância vertical de A em relação a C, m é a massa da carga em movimento e r é o raio de giração. Nesse caso específico o raio de giração é o próprio comprimento da corda l e a distância h é negativa.

Assim, manipulando as equações acima temos que:

$$Em = \left(\frac{1}{2} * \theta'^2 - \frac{g}{l} * \cos\theta \right) * l^2 * m \quad (19)$$

$$E = \frac{Em}{l^2 * m} = \left(\frac{1}{2} * \theta'^2 - \omega^2 * \cos\theta \right) \quad (20)$$

Como sabemos que a energia mecânica não varia, a massa é constante e o comprimento da corda também é constante, então E também será constante para todos os instantes de tempo.

Dessa forma quanto menor for a variação dos E em instantes sucessivos do código melhor sua congruência com a física, de tal forma que quanto menores os passos do programa e quanto maior o número de passos mais essa diferença tende a zero. Assim foi feito um código para encontrar o menor número de passos que satisfaça a condição dita anteriormente, esse número de passos é um número que deixa a resolução da EDO com uma precisão muito boa, porém com número de iterações relativamente baixo. Dessa forma, aliando precisão com tempo de processamento.

Para fazer o refinamento do número de passos, foi implementado uma função no menu do programa denominada de: “Teste de energia para o caso não amortecido”, que é a opção 5 no menu. É o mesmo código implementado para a função “Resolver EDO do exercício”, porém com o $\mu = 0$ relacionada com a dissipação de energia, e com um cálculo de energia relativo em cada ciclo, dado pela diferença da energia atual com a do loop anterior. Seu funcionamento está ilustrado na

```
9.987793      -20.229632      4.797099      6.443651e-012
9.990234      -19.557886      4.807286      6.329522e-012
9.992676      -18.884739      4.817142      6.209172e-012
9.995117      -18.210236      4.826665      6.079409e-012
9.997559      -17.534425      4.835853      5.935836e-012
```

```
O valor de h = 0.002441 Com o valor np= 4096
```

```
Pressione qualquer tecla para continuar. . . █
```

Figura 11 - np obtido após escolher $tf = 10.0$, *angulo inicial* 270° e velocidade angular inicial de 0 rad/s com np inicial de 1 passo.

CONCLUSÃO:

Em cima da EDO do exercício, foram obtidos seguintes gráficos, todos utilizando número de passos igual a 4096:

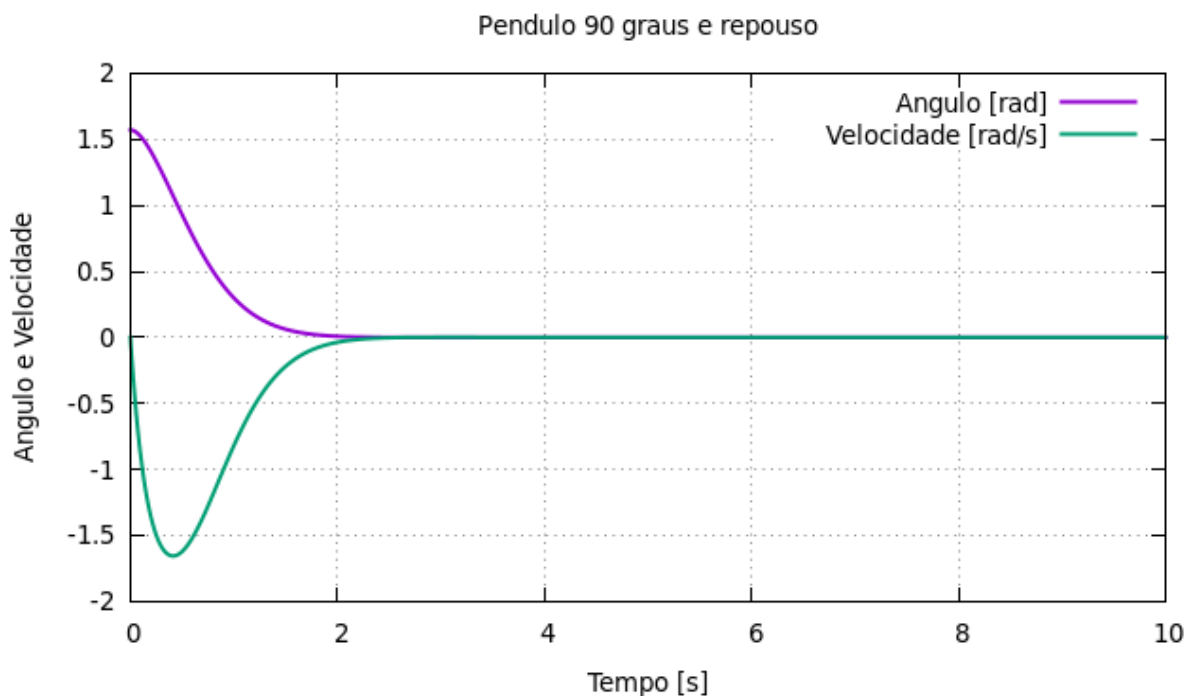


Figura 12 - Pendulo amortecido à 90° sem velocidade angular inicial.

