Analysis 1 für Informatiker

Oliver Augenstein, Hochschule für Technik, Rapperswil

Zum Gebrauch des Skripts

Dieses Skript ist die Grundlage der Vorlesung Analysis 1 für Informatiker, wie sie an der Hochschule Rapperswil gelesen wird. Um der Vorlesung folgen zu können, empfehle ich Ihnen, dieses Skript auszudrucken und in den Vorlesungs- und Übungsstunden dabei zu haben. In die Übungsstunden sollten Sie ausserdem Ihren Laptop mitbringen, auf dem Sie die in Programmieren 1 vorgeschriebene Java Entwicklungsumgebung installiert haben.

Semesteraufgabe

Im Laufe der Vorlesung möchte ich mit Ihnen eine Software entwickeln, die das folgende Problem löst:

Aufgabe. Semesteraufgabe

Sie arbeiten für eine Werft und sollen für ein Containerschiff eine automatische Geschwindigkeitssteuerung entwerfen, die zum Ziel hat, einen möglichst kostengünstigen Warentransport zu gewährleisten. Als Mitarbeiter der Werft haben Sie dabei die Möglichkeit, den Bau des Schiffes in geringem Masse zu beeinflussen. Z.B. können Sie verlangen, dass im Schiff gewisse Sensoren zur Verfügung gestellt werden.
Ziel der Semesteraufgabe ist die Entwicklung einer Software, die die Geschwindigkeit des Schiffes permanent so reguliert, dass das Schiff möglichst kostengünstig fährt. Überlegen Sie sich zur Vorbereitung dieser Arbeit zunächst

a) Welche Parameter beeinflussen die Kosten des Transports?
b) Wie könnte man diese Parameter erheben?
c) Mit welchen Daten soll die erste Implementation der Geschwindigkeitssteuerung arbeiten?

Ergebnis

Bei dieser Aufgabe gibt es kein eindeutiges Resultat. Diskutieren Sie Ihre Ideen mit Ihren Kommilitonen.

Lösungweg

KAPITEL 1

Funktionen

1.1. Funktionen und Funktionsgraphen

1.1.1. Wichtige mengentheoretische Begriffe.

Lernziele:

- *Sie kennen die Begriffe Menge und Element einer Menge und können die Zugehörigkeit zu einer Menge durch das Elementsymbol ausdrücken*
- *Sie wissen, was man unter Gleichheit von zwei Mengen versteht und was eine Teilmenge ist*
- *Sie kennen die gebräuchlichsten Mengennotationen, sowie die Namen häufig gebrauchter Mengen*

Definition. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung verschiedener, voneinander unterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen. Die Objekte nennen wir in diesem Zusammenhang auch die *Elemente* der Menge.

In der Mengenlehre werden Mengen häufig mit Grossbuchstaben $A, B, C, ..., M, N, ...$ und Elemente mit Kleinbuchstaben $a, b, c, ..., x, y, z$ oder griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, ...$ bezeichnet.

Ein gutes Beispiel für das Vorkommen von Mengen in der Informatik sind die Spalten einer Datenbanken, in denen jeder Eintrag *nur einmal* vorkommen darf. Die Datenbankeinträge stellen in diesem Fall die Elemente der Menge dar.

Definition 1 (Gleichheits- und Elementbeziehungen). Zwei Mengen M und N heissen gleich, wenn jedes Element aus einer der beiden Mengen auch in der anderen Menge enthalten ist und umgekehrt (zwei Spalten einer Datenbank würden in diesem Fall genau dieselben Einträge enthalten). Man schreibt dafür auch

$$M \quad = \quad N$$

Überprüft man dagegen nur, dass alle Elemente aus der Menge M auch in der Menge N enthalten sind, so nennt man M eine *Teilmenge*[1] von N (alle Einträge der Datenbankspalte M

[1] *Beachten Sie, dass in der Mathematik das Teilmengensymbol die Gleichheit einschliesst. Gilt*

$$M \subset N \quad und \quad N \subset M$$

so sind die beiden Mengen M und N gleich und gilt $M = N$, so gilt auch

$$M \subset N \quad und \quad N \subset M$$

sind auch in der Datenbankspalte N enthalten) und schreibt

$$M \subset N$$

Ist das Objekt a in der Menge M enthalten, so nennt man a ein Element[2] von M und schreibt dafür

$$a \in M$$

Schliesslich heissen zwei Elemente a und b "gleich", wenn sie beide ein und dasselbe Objekt bezeichnen. In diesem Fall schreibt man

$$a = b$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} \textit{Birnen} &\notin \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} \\ \textit{Bananen} &\in \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} \\ \{\textit{Äpfel}, \textit{Birnen}\} &\not\subset \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} \\ \{\textit{Äpfel}\} &\subset \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} \\ \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} &\subset \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} \\ \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} &= \{\textit{Äpfel}, \textit{Bananen}\} \end{aligned}$$

Da Mengen (ähnlich wie die Spalten einer Datenbank) sehr unterschiedliche Objekte enthalten können, haben sich verschiedene Notationen eingebürgert, um Mengen zu definieren. Die wichtigsten dieser Notationen sind:

(1) Die *aufzählende Schreibweise*: In dieser Notation listet man alle Elemente der Menge nacheinander in einer geschweiften Klammer auf: Zum Beispiel kann man die Menge der Vokale durch

$$\{a, e, i, o, u\}$$

angeben oder die Menge aller ganzen Zahlen zwischen 1 und 10 durch

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Um die aufzählende Schreibweise flexibler zu gestalten, dürfen Elemente in der Liste weggelassen und durch "..." ersetzt werden, wenn klar ist, um welche Elemente es sich dabei handelt. Die Menge

$$\{2, 4, 6, 8, ..., 96, 98, 100\}$$

besteht z.B. aus allen geraden Zahlen zwischen 2 und 100. Die Menge

$$\{1, 2, 3, 4, ...\}$$

aus allen ganzen Zahlen grösser 1.

[2]Für viele Symbole in der Mathematik wird neben einer positiven Form auch eine negative Form benötigt, mit der sich das Gegenteil ausdrücken lässt. Um einen solchen Sachverhalt auszudrücken, hat es sich eingebürgert, das entsprechende Symbol einfach durchzustreichen. So bedeutet $a \notin M$ z.B. das Gegenteil von $a \in M$, d.h. dass a nicht in der Menge M enthalten ist.

(2) Die *beschreibende Mengendarstellung*: In dieser Notation wird eine Vorschrift angegeben, anhand derer sich prüfen lässt, ob ein Objekt Element einer Menge ist oder nicht. Ist z.B. $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, so bezeichnet

$$\{x \in M | x \textit{ ist gerade}\}$$

die Menge aller ganzen Zahlen zwischen 1 und 8 ($x \in M$), die zusätzlich die Eigenschaft haben, gerade zu sein. Man liest diese Formel dabei folgender Massen:

"die Menge aller x aus M, für die gilt: x ist gerade"

Da 2, 4, 6 und 8 die einzigen ganzen Zahlen zwischen 1 und 8 sind, die zusätzlich die Eigenschaft haben, gerade zu sein, sind die folgenden Mengen identisch

$$\{x \in M | x \textit{ ist gerade}\} = \{2,4,6,8\}$$

und bezeichnen somit ein und dasselbe Objekt.
Auch in der beschreibenden Mengennotation wird die Beschreibung der Menge durch eine geschweifte Klammer begrenzt. Der Inhalt der Klammer besteht aber, anders als bei der aufzählenden Form, aus zwei, durch das *"für-die-gilt"*-Symbol "|" getrennten Teilen. Im diesem Symbol vorausgehenden Teil wird

(a) eine Variable (in unserem Beispiel "x") und

(b) eine *Grundmenge*

festgelegt, durch die eine "Vorauswahl" der Elemente getroffen wird, die in der Menge vorkommen können. In unserem Fall enthält die Menge also höchstens die Zahlen von 1 bis 8.

In der nach dem "|"-Symbol kommenden Beschreibung werden dann "Filterregeln" angegeben, die auf die im ersten Teil festgelegte Variable angewendet werden. Die Filterregeln müssen für alle Elemente der Grundmenge entweder eine wahre oder eine falsche Aussage liefern, wobei abschliessend nur diejenigen Elemente in der Menge enthalten sind, bei welchen die Filterregeln eine wahre Aussage liefern. Die folgenden Aussagen sind damit richtig:

$$\begin{aligned}
\{x \in M | x \textit{ ist gerade}\} &= \{2,4,6,8\} \\
2 &\in \{x \in M | x \textit{ ist gerade}\} \\
\{2,4,6\} &\subset \{x \in M | x \textit{ ist gerade}\} \\
3, 11 &\notin \{x \in M | x \textit{ ist gerade}\} \\
M &\supset \{x \in M | x \textit{ ist gerade}\}
\end{aligned}$$

(3) *Vordefinierte Symbole*[3]: Für eine Reihe von häufig verwendeten Mengen haben sich feste Symbole eingebürgert. In dieser Vorlesung wichtig sind

(a) Die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$: Diese Menge beinhaltet alle Zahlen, die sich auf dem Zahlenstrahl darstellen lassen, also z.B. die Zahlen -7; $\sqrt{3}$; $\frac{2}{3}$; 0 und $8+\sin(1)$.

[3] Vordefinierte Symbole werden ohne eine geschweifte Klammer geschrieben.

(b) Die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$. Diese Menge besteht aus allen positiven und negativen ganzen Zahlen. Diese Menge lässt sich in der aufzählenden Mengendarstellung angeben. Es gilt

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

(c) Die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$. Diese Menge können wir sowohl in der beschreibenden, also auch in der aufzählenden Form angeben. Es gilt

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

(d) Die *leere Menge* $\emptyset$. Diese Menge ist eher theoretischer Natur. Sie enthält kein einziges Element und entspricht damit einer leeren Datenbankspalte.

(e) Die *positive Teilmenge* einer Menge wird durch ein hochgestelltes $+$ hinter dem Mengensymbol dargestellt [4]. Für $M \subset \mathbb{R}$ definieren wir also

$$M^+ = \{x \in M | x \geq 0\}$$

(f) Die *negative Teilmenge* einer Menge. Für $M \subset \mathbb{R}$ definieren wir $M^- = \{x \in M | x \leq 0\}$

(4) *Intervalle*[5]: Häufig ist es nötig, Mengen anzugeben, die ein ganzes Segment eines Zahlenstrahls auswählen. Hierzu eignen sich Intervalle. Das Intervall

$$[1; 200]$$

bezeichnet die Menge aller reellen Zahlen zwischen 1 und 200 inklusive der Zahlen 1 und 200. Das Intervall lässt sich also in beschreibender Form folgender Massen angeben:

$$[1; 200] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 200\}$$

Beachten Sie, dass man Intervalle nicht in der aufzählenden Schreibweise

$$\{1, 2, 3..., 200\}$$

angeben kann, da die Zahl $\frac{47}{2}$ zwar im Intervall $[1; 200]$ liegt, aber keine ganze Zahl ist:

$$\frac{47}{2} \in [1; 200]$$
$$\frac{47}{2} \notin \{1, 2, 3, ...200\}$$

Die Intervallnotation verkompliziert sich dadurch, dass bei Intervallen angegeben werden muss, ob die Randpunkte des Intervalls zum Intervall dazu gehören oder nicht. Liegt der Randpunkt im Intervall, wird eine eckige Klammer verwendet; andernfalls eine runde. Das Intervall

$$[1; 3)$$

[4] Beachten Sie, dass die positive Teilmenge einer Menge die Null einschliesst. Z.B. ist die Menge der natürlichen Zahlen nichts anderes als$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ und schliesst damit die Null mit ein.

[5] Intervalle werden ohne eine geschweifte Klammer geschrieben.

besteht also aus allen Zahlen zwischen 1(inklusive) und 3 (exklusive). Es gilt also

$$[1;3) = \{t \in \mathbb{R} | 1 \leq t < 3\}$$

Wir schliessen diese Kapitel mit einigen Mengenoperationen, die wir gelegentlich benötigen werden:

Definition 2 (Schnittmenge, Vereinigungsmenge, relatives Komplement einer Menge). Seien A und B zwei Mengen. Dann nennen wir

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und gleichzeitig } x \in B\}$$

die *Schnittmenge* der Mengen A und B (man sagt auch “A geschnitten mit B”),

$$A \cup B = \{x | \text{Entweder } x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder beides}\}$$

die *Vereinigungsmenge* der Mengen A und B (man sagt auch “A vereinigt mit B”) und

$$A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$$

das relative *Komplement* der Menge B in A (man sagt auch “A ohne B”).

Die Schnittmenge enthält also genau diejenigen Elemente, die sich sowohl in A also auch in B befinden. Die Vereinigungsmenge enthält diejenigen Elemente, die sich mindestens in einer der Mengen A und B befinden und das Komplement von B in A enthält diejenigen Elemente, die sich zwar in A aber nicht gleichzeitig auch in B befinden.

Aufgabe 3.

Bei welchen der folgenden Ausdrücke handelt es sich um Mengen. Welche der Mengen sind Teilmengen von einander und welche der Mengen sind gleich?

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \right\} \\
B &= \left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \,\middle|\, \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \right\} \\
C &= \left\{ x \in (0;\infty) \,\middle|\, \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \right\} \\
D &= [0;2] \\
E &= \left\{ x \in (2;\infty) \,\middle|\, \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \right\} \\
F &= \left\{ x \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \,\middle|\, \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Lösungweg

Aufgabe 4.

