

CAOS Y ATRACTORES EXTRAÑOS: LA ECUACIÓN DE LORENZ

MA0455

LUIS ROBERTO VILLALOBOS MURILLO
B57822

RESUMEN. La ecuación de Lorenz representa un ejemplo de un sistema caótico altamente sensible a las condiciones iniciales, este tipo de sistemas ha sido ampliamente estudiado en las últimas décadas. La meta de este trabajo es describir el comportamiento caótico de la ecuación de Lorenz desde la perspectiva de un primer curso de ecuaciones diferenciales.

ÍNDICE

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
3. Análisis de los puntos críticos	5
4. Análisis de las soluciones	7
5. El atractor extraño de Lorenz	10
6. Conclusiones	11
Agradecimientos	11
Apéndices	12
Apéndice I: código para generar animaciones	12
Apéndice II: otros ejemplos de atractores	15
Referencias	16

1. INTRODUCCIÓN

Si bien el término *caos* es usualmente utilizado como sinónimo de *desorden* o para referirse a aquello que es impredecible, en un sentido técnico un *sistema caótico* viene a ser caracterizado por aparentar ser aleatorio y desordenado pero más bien tiene comportamiento intrínseco determinístico; el ilusorio desorden exhibido por tales sistemas surge de una extrema sensibilidad a las condiciones iniciales[10]. Por otro lado, la noción de un atractor extraño, por su alta complejidad técnica[2], se sale totalmente del alcance de este trabajo y el autor se limitará a proporcionar un caso particular.

Uno de los ejemplos más conocidos de un sistema caótico es dado por la ecuación de Lorenz

$$\begin{aligned}x' &= \sigma(-x + y), \\y' &= rx - y - xz, \\z' &= -bz + xy.\end{aligned}\tag{1}$$

De acuerdo con [4] es gracias al meteorólogo estadounidense Barry Saltzman(1931-2001) que tenemos la ecuación anterior. Saltzman se basó en el modelo (2) de Lord Rayleigh(1842-1919). Este último tenía como meta describir el movimiento convectivo(Figura 1) de una capa de fluido entre dos placas de metal a temperaturas constantes $T_s < T_i$, donde T_s es la temperatura de placa superior y T_i la correspondiente a la placa inferior. En el caso en que $\Delta T = T_i - T_s$ es pequeño no se presenta movimiento del fluido y ocurre que la temperatura se transmite por conducción térmica, y además varía linealmente con respecto a la altura. Tal situación se denota por T_{sta} .

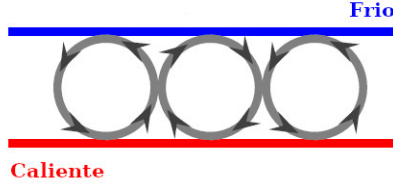


FIGURA 1. Convección.

Fuente: [4]

$$\begin{aligned}\partial_t(\nabla^2\Psi) &= -\partial_{\xi,\eta}(\Psi, \nabla^2\Psi) + v\nabla^4\Psi + g\alpha\partial_\xi\Theta, \\ \partial_t\Theta &= -\partial_{\xi,\eta}(\Psi, \Theta) + \frac{\Delta T}{H}\partial_\xi\Psi + \kappa\nabla^2\Theta.\end{aligned}\tag{2}$$

Donde

- t : representa el tiempo,
- ξ, η : son las coordenadas vertical y horizontal,
- $\Theta(\xi, \eta, t)$: $T(\xi, \eta, t) - T_{sta}(\xi, \eta, t)$,
- Ψ : función de las corrientes de fluido,
- H : distancia entre las placas horizontales,
- g : constante de gravitación,
- α : coeficiente de expansión termal,
- v : viscosidad,
- κ : coeficiente de conductividad termal.

El aporte de Saltzman al modelo de Lord Rayleigh consistió en considerar las expansiones en series de Fourier de Θ y de Ψ (3) en aras de utilizar el modelo para valores grandes

de ΔT .

$$\begin{aligned}\Psi(\xi, \eta, t) &= \sum_{l, k \in \mathbb{Z}} \Psi_{k,l}(t) \exp \left(i \left(k \frac{\pi a}{H} \xi + l \frac{\pi}{H} \eta \right) \right), \\ \Theta(\xi, \eta, t) &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \Theta_{k,l}(t) \exp \left(i \left(k \frac{\pi a}{H} \xi + l \frac{\pi}{H} \eta \right) \right).\end{aligned}\tag{3}$$

