



# Formalización del problema de la partición del grafo

Laura Rodríguez Navas  
rodrigueznava@posgrado.uimp.es

Mayo 2020  
Resolución de problemas con metaheurísticos

# Resumen

Dentro del amplio campo de la Teoría de Grafos, en este trabajo se considera el problema de la partición del grafo: dado un grafo no dirigido cuyo número de vértices es par y cuyas aristas tienen asociado un peso, se trata de encontrar la partición del conjunto de vértices en dos subconjuntos de tamaño similar de manera que se minimice la suma de los pesos de aquellas aristas que unen vértices que están en diferentes conjuntos

En el capítulo inicial se presenta una breve introducción al problema. En el segundo capítulo, se proponen tres codificaciones para este problema, señalando sus aspectos más relevantes (positivos y negativos), además de ejemplos. Concretamente, las codificaciones son implementaciones en Python 3 de los algoritmos basados en técnicas metaheurísticas: Kernighan-Lin, Spectral Bisection y Multilevel Spectral Bisection. Y en el tercer capítulo, se concluye con una comparativa entre las diferentes codificaciones.

Las codificaciones se encuentran en el repositorio:

<https://github.com/lrodrin/masterAI/tree/master/A2>

# Tabla de Contenidos

|  |          |
|--|----------|
| <b>Resumen</b>                                       | <b>1</b> |
| <b>1 Introducción a la Partición de Grafos</b>       | <b>3</b> |
| 1.1 Introducción . . . . .                           | 3        |
| 1.2 Descripción el problema . . . . .                | 3        |
| <b>2 Algoritmos basados en metaheurísticas</b>       | <b>4</b> |
| 2.1 Kernighan-Lin . . . . .                          | 4        |
| 2.1.1 Descripción . . . . .                          | 4        |
| 2.1.2 Ejemplo . . . . .                              | 5        |
| 2.2 Spectral Bisection . . . . .                     | 5        |
| 2.2.1 Descripción . . . . .                          | 5        |
| 2.2.2 Ejemplo . . . . .                              | 5        |
| 2.3 Multilevel Spectral Bisection . . . . .          | 5        |
| 2.3.1 Descripción . . . . .                          | 5        |
| 2.3.2 Ejemplo . . . . .                              | 5        |
| <b>3 Comparativa entre los diferentes algoritmos</b> | <b>6</b> |
| <b>Bibliography</b>                                  | <b>7</b> |

# 1. Introducción a la Partición de Grafos

## 1.1 Introducción

En los últimos años el problema de la partición de grafos ha sido ampliamente estudiado. El problema se deriva de situaciones del mundo real por lo que tiene aplicación en varias ramas de la ingeniería y de la investigación. La partición de grafos es una disciplina ubicada entre las ciencias computacionales y la matemática aplicada. El problema de la partición de grafos es un problema importante que tiene aplicaciones extensas en muchas áreas ya que se busca minimizar los costes o maximizar los beneficios a través de la correcta distribución de los recursos.

La primera aplicación del problema fue en la partición de componentes de un circuito en un conjunto de tarjetas que juntas realizaban tareas en un dispositivo electrónico. Las tarjetas tenían un tamaño limitado, de tal manera que el dispositivo no llegara a ser muy grande, y el número de elementos de cada tarjeta estaba restringido. Si el circuito era demasiado grande podía ser dividido en varias tarjetas las cuales estaban interconectadas, sin embargo, el coste de interconexión era muy elevado por el que el número de interconexiones debía ser minimizado.

La aplicación descrita anteriormente fue presentada en [1], en la cual se define un algoritmo eficiente para encontrar buenas soluciones. En la aplicación, el circuito es asociado a un grafo y las tarjetas como subconjuntos de una partición. Los nodos del grafo son representados por los componentes electrónicos y las aristas forman las interconexiones entre los componentes y las tarjetas.

Los algoritmos mas conocidos para obtener soluciones al problema de la partición de grafos se pueden clasificar en dos métodos: locales y globales. Los métodos locales más conocidos son el algoritmo Kernighan-Lin[1], citado anteriormente, y el algoritmo Fiduccia-Mattheyses[2]. Su principal inconveniente es la partición inicial arbitraria del conjunto de vértices, que puede afectar la calidad de la solución óptima final. En cambio, los métodos globales se basan en las propiedades de todo el grafo y no se basan en una partición inicial arbitraria. El ejemplo más común es la Spectral Bisection (ver apartado 2.2), donde una partición se deriva de los vectores propios aproximados de la matriz de adyacencia, o la agrupación espectral que agrupa los vértices del grafo usando la descomposición propia de la matriz Laplaciana del grafo.

## 1.2 Descripción el problema

El problema de partición de grafos puede formularse como un problema de programación entera.

Los problemas de programación entera generalmente están relacionados directamente a problemas combinatorios, esto genera que al momento de resolver los problemas de programación entera se encuentren restricciones dado el coste computacional de resolverlos; por ese motivo se han desarrollado algoritmos que buscan soluciones de una forma más directa, la restricción de los mismos es que no se puede garantizar que la solución encontrada sea la óptima.

El problema de partición de grafos ha sido denominado como un problema NP-Hard[3], lo que implica que las soluciones para él no pueden ser encontradas en tiempos razonables.