Durch das Interface java. util .Set versucht man in Java, den mathematischen Mengenbegriff abzubilden.

```
/** A collection that contains no duplicate elements. ...
 */
public interface Set<E> extends Collection<E>
{
  // ...
  boolean contains(Object o);           // ist o Element?
  boolean containsAll(Collection<?> c); // ist c Teilmenge?
  boolean equals(Object o);             // ist c gleich?
  // ...
  boolean addAll(Collection<?> c);      // Vereinigungsmenge
  boolean removeAll(Collection<?> c);   // Komplement
  boolean retainAll(Collection<?> c);   // Schnittmenge
  // ...
  boolean isEmpty();                    // ist leere Menge?
}
```

Wichtig ist dabei der Satz: “Ein Set ist eine Collection, die keine Duplikate enthält”. Welchen mathematischen Rechenoperationen entsprechen die folgenden Codezeilen? Bei welchen der Funktionen hat der Rückgabewert der Java-Funktion dieselbe Bedeutung, wie in der Mathematik? Welche der Rechenoperationen haben in der Mathematik streng genommen eine andere Bedeutung?

```
void func(Set<Integer> A, Set<Integer> B, Integer c)
{
  // ...
  A.contains(c);
  A.containsAll(B);
  A.equals(B);
  A.addAll(B);
  A.removeAll(B);
  A.retainAll(B);
  A.isEmpty();
}
```

Lösungweg

1.1.2. Funktionen.

Lernziele:

- *Sie wissen, wie in der Mathematik eine Funktion definiert ist, und kennen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu Funktionen in der Informatik.*
- *Sie kennen einige wesentliche Eigenschaften von Funktionen.*

Funktionen sind keine Erfindung der Mathematiker (höchstens der Name «Funktion»). Wir begegnen Funktionen täglich. Einige Beispiele sind:

(1) Das “Wetter in Europa”, wie es im Radiowetterbericht vorgelesen wird

Amsterdam	schön
Athen	bewölkt
Berlin	schön
Bern	bedeckt
Brüssel	Regen
...	...

(2) Der Kursverlauf eines Aktienindex (z.B. SMI)

(3) Ein Stundenplan

Zeit	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
08-09	Prog 1	Recht	Englisch	Prog 1	An1I
09-10	Prog 1	Prog1	Englisch	Math1	Prog1
10-11	An1I	Prog1	Math1	Recht	An1I
11-12	An1I	freie	Math1	frei	math1

(4) Eine mathematische Funktion

$$f(x) \quad = \quad x^2$$

Der Vergleich der vier Beispiele lässt vorerst kaum Gemeinsamkeiten erkennen, haben wir doch folgende unterschiedlichen Objekten vor uns: Eine vorgelesene Liste von Städtenamen zusammen mit einer Wetterbezeichnung, eine Kurve in einem Koordinatensystem, eine Tabelle, eine mathematische Gleichung.

Auf den zweiten Blick erkennt man trotzdem Gemeinsamkeiten: In allen Beispielen wurde ein Zusammenhang zwischen gewissen Objekten hergestellt. Im ersten Beispiel wurde jeder Stadt aus einer ausgewählten Menge ein standardisierter Wettertyp zugeordnet. Im zweiten Beispiel wurde den Börsentagen eines Jahres ein Börsenindex zugeordnet. Im dritten Beispiel wurde jeder Lektionszeit (bestehend aus Tag und Uhrzeit) ein Fach zugeordnet. Im letzten Beispiel wurde jeder Zahl ihr Quadrat zugeordnet.

Wenn wir noch etwas genauer hinschauen, entdecken wir, dass diese Zuordnung eindeutig in dem Sinne ist, dass jedem Objekt einer gewissen Ausgangsmenge, die wir als Definitionsmenge bezeichnen, *genau ein* Objekt einer zweiten Menge, der Zielmenge, zugeordnet wird. Wesentlich an dieser Beobachtung ist, dass es keine Elemente in der Definitionsmenge geben darf, die keinem oder mehr als einem Element aus der Zielmenge zugeordnet werden.

Beachten Sie auch, dass es im ersten Beispiel sowohl in Amsterdam als auch in Berlin schön ist und dass im zweiten Beispiel der Börsenkurs 7800 Punkte an 5 verschiedenen Tagen angenommen wurde. Ausserdem wird in diesem Beispiel der Börsenkurs 7600 nie erreicht, genau wie die Zahl -4 nicht als Quadrat zweier Zahlen geschrieben werden kann.

Wir fassen zusammen

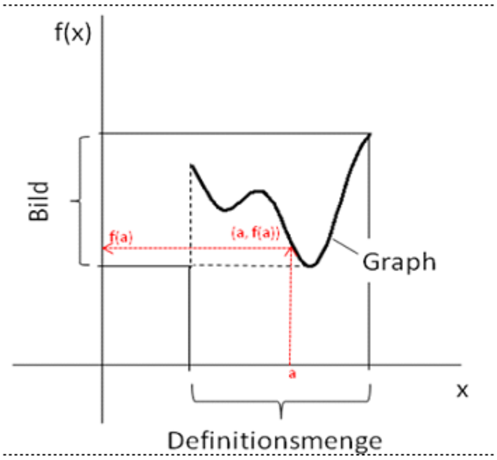


Abbildung 1. Darstellung des Graphen einer Funktion. Mit Hilfe des Graphen der Funktion kann man neben der Definitionsmenge und dem Bild der Funktion auch ablesen, welchen Wert die Funktion dem Argument a zuordnet.

Definition 5 (Funktionen). Gegeben seien zwei Mengen D und Z. Eine Zuordnungsvorschrift f, die jedem Element aus D genau ein Element aus Z zuordnet, nennen wir eine *Funktion* und schreiben dafür

$$f : \begin{cases} D & \rightarrow Z \\ x & \mapsto \text{Zuordnungsvorschrift} \end{cases}$$

Die Menge D nennen wir in diesem Zusammenhang *Definitionsmenge* und die Menge Z *Zielmenge* der Funktion. Es ist dabei unwesentlich, welche Objekte (oder mathematisch: Elemente) in den Mengen D und Z enthalten sind. Wesentlich ist nur, dass die Zuordnungsvorschrift für jedes Element aus der Definitionsmenge D genau einen Wert aus der Zielmenge Z liefert.

Sinn und Zweck der Funktionsdefinition ist es, komplizierte Zuordnungsvorschriften für die weitere Verwendung leichter zugänglich zu machen: Für jeden Wert $x \in D$ bezeichnet das Symbol

$$f(x)$$

ein Element aus der Zielmenge Z, nämlich genau dasjenige, welches wir erhalten, wenn wir die in der Funktionsdefinition von f spezifizierte Zuordnungsvorschrift auf das Element x aus der Definitionsmenge anwenden. Das Element x der Definitionsmenge nennen wir in diesem Zusammenhang auch das *Argument* der Funktion. Den Wert $f(x) \in Z$, der durch die Zuordnungsvorschrift entstehen, den *Funktionswert*. Für diesen Sachverhalt sagen wir in Zukunft: "Der Funktionswert $f(x)$ entsteht durch *Anwenden* der Funktion f auf das Argument x".

Beispiel. *Die Vorschrift*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

definiert eine Funktion. Da $4 \in \mathbb{R}$ können wir f auf die Zahl 4 anwenden und wir haben die Garantie, dass$f(4)$ in der Zielmenge der Funktion liegt. $f(4)$ ist also ein Element aus $\mathbb{R}^+$. In der Tat gilt

$$f(4) = 4^2 = 16 \in \mathbb{R}^+$$

Es kommt gelegentlich vor, dass man eine Funktion f auf mehrere Elemente der Definitionsmenge anwenden möchte. Für jede Teilmenge der Definitionsmenge $A \subset D$ bezeichnen wir deshalb mit $f(A)$ das Ergebnis dieser Operation. Es gilt also

$$f(A) = \{y \in Z | \text{Es gibt ein } x \in A \text{ für das } y = f(x)\}$$

Wir fahren mit einigen Definitionen fort:

Definition 6. Die Menge aller Funktionswerte die durch Anwendung der Funktion f entstehen können, nennen wir das *Bild* der Funktion und schreiben dafür $Bild(f)$. Es gilt also

$$Bild(f) = f(D)$$

Da nicht jedes Element der Zielmenge auch tatsächlich als Funktionswert vorkommen muss, ist das Bild der Funktion immer eine Teilmenge der Zielmenge, d.h. es gilt

$$f(D) \subset Z$$

Die Menge aller Wertepaare (x, y), für die die zweite Koordinate y ein Funktionswert der ersten Koordinate x ist, heisst der *Graph* der Funktion (siehe Abbildung 1). Es gilt also[6]

$$Graph(f) = \{(x, y) \in D \times Z | f(x) = y\}$$

Beispiel 7. *Durch die Vorschrift*

$$f : \begin{cases} \{1,2,3,4,5,6,7,8\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \textit{Wert von } x \textit{ aus nachfolgender Tabelle} \end{cases}$$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	5	4	1	-4	2	5	6	8

wird eine Funktion definiert. Das Bild dieser Funktion ist

$$Bild(f) = \{-4, 1, 2, 4, 5, 6, 8\}$$

[6]Die Menge $D \times Z$ besteht aus Wertepaaren (x, y), die so gebaut sind, dass das erste Argument des Wertepaares in D liegt, d.h. $x \in D$ und das zweite Argument des Wertepaares in Z liegt, d.h. $y \in Z$. Auch wenn der Graph einer Funktion damit formal gesehen eine Menge ist, liegt seine Bedeutung doch darin, Funktionen zu visualisieren. Einige Beispiel von Funktionsgraphen findet man z.B. in Abbildung 2.

der Funktionswert an der Stelle 3 *beträgt*

$$f(3) = 1$$

und der Graph der Funktion ist die Menge

$$Graph(f) \quad = \quad \{(1,5),(2,4),(3,1),(4,-4),(5,2),(6,5),(7,6),(8,8)\}$$

Beispiel 8. *Die Vorschrift*

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

sieht zwar wie eine Funktionsdefinition aus, definiert aber tatsächlich keine Funktion. Sonst müsste für das Argument 0 *ein Funktionswert existieren und dieser würde sich auf Grund der Zuordnungsvorschrift von* g *folgender Massen berechnen:*

$$g(0) \quad = \quad \frac{1}{0}$$

Da $\frac{1}{0}$ *aber undefiniert ist, ist die Funktionsdefinition ungültig.*

Schliessen wir den Wert $x = 0$ *aus der Definitionsmenge aus, so erhalten wir eine neue Definition*

$$h : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

Da jetzt der Term $\frac{1}{x}$ *für alle* $x \neq 0$ *definiert ist, und* 0 *nicht im Definitionsbereich von* h *liegt, haben wir es in diesem Fall mit der Definition einer Funktion zu tun.*

Beispiel 9. *Die Vorschrift*

$$r : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \text{Lösung der Gleichung } 2x - 3 = t \end{cases}$$

definiert eine Funktion. Der Funktionswert an der Stelle 5 *bezeichnet dabei den Wert der Variable* x *der entsteht, wenn man die Variable* t *in der Gleichung*

$$2x - 3 \quad = \quad t$$

durch die Zahl 5 *ersetzt:*

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 5 && | + 3 \\ 2x &= 8 && | : 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Es gilt also $r(5) = 4$*.*

In dieser Zuordnungsvorschrift, wird dem Funktionsargument die Lösung einer Gleichung zugewiesen. Diese Art der Funktionsdefinition kommt in der Mathematik relativ häufig vor und wird implizite Definition einer Funktion genannt. Eine implizite Funktionsdefinition ist aber immer heikel. Wenn es möglich ist, sollte man also aus einer impliziten Funktionsdefinition immer eine Vorschrift extrahieren, mit der sich der Funktionswert direkt berechnen lässt (man nennt eine solche Funktionsvorschrift explizit).

Im vorliegenden Beispiel ist dies tatsächlich möglich. Der Funktionswert $r(t)$ bezeichnet nämlich nichts anderes als den Wert, der entsteht, wenn man die folgende Gleichung nach x auflöst:

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= t && \quad | + 3 \\ 2x &= t + 3 && \quad | : 2 \\ x &= \frac{t+3}{2} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$r(t) \quad = \quad \frac{t+3}{2}$$

womit wir auch schreiben können

$$r : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{t+3}{2} \end{cases}$$

Beispiel 10. *Die implizite Vorschrift*

$$s : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \text{Lösung } s \text{ der Gleichung } s^2 = t \end{cases}$$

definiert keine Funktion. Andernfalls müsste z.B. der Funktionswert $s(-2)$ existieren, d.h. die Gleichung

$$s^2 \quad = \quad -2$$

lösbar sein. Dies ist aber nicht der Fall, da eine Quadratzahl immer positiv ist. Die Vorschrift verletzt also die Forderung, dass die Funktion für jedes Argument der Definitionsmenge einen Wert erzeugen muss.

Auch hier versuchen wir das Problem dadurch lösen, dass wir die Definitionsmenge von s “verkleinern”. Die Vorschrift

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \text{Lösung } s \text{ der Gleichung } s^2 = t \end{cases}$$

definiert aber immer noch keine Funktion. Der Grund ist nun allerdings ein anderer: Der Funktionswert $s(4)$ wäre nämlich die Lösung der Gleichung

$$s^2 \quad = \quad 4$$

welche 2 Lösungen, nämlich $s = +2$ und $s = -2$, besitzt. Wir müssten also dem Argument 4 zwei Funktionswerte $+2$ und -2 zuweisen. Da das Weiterrechnen mit solchen “Funktionen” aber sehr unübersichtlich wäre, hat man ein solches Verhalten bei der Funktionsdefinition verboten. Man hat für diesen Sachverhalt sogar einen eigenen Begriff eingeführt und sagt, dass die obige Funktionsvorschrift nicht wohldefiniert ist.