Sin embargo, al sustituir (3) en (2) se obtiene un sistema de ecuaciones con una cantidad infinita de variables. Ante este problema, Saltzman decidió truncar el sistema y después de varios intentos llegó eventualmente a (1). Posteriormente, en la década de los sesenta el meteorólogo estadounidense Edward Lorenz (1917-2008), que estaba cuestionando la precisión de los modelos meteorológicos de la época, se interesó en el sistema, y llegó, eventualmente, a la conclusión de que era muy poco probable el predecir de manera precisa el clima a largo plazo. El proceso de cómo Saltzman llegó de (3) a (1) es mostrado de manera detallada por Lorenz en su artículo de 1963[6].

Cabe aclarar, con respecto a la ecuación (1), que σ , b y r son parámetros positivos, particularmente σ , b dependen del material y las propiedades de la capa de fluido, mientras que r es proporcional a ΔT . Una escogencia clásica de estos parámetros corresponde a $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$, estos son usualmente referidos en la literatura como **los parámetros de Lorenz**. Por otro lado, referente a las variables, x está relacionado a la intensidad del movimiento del fluido y las otras dos variables y y z se relacionan a las variaciones de temperatura en las direcciones horizontal y vertical. Si bien esta interpretación de los componentes de la ecuación es la adoptada en [3], es notable mencionar que existen otras posibles interpretaciones de los mismos[1].

La importancia de la ecuación de Lorenz recaé no solamente en representar un ejemplo de un sistema caótico con un comportamiento interesante sino también de que su estudio conecta varios campos de la matemática como lo muestra la literatura referente al tema[2][9][5].

En las siguientes secciones se introducirán conceptos necesarios para el estudio posterior del comportamiento de las soluciones de la ecuación de Lorenz. Finalmente comentaremos un poco sobre el conjunto al cual convergen, i.e., el atractor de Lorenz.

2. PRELIMINARES

Para poder analizar (1), necesitamos primero las siguientes definiciones básicas. Las mismas pueden encontrarse en [3].

Primeramente, dada una ecuación diferencial de la forma

$$x' = f(x)\tag{4}$$

decimos que x_0 es un punto crítico si satisface $f(x_0) = 0$. Los puntos críticos también satisfacen $x' = 0$ para cualquier solución x de (4).

La relevancia del estudio de puntos críticos se debe a que correspon a soluciones constantes o bien a soluciones de equilibrio del sistema (4). Más aún, los mismos se pueden clasificar utilizando la noción de **estabilidad**.

Definición 1. *Un punto crítico x_0 se dice ser **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda solución Φ de (4) que satisfaga*

$$\|\Phi(0) - x_0\| < \delta,$$

se tiene que $\Phi(t)$ existe para todo $t > 0$ y además

$$\|\Phi(t) - x_0\| < \varepsilon$$

para todo $t > 0$. Si un punto crítico no es estable se le llama **inestable**.

Adicionalmente, si x_0 es un punto crítico estable, decimos que es **asintóticamente estable** si es estable y además cumple que existe $\eta > 0$ tal que si una solución Φ de (4) satisface

$$\|\Phi(0) - x_0\| < \eta,$$

entonces se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = x_0.$$

En la Figura 2, se puede apreciar gráficamente la noción de estabilidad para el caso en dos dimensiones. Nótese que en este caso $\Phi(t) = (\phi(t), \psi(t))$.

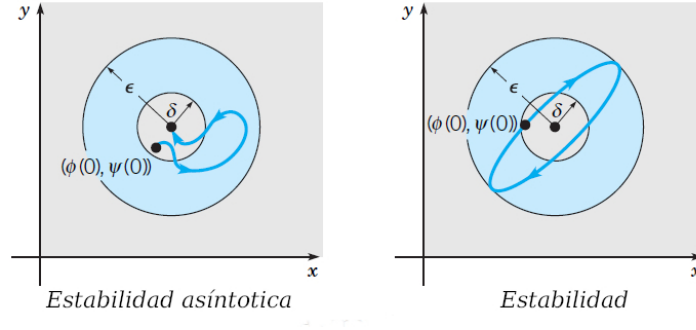


FIGURA 2

Fuente: [3]

Por último, nos hace falta el concepto de la matriz Jacobiana para un sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 2. Para un sistema autónomo de tres ecuaciones de primer orden

$$x' = F(x, y, z),$$

$$y' = G(x, y, z),$$

$$z' = H(x, y, z),$$

se define la **matriz Jacobiana** como

$$J = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}.$$

3. ANÁLISIS DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

Como se dijo previamente, nos interesa determinar el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Lorenz, con este fin es necesario primero determinar los puntos críticos del sistema, para ello seguimos la estrategia utilizada en [3].