## 2. Algoritmos basados en metaheurísticas

Debido a la "intratabilidad" del problema de la partición de un grafo, no existe un algoritmo concreto que permita obtener en tiempo polinómico la solución óptima a la partición de cualquier grafo. Es por ello que, los algoritmos codificados para este trabajo se basan en la heurística, con el objetivo de obtener soluciones de buena calidad en tiempos computacionales aceptables, a pesar de que los algoritmos heurísticos no garantizan que se vaya a obtener una solución óptima al problema, incluso podría suceder que no se obtenga ninguna solución.

En el siguiente apartado se analizan los algoritmos heurísticos Kernighan-Lin[1] (ver apartado 2.1), Spectral Bisection (ver apartado 2.2) y Multilevel Spectral Bisection (ver apartado 2.3), tres algoritmos diseñados específicamente para la resolución del problema de la partición de grafos. Cualquiera de estos algoritmos proporciona una solución factible al problema, pudiendo ser esta óptima o no. Además de describir cada uno de los algoritmos detalladamente, las principales propiedades de cada uno de ellos, también se describirán algunos ejemplos.

### 2.1 Kernighan-Lin

El algoritmo Kernighan-Lin[1], a menudo abreviado como K-L, es uno de los primeros algoritmos de partición de grafos y fue desarrollado originalmente para optimizar la colocación de circuitos electrónicos en tarjetas de circuito impreso para minimizar el número de conexiones entre las tarjetas.

El algoritmo K-L no crea particiones, sino que las mejora iterativamente. La idea original era tomar una partición aleatoria y aplicarle Kernighan-Lin[1]. Esto se repetiría varias veces y se elegiría el mejor resultado. Mientras que para grafos pequeños esto ofrece resultados razonables, es bastante ineficiente para tamaños de problemas más grandes.

Decimos que es un algoritmo:

- **Iterativo.** Esto significa que el grafo inicialmente ya está particionado, pero la aplicación del algoritmo intentará mejorar u optimizar la partición inicial.
- **Voraz.** Esto significa que el algoritmo hará cambios si hay un beneficio inmediato sin considerar otras formas posibles de obtener una solución óptima.
- **Determinista** porque se obtendrá el mismo resultado cada vez que se aplique el algoritmo.

Hoy en día, el algoritmo se usa para mejorar las particiones encontradas por otros algoritmos. Como veremos, K-L tiene una visión algo "local" del problema, tratando de mejorar las particiones mediante el intercambio de nodos vecinos. Por lo tanto, complementa muy bien los algoritmos que tienen una visión más "global" del problema, pero tienden a ignorar las características locales. Un ejemplo de este tipo de algoritmos sería la partición espectral (ver sección 2.2).

C. Fiduccia y R. Mattheyses realizaron importantes avances prácticos en [2] quienes mejoraron el algoritmo de tal manera que una iteración se ejecuta en  $O(n^2)$  en lugar de  $O(n^2 \log n)$ .

#### 2.1.1 Descripción

Ventajas:

- El algoritmo es robusto.

Desventajas:

- Los resultados son aleatorios porque el algoritmo comienza con una partición aleatoria.

- Computacionalmente es un algoritmo lento.
- Solo se crean dos particiones del mismo tamaño.
- Las particiones tienen que tener el mismo tamaño para que el algoritmo no intente encontrar tamaños de partición óptimos que ya existan.
- No resuelve muy bien los problemas con aristas ponderadas.
- La solución dependerá en gran medida del primer intercambio.

### **2.1.2 Ejemplo**

## **2.2 Spectral Bisection**

### **2.2.1 Descripción**

### **2.2.2 Ejemplo**

## **2.3 Multilevel Spectral Bisection**

El particionamiento de grafos por multilevel es un método moderno que reduce el tamaño de las particiones del grafo con la combinación de los vértices y las aristas sobre varios niveles, creando particiones del grafo cada vez más pequeñas y extensas con muchas variaciones y combinaciones de diferentes métodos.

METIS es un algoritmo de partición que se enfoca en minimizar el número de bordes de partición cruzados y distribuir la carga de trabajo de manera uniforme entre las particiones. Con METIS, los gráficos se dividen en tres fases. La primera fase es la fase de engrosamiento, la segunda la fase de partición y la tercera y última fase la fase de no engrosamiento (Figura X). La fase de particionamiento contiene particiones bi-particionadas y K-way. A diferencia de la partición K-way, la bi-partición se realiza de forma recursiva. Las subsección a continuación contienen una explicación más extensa de estas diversas fases.

### **2.3.1 Descripción**

### **2.3.2 Ejemplo**

### 3. Comparativa entre los diferentes algoritmos

METIS es el algoritmo más eficiente en la partición de grafos que se han codificado.

# Bibliography

- [1] B. W. Kernighan and S. Lin. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *Bell System Technical Journal*, 49(2):291–307, 1970. 3, 4
- [2] C.M. Fiduccia and R.M. Mattheyses. A linear-time heuristic for improving network partitions. In *19th Design Automation Conference, Las Vegas, NV, USA, 14-16 June, 1982*. IEEE, 1982. 3, 4
- [3] George Karypis and Vipin Kumar. Multilevelk-way partitioning scheme for irregular graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 48(1):96–129, 1998. 3
- [4] C. P. Ravikumar and George W. Zobrist. *Parallel Methods for VLSI Layout Design*. Greenwood Publishing Group Inc., USA, 1995. 4