Um auch dieses Problem zu beheben, müssen wir die Berechnungsvorschrift um ein weiteres Kriterium erweitern, durch das eine der beiden Lösungen herausgefiltert wird. Da die Gleichung

$$s^2 = t$$

für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ immer nur eine positive Lösung besitzt (d.h. ≥ 0), können wir durch die Forderung nach einer positiven Lösung die Wohldefiniertheit der Funktion s sicherstellen. Der Ausdruck

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \text{positive Lösung } s \text{ der Gleichung } s^2 = t \end{cases}$$

definiert also eine Funktion, nämlich die Quadratwurzel[7]*.*

1.1.3. Funktionsgraphen.

Lernziele:

- *Sie können Funktionen graphisch darstellen.*
- *Sie können einem Graphen ansehen, ob er wohldefiniert ist*

Wir kommen noch einmal auf die Definition von Funktionsgraphen aus Definition 6 zurück. Nach dieser Definition besteht der Graph der Funktion

$$f : D \to Z$$

aus der Menge

$$\begin{aligned} Graph(f) &= \{(x, y) \in D \times Z | f(x) = y\} \\ &= \{(x, f(x)) | x \in D\} \end{aligned}$$

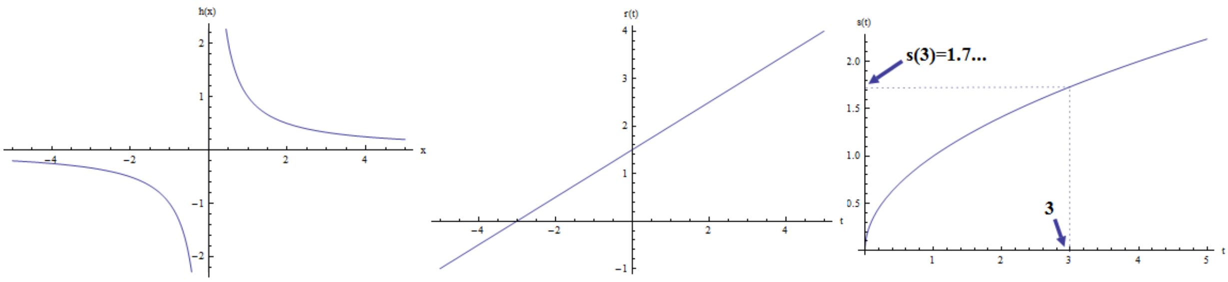


Abbildung 2. Graphen der Funktionen $h(x), r(t)$ und $s(t)$ aus Beispiel 8, Beispiel 9 und Beispiel 10

Der Sinn des Graphen liegt aber weniger in dieser Menge, sondern vielmehr darin, dass man sich mit Hilfe des Graphen eine bildliche Vorstellung der Funktion machen kann: Trägt man

[7]Mit Definition 5 lassen sich auch neue Symbole einführen. Wir kombinieren dazu das zu definierende Symbol in der Funktionsdefinition mit einem Punkt:

$$\sqrt{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \text{positive Lösung } s \text{ der Gleichung } s^2 = t \end{cases}$$

Der Punkt innerhalb des Symbols gibt dann an, an welche Stelle man das Argument der Funktion schreiben muss, um einen Funktionswert zu berechnen. Die Quadratwurzel von 4 ist mit dieser Definition $\sqrt{4}$ und steht nach der Definition für die positive Lösung der Gleichung

$$s^2 = 4$$

Da diese Gleichung die beiden Lösungen $+2$ und -2 besitzt und -2 negativ ist, gilt damit $\sqrt{4} = 2$.

nämlich die Elemente $(x, f(x))$ des Graphen in einem Koordinatensystem ab, indem man das erste (zweite) Argument des Graphen auf die erste (zweite) Achse des Koordinatensystems abbildet, so entstehen die in Abbildung 2 dargestellten Diagramme, anhand derer man sehr leicht die Funktionswerte der Funktion für verschiedene Argumente ablesen kann (im dritten Diagramm sieht man z.B. sehr schön, dass der Funktionswert $s(3) \approx 1.7$ ist).

Um einen Graphen zu zeichnen, erzeugt man sich in einem ersten Schritt am besten eine *Wertetabelle*, in deren erster und zweiter Zeile man die Funktionsargumente mit den zugehörigen Funktionswerte einträgt.

Für die in Beispiel Beispiel 8 definierte Funktion

$$h : \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

erhalten wir so die Tabelle

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
h(x)	-0.25	-1/3	-0.5	-1	1	0.5	1/3	0.25

Auf Grund der Konstruktion ist jede Spalte in dieser Tabelle ein Element des Graphen $Graph\,(h)$ der Funktion. Die Punkte

$$\begin{aligned} (-4; -0.25) &\in Graph(h) \\ (3; \frac{1}{3}) &\in Graph(h) \end{aligned}$$

liegen also auf dem Graphen.

Enthält unsere Wertetabelle genügend Daten, so ist es praktischer, den Graphen nicht durch die Wertetabelle sondern als Diagramm graphisch darzustellen (siehe Abbildung 2). Auf ähnliche Weise können wir auch für die Funktion

$$r : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{t+3}{2} \end{cases}$$

vorgehen. Die Wertetabelle lautet in diesem Fall

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
r(t)	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

und die Graphische Darstellung der Funktion findet sich in Abbildung 2.

Bei der Funktion des letzten Beispiels

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto s - Wert\ der\ Gleichung\ s^2 = t \end{cases}$$

ist die Situation komplizierter. Auch hier können wir versuchen, eine Wertetabelle anzulegen:

t	0	1	2	3
s(t)				

In diesem Fall ist es aber schwierig, die Werte der Funktion s (ohne Hilfsmittel) zu berechnen.

Trotzdem lässt sich eine Wertetabelle konstruieren. Wir drehen dazu einfach den Spiess um, und initialisieren unsere Wertetabelle mit Werten der 2. Zeile.

t				
s(t)	0	1	2	3

Die zugehörigen “t”-Werte lassen sich nun leicht berechnen, da wir dazu lediglich die “s”-Werte nur quadrieren müssen. Die Wertetabelle lautet also

t	0	1	4	9
s(t)	0	1	2	3

und lässt sich somit (genügend Daten vorausgesetzt) wieder als Diagramm veranschaulichen, aus dem wir nun sogar die Funktionswerte an Stellen ablesen können, die in unserer Wertetabelle gar nicht vorkommen (siehe Abbildung 2).

Der Funktionsbegriff in der Mathematik ist zwar sehr weit gefasst. Er erfordert aber zumindest, dass eine Funktion wohldefiniert sein muss. Für Funktionen, bei denen die Funktionswerte wie in Beispiel 8 durch einen Funktionsterm berechnet werden, muss die Wohldefiniertheit nicht geprüft werden, da ein Term für jede Belegung der Variablen immer nur einen einzigen Wert liefert.

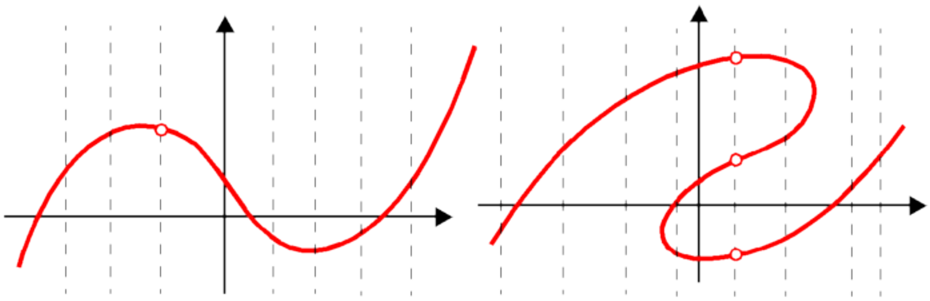


Abbildung 3. Links: Der Graph bildet jeden Wert der Abszisse (=jedes Argument) auf genau einen Ordinatenwert ab: Der Graph ist damit wohldefiniert.
Rechts: Der Graph bildet manche Abszissenwerte auf mehrere Ordinatenwerte ab. Der Graph ist damit nicht wohldefiniert. Es gibt somit keine Funktion, die diesen Graphen erzeugt.

Anders verhält es sich bei Funktionen, die durch eine textuelle Beschreibung definiert sind oder bei implizit definierten Funktionen, wo geprüft werden muss, dass die Lösungsmenge der zu Grunde liegenden Gleichung für jedes Argument der Definitionsmenge aus genau einem Element besteht.

In diesen Fällen kann der Funktionsgraph zur Untersuchung der Wohldefiniertheit nützlich sein: Ist die Funktionsdefinition nämlich wohldefiniert, so darf es zu jedem auf der 1. Koordinatenachse vorgegebenen Wert x, der im Definitionsbereich der Funktion liegt, nur einen einzigen Wert y auf der 2. Koordinatenachse geben, für den der Punkt (x, y) auf dem Funktionsgraphen liegt. Anders ausgedrückt: Eine Funktionsdefinition ist wohldefiniert, wenn jede zur 2. Koordinatenachse parallele Gerade den Funktionsgraphen genau einmal schneidet (siehe Abbildung 3).

1.1.4. Funktionen bei Computern*.

Lernziele:

- *Sie kennen die Unterschiede zwischen Funktionen in der Programmiersprache Java und dem Funktionsbegriff in der Mathematik*
- *Sie verstehen die Bedeutung des Definitions- und Wertebereichs für die Entwicklung robuster Software und können diese Konzepte in einem Computerprogramm mittels Pre- und Postconditions realisieren*

In vielen Programmiersprachen (z.B. Java und C++) unterscheidet sich der Funktionsbegriff deutlich von dem in der Mathematik gebräuchlichen: Rein äusserlich hängen Funktionen in der Mathematik immer von mindestens einem Argument ab und geben immer einen Wert zurück (Definitions- und Zielmenge sind nicht leer). In der Informatik sind dagegen Funktionen erlaubt, die keine Argumente entgegennehmen oder nichts zurückgeben. Zu diesem Zweck wurde sogar ein spezieller Datentyp mit dem Namen **void** eingeführt.

Ein zweiter, noch wichtigerer Unterschied zwischen Funktionen in der Mathematik und in der Softwareentwicklung ist die Wohldefiniertheit. Während Funktionen in der Mathematik wohldefiniert sein müssen, verlangen die meisten Programmiersprachen diese Eigenschaft nicht: Die Wohldefiniertheit würde bewirken, dass ein und dieselbe Eingabe immer dasselbe Resultat liefern würde. In der Informatik ist dieses Verhalten aber nicht immer erwünscht, wie z.B. die C++-Funktion rand zeigt, die bei jedem Aufruf eine neue Zufallszahl produziert. Ein anderes Beispiel ist die Java-Funktion System.in.read(). Diese Funktion wartet auf eine Eingabe des Benutzers und gibt diese Eingabe an den Aufrufer der Funktion weiter. Das Ergebnis hängt also davon ab, welche Taste der Benutzer als Antwort auf die Eingabeaufforderung gedrückt hat.

Es ist in der Informatik aber trotzdem wichtig, zu wissen, ob eine Funktion wohldefiniert ist oder nicht. So muss man zum Beispiel den Rückgabewert der Funktion rand abspeichern, wenn man mehrmals auf dieselbe Zahl zurückgreifen möchte. In den meisten Fällen ist diese Problematik vom Programmierer gut verstanden und führt deshalb selten zu Fehlern. Eine heikle Ausnahme sind allerdings Änderungen an bestehendem Code: Verliert eine Funktion durch eine solche Modifikation ihre Wohldefiniertheit, so kann es passieren, dass Code, der sich auf diese Eigenschaft verlassen hat, umgeschrieben werden muss. Dies passiert z.B. dann, wenn in einer Software "sprechende Schlüssel" verwendet werden. Hierbei versucht man aus unterschiedlichen "sprechenden" Daten (z.B. Geburtsdatum, Bürgerort und Geschlecht), die man über ein Objekt gesammelt hat, einen Schlüssel zu konstruieren, mit dem man das Objekt eindeutig identifizieren kann. Ändern sich zu einem späteren Zeitpunkt die Voraussetzungen, durch die die Eindeutigkeit des Schlüssels garantiert werden konnte, verliert man auch in diesem Fall die für die Objekt-Schlüssel-Beziehung wichtige Eigenschaft der Wohldefiniertheit[8].

Der in der Praxis wichtigste Unterschied zwischen mathematischen Funktionen und Funktionen in der Softwareentwicklung liegt allerdings in der Bedeutung des Definitionsbereichs. Während die Mathematik hier eine sehr präzise Angabe verlangt, für welche Argumente eine Funktion

[8] Ein Beispiel für dieses Szenario sind die alten AHV-Nummern. Auf http://www.ahvnummer.ch/ wird diese Sachverhalt folgender Massen dokumentiert: "[..] Auch bezüglich der noch freien AHV-Nummern war beim alten System die Grenze beinahe erreicht - es gab schon einige wenige Fälle, die nicht mehr im bestehenden Nummernsystem abgebildet werden konnten."

definiert ist, verwenden die meisten Programmiersprachen zur Deklaration des Definitionsbereichs nur sehr unpräzise Datentypen (z.B. boolean, int, float, char). In Folge dessen kommt es immer wieder vor, dass Funktionen in Computerprogrammen mit unerwarteten Parametern aufgerufen werden, was meist zu schwerwiegenden, sporadisch auftretenden Fehlern führt.

Da diese Fehler meist nicht sofort zu Tage treten, sondern erst im Laufe eines längeren Softwareentwicklungszyklus an Bedeutung gewinnen, kann sich dieser Fehlertypus zu einer regelrechten "Zeitbombe" entwickeln und in schlecht geführten Softwareprojekten mit fortschreitender Entwicklungsdauer sogar zur häufigsten Ursache von Kundenproblemen werden. Als Folge davon entsteht dann meist Arbeitsüberlastung bei den Softwareentwicklern, was wiederum dazu führt, dass sich die Entwickler konstruktiver Kritik mit Redewendungen wie "garbage in - garbage out" zu entziehen versuchen.

Zur Illustration: Grosse Softwareprojekte bestehen oft aus weit über 100 verschiedenen Modulen. Wenn jedes dieser Module nur 99% der Eingaben richtig verarbeitet, wird eine Anwendung, die von allen 100 Modulen abhängt, voraussichtlich nur noch in $0.99^{100} \cdot 100\% = 36.6\%$ aller Fälle korrekt arbeiten. Im folgenden werden Sie eine Methode (Preconditions) kennen lernen, die helfen kann, diesen Fehlertypus zu vermeiden: Dabei wird im wesentlichen das mathematische Konzept des Definitionsbereichs in die Informatik übertragen, wodurch sicher gestellt wird, dass sich der Programmierer über die Grenzen seines Codes bewusst wird.

Aufgabe 11.

Stellen Sie sich vor, Sie müssen für den Board-Computer eines Autos eine Verbrauchsanzeige implementieren. Dafür stellt Ihnen der Fahrzeughersteller neben der Fahrzeuggeschwindigkeit (in km/h) auch den Benzin-Verbrauch der letzten Minute (Liter/min) zur Verfügung. Um das Problem zu lösen, implementieren Sie die folgende Hilfsfunktion:

```
/** Die Funktion berechnet die Menge Treibstoff, die auf einer
 * 1-km langen Fahrstrecke benötigt wird, wenn diese Strecke
 * unter den gegenwärtigen Bedingungen (konstante Geschwindigkeit
 * und Treibstoffentnahme) zurückgelegt wird.
 *@param speed Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs in km/h
 *@param fuelPerMin akt. Treibstoffbedarf in Liter/Minute
 *@return Treibstoffbedarf in Liter pro km
 */
double fuelPerKm(double speed, double fuelPerMin)
{
        double fuelPerHour= 60*fuelPerMin;
        return fuelPerHour/speed;
}
```

Sie testen den Bordcomputer mit einigen Eingangsdaten und er funktioniert wunderbar. Der erste Prototyp wird gebaut und in ein Auto integriert. Nach kurzer Zeit meldet das Testteam die folgenden Fehler

a) Der Bordcomputer stürzt in unregelmässigen Abständen ab. Warum?

b) Der Bordcomputer zeigt in einigen Situationen falsche Ergebnisse an, ohne abzustürzen. Was ist passiert?