Primeramente, considerando el sistema en su forma homogénea, obtenemos

$$-\sigma x + \sigma y = 0, \quad (5)$$

$$(r - z)x - y - xz = 0, \quad (6)$$

$$yx + xy - zb = 0. \quad (7)$$

De (5) tenemos que $x = y$, luego sustituyendo en (6) y (7) obtenemos el sistema equivalente

$$x(r - 1 - z) = 0, \quad (8)$$

$$-bz + x^2 = 0. \quad (9)$$

Así $x = 0$ o bien $z = r - 1$. Para el caso en que $x = 0$, de (9) obtenemos que $x = y = z = 0$, lo cual nos indica el primer punto crítico $P_1 = (0, 0, 0)$. Para el otro caso, en que $z = r - 1$ vea que de (9) obtenemos $x = y = \pm\sqrt{b(r - 1)}$, y como nos interesan puntos críticos en \mathbb{R}^3 , lo mismo nos indica que tal situación solo es posible si $r > 1$, en cuyo caso tenemos otros dos puntos críticos: $P_2 = (\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$ y $P_3 = (-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$. Notese que para $r = 1$, se cumple que $P_1 = P_2 = P_3$.

En este punto podemos pasar a analizar el comportamiento de las soluciones con la condición inicial de un valor cercano a los puntos críticos en $t = 0$. De ahora en adelante, nos referiremos a las condiciones iniciales únicamente con el valor en \mathbb{R}^3 que toma una solución de la ecuación (1) en $t = 0$; además para simplificar los cálculos, vamos a tomar $\sigma = 10$ y $b = 8/30$. Primeramente note que la matriz Jacobiana para (1) está dada por

$$J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Así, el sistema que aproxima en P_1 corresponde a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Seguidamente, es necesario determinar los autovalores de la matriz asociada al sistema anterior

$$\begin{vmatrix} -10 - \lambda & 10 & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 - \lambda \end{vmatrix} = -(8/3 + \lambda)(\lambda^2 + 11\lambda - 10(r - 1)) = 0.$$

que corresponden a

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2}, \lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}.$$

Note que los tres autovalores son negativos para $r < 1$. Esto nos dice que el origen P_1 es asintóticamente estable¹ tanto para el sistema que aproxima como para la ecuación original siempre que $r \in (0, 1]$. Para el valor $r = 1$ se tiene que λ_3 cambia de signo y es positivo para $r > 1$. El valor $r = 1$ corresponde al inicio del flujo convectivo en el sistema. Luego, para $r > 1$ el origen es inestable, i.e., todas las soluciones con condiciones iniciales cercanas tienden a crecer, excepto por aquellas en el plano determinado por los autovalores asociados a λ_1 y λ_2 (o, para el sistema original, en cierta superficie tangente a este plano en el origen).

Para los demás puntos críticos, recordemos que vienen dados por

$$P_j = \left((-1)^j \sqrt{\frac{8(r-1)}{3}}, (-1)^j \sqrt{\frac{8(r-1)}{3}}, r-1 \right) \text{ para } j = 2, 3.$$

Así, el sistema correspondiente es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{8(r-1)}{3}} \\ (-1)^j \sqrt{\frac{8(r-1)}{3}} & (-1)^j \sqrt{\frac{8(r-1)}{3}} & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Para ambos valores de j , un cálculo sencillo, pero extenso, permite determinar que los autovalores de la matriz asociada al sistema anterior son las soluciones de

$$-3\lambda^3 - 41\lambda^2 - 8(r+10)\lambda + 160(1-r) = 0.$$

Ahora, bien estos autovalores tienen una forma tan complicada que su valor exacto se omite, ultimadamente lo que nos interesa es ver como varía el signo de sus partes reales e imaginarias de acuerdo al valor de r . Propiamente, para $1 < r < r_1 \approx 1.3456$ hay tres autovalores negativos. Si más bien $r_1 < r < r_2 \approx 24.737$ hay un autovalor negativo y dos autovalores complejos con parte real negativa. Luego, si $r_2 < r$ hay un autovalor negativo y dos autovalores con parte real positiva.

