ISFA - M2 Actuariat — Techniques Numériques
Projet à rendre pour le 27 janvier 2017 (avant 23h00)

Le projet consiste en l'estimation d'une *provision pour dépréciation durable* (PDD).

En assurance, la PDD est constituée si la valeur de marché de l'actif est inférieure à sa valeur d'acquisition pendant au moins 6 mois consécutifs (durable). Cette provision est calculée ligne à ligne pour l'ensemble des actifs non obligataires. Celle-ci est reprise en cas de vente d'actif ayant conduit à une dotation de PDD.

Sur un exercice comptable (une année), la dotation de PDD correspond à l'anticipation d'une perte de valeur de l'actif de plus de $(1-\alpha)\%$ ($\alpha \in [0,1]$) et que la perte est durable. En d'autres termes, si l'on note $S = (S_t)_{t\geq 0}$ l'actif avec la dynamique suivante, sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$,

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \tag{1}$$

et l'on suppose que ce dernier a été acquis à une date antérieure à $t = 0$ au prix S_a ; en fin du premier exercice, c.-à-d. $t = 1$, l'assureur enregistre une dépréciation lorsque les deux événements suivants se réalisent :

$$S_1 \leq (1-\alpha)S_a, \qquad \text{et} \qquad \sup_{u\in]1/2,1]} S_u \leq S_a.$$

Dans ce cas, la perte enregistré est égale à $(S_a - S_1)$. La PDD pour cette période (calculée en début de période, $t = 0$) est donnée par l'espérance sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ de la perte

$$\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0) = (S_a - S_1)\, \mathrm{I}_{\{S_1\leq(1-\alpha)S_a\}}\, \mathrm{I}_{\{\sup_{u\in]1/2,1]} S_u\leq S_a\}}, \tag{2}$$

ou $\mathrm{PDD}_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0)\big]$. Pour la période suivante, la perte est enregistrée lorsque les deux événements précédent (calculés sur la seconde période) se réalisent. Autrement dit, la PDD_1 est donnée par l'espérance de la quantité suivante :

$$\lambda_1(r,\sigma,S_a,S_0) = \big(S_a - \lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0) - S_2\big)^+\, \mathrm{I}_{\{S_2\leq(1-\alpha)S_a\}}\, \mathrm{I}_{\{\sup_{u\in]3/2,2]} S_u\leq S_a\}}.$$

Par réccurence, nous avons la perte suivante en fin de période T :

$$\lambda_{T-1}(r,\sigma,S_a,S_0) = \big(\Omega_{T-1} - S_T\big)^+\, \mathrm{I}_{\{S_T\leq(1-\alpha)S_a\}}\, \mathrm{I}_{\{\sup_{u\in]T-1/2,T]} S_u\leq S_a\}} \quad \text{avec} \quad \Omega_{T-1} = S_a - \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t(r,\sigma,S_a,S_0). \tag{3}$$

La provision pour dépréciation durable pour cet actif est la suivante (sans prise en compte de l'actualisation)

$$\mathrm{PDD}(r,\sigma,S_a,S_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=0}^{T-1} \lambda_t(r,\sigma,S_a,S_0).\right]. \tag{4}$$

L'objectif de ce qui suit est l'estimation/quantification de cette PDD.

1. Un seul actif et une seule période.

On considère le cas expliqué supra avec des valeurs (choisies) pour initialiser r, σ, S_a, S_0 et $\alpha = 0.15$ et 0.2. On estime la valeur $\mathbb{P}[\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0) > 0]$ ainsi que PDD_0 avec une méthode de Monte-Carlo où la dynamique de S est discrétisée en utilisant un schéma d'Euler (naïf) (vous choisissez un pas de discrétisation). L'objectif est de comparer les deux méthodes.

2. Un seul actif et plusieurs périodes.

On considère le cas expliqué supra avec des valeurs (choisies) pour initialiser r, σ, S_a, S_0 et $\alpha = 0.15$ et 0.2. On estime la valeur $\mathrm{PDD}(r,\sigma,S_a,S_0)$ avec une méthode de Monte-Carlo où la dynamique de S est discrétisée en utilisant un schéma d'Euler (vous choisissez un pas de discrétisation). L'objectif est de comparer les deux méthodes. Dans un second temps vous étudiez la sensibilité de la PDD par rapport à r, σ S_a et S_0.

1.1 Estimation de la PDD.

Méthode naïve. Il s'agit d'une simple implémentation de la méthode de Monte-Carlo où $\sup_{u\in]t-1/2,t]} S_u$ est calculé sur les éléments de la trajectoires discrète de S.

Méthode raffinée. Ici, il s'agit d'un raffinement naturel de la méthode naïve consistant en l'utilisation d'un *pont Brownien* pour quantifier la probabilité de franchissement de la barrière S_a entre deux éléments consécutifs de la grille de discrétisation de la trajectoire de S.

1. Il faut considérer les cas suivants : $T = 1, 2, 5, 10, 15$
2. Il faut tracer l'évolution de la PDD en fonction de r et σ pour $T = 1$ et $T = 10$.

1.2 La sensibilité de la PDD.

Ici, il s'agit de quantifier la sensibilité de la PDD par rapport à la volatilité σ, le taux d'intérêt sans risque r et la valeur initiale de l'actif S_0. En d'autres termes, nous avons besoin d'approcher les quantités suivantes :

$$\text{Vega} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0)\big], \quad \text{Rho} = \frac{\partial}{\partial r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0)\big], \quad \text{Delta} = \frac{\partial}{\partial S_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\lambda_0(r,\sigma,S_a,S_0)\big]. \tag{5}$$

Vous pouvez utiliser, par exemple, une méthode de différence finies.

1. Il faut tracer l'évolution des sensibilités de la PDD en fonction de r, σ et S_0

3. Deux actifs. Il s'agit de calculer la PDD quand l'assureur détient deux actifs. Il faut considérer les deux cas de figures suivants. Les deux actifs sont indépendant $\rho = 0$, les deux actifs sont *comonotones* $\rho = 1$, les deux actifs sont corrélés avec une corrélation $\rho = -0.3$ (on utilisera l'algorithme de CHOLESKY et non pas la fonction `mvrnomr` de `R` pour les simulations).

Il faut rendre un document expliquant et discutant brièvement les résultants (d'une 15aine de pages) ainsi qu'un seul et unique fichier source pour les codes (R, SAS, VBA, Matlab, C, C++ ou autres).

Le projet est à rendre pour le 27 janvier 2017 avant 23h00. Le rapport ainsi que le fichier source du code doivent être només de la façon suivante "Num_Nom1_Nom2_Nom3.extension", où "Num" étant le numéro du groupe. L'objet du mail doit être [Projet TechNum 2016].

Référence (Cas similaire). J. Azzaz, S. Loisel, P.-E. Thérond, *Some characteristics of an equity security next-year impairment*, Review of Quantitative Finance & Accounting, 02/2014