Lösungweg

Die meisten Programmiersprachen kennen nur eine kleine Anzahl vordefinierter Datentypen und verhindern nicht, dass eine Funktion mit Argumenten aufgerufen werden kann, die nicht korrekt verarbeitet werden. Da in grösseren Projekten Benutzer und Entwickler einer Funktion meist verschiedene Personen sind, sind Missverständnisse bei der Menge der gültigen Übergabewerte keine Seltenheit.

In den vorangegangenen Aufgaben haben wir zwei unterschiedliche Phänomene kennengelernt, wie eine Funktion auf illegale Eingabewerte reagieren kann:

(1) Die Funktion kann nicht sinnvoll für alle möglichen Eingabewerte berechnet werden und erzeugt einen schwer zu interpretierenden Fehler, wie z.B. eine java.lang.ArithmeticException. Diese Situationen lassen sich nicht immer ganz verhindern. Man kann allerdings bei der Fehlerbehandlung darauf achten, in diesen Fällen klar verständliche Fehlermeldungen auszugeben. Ausserdem sollte man Einschränkungen des Definitionsbereichs immer klar dokumentieren, damit der Benutzer der Funktion auch weiss, worauf er zu achten hat.

(2) Die Funktion berechnet zwar einen Wert und gibt diesen auch zurück. Der Wert ist allerdings falsch. Die Auswirkungen eines solchen Fehlers sind meist viel problematischer als die Fehler des ersten Falls. Der falsche Rückgabewert bleibt in der Regel zunächst unentdeckt und führt zu Folgefehlern, die wiederum Ursache neuer Fehler sein können. Das Endergebnis kann dann katastrophal sein: Der Absturz der Ariane 5 fällt in diese Kategorie.

Um eine Beziehung zwischen mathematischen Funktionen und Funktionen in der Softwareentwicklung herstellen zu können, müssen wir zunächst alle Datentypen der Programmiersprache auf geeignete Mengen abbilden. Den Typen **double** und **float** entsprechen dabei die Menge der reellen Zahlen, den Typen **long** und **int** die ganzen Zahlen.

Wenn wir damit die Funktion

```
double fuelPerKm(double speed, double fuelPerMin)
{
        double fuelPerHour= 60*fuelPerMin;
        return fuelPerHour/speed;
}
```

in die Mathematik zurück übersetzen (wir verwenden s und f für die Variablen speed und fuelPerMin), so erhalten wir zunächst

$$fuelPerKm : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (s, f) & \mapsto \frac{60f}{s} \end{cases}$$

was allerdings keine Funktion darstellt, da

$$fuelPerKm(0, f) \quad = \quad \frac{60f}{0}$$

undefiniert ist. Wir müssen die Funktionsdefinition also “reparieren”. Dazu kann man in der Softwareentwicklung sogenannte Preconditions einsetzen. Dabei handelt es sich um eine Prüfung, ob die übergebenen Funktionsargumente im Definitionsbereich der Funktion liegen. In unserem Fall benötigen wir also eine Precondition, die überprüft, dass speed<>0 ist.

Mathematisch haben wir durch den Ausschluss des Wertes $s = 0$ erreicht, dass $fuelPerKm$ zu einer Funktion wird. Dies sagt aber noch nichts darüber aus, ob diese Funktion auch das tut, was wir wollen. Dies ist nicht der Fall, wenn das Auto rückwärts fährt: in diesem Fall ist $s < 0$, obwohl wir weiterhin einen positiven Verbrauch pro km erwarten. Als Softwareentwickler hat man an dieser Stelle zwei Möglichkeiten:

- Entweder man stellt sich auf den Standpunkt, dass für diese Fälle der Wert von fuelPerKm keine Bedeutung hat und verbietet die Situation speed<0 durch eine Precondition. Dies ist vor allem dann angezeigt, wenn die Anforderungen eines Releases eine solche “Limitation” der Funktion zulassen und das Projekt unter Zeitdruck steht.
- Oder man überlegt sich eine Lösung für diesen Fall. In unserem Fall könnten wir durch den Wechsel von s zum Absolutwert $|s|$ sicherstellen, dass wir in der Verbrauchsberechnung immer eine positive Geschwindigkeit verwenden.

Zusammengefasst erhalten wir damit den folgenden Code

```
/** Die Funktion berechnet die Menge Treibstoff, die auf einer
 * 1-km langen Fahrstrecke benötigt wird, wenn diese Strecke
 * unter den gegenwärtigen Bedingungen (konstante Geschwindigkeit
 * und Treibstoffentnahme) zurückgelegt wird.
 *@param speed Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs in km/h
 *@param fuelPerMin akt. Treibstoffbedarf in Liter/Minute
 *@return Treibstoffbedarf in Liter pro km
 *@throws IllegalParameterException falls das Auto steht
 */
double fuelPerKm(double speed, double fuelPerMin)
{
        if (speed == 0)
        {
                throw new IllegalParameterException("speed",
                        "Das Auto steht.");
        }
        if (fuelPerMin < 0)
        {
                throw new IllegalParameterException("fuelPerMin",
                        "fuelPerMin darf nicht negativ werden.");
        }
        double fuelPerHour= 60*fuelPerMin;
        return fuelPerHour/Math.abs(speed);
}
```

Wie Sie sehen können, haben wir drei Dinge korrigiert:

(1) Wir haben einen Bug in der Rechenvorschrift korrigiert, der bei ungewöhnlichen aber durchaus erlaubten Funktionsargumenten aufgetreten ist, nämlich bei negativen Geschwindigkeiten.

(2) Wir haben mittels Fehlerbehandlungscode sicher gestellt, dass die Funktion nur dann ein Ergebnis zurückgibt, wenn die Funktion auch mit den Übergabeparametern zurecht kommt. Das mathematische Äquivalent zu diesem Schritt ist die Angabe des Definitionsbereichs einer Funktion.

(3) Wir haben die Dokumentation der Funktion so abgeändert, dass ein Benutzer der Funktion weiss, für welche Eingabewerte die Funktion definiert ist, ohne die Implementation der Funktion studieren zu müssen. An dieser Stelle dokumentieren wir aber nur diejenigen Einschränkungen des Definitionsbereichs, die für den Benutzer der Funktion überraschend sein könnten: In unserem Fall die Tatsache, dass die Funktion bei einem stehenden Fahrzeug nicht verwendet werden kann. Hingegen können wir auf Grund der Grundmenge von fuelPerMin annehmen, dass der Benutzer der Funktion nicht davon ausgeht, dass die Funktion an dieser Stelle auch mit negativen Werten zurecht kommt. Im Interesse einer kompakten Dokumentation verzichten wir deshalb auf eine Erwähnung dieser Bedingung (eine Prüfung bei den Preconditions sollte aber vorgenommen werden).

Die Implementation von Preconditions ist eines der wichtigsten und effizientesten Verfahren, um qualitativ hochwertige und wartbare Software zu entwickeln: Einerseits "zwingen" Preconditions Softwareentwickler nämlich, sich Gedanken über den Gültigkeitsbereich des Quellcodes zu machen und erhöhen so die Robustheit des Codes. Andererseits stellen Preconditions sicher, dass Fehler bereits zum Zeitpunkt ihres Entstehens zu einem Programmabbruch führen. Sie erleichtern dadurch die Fehlerdiagnose und reduzieren die Gefahr von schwerwiegenden Folgefehlern.

1.2. Elementare Funktionen ohne Trigonometrie

In der Mathematik gibt es einige häufig vorkommende Funktionen, die wegen ihrer grossen Bedeutung als *elementare Funktionen* bezeichnet werden. Zu ihnen gehören die Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen. Da diese Funktionen auch in Softwareprodukten häufig benötigt werden, bieten alle höheren Programmiersprachen diese Funktionen über eine Schnittstelle an. In Java finden Sie diese Funktionen z.B. in der Klasse java.Math.

Da die elementaren Funktionen eigentlich bereits bekannt sein sollten, wird der Stoff in diesem Kapitel relativ knapp abgehandelt. Wer Schwierigkeiten mit diesem Stoff hat, findet eine ausführlichere Erklärung der elementaren Funktion in Kapitel 2 auf http://mathtutor.hsr.ch/ (wichtig sind hier insbesondere die Kapitel 2.3 und 2.4).

1.2.1. Potenzen und Wurzeln.

Lernziele:

- *Sie wissen was Potenzen sind und kennen deren Rechengesetze*
- *Sie kennen den Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen*
- *Sie kennen die Graphen der Potenzfunktionen*

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Die Grundidee hinter den *Potenzen* ist eine Kurzschreibweise für Produkt zu haben, in denen ein einziger Faktor mehrfach vorkommt. Für $n \in \mathbb{N}$ wird a^n durch die folgende Formel definiert:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}} \tag{1.2.1}$$

Um die Variablen a und n leichter benennen zu können, nennen wir bei Potenzen die Zahl n den *Exponenten* und die Zahl a die *Basis* der Potenz. Aus der Definition (1.2.1) folgen unmittelbar einige Rechengesetze. Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned} (a^n) \cdot (a^m) &= a^{(n+m)} \\ a^{(n \cdot m)} &= (a^n)^m \\ (a^n) \cdot (b^n) &= (a \cdot b)^n \end{aligned}$$

In Analogie zur "Punkt-vor-Strich" Rechenregel bei Summen und Produkten, werden wir in Zukunft für Potenzen verlangen, dass diese noch *stärker binden* als Produkte und damit auch als Summen. Ausserdem erlauben wir, die äussere Klammer bei den Exponenten wegzulassen, da das Schriftbild diese Klammersetzung nahelegt. Die folgenden Formeln sind also identisch zu den vorangegangenen

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m} \\ a^{n \cdot m} &= (a^n)^m \\ a^n b^n &= (ab)^n \end{aligned}$$

Vorsicht muss man an dieser Stelle allerdings walten lassen, damit man den Ausdruck

$$a^{n^m} = a^{(n^m)}$$

richtig interpretiert und nicht mit dem Term

$$a^{nm} = a^{(n \cdot m)} = (a^n)^m$$

verwechselt, der in der Regel ein anderes Ergebnis liefert:

$$a^{n^m} \neq a^{nm}$$

Wie bei der Multiplikation, die zunächst als Kurzschreibweise für Summen mit einem $n \in \mathbb{N}$ wiederkehrenden Summanden a eingeführt wurde

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ mal}} \tag{1.2.2}$$

wollen wir die Definition der Potenzen schrittweise so erweitern, dass für den Exponenten n beliebige reellen Zahlen eingesetzt werden können. Bei dieser Erweiterung achten wir darauf, dass die oben aufgeführten *Potenzgesetze* weiterhin bestehen bleiben.

In einem ersten Schritt erweitern wir die Definition der Potenzen auf negative Exponenten. Die Potenzgesetze bleiben auch für negative Exponenten gültig, wenn wir für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $m \in \mathbb{N}$ die zusätzlichen Regeln

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \end{aligned}$$

einführen. Definieren wir ausserdem noch den überraschenden Wert

$$0^0 = 1$$

so erhalten wir für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten die folgenden Gesetze:

Satz 12 (Potenzgesetze für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten). *Sei $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$und $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gelten die folgenden Potenzgesetze*

$$\begin{aligned} a^n a^m &= a^{n+m} \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\ a^{n \cdot m} &= (a^n)^m \\ a^n b^n &= (ab)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \end{aligned}$$

Beachtet man ausserdem die Regeln, dass nicht durch Null geteilt werden darf und dass 0^n für $n < 0$ nicht definiert ist, so gelten diese Formeln sogar für $a, b \in \mathbb{R}$. Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} 0^0 &= 1 && \\ 0^n &= 0 && \text{für } n \neq 0 \\ (-a)^n &= a^n \geq 0 && \text{für gerade } n \\ (-a)^n &= -a^n && \text{für ungerade } n \end{aligned}$$

Beachten Sie bei der letzten Regel insbesondere auch die Klammersetzung. Nach der Klammersetzungsregel Potenzen vor Multiplikationen und Divisionen vor Additionen und Subtraktionen gilt nämlich

$$-a^n = -(a^n)$$

Aufgabe 13.