Resumiendo la información que tenemos hasta el momento de P_1 , P_2 y P_3 tenemos que:

- para $0 < r < 1$, el único punto crítico es P_1 y es asintóticamente estable, i.e., todas las soluciones se aproximan al origen cuando $t \rightarrow \infty$,
- para $1 < r < r_1$, P_2 y P_3 son asintóticamente estables y P_1 es inestable. Todas las soluciones cercanas se aproximan a P_2 o a P_3 de manera exponencial,
- para $r_1 < r < r_2$, se tiene un comportamiento similar de las soluciones que en el caso anterior pero las soluciones se acercan en espiral a los puntos críticos.

¹Al autor le gustaría hacer la anotación de que la teoría concierne a la clasificación de los puntos críticos para tres o más dimensiones se escapa por completo del ámbito de este pequeño trabajo, por lo cual se omitió mención a la misma, y se procede a clasificar los puntos críticos inmediatamente después de obtener sus autovalores de acuerdo a como nos lo indica la literatura[3].

- para $r_2 < r$ los tres puntos críticos son inestables. La mayoría de soluciones cercanas a P_1 y P_2 se alejan en espiral de los mismos.

En la siguiente sección veremos que los comportamientos más interesantes de las soluciones se presentan para $r > r_2$.

4. ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES

Al considerar valores de $r < r_2$, lo que ocurre es que muy rápidamente se evidencia la convergencia de las soluciones. En la Figura 3, podemos apreciar este comportamiento para x .

Gráficas para distintas condiciones iniciales con $r = 21$.

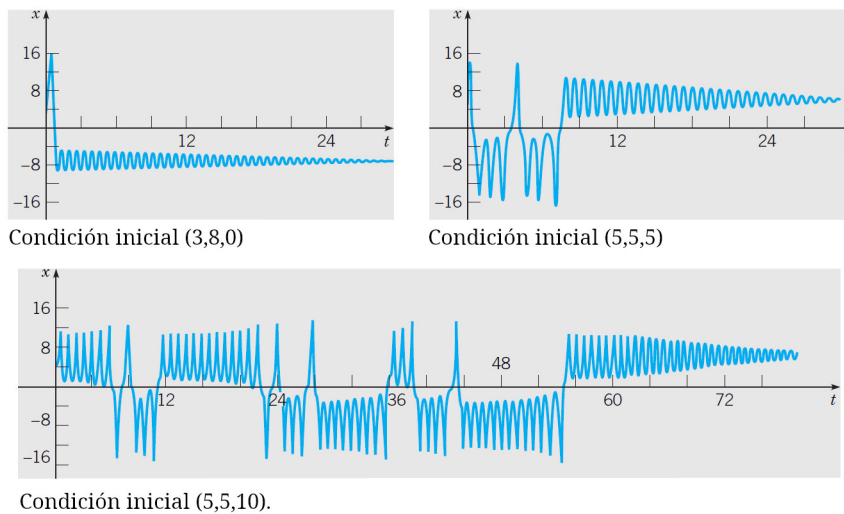


FIGURA 3

Fuente: [3]

Mientras que en la Figura 4, podemos apreciar esta misma convergencia pero para las tres variables y para distintos valores de $r < 24$.

Distintos parámetros para $r < 24$, mismo estado inicial

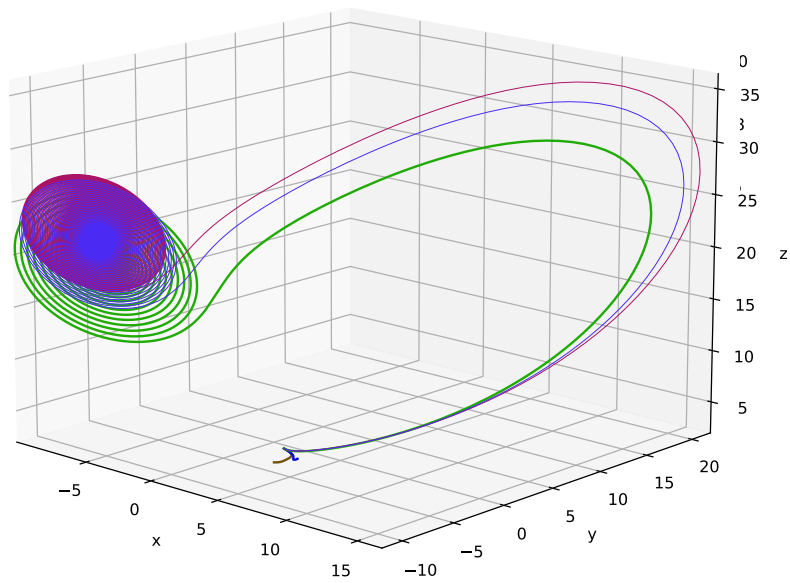
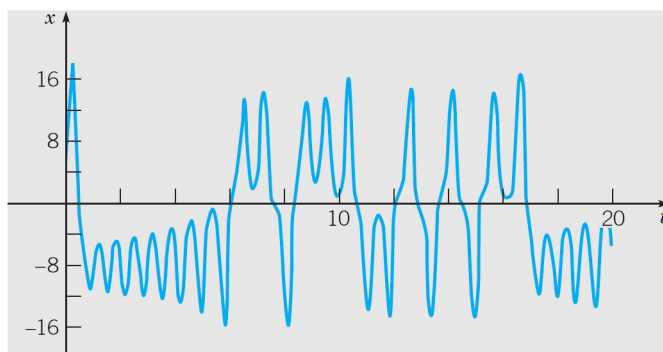