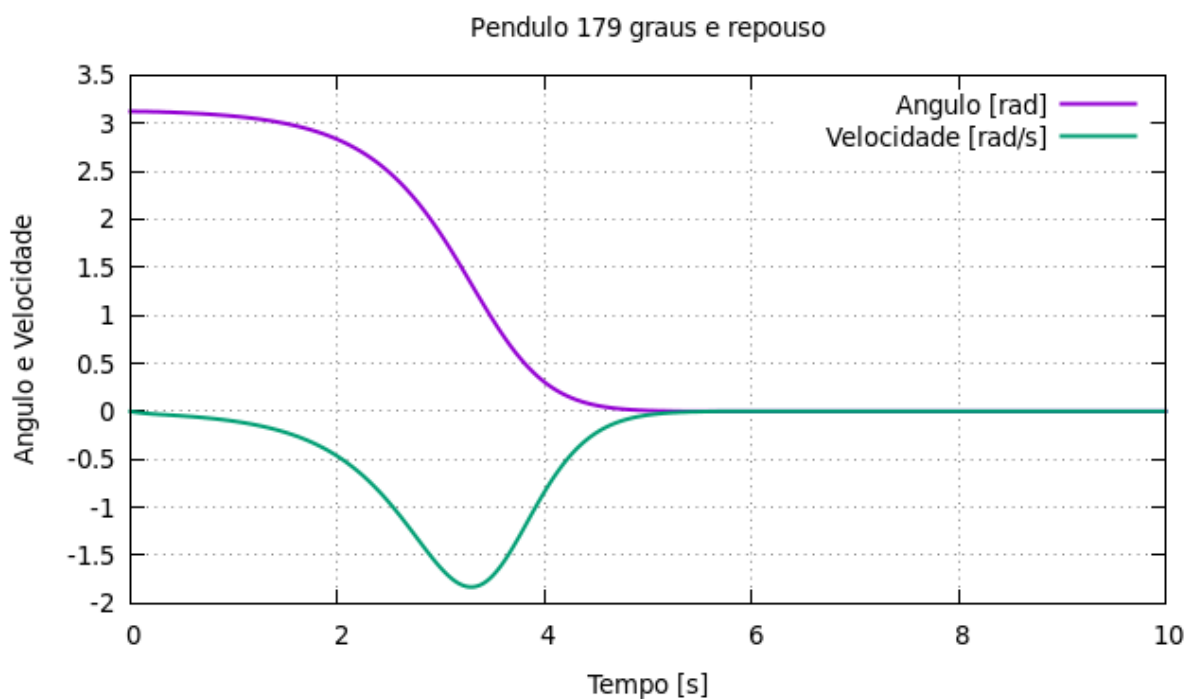


Figura 13 - Pêndulo amortecido à 179° sem velocidade inicial.