Vereinfachen Sie den folgenden Term mit Hilfe der Potenzgesetze

$$\frac{2^3 \left(b^{-2} a^4\right)^5}{12 a^5 \frac{1}{b^{10}}}$$

Ergebnis

$$\frac{2}{3}a^{15}$$

Lösungweg

Mit etwas Übung lassen sich die in der Musterlösung der Aufgabe beschriebenen Schritte auch schneller durchführen. Solang ein Ausdruck nur aus den Rechenoperationen “mal”, “geteilt” und “hoch” enthält, kann man auch folgender Massen vorgehen: Man schreibt zunächst alle Basiswerte nacheinander als Faktoren hin und kümmert sich in einem zweiten Schritt um die Werte in den Exponenten.

$$\frac{2^3\left(b^{-2}a^4\right)^5}{12a^5\frac{1}{b^{10}}} = 2^{\square}\cdot 12^{\square}\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}$$

Dazu durchsucht man den Ausdruck nach allen Potenzen, in denen die entsprechende Basis vorkommt und addiert die zugehörigen Exponenten, wobei die Exponenten n von Potenzen, die im Nenner vorkommen, noch in ihre jeweiligen Gegenzahlen $-n$ umwandeln muss. In unserem Beispiel kommt die Basis 2 auf der linken Seite nur an einer Stelle im Zähler vor und hat dort den Exponenten 3. Der Exponent zur Basis 2 auf der rechten Seite enthält also die Zahl 3. Ebenso kommt die Zahl 12 auf der linken Seite nur einmal, dieses Mal allerdings im Nenner vor. Wir müssen also rechts den Exponenten der Basis 12 mit der Gegenzahl des auf der linken Seite nicht geschriebenen Exponenten 1, d.h. mit -1 befüllen.

$$\frac{2^3\left(b^{-2}a^4\right)^5}{12a^5\frac{1}{b^{10}}} = 2^{\square\swarrow 3}\cdot 12^{\square\swarrow -1}\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}$$

Kommen wie in $\left(b^{-2}a^4\right)^5$ “geschachtelte Potenzen” vor, so müssen die entsprechenden Exponenten zusätzlich miteinander multipliziert werden. Für die Basis a bedeutet dies, dass wir die Exponenten 4 und 5 miteinander multiplizieren müssen. Da die Basis a ausserdem noch im Nenner mit dem Exponenten 5 vorkommt müssen wir von diesem Ergebnis noch die Zahl 5 abziehen:

$$\frac{2^3\left(b^{-2}a^4\right)^5}{12a^5\frac{1}{b^{10}}} = 2^3\cdot 12^{-1}\cdot a^{\square\swarrow 4\cdot 5-5}\cdot b^{\square}$$

Der Exponent der Basis b ist schliesslich am kompliziertesten. Die Basis b erscheint im Zähler in einer geschachtelten Potenz, was den Exponenten $-2\cdot 5$ liefert und im Nenner des Nenners. Wir müssen also zu $-2\cdot 5$ die Gegenzahl der Gegenzahl des Exponenten 10 hinzuzählen:

$$\frac{2^3\left(b^{-2}a^4\right)^5}{12a^5\frac{1}{b^{10}}} = 2^3\cdot 12^{-1}\cdot a\cdot b^{\square\swarrow -2\cdot 5+(-(-10))}$$

Aufgeschrieben hätte man all diese Zwischenschritte natürlich nicht. Der Aufschrieb würde für diese Aufgabe in etwa so aussehen

$$\begin{aligned}\frac{2^3\left(b^{-2}a^4\right)^5}{12a^5\frac{1}{b^{10}}} &= 2^3\cdot 12^{-1}\cdot a^{4\cdot 5-5}\cdot b^{-2\cdot 5-(-10)}\\ &= \frac{2}{3}a^{15}b^0=\frac{2}{3}a^{15}\end{aligned}$$

Das soeben beschriebene Verfahren kann auch auf Teile eines Terms beschränkt werden. Man kann sich zum Beispiel nur auf den Zähler konzentrieren oder sich zunächst nur um die Potenzen kümmern, die als Basis eine echte Zahl haben. Letzteres ist meist praktisch, da beim Kürzen von Zahlen negative Exponenten wie 12^{-1} eher heikel sind. Eine gute Variante der obigen Rechnung wäre also

$$\begin{aligned}\frac{2^3\left(b^{-2}a^4\right)^5}{12a^5\frac{1}{b^{10}}} &= \frac{2^3}{12}\cdot a^{4\cdot 5-5}\cdot b^{-2\cdot 5+(-(-10))}\\ &= \frac{2}{3}a^{15}\end{aligned}$$

Achtung: Das soeben beschriebene Verfahren funktioniert nur, wenn der Ausdruck keine Summen enthält. Kommen Terme wie z.B. $(a+b)^3$ im Ausdruck vor, so muss man die entsprechende Basis $(a+b)$ wie eine eigenständige Variable behandeln, damit das Verfahren funktioniert. Besteht der Zähler bzw. der Nenner aus Summen, so funktioniert das Verfahren überhaupt nicht mehr, bzw. man muss sich zunächst der Vereinfachung des Bruches widmen.

Aufgabe 14.

Vereinfachen Sie

a)
$$\frac{a^2\left(3\,(a+3)^5\,b^{-4}\right)^4}{\frac{ba^{-2}}{a+3}}$$

b)
$$\frac{(a+3)^2\cdot\frac{4}{3a^2}-\frac{12}{a^2}}{a+6}$$

Lösungweg

Wurzeln. Nachdem wir die Potenzen für ganzzahlige Exponenten definiert haben, können wir den Versuch wagen, Potenzen mit reellen Exponenten zu definieren. Dabei versuchen wir, den Potenzbegriff so zu verallgemeinern, dass die Rechengesetze aus Satz 12 erhalten bleiben. Dieser Schritt lässt sich allerdings nur dann bewerkstelligen, wenn wir uns auf Basen a beschränken, die streng positiv ($a>0$) sind. Um diese Potenzen zu definieren, benötigen wir als Zwischenschritt allerdings die Wurzeln:

Definition 15. Sei $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$[9]. Unter der n-ten Wurzel von a verstehen wir diejenige positive Zahl, deren n-te Potenz wieder a ergibt. Wir schreiben für diese Zahl auch $\sqrt[n]{a}$. Formaler können wir auch sagen: Die n-te Wurzel ist die Funktion

$$\sqrt[n]{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ a & \mapsto \text{positive Lösung der Gleichung } x^n = a \end{cases}$$

Wurzeln mit dem Wurzelexponent 2 nennt man auch Quadratwurzeln. Da in der Praxis fast ausschliesslich Quadratwurzeln vorkommen, hat es sich eingebürgert, für diese den Wurzelexponenten wegzulassen. Für die Quadratwurzel von 3 schreibt man also einfach $\sqrt{3}$.

Aufgabe 16.

Bestimmen Sie (wenn möglich) die folgenden Wurzeln

a) $\sqrt{4}$
b) $\sqrt{-9}$
c) $\sqrt[3]{27}$
d) $\sqrt[3]{0.001}$
e) $\sqrt{7}$

Lösungweg

Auch für Wurzeln gibt es Rechengesetze. Diese sind aber in vielen Fällen komplizierter als die Potenzgesetze und es ist deshalb meist einfacher, Wurzeln zunächst durch Potenzen zu ersetzen, was - wie wir gleich sehen werden - immer möglich ist. Dies ist auch der Grund, warum in der Literatur mit Ausnahme der häufig vorkommenden Quadratwurzeln fast keine Wurzeln mit anderen Wurzelexponenten zu finden sind.

Für Quadratwurzeln sind allerdings die folgenden Rechengesetze nützlich

Satz 17 (Wichtige Rechengesetze für Wurzeln). *Sei $a, b \geq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ falls } b \neq 0 \\ \sqrt{1} &= 1 \\ \sqrt{0} &= 0 \end{aligned}$$

Wichtig sind auch die für $a \geq 0$ gültigen Regeln, die besagen, dass Quadratwurzeln und Quadrate sich gegenseitig aufheben.

$$\sqrt{a}^2 = a \tag{1.2.3}$$

$$\sqrt{a^2} = a \tag{1.2.4}$$

[9] Die Definition der Wurzel für ungerade Wurzelexponenten ist in der Literatur nicht einheitlich geregelt. Es gibt hier auch Bücher, in denen das Ziehen von Wurzeln mit ungeradem Wurzelexponent für negative Zahlen zulässig ist.

Bei den letzten beiden Regeln ist allerdings Vorsicht angebracht, wenn a auch negativ werden kann. Für $a < 0$ ist (1.2.3) *nicht definiert und* (1.2.4) *liefert eine positive Zahl, die dasselbe Quadrat liefert wie a, also $-a$. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt damit*

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= |a| \\ \sqrt{a}^2 & \quad undefiniert \end{aligned}$$

Bemerkung. *Die oben aufgeführten Regeln gelten für $a > 0$ auch für Wurzeln mit anderen Wurzelexponenten. Meist benötigt man diese Regeln aber nicht, da solche Wurzeln in der Regel durch Potenzen ausgedrückt werden. Die Zusatzregeln für den Fall $a < 0$ gelten dagegen nur für gerade Exponenten. Für ungerade Exponenten und negative a ist der Term $\sqrt[n]{a^n}$ nämlich gar nicht definiert.*

Potenzen mit reellen Exponenten. Wir kommen nun zurück zu unserem Programm, Potenzen auch für reelle Exponenten zu definieren.

Definition 18. Für $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ definieren wir

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Ist $m > 0$, so erlauben wir auch den Wert $a = 0$ und definieren

$$0^{\frac{m}{n}} = 0$$

Der Fall $m = 0$ führt auf $\frac{m}{n} = 0$ und ist bereits bei den ganzzahligen Exponenten erwähnt. Es gilt

$$0^0 = 1$$

Bemerkung. *Es gilt*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Aufgabe 19.

Bestimmen Sie, wenn möglich

a) $8^{\frac{2}{3}}$
b) $(4+5)^{\frac{5}{2}}$
c) $(4-5)^{\frac{5}{2}}$
d) $(-5)^3$
e) $8^{-\frac{2}{3}}$

Lösungweg

Die auf den ersten Blick erstaunliche Definition für Potenzen mit rationalen Exponenten hat einen tieferen Sinn. Sie ist nämlich die einzig mögliche Erweiterung der Potenzdefinition, bei der die Rechengesetze aus Satz 12 sinngemäss erhalten bleiben. Durch eine (eher akademische) Erweiterung des Potenzbegriffs auf reelle Zahlen erhalten wir damit

Satz 20 (Rechengesetze für Potenzen mit reellen Exponenten). *Sei* $a, b > 0$ *und* $n, m \in \mathbb{R}$. *Dann gelten die folgenden Potenzgesetze*

$$\begin{aligned}
a^n a^m &= a^{n+m} \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m} \\
a^{n \cdot m} &= (a^n)^m \\
a^n b^n &= (ab)^n \\
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\
a^0 &= 1 \\
a^1 &= a
\end{aligned}$$

Beachtet man die Regeln, dass nicht durch Null geteilt werden darf und dass 0^n *für* $n < 0$ *nicht definiert ist, so gelten diese Formeln sogar für* $a, b \geq 0$. *Ferner gilt*

$$\begin{aligned}
&0^0 = 1 \\
&0^n = 0 && \text{für } n > 0
\end{aligned}$$

Wichtig ist an dieser Stelle, zu Bemerken, dass Potenzen - obwohl ihre Gesetze immer gleich lauten - in zwei Welten leben: Entweder handelt es sich nämlich um Potenzen mit ganzzahligen Exponenten, für die auch negative Werte als Basis zugelassen sind, oder um Potenzen mit reellen Koeffizienten, in denen die Basis nicht negativ werden darf. Unterscheidet man dieses Sachverhalt nicht, so kann es tatsächlich zu Rechenfehlern kommen.

Zum Beispiel ist die Rechnung

$$\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a^1 = a \tag{1.2.5}$$

richtig, wenn $a \geq 0$ ist, da wir sie aus den Potenzgesetzen für reelle Koeffizienten herleiten können. Für $a < 0$ wird diese Rechnung dagegen falsch, da wir weder Satz 20 (die Basis a ist negativ) noch Satz 12 (einige Exponenten sind rational) verwenden dürfen. In der Tat ergibt sich nach Satz 17

$$\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

was nur im Fall $a \geq 0$ mit (1.2.5) übereinstimmt.

Hat man es also mit einer Formel zu tun, in der manche Exponenten reell und manche Basen negativ sein können, so muss man grösste Vorsicht walten lassen. Da solche Terme nur dann definiert sind, wenn gebrochene Exponenten niemals in Kontakt mit einer negativen Basis kommen, lohnt es sich in diesen Fällen zunächst die Vorzeichen der Potenzen mit ganzzahligen Exponenten auszuwerten. Für gerade Exponenten wie a^2 ist es nämlich erlaubt, die Basis a durch ihren Betrag zu ersetzen. Es gilt also $a^2 = |a|^2$. Mit diesen Ersetzungen wird aus der

Ausgangsgleichung im obigen Beispiel z.B. eine Potenzgleichung mit der positiven Basis $|a|$, weshalb wir nun die Rechengesetze aus Satz 20 verwenden dürfen. Es gilt also

$$\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{a^2=|a|^2}{=} \left(|a|^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(20)}{=} |a|^{2\cdot\frac{1}{2}} = |a|^1 = |a|$$

Bemerkung. *Auch viele Programmiersprachen machen bei den Potenzen eine Unterscheidung zwischen ganzzahligen und reellen Exponenten. Java lässt den Operator ^ zum Beispiel nur zwischen ganzzahligen Zahlenwerten zu, während Ausdrücke wie 2^1.5 einen Kompilierfehler verursachen. Um Datentypen vom Typ* **double** *miteinander zu potenzieren, gibt es in Java den Befehl java.lang.Math.pow(basis, exponent).*

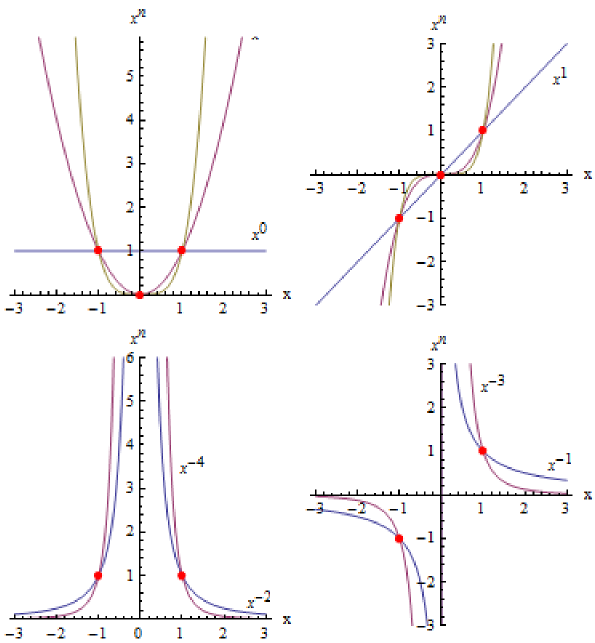


Abbildung 4. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten. Die Graphen von Potenzen mit geraden Exponenten (links) sind spiegelsymmetrisch zur Ordinatenachse, die Graphen von Potenzen mit ungeraden Exponenten (rechts) punktsymmetrisch zum Nullpunkt. Oben sind jeweils Exponenten ≥ 0 dargestellt und unten negative Exponenten.