FIGURA 4

En la Figura 5 se puede observar una especie de variación oscilatoria errática de los valores de x con respecto a los valores de t utilizando el valor $r = 28$. Tal variación queda determinada totalmente por la condición inicial usada $(5, 5, 5)$.

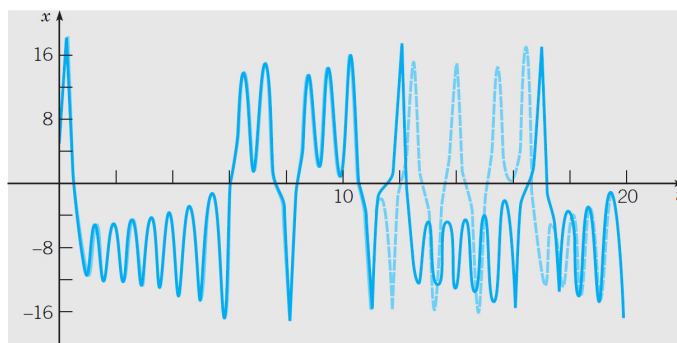


Gráfica de x con respecto a t , con condiciones iniciales $(5,5,5)$, $r = 28$.

FIGURA 5

Fuente: [3]

Por otro lado, variando las condiciones iniciales de manera mínima, los valores de x , empiezan a ser notoriamente distintos, como se puede apreciar en la Figura 6. Las dos soluciones, elegida una con condición inicial $(5, 5, 5)$ y la otra con condición inicial $(5.01, 5, 5)$, toman casi exactamente los mismos valores para x hasta $t \approx 10$, momento en el cual empiezan a diferir considerablemente. Fue esta característica la que llamó la atención de Lorenz y lo llevó a la conclusión de que realizar predicciones del clima a largo plazo era bastante improbable[3].



Gráfica de x con respecto a t para dos condiciones iniciales con variaciones mínimas, $(5.01,5,5)$ para la sólida y $(5,5,5)$ para la línea discontinua, $r = 28$.

FIGURA 6

Fuente: [3]

En la Figura 7 podemos apreciar la diferencia de la trayectorias en las tres dimensiones bajo los parámetros de Lorenz. Se utilizan las condiciones iniciales $(0, 1, 1.05)$, $(1/10, 11/10, 1.05 + 1/10)$ y $(1/2, 2/9, 9/10)$.

Múltiples estados iniciales con variaciones mínimas
 $r = 28$, $b = 8/3$, $\sigma = 10$