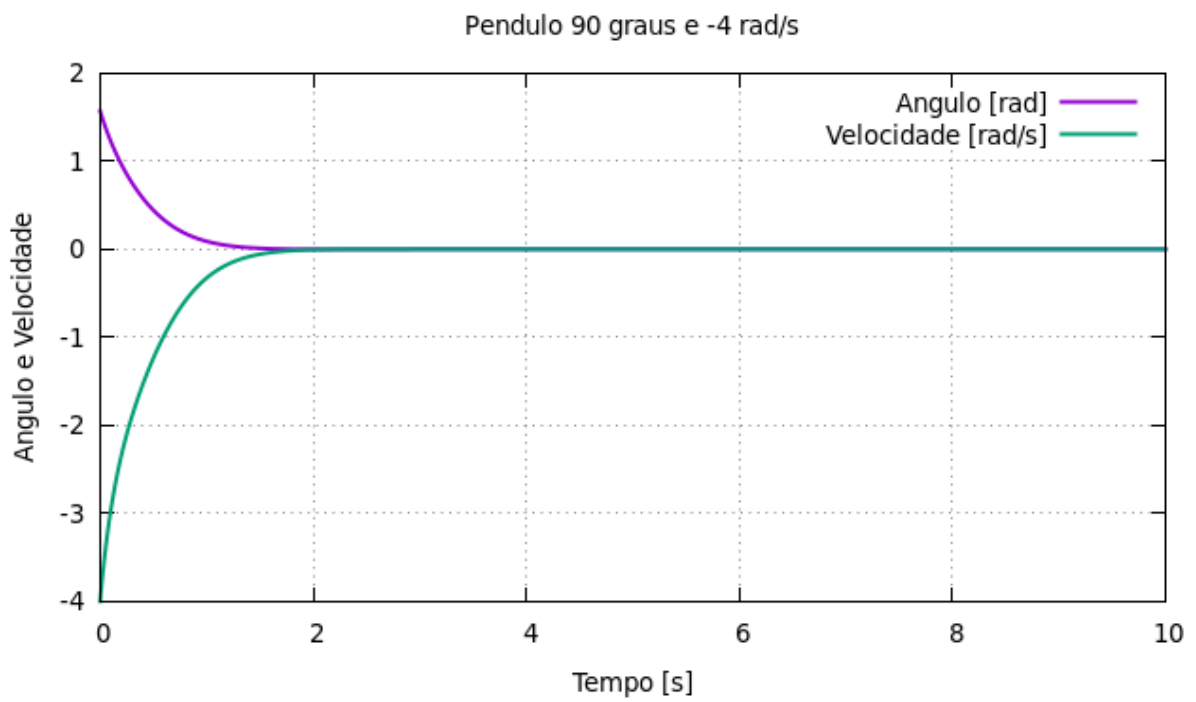


Figura 14- Pendulo amortecido à 90 ° com velocidade de -4 rad/s

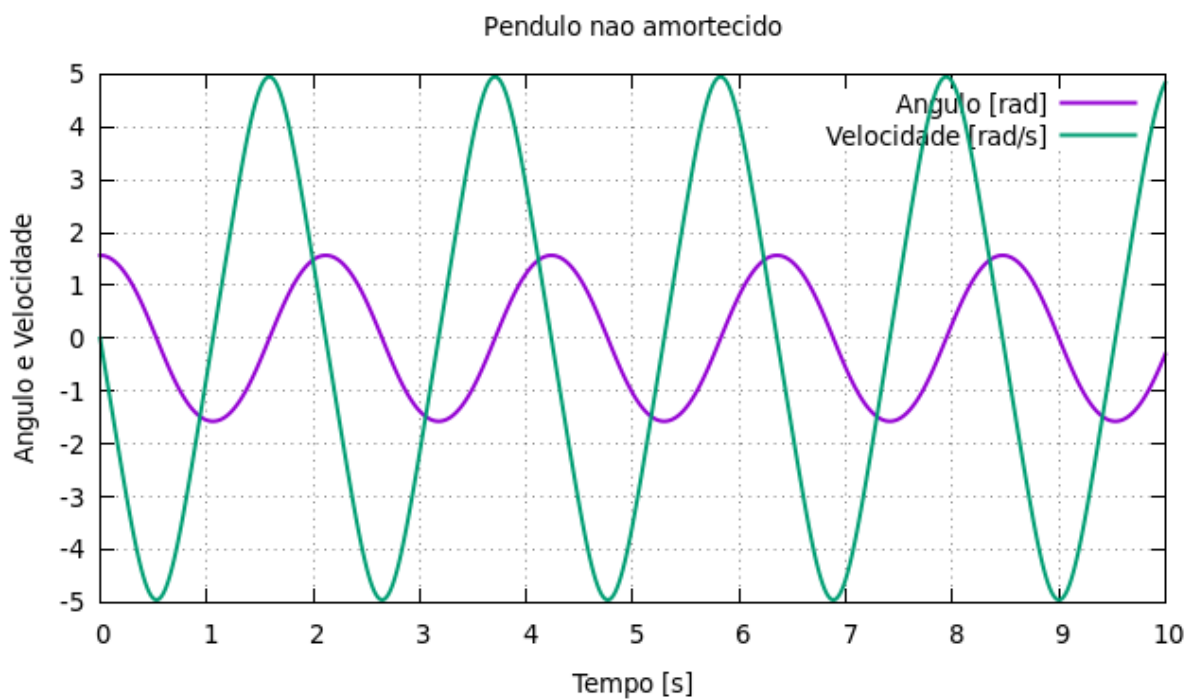


Figura 15 - Pêndulo sem amortecimento

Ao analisar o gráfico do pêndulo sem amortecimento presente na Figura 15, podemos observar que suas equações de velocidade e ângulo estão respeitando a física, pois quando a velocidade é máxima o ângulo formado com a normal é 0° , pois nesse momento o pendulo transformou toda sua energia potencial gravitacional em energia cinética, a energia mecânica em um pendulo sem amortecimento permanece constante, pois não há dissipação de energia. Além disso, quando o ângulo formado com a normal for máximo, a velocidade será zero, pois nesse momento toda a energia cinética se transforma em energia potencial gravitacional, esses balanços de energia podem ser compreendidos analisando as Equações 14, 15, 16, assim essas transformações de energia cinética em potencial gravitacional de forma cíclica geram o comportamento senoidal dessas variáveis.

Ao analisar os gráficos das figuras 14, 13 e 12, pendulo amortecido, pode-se concluir que o pêndulo está dissipando energia de forma intensa: provavelmente provocado por um arrasto em um fluido não newtoniano ou um fluido super viscoso.

No caso da figura 12, o pêndulo é liberado sem velocidade inicial e percebe-se sua facilidade no escoamento do fluido, pois sua velocidade não sobe muito. Porém, na figura 14, sua velocidade inicial acentuada fez com que o fluido reagisse de maneira a opor seu movimento (de maneira mais intensa).

No caso da figura 13, por estar à uma altura maior, o pêndulo demora mais tempo para parar pois ainda tem energia potencial para transformar-se em energia cinética.

Concluindo: a velocidade tem ênfase na dissipação de energia (amortecimento), provocado pelo arrasto ou pelo atrito.