Potenzfunktionen und deren Graphen. Mit Hilfe der Funktionsnotation lassen sich Potenzen als Funktion darstellen. Für ganzzahlige positive Exponenten $n \geq 0$ definieren wir

$$\cdot^n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

für ganzzahlige negative Exponenten $n < 0$ müssen wir dagegen die Null aus der Definitionsmenge entfernen

$$\cdot^n : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

Die Graphen (siehe Abbildung 4) all dieser Potenzfunktionen haben die Eigenschaft, dass sie - falls n gerade ist - spiegelsymmetrisch zur Ordinatenachse, und - falls n ungerade ist - punktsymmetrisch zum Nullpunkt sind. Potenzen mit geraden Exponenten sind damit die Prototypen für die sogenannten *geraden Funktionen*, die nicht auf das Vorzeichen einer Zahl reagieren

$$f(-x) = f(x)$$

Ebenso sind Potenzen mit ungeraden Exponenten Prototypen für die *ungeraden Funktionen*, die es Erlauben, das Minuszeichen eines Arguments vor den Funktionsaufruf zu ziehen:

$$f(-x) = -f(x)$$

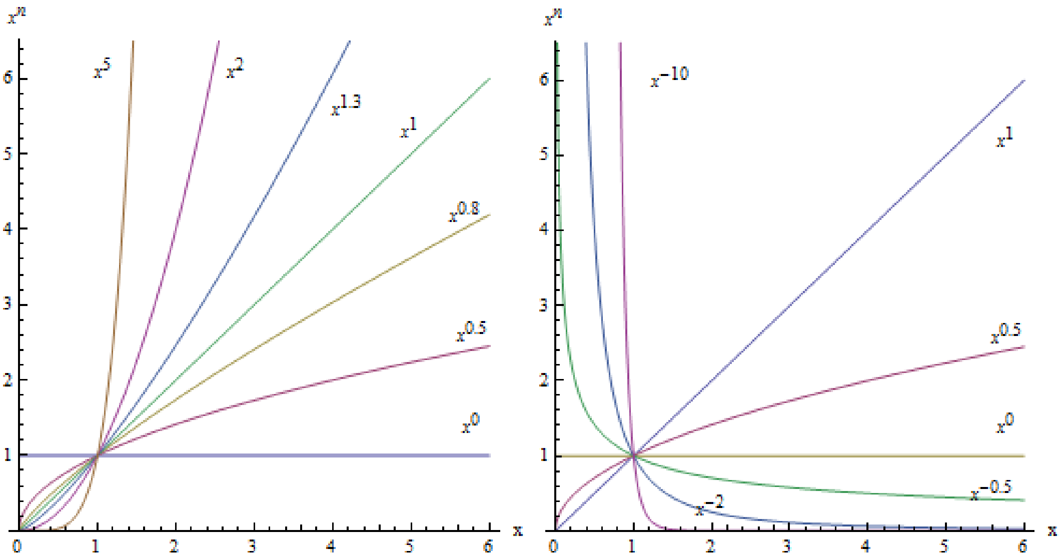


Abbildung 5. Potenzen mit nicht ganzzahligen Exponenten. Für alle Exponenten ist der Punkt $(1,1)$ ein *Fixpunkt*. Für Exponenten $n > 0$ ist ausserdem der Punkt $(0,0)$ Fixpunkt. Man sieht sehr gut, dass die Potenzfunktionen für $n > 0$ mit wachsendem Exponenten immer schneller ansteigen und sich für $n < 0$ mit immer kleiner werdendem Exponenten immer stärker an die Abszisse drücken.

Für reelle Exponenten $n \in \mathbb{R}$ sind die Potenzfunktionen nur noch für positive Basen definiert. Dabei unterscheiden wir wieder zwischen dem Fall $n \geq 0$

$$\cdot^n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

und dem Fall $n < 0$

$$\cdot^n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} & \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ x & \mapsto x^n \end{cases}$$

Wichtig an den Graphen dieser Funktionen (siehe Abbildung 5) ist,

- dass die Funktionen für $n > 0$ mit wachsendem Argument immer ansteigen. Man sagt, diese Funktionen sind *streng monoton wachsend*

- dass die Funktionen für $n < 0$ mit wachsendem Argument immer kleiner werden (solche Funktionen heissen *streng monoton fallend*).

Wichtig ist ausserdem,

- dass für $x > 1$ eine Vergrösserung des Exponenten zu einer Vergrösserung des Funktionswerts führt

$$n > m \quad \Leftrightarrow \quad x^n > x^m$$

- dass sich diese Beziehung für $x < 1$ umkehrt:

$$n > m \quad \Leftrightarrow \quad x^n < x^m$$

- dass die Graphen der Wurzelfunktionen auf Grund der Potenzgesetze (z.B. $x^{1/2} = \sqrt{x}$) in diesen Graphen enthalten sind.

1.2.2. Exponentialfunktion und Logarithmus.

Lernziele:

- *Sie wissen was eine Exponentialfunktion ist und kennen die wesentlichen Rechengesetze*
- *Sie kennen den Logarithmus und seine Rechengesetze*
- *Sie kennen den Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und dem Logarithmus*
- *Sie kennen die Graphen der Exponentialfunktion und des Logarithmus*

Exponentialfunktion. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Potenzfunktionen kennengelernt, die dem Wert x den Wert x^n zugewiesen haben, wobei wir bei dieser Zuweisung der Exponent n vorab fixiert hatten. Zur Definition der *Exponentialfunktion* werden wir wieder die Potenzen verwenden. Der einzige Unterschied zu den Potenzfunktionen besteht darin, dass wir bei den Exponentialfunktionen die Basis fixieren und den Exponenten variieren (siehe Abbildung 6). Da die Exponenten damit reell sind, macht die Exponentialfunktion nur für positive Basen Sinn.

Für $a > 0$ definieren wir die Exponentialfunktion zur Basis a durch

$$\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\} \\ x & \mapsto a^x \end{cases}$$

Anders als bei den Potenzfunktionen erhält die Exponentialfunktionen einen eigenen Funktionsnamen, nämlich $\exp_a$. Mit dieser Definition gilt

$$\begin{aligned} \exp_2(3) &= 2^3 = 8 \\ \exp_{\frac{1}{2}}(4) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \\ \exp_9(-1) &= 9^{-1} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

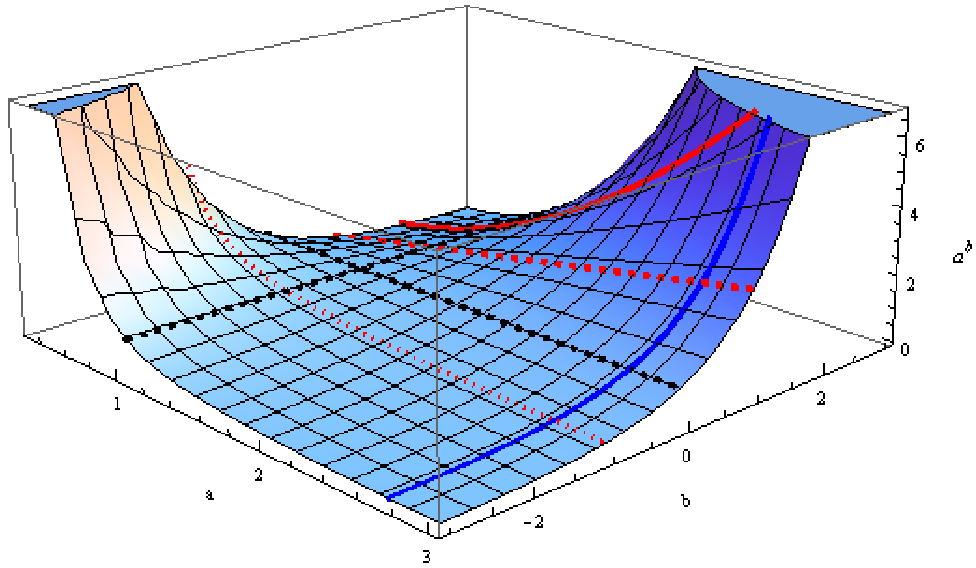


Abbildung 6. Darstellung des Terms a^b in Abhängigkeit von der Basis a und dem Exponenten b. Die rot eingezeichneten Kurven haben alle einen festen Wert von b und sind damit Potenzfunktionen (von links nach rechts handelt es sich um die Potenzfunktionen $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (gepunktet), $a^1 = a$ (gestrichelt) und a^2 (durchgezogen)). Blau eingezeichnet ist die Exponentialfunktion zur Basis $e \approx 2.718...$, d.h. e^b. Bei den schwarz gestrichelt eingezeichneten Kurven handelt es sich zum einen die Potenz $a^0 = 1$ und zum anderen um die Exponentialfunktion $1^b = 1$. Siehe auch hier: Graphen der Potenz- und Exponentialfunktion

Auf Grund ihrer Definition gelten für die *Exponentialfunktionen* sinngemäss wieder die *Potenzgesetze* Satz 20, wobei es sich als nützlich erwiesen hat, einige wenige dieser Gesetze noch einmal explizit aufzuschreiben

Satz 21. *Sei $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\exp_a(x+y) &= \exp_a(x)\exp_a(y) \\
\exp_a(x-y) &= \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \\
\exp_a(-x) &= \frac{1}{\exp_a(x)} \\
(\exp_a(x))^y &= \exp_a(x \cdot y) \\
\exp_a(0) &= 1 \\
\exp_a(1) &= a
\end{aligned}$$

Aufgabe 22.

Beweisen Sie diese Rechengesetze.

Lösungweg

Ähnlich, wie man bei den Wurzeln die Quadratwurzel besonders ausgezeichnet hat, misst man bei den Exponentialfunktionen einer bestimmten Basis eine besondere Bedeutung zu. Diese Basis ist durch die *eulersche Zahl*[10] $e \approx 2.71828...$ gegeben. Die Exponentialfunktion zur Basis e nennen wir deshalb auch einfach die Exponentialfunktion und schreiben dafür kurz

$$\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$$

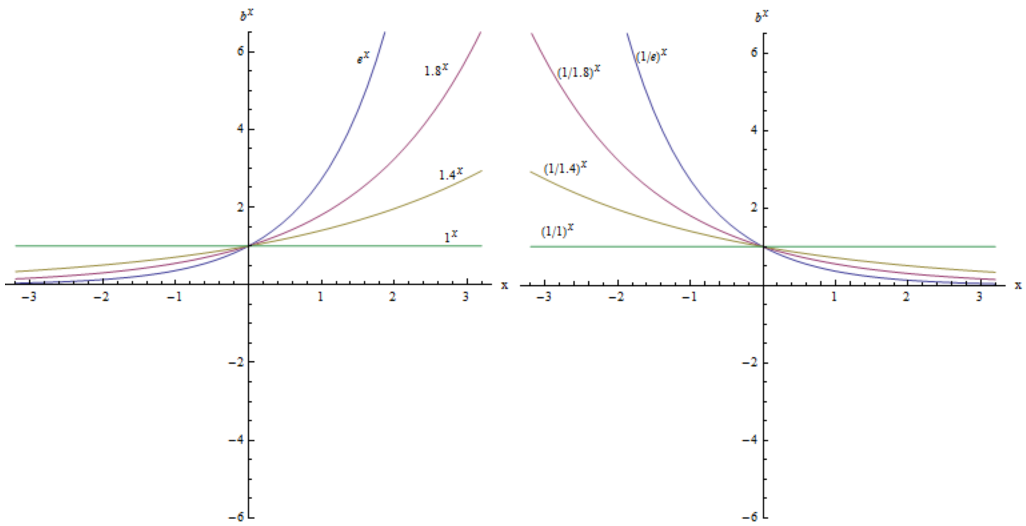


Abbildung 7. Graphen der Exponentialfunktion zu verschiedenen Basen

[10] *In der Mathematik gehört die eulersche Zahl ähnlich wie die Kreiszahl $\pi \approx 3.1415$ zu den wichtigsten vordefinierten Konstanten.*

Ähnlich, wie die Graphen der Potenzen, ist es wesentlich, die Graphen der Exponentialfunktion mit ihren wichtigsten Eigenschaften gut zu kennen. Diese sind in Abbildung 7 dargestellt.

Wichtig ist, dass alle Exponentialfunktionen den Punkt $(0,1)$ enthalten und dass die Funktionswerte aller Exponentialfunktionen (unabhängig von der Basis) stets positiv sind. Ist die Basis der Exponentialfunktion >1 (Normalfall), so sind die Funktionen streng monoton wachsend, andernfalls streng monoton fallend. Die Graphen zu den Exponentialfunktionen $\exp_a$ und $\exp_{1/a}$ gehen durch Spiegelung an der Ordinate auseinander hervor. Für $x>0$ ist der Funktionswert der Exponentialfunktion mit der grössten Basis am grössten

$$a<b \quad\Leftrightarrow\quad \exp_a(x)<\exp_b(x)$$

und für $x<0$ ist dies umgekehrt

$$a<b \quad\Leftrightarrow\quad \exp_a(x)>\exp_b(x)$$

Aufgabe 23.

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\exp(a+b)}{\exp(a-b)}}$$

Lösungweg

Logarithmus. Ähnlich wie für positive Basiswerte mit der n-ten Wurzel eine n-te Potenz rückgängig gemacht werden kann, gibt es eine zur Exponentialfunktion passende *Umkehrabbildung*. Diese Abbildung nennt man den Logarithmus. Der Logarithmus zur Basis b ist damit implizit durch folgende Vorschrift definiert

$$\log_b : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \text{Lösung } y \text{ der Gleichung } b^y = x \end{cases}$$

Beim Logarithmus zur Basis e wird - je nach Literatur - die Basis gerne weggelassen[11]. Daneben hat es sich aber auch eingebürgert, den Logarithmus zur Basis e durch das Symbol ln darzustellen. Dieser Notation wollen wir folgen. Es gilt also

$$\ln(x) \quad = \quad \log_e(x)$$

Da der Logarithmus die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion zur selben Basis ist, ergibt sich dessen Graph auf einfache Weise aus dem Graphen der Exponentialfunktion: Legen wir nämlich für die Exponentialfunktion (hier zur Basis e) eine Wertetabelle an

[11] In Java sind die Exponentialfunktion und der Logarithmus zur Basis e z.B. durch die Funktionen `java.lang.Math.exp` und `java.lang.Math.log` gegeben.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	ln(y)
exp(x)	0.0183156	0.0497871	0.135335	0.367879	1.	2.71828	7.38906	20.0855	54.5982	y

so können wir dieser Wertetabelle z.B. auch den Wert des Logarithmus zur Zahl 0.0183156 oder zur Zahl 0.0497871 entnehmen:

$$\ln(0.0183156) \approx -4 \quad \text{da} \quad \exp(-4) \approx 0.0183156$$
$$\ln(0.0497871) \approx -3 \quad \text{da} \quad \exp(-3) \approx 0.0497871$$

Verfolgen wir diesen Gedankengang weiter, so ergibt sich aus der obigen Wertetabelle für die Exponentialfunktion eine Wertetabelle für den zugehörigen Logarithmus, in dem wir die Rollen von Funktionswert und Argument vertauschen.