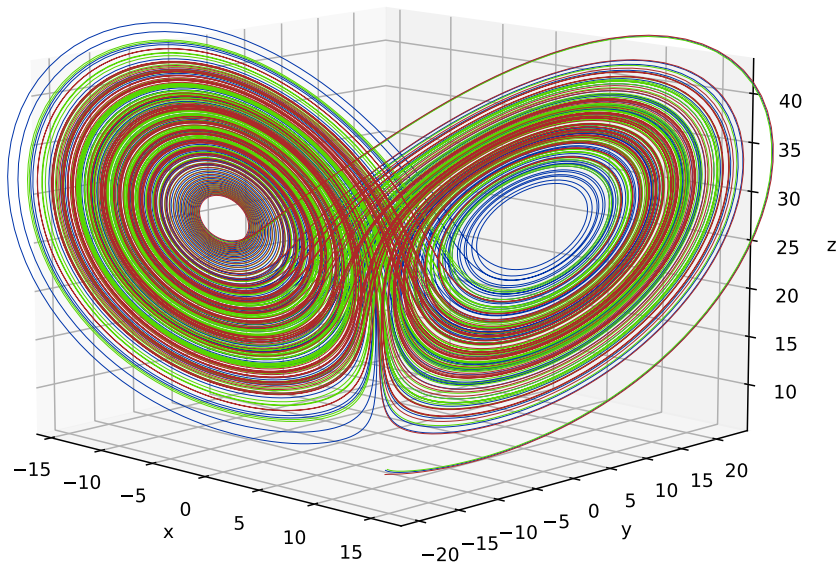


FIGURA 7

El comportamiento de las soluciones que vemos para $r > r_2$, de acuerdo a lo mencionado en la introducción, se denomina **caótico**; y para ser más precisos, este se empieza a evidenciar cada vez más conforme el valor de r aumenta de r_2 hasta $r_3 \approx 24.06$ punto en el cual el tiempo necesario para observar la convergencia de las soluciones tiende a infinito[3]. En particular, se sabe que las soluciones de la ecuación van a estar acotadas cuando $t \rightarrow \infty$ [2]. Más aún, se sabe que hay un conjunto al cual todas las soluciones convergen eventualmente, el mismo se conoce como **el atractor extraño de Lorenz**, es un subconjunto de R^3 con medida cero y su construcción no es para nada trivial.

5. EL ATRACTOR EXTRAÑO DE LORENZ

De acuerdo con la literatura[9][5][2], en el año 2000, el matemático Warwick Tucker, llegó a notar que las trayectorias de las soluciones recurrentes de la ecuación de Lorenz podían deformarse para ser contenidas en una superficie denominada como la **plantilla de Lorenz** (Figura 8). Esta superficie corresponde a un concepto planteado por los matemáticos J. Guckenheimer y R.F Williams en 1976, llamado el atractor geométrico de

Lorenz; Guckenheimer y Williams tenían la idea de que era plausible pensar que había una correspondencia entre el atractor geométrico y las soluciones de las ecuaciones de Lorenz. Esto fue probado eventualmente por Tucker junto con la existencia del atractor.

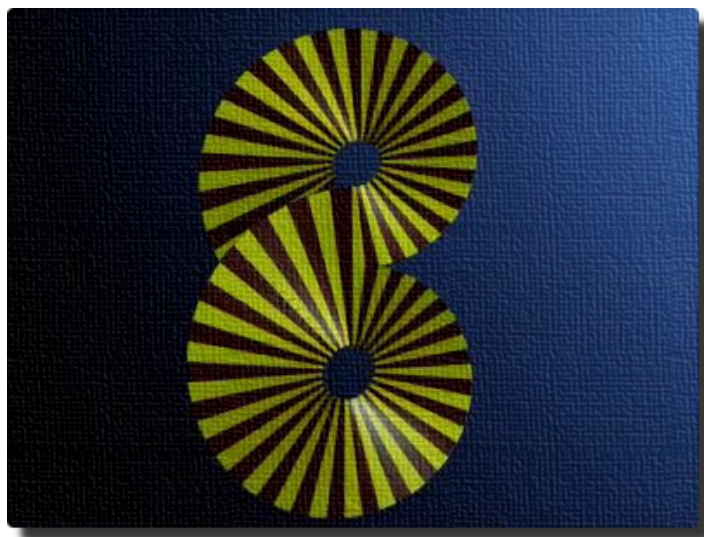


FIGURA 8. La plantilla de Lorenz

Fuente: [5]

6. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo hemos visto el desarrollo histórico de la ecuación de Lorenz así como sus particularidades. Si bien en algunas fuentes se hace hincapié en que la ecuación de Lorenz no necesariamente tiene relación con un fenómeno en el mundo físico [4], al autor le resulta sumamente interesante el hecho de que una ecuación diferencial aparentemente sencilla, como lo es (1), de lugar a soluciones con un comportamiento tan extraordinario que a su vez en su estructura exhiben también una belleza estética sumamente peculiar.

AGRADECIMIENTOS

Al autor le gustaría agradecer a la profesora Adriana Sánchez por su ayuda en la realización de este trabajo, por la oportunidad de presentarlo y por su excelente labor como docente del curso MA0455 para el cual está destinado este trabajo.