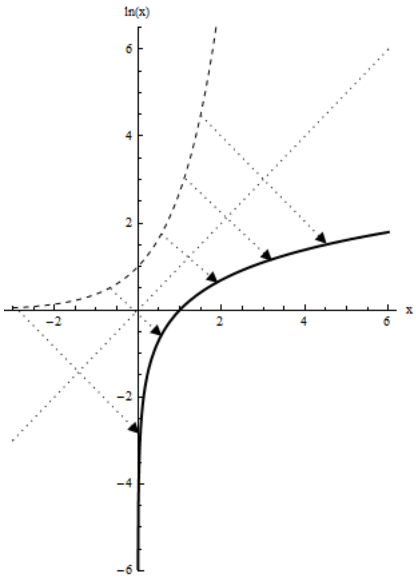


Abbildung 8. Der Graph des Logarithmus entsteht aus dem Graphen der Exponentialfunktion (gestrichelt dargestellt) durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden. Wichtig ist, dass der Graph des Logarithmus in Folge dessen nur für echt positive Argumente > 0 definiert ist, dafür aber positive und negative Werte annehmen kann.

Dies bedeutet wiederum, dass der Logarithmus aus dem Graphen der Exponentialfunktion durch simples Vertauschen der 1. und 2. Koordinate entsteht:

$$\begin{aligned} Graph(\exp) &= \{(x,y)\,|y = \exp(x)\} \\ Graph(\ln) &= \{(y,x)\,|y = \exp(x)\} \end{aligned}$$

was nichts anderes bedeutet, als dass wir den Graphen des Logarithmus durch Spiegelung des Graphen der Exponentialfunktion an der 1. Winkelhalbierenden konstruieren können (siehe Abbildung 8).

Ähnlich wie für die Potenzen und für die Exponentialfunktion, gibt es auch für den Logarithmus Rechengesetze:

Satz 24 (Logarithmengesetze). *Sei* $x, y > 0$*,* $a \in (0; \infty) \setminus \{1\}$ *und* $b \in \mathbb{R}$*. Dann gilt*

$$\begin{aligned} a^{\log_a(x)} &= x \\ \log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a\left(x^b\right) &= b \cdot \log_a(x) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt auch

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \\ \log_a(1) &= 0 \\ \log_a(a) &= 1 \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus der Definition des Logarithmus. Damit gilt auch

$$x \cdot y = a^{\log_a(xy)}$$

und

$$\begin{aligned} x \cdot y &= a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} \\ &= a^{\log_a(x) + \log_a(y)} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Potenzgesetze verwendet haben. Somit haben wir gezeigt, dass

$$a^{\log_a(xy)} = a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$$

was nichts anderes bedeutet, als dass die Exponenten der linken und rechten Seite der Gleichung identisch sein müssen. Damit haben wir die zweite Zeile des Satzes bewiesen.

Die vierte Zeile folgt auf ähnliche Weise wieder durch Ausnutzen der Potenzgesetze. Es gilt

$$a^{b \cdot \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^b = x^b$$

Berechnen wir nun von beiden Seiten den Logarithmus zur Basis a, so erhalten wir

$$\log_a\left(a^{b \cdot \log_a(x)}\right) = \log_a\left(x^b\right)$$

Nach der Definition des Logarithmus ist aber die linke Seite nichts anderes als $b \cdot \log_a(x)$, womit wir auch die dritte Gleichung gezeigt haben.

Damit ergibt sich nun auch die dritte Zeile indem man das Argument $\frac{x}{y}$ des Logarithmus in der Form xy^{-1} schreibt:

$$\begin{aligned} \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a\left(xy^{-1}\right) \\ &= \log_a(x) + \log_a\left(y^{-1}\right) \\ &= \log_a(x) + (-1)\log_a(y) \end{aligned}$$

□

Beispiel. *Der Logarithmus eines Terms, der nur aus den Rechenoperationen “mal” und “geteilt”, sowie aus Potenzen besteht, lässt sich mit Hilfe der Logarithmengesetze umformen. Mit Hilfe der 2. und 3. Regel folgt zunächst*

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^2 5^b a^3 (a+b)}{c^7 d^{-4}}\right) &= \ln\left(e^2 5^b a^3 (a+b)\right) - \ln\left(c^7 d^{-4}\right) \\ &= \ln\left(e^2\right) + \ln\left(5^b\right) + \ln\left(a^3\right) + \ln\left(a+b\right) - \ln\left(c^7\right) - \ln\left(d^{-4}\right) \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile darauf Acht geben mussten, dass der Logarithmus $\ln\left(c^7 d^{-4}\right)$ *einem vorangestellten Minuszeichen folgt. Nun können wir die vierte Regel verwenden und erhalten so*

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{e^2 5^b a^3 (a+b)}{c^7 d^{-4}}\right) &= 2\ln(e) + b\ln(5) + 3\ln(a) + \ln(a+b) - 7\ln(c) + 4\ln(d) \\ &= 2 + b\ln(5) + 3\ln(a) + \ln(a+b) - 7\ln(c) + 4\ln(d) \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile ausgenutzt haben, dass $\ln(e) = 1$ *gilt. Den Term* $\ln(a+b)$ *können wir nicht (!) weiter umformen, da es keine Umformungsregel für Logarithmen gibt, die auf eine Summe wirken.*

Ähnlich wie bei den Potenzen hätte man auch diese Schritte sehr viel schneller durchführen können. Grob gesagt macht der Logarithmus aus jedem Bruchstrich ein Minus-Zeichen, aus jedem Malpunkt ein Plus und aus jedem Exponenten einen Vorfaktor. Zu beachten ist, dass bei mehreren Faktoren im Nenner eines Bruches, alle Faktoren des Nenners mit einem Minuszeichen versehen werden müssen, und dass bei Doppelbrüchen mehrere Minuszeichen “hintereinander geschaltet” werden müssen. Mit dieser Vorgehensweise ergibt sich sofort

$$\ln\left(\frac{e^2 5^b a^3 (a+b)}{c^7 d^{-4}}\right) = \underbrace{2\ln(e) + b\ln(5) + 3\ln(a) + \ln(a+b)}_{\textit{Zähler}} \underbrace{-7\ln(c) - (-4)\ln(d)}_{\textit{Nenner}}$$

Beachten Sie, dass es auch dieses Mal keine Regel gibt, die es uns erlaubt, den Term $\ln(a+b)$ *weiter umzuformen.*

Beispiel. *Bei einen Doppelbruch erhalten wir auf dieselbe Weise*

$$\ln\left(\frac{e^2 5^2 a^{-3}}{c^7 \frac{e}{4}}\right) = \underbrace{2\ln(e) + 2\ln(5) - 3\ln(a)}_{\textit{Zähler}} \underbrace{-7\ln(c) - \overbrace{(\ln(e) - \ln(4))}^{\textit{Bruch des Nenners}}}_{\textit{Nenner}}$$

> Aufgabe 25.
>
> Vereinfachen Sei
>
> $$\ln\left(\frac{4a^3 b^{-2} (b+2)^{-1}}{a+b}\right) + \ln(a+b) + \ln(b)$$

Lösungweg

Wir hätten bei der letzten Aufgabe auch umgekehrt vorgehen können. Da der Logarithmus aus jedem Produkt eine Summe macht, ist die Summe mehrerer Logarithmen nichts anderes, als der Logarithmus des entsprechenden Produkts. Damit gilt

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{4a^3b^{-2}(b+2)^{-1}}{a+b}\right)+\ln(a+b)+\ln(b) &= \ln\left(\frac{4a^3b^{-2}(b+2)^{-1}}{a+b}\cdot(a+b)\cdot b\right)\\ &= \ln\left(4^{\square}a^{\square}b^{\square}(b+2)^{\square}(a+b)^{\square}\right)\end{aligned}$$

wobei wir nun wieder die Potenzen der einzelnen Exponenten durch "Zusammenzählen" konstruieren können:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{4a^3b^{-2}(b+2)^{-1}}{a+b}\right)+\ln(a+b)+\ln(b) &= \ln\left(\frac{4a^3b^{-2}(b+2)^{-1}}{a+b}\cdot(a+b)\cdot b\right)\\ &= \ln\left(4^1a^3b^{-2+1}(b+2)^{-1}(a+b)^{1-1}\right)\\ &= \ln\left(4a^3b^{-1}(b+2)^{-1}\right)=\ln\left(\frac{4a^3}{b(b+2)}\right)\end{aligned}$$

1.2.3. Umkehrfunktionen.

Lernziele:

- *Sie kennen den Begriff der Umkehrfunktion und wissen, wie Sie eine Umkehrfunktion implizit definieren können*
- *Sie kennen die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv und den Zusammenhang mit Umkehrfunktionen*
- *Sie können den Graphen der Umkehrfunktion aus dem Graphen einer Funktion konstruieren*
- *Sie wissen was die Restriktion einer Funktion ist und können eine Funktion durch Einschränkung der Definitions- und Zielmenge umkehrbar machen*

Wir haben mit der Wurzel und dem Logarithmus bereits zweimal eine Funktion eingeführt, mit der wir eine andere Funktion "rückgängig" machen konnten: Die Wurzel

$$\sqrt{\cdot}:\begin{cases}\mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+\\ x & \mapsto \text{positive Lösung } y \text{ der Gleichung } y^2=x\end{cases}$$

hat für $x \geq 0$ das Quadrieren aufgehoben, und umgekehrt konnten wir durch Quadrieren eine Wurzeloperation rückgängig machen:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} &= x\\ \sqrt{x}^2 &= x\end{aligned}$$

Analog konnte durch den Logarithmus

$$\ln:\begin{cases}\mathbb{R}^+\setminus\{0\} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \text{Lösung } y \text{ der Gleichung } e^y=x\end{cases}$$

die Exponentialfunktion aufgelöst werden und umgekehrt:

$$\ln\left(e^{x}\right) = x \tag{1.2.6}$$

$$e^{\ln(x)} = x \text{ falls } x > 0 \tag{1.2.7}$$

Funktionen, die andere Funktionen "vernichten", spielen beim Gleichungslösen eine wichtige Rolle. Wir nennen sie ab sofort *Umkehrfunktionen*. Um die Umkehrfunktionen besser zu verstehen, brauchen wir aber einige Begriffe:

Definition 26. Sei $f : D \to Z$ eine beliebige Funktion. Dann nennen wir f *injektiv*, wenn die Funktion jeden Funktionswert nur ein einziges Mal annimmt. Etwas präziser: Eine Funktion heisst injektiv, wenn für alle $x, y \in D$ mit $x \neq y$ automatisch

$$f(x) \neq f(y)$$

folgt.

Wir nennen f *surjektiv*, wenn f alle Werte aus Z tatsächlich annimmt, d.h. wenn

$$Bild(f) = Z$$

Schliesslich heisst eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, *bijektiv* oder *umkehrbar*.

Definition 27 (Umkehrfunktion). Für umkehrbare Funktionen ist

$$f^{-1} : \begin{cases} Z & \to D \\ y & \mapsto \text{Lösung der Gleichung } f(x) = y \end{cases} \tag{1.2.8}$$

eine gültige Funktionsdefinition. Diese Funktion nennen wir *Umkehrfunktion* von f[12].

Bemerkung. *Die Forderung, dass eine Funktion bijektiv sein muss, um eine Umkehrfunktion zu besitzen, wird nicht grundlos gestellt. Wäre die Funktion z.B. nicht surjektiv, so gäbe es Werte $y \in Z$, die nicht als Funktionswert von f in Erscheinung treten. Für solche y-Werte wäre die Gleichung $f(x) = y$ unlösbar, was wiederum bedeuten würde, dass f^{-1} nicht auf diese y-Werte angewendet werden dürfte. Dies steht aber im Widerspruch zu Definition* (1.2.8)*, in der gefordert wurde, dass Z die Definitionsmenge der Umkehrfunktion darstellt.*

Beispiel. *Für $a > 0$ ist* $\log_a : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *ist die Umkehrfunktion von* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$*. Es gilt also*

$$\log_a = \exp_a^{-1}$$

[12]An dieser Stelle eine Warnung: In der Literatur definiert man die Funktion f^n meist durch

$$f^n(x) = (f(x))^n$$

Man sollte also annehmen, dass damit auch

$$f^{-1}(x) = (f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

gilt. Das ist aber nicht so. Wann immer wir das Symbol f^{-1} verwenden, meinen wir die Umkehrfunktion von f, welche überhaupt nichts mit der Funktion, die x auf den Wert $\frac{1}{f(x)}$ abbildet, zu tun hat. Die Notation ist hier schlicht und einfach irreführend.

Beispiel. *Für $a > 0$ ist $\sqrt[a]{\cdot}$ ist die Umkehrfunktion der a-ten Potenz, wenn man diese vorher auf die positiven reellen Zahlen einschränkt. Mit*

$$\text{pot}_a^+ : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^a \end{cases}$$

gilt also

$$\sqrt[a]{\cdot} \quad = \quad \left(\text{pot}_a^+\right)^{-1}$$

Beispiel. *Für ganzzahlige a ist die a-te Potenz auch für negative Zahlen definiert. Ist a sogar eine gerade Zahl, dann ist die zugehörige Potenzfunktion nicht injektiv, da wegen*

$$x^a \quad = \quad (-x)^a$$

die beiden Zahlen 1 und -1 denselben Funktionswert 1 liefern. Da dies für injektive Funktionen verboten ist, existiert die Umkehrfunktion in diesem Fall nicht. Eine sinnvolle Definition der Umkehrfunktion wäre in diesem Fall auch gar nicht möglich, da die Gleichung

$$x^a \quad = \quad 1$$

zwei Lösungen (1 und -1) besitzt und die Berechnungsvorschrift (1.2.8) *damit nicht zu einer wohldefinierten Funktion führen würde. Wie wir vorher bereits gesehen haben, haben wir dieses Phänomen bei der Definition der Wurzel berücksichtigt, indem wir aus den beiden möglichen Lösungen jeweils die positive ausgewählt haben (siehe auch das vorige Beispiel).*

Beispiel. *Die Funktion*[13]

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \backslash \{2\} & \to \mathbb{R} \backslash \{3\} \\ x & \mapsto \frac{3x-5}{x-2} \end{cases}$$

besitzt eine Umkehrfunktion. Diese finden wir, indem wir die Gleichung

$$y \quad = \quad \frac{3x-5}{x-2} \tag{1.2.9}$$

nach x auflösen. Wegen $x \in \mathbb{R} \backslash \{2\}$ dürfen wir beide Seiten der Gleichung dem Nenner $(x-2)$ multiplizieren. Auch das Teilen der Gleichung durch $(y-3)$ ist erlaubt, da die Zahl 3 nicht in der Zielmenge enthalten ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-5}{x-2} && \mid \cdot (x-2) \\ \Leftrightarrow y\,(x-2) &= 3x-5 && \mid -3x+2y \\ \Leftrightarrow (y-3)\,x &= 2y-5 && \mid : (y-3) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2y-5}{y-3} \end{aligned}$$

---

[13] Strenggenommen müssten wir an dieser Stelle noch zeigen, dass die Funktion f den Wert 3 nicht annehmen kann. Dies folgt aber aus der Tatsache, dass die Gleichung

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{3x-5}{x-2} \\ \Leftrightarrow 3x-6 &= 3x-5 \end{aligned}$$

unlösbar ist.