APÉNDICES

Apéndice I: código para generar animaciones. El siguiente código, escrito en Python, puede ser utilizado para generar animaciones de la ecuación de Lorenz. El mismo es una implementación del código presentado en [7]. Un código similar fue utilizado para generar las Figuras 4 y 7.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.animation import FuncAnimation
4 from scipy.integrate import odeint
5 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
6
7 #fondo negro
8
9 plt.style.use(['dark_background'])
10
11 #sistema de lorenz
12
13 def lorenz_eq(variables, t, beta = 8/3, sigma = 10 , rho = 28):
14     x, y, z = variables
15     d_x = sigma * (y - x)
16     d_y = x * (rho - z) - y
17     d_z = x * y - beta * z
18     return d_x, d_y, d_z
19
20
21 #st0 = [0, 1, 1.05]
22
23 st0 = [1,1,20]
24 st1 = [1.3,1.04,20]
25
26 st2 = [1.7,1.8,19.86]
27 st3 = [2, 1.34, 20 + 10/33]
28
29 # st0= [60,65,10]
30 # st1 = [-50,30,6]
31
32 t0 = np.linspace(0, 100, 20000)
33 n = len(t0)
34
35 #soluciones para distintos estados iniciales y un mismo intervalo de
    tiempo
36
37 sol0 = odeint(lorenz_eq, st0, t0)
38 sol1 = odeint(lorenz_eq, st1, t0)
39 sol2 = odeint(lorenz_eq, st2, t0)
40 sol3 = odeint(lorenz_eq, st3, t0)
41
42 #inicializacion y ajustes de la figura y los plots
43
44 fig = plt.figure('Soluciones en tiempo real',figsize=(8, 6), dpi = 100)
45

```

```

46
47 ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
48 fig.subplots_adjust(top = 0.914, bottom= 0, right= 0.855)
49
50
51 p0, = ax1.plot([], [], [], color='#57D702', linewidth=0.78, alpha = 0.9) #
    verde
52 p1, = ax1.plot([], [], [], color = '#AD2929', linewidth = 0.78, alpha =
    0.7) #rojo
53 p2, = ax1.plot([], [], [], color='#2045CF', linewidth=0.78, alpha = 0.5) #
    azul
54 p3, = ax1.plot([], [], [], color='#F39C12', linewidth=0.78, alpha = 0.4) #
    ~mostaza
55
56 #la siguiente funcion inicializa la animacion
57
58 def init_func():
59
60     ax1.set_xlim3d(-30,30)
61     ax1.set_ylim3d(-30,30)
62     ax1.set_zlim3d(0,30)
63     # ax.set_xlabel("x")
64     # ax.set_ylabel("y")
65     # ax.set_zlabel("z")
66     ax1.set_axis_off()
67
68
69
70 #funcion para actualizar los plots para cada momento t de t0
71
72 def animate(i):
73
74     # esta siguiente linea sirve para rotar la animacion en cada iteracion
75
76     #ax1.view_init(elev=5,azim = i/4+1)
77
78
79     p0.set_data(sol0.T[0][:i], sol0.T[1][:i])
80     p0.set_3d_properties(sol0.T[2][:i])
81
82     p1.set_data(sol1.T[0][:i], sol1.T[1][:i])
83     p1.set_3d_properties(sol1.T[2][:i])
84
85     p2.set_data(sol2.T[0][:i], sol2.T[1][:i])
86     p2.set_3d_properties(sol2.T[2][:i])
87
88     p3.set_data(sol3.T[0][:i], sol3.T[1][:i])
89     p3.set_3d_properties(sol3.T[2][:i])
90
91
92 #posible intervalo muy rapido: 1/(2**64), posibles intervalo decente:
    5,8,10 (de 15 en adelante se vuelve muy lento)
93

```

```
94 #FuncAnimation llama primero a init_func y luego itera animate pasandole
    los valores del parametro frames
95
96 anim = FuncAnimation(fig,
97                       animate,
98                       frames = range(0,n,3),
99                       interval = 0,
100                      init_func = init_func(),
101                      repeat = False,
102                      cache_frame_data = False)
103
104
105 plt.show()
```

Apéndice II: otros ejemplos de atractores. Las siguientes gráficas representan las soluciones de otros atractores interesantes.

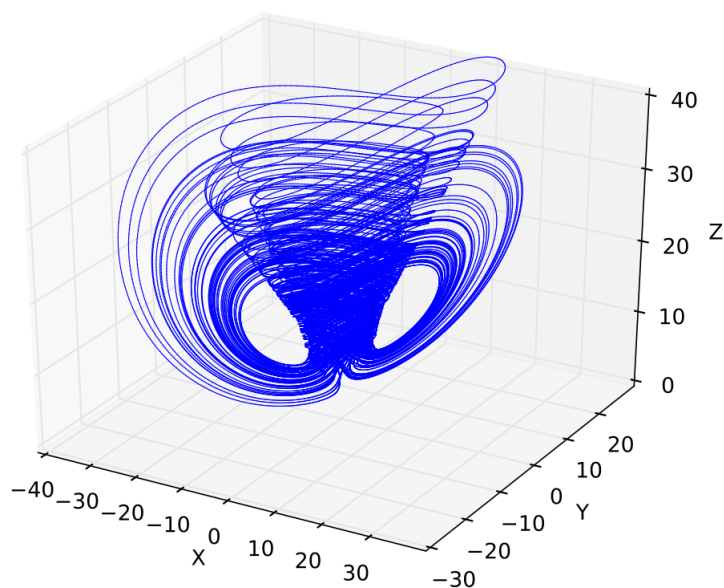


FIGURA 9. El atractor modificado de Lu Chen

Fuente: [8]

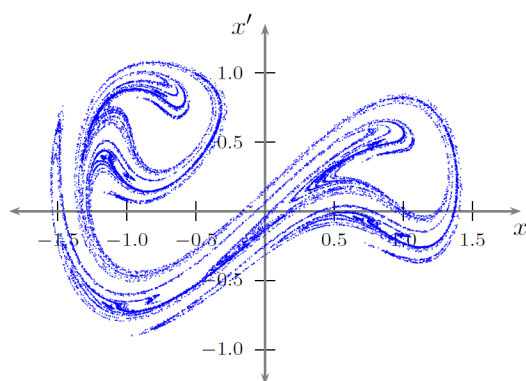


FIGURA 10. El atractor de Duffin

Fuente: [4]

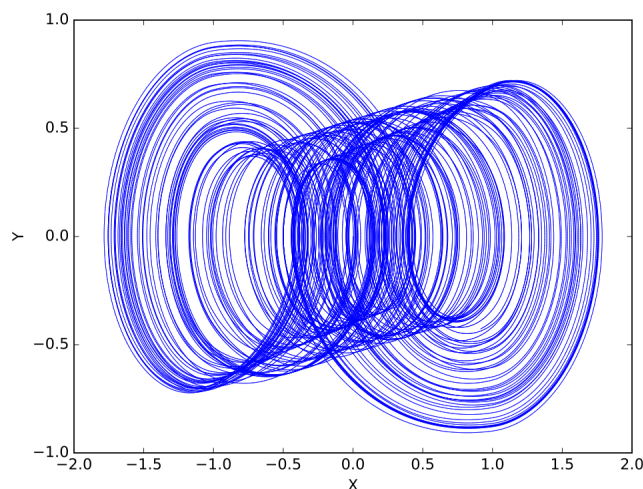


FIGURA 11. El atractor PWL Duffin

Fuente: [8]

REFERENCIAS

- [1] Jos Leys & Étienne Ghys & Aurélien Alvarez. *Chaos / Chapter 7 : Strange Attractors - The butterfly effect*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=aAJkLh76QnM>.
- [2] Ramiro Buitrago. *El sistema y el atractor geométrico de Lorenz*. 2010. URL: <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/7557>.
- [3] William E. Boyce & Richard C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 2009.
- [4] Marcelo Viana & Jose Espinar. "Differential Equations: A Dynamical Systems Approach to Theory and Practice".
- [5] Étienne Ghys & Jos Leys. *Lorenz and modular flows: a visual introduction*. URL: http://www.josleys.com/articles/ams_article/Lorenz3.htm.
- [6] Edward Lorenz. "Deterministic Nonperiodic Flow". En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1963). doi: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2).
- [7] *Lorenz Attractor Simulation, implemented in Python*. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=t1iDVhg6fxY&t=14s>.
- [8] *Multiscroll attractor*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Multiscroll_attractor.
- [9] Tali Pinsky. "On the topology of the Lorenz system". En: *Proc. R. Soc. A* 473.2205 (2017). doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0374>.
- [10] George T. Yurkon. *Essay on Chaos: Introduction to chaos and it's real world applications*. URL: <https://sciences.csuohio.edu/physics/essay-chaos>.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Email address: `luis.villalobosmurillo@ucr.ac.cr`