Da die Lösungsmenge der Gleichung 1.2.9 für alle $y \neq 3$ genau aus einem Element besteht, haben wir gezeigt, dass f umkehrbar ist. Ausserdem haben wir eine explizite Funktionsdefinition der Umkehrfunktion gefunden:

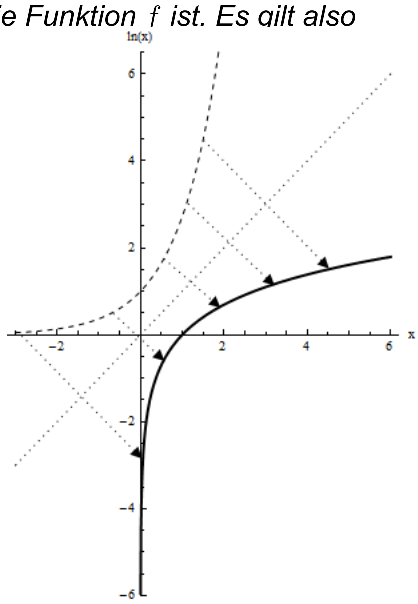
$$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ y & \mapsto \frac{2y-5}{y-3} \end{cases}$$

Die zentrale Eigenschaft der Umkehrfunktion zeigt sich in folgendem

Satz 28 (Umkehrfunktion). *Sei $f : D \to Z$ eine bijektive Funktion und $f^{-1} : Z \to D$ die zugehörige Umkehrfunktion. Dann gilt*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in D$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \quad \text{für alle } y \in Z$$

Aus diesen Gleichungen folgt insbesondere, dass auch f^{-1} bijektiv ist, und dass für die Umkehrfunktion von f^{-1} wieder die Funktion f ist. Es gilt also



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	ln(y)
exp(x)	0.0183156	0.0497871	0.135335	0.367879	1.	2.71828	7.38906	20.0855	54.5982	y

Abbildung 9. Die Wertetabelle der Umkehrfunktion entsteht aus der Wertetabelle der Ausgangsfunktion (gestrichelt dargestellt) durch Vertauschung der Rollen von Funktionswert und Argument. Der Graph der Umkehrfunktion entsteht aus dem Graphen der Ausgangsfunktion (gestrichelt dargestellt) durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

Der Graph einer Umkehrfunktion. Wie wir beim Logarithmus bereits gesehen haben, lässt sich die Wertetabelle einer Umkehrfunktion leicht aus der Wertetabelle der Ausgangsfunktion konstruieren. Wir müssen dazu nämlich nur die Rolle von Funktionswert und Argument vertauschen. Dies wiederum bedeutet, dass der Graph der Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen der Ausgangsfunktion an der ersten Winkelhalbierenden entsteht.

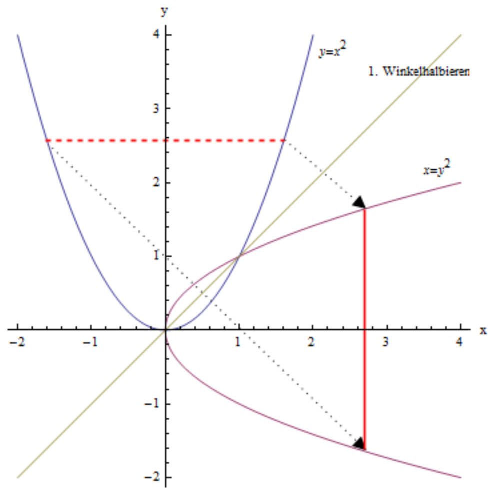


Abbildung 10. Graph der Quadratfunktion (blau) und seiner Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden (lila). Wie man an der rot eingezeichneten Linie sieht, gehören zu jedem x-Wert zwei y-Werte mit $y^2 = x$. Der lila Graph ist also nicht wohldefiniert und gehört damit nicht zum Graphen einer Funktion. Rot gestrichelt dargestellt ist die Ursache des Problems: die Quadratfunktion produziert denselben Funktionswert y^2 an zwei verschiedenen Stellen: die Quadratfunktion ist also nicht injektiv.

Das Vertauschen der Rollen von Funktionswert und Argument in einer Wertetabelle und das Spiegeln eines Graphen an der ersten Winkelhalbierenden sind Operationen, die wir unabhängig davon durchführen können, ob eine Funktion umkehrbar ist oder nicht. In Abbildung 10 sehen wir, was passiert, wenn wir eine Funktion, die nicht injektiv ist, an der 1. Winkelhalbierenden spiegeln: Die blau dargestellte Funktion nimmt denselben Funktionswert an mehreren Stellen an. Durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden entsteht dann ein Graph (lila), der einem einzigen Abszissenwert, mehrere Ordinatenwerte zuordnet und der somit nicht wohldefiniert ist[14]. Die Injektivität einer Funktion ist spiegelt damit nichts anderes als die Wohldefiniertheit der Umkehrfunktion wieder.

Restriktion einer Funktion. Wir haben im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass nicht jede Funktion umkehrbar ist. Da man aber Funktionen wie die Quadratfunktion gerne umkehren möchte, stellt sich die Frage, ob es ein Verfahren gibt, um Funktionen “umkehrbar zu machen”. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist dies ist in der Tat möglich.

Die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

[14]So wie sich nach Abbildung 3 die Wohldefiniertheit einer Funktionsdefinition leicht daran erkennen lässt, dass es keine zur Ordinate parallel verlaufende Geraden gibt, die den Graphen mehrfach schneiden, ist auch eine graphische Prüfung der Injektivität einfach: Nach Abbildung 10 müssen wir in diesem Fall prüfen, dass es keine Parallelen zur Abszissenachse gibt, die den Graphen mehrfach schneiden.

ist nicht umkehrbar, da sie weder surjektiv (es gibt keine Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 = -1$) noch injektiv ($f(-1) = f(1) = 1$) ist. Die Funktion lässt sich aber, ohne ihren Graphen zu verändern surjektiv machen, indem wir die Zielmenge durch das Bild der Funktion ersetzen: Die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

ist zwar immer noch nicht injektiv (und damit nicht umkehrbar). Sie ist aber surjektiv, da jede positive reelle Zahl y als Quadratzahl einer reellen Zahl geschrieben werden kann, nämlich z.B. als Quadrat der Zahl $\sqrt{y}$. Eine Funktion lässt sich also ohne den Funktionsgraphen zu verändern "surjektiv machen", indem wir die Zielmenge auf das Bild der Funktion reduzieren.

Die Injektivität einer Funktion ist schwerer herzustellen. Dazu müssen wir nämlich das Problem beheben, dass die Funktion g mehreren Argumenten denselben Funktionswert zuweist. In unserem Beispiel weisst g den Zahlen $x \in \mathbb{R}$ und $-x$ denselben Wert zu:

$$g(x) = g(-x)$$

Um die Injektivität der Funktion g herzustellen, müssen wir also die Definitionsmenge so ver-

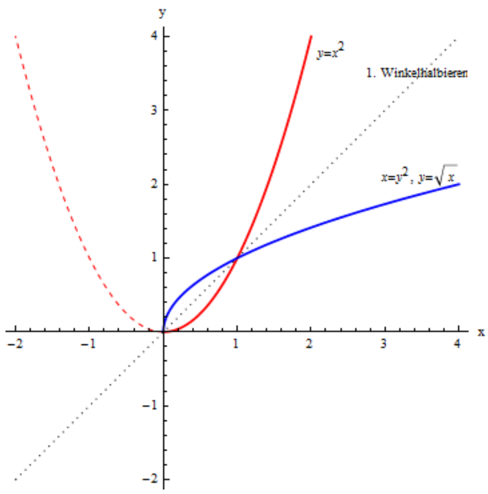


Abbildung 11. Die Umkehrbarkeit der Quadratfunktion (rot) kann dadurch hergestellt werden, dass wir die Funktion ausschliesslich für positive Argumente definieren, d.h. ohne den gestrichelten Ast. Die Umkehrfunktion wird damit zur (blau dargestellten) Quadratwurzel

kleinern, dass unter allen Argumenten x, die unter Anwendung der Funktion g das selbe Resultat $g(x)$ liefern, nur eine Zahl in der Definitionsmenge übrigbleibt. In unserem Beispiel ist das dadurch möglich, dass wir die Definitionsmenge von g auf die positiven reellen Zahlen einschränken (siehe Abbildung 11). Unterschiedliche positive Zahlen produzieren nämlich stets unterschiedliche Quadratzahlen. Die Funktion

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

ist damit injektiv. Wie man aus Abbildung 11 ersieht, haben wir durch die Einschränkung der Definitionsmenge allerdings den Graph der Funktion verändert. Da diese Operation aber trotzdem relativ häufig benötigt wird, hat es sich in der Mathematik eingebürgert, ein eigenes Symbol für die sog. *Restriktion* einer Funktion zu verwenden. Man schreibt $g_{|\mathbb{R}^+}$ um zu vermeiden, dass man extra für diesen Zweck einen neuen Funktionsnamen erfinden muss. $g_{|\mathbb{R}^+}$ ist also der Name einer Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R}^+$ und der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}^+$

$$g_{|\mathbb{R}^+}(x) \quad = \quad g(x)$$

gilt.

Die Quadratwurzel ist also die Umkehrfunktion der Restriktion der Quadratfunktion auf die positiven reellen Zahlen. Formaler, wenn wir die Quadratwurzelfunktion mit $sqrt$ und die Quadratfunktion mit sqr abkürzen, gilt

$$sqrt \quad = \quad \left(sqr_{|\mathbb{R}^+}\right)^{-1}$$

oder noch formaler (und nahezu unverständlich)

$$\sqrt{\cdot} \quad = \quad \left(\cdot^2_{|\mathbb{R}^+}\right)^{-1}$$

Beachten Sie, dass die Restriktion im Kontext der Umkehrfunktion grosse Bedeutung hat. Sie schlägt sich in der Definition der Wurzel nieder, indem wir sagen: *“Die Wurzel von x ist diejenige* positive *Zahl, deren Quadrat x ergibt”* und zeigt sich darin, dass auf Grund von Satz 28 in der Formel

$$\sqrt{x^2} \quad = \quad x \text{ für } x \geq 0$$

die Einschränkung “$x \geq 0$” gemacht werden muss, obwohl die Quadratfunktion auch negative Zahlen “verarbeiten” könnte[15].

1.3. Gleichungen ohne Trigonometrie

1.3.1. Wichtige Begriffe bei Gleichungen und Ungleichungen.

Gleichungen. Eine *Gleichung* in der Mathematik ist zunächst einmal eine *Aussageform*. Darunter versteht man einen logischen Ausdruck, der *Variablen* enthält und der in Abhängigkeit von den Werten, mit denen man die Variablen *belegt,* entweder wahr oder falsch werden kann.

Zum Beispiel wird die Gleichung

$$x^2 \quad = \quad x \tag{1.3.1}$$

durch die *Belegung* der *Variable* x mit dem Wert 2 zu einer falschen Aussage, nämlich zu

$$2^2 \quad = \quad 2$$

Durch die *Belegung* der *Variable* x mit dem Wert 1, entsteht dagegen die wahre Aussage

$$1^2 \quad = \quad 1$$

[15]Für $x \in \mathbb{R}$ wäre die obige Formel sogar falsch. In diesem Fall gilt

$$\sqrt{x^2} \quad = \quad |x|$$

In der *Lösungsmenge* einer Gleichung fassen wir nun alle Belegungen der Variable x zusammen, durch die die Gleichung zu einer wahren Aussage wird. In unserem Beispiel enthält die Lösungsmenge also Zahlen 0 und 1. Da die Lösungsmenge eine Menge ist, müssen wir die Lösungsmenge in Mengenschreibweise angeben. Im Beispiel ist die Lösungsmenge also

$$\{0, 1\}$$

Es kann bei Gleichungen vorkommen, dass der Wahrheitsgehalt der Gleichung für manche Belegungen der Variablen gar nicht überprüft werden kann, weil nicht alle Rechenschritte sinnvoll durchgeführt werden können: die Gleichung ist dann für manche Belegungen der Variablen *nicht definiert*.

Diese Situation tritt zum Beispiel bei der Gleichung

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \tag{1.3.2}$$

auf. Diese Gleichung ist für die Belegung $x = 0$ nicht definiert ist, da sonst in den auftretenden *Termen* durch Null geteilt würde.

Wir fassen diejenigen Belegungen der Variablen, für die alle in der Gleichung vorkommenden Terme sinnvoll berechnet werden können, zur *Definitionsmenge* zusammen: Die Definitionsmenge einer Gleichung besteht also aus allen Belegungen der Variable, für die der Wahrheitsgehalt der Gleichung überprüft werden kann - unabhängig davon, ob dadurch eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht.

Je nach der Belegung der Variablen mit Werten, kann eine Gleichung also drei verschiedene Zustände annehmen:

(1) die Gleichung kann für eine Belegung der Variablen undefiniert sein: Diese Belegungen sind weder in der Definitions- noch in der Lösungsmenge enthalten.

(2) die Gleichung kann für eine Belegung der Variablen definiert sein und für diese Belegung zu einer falschen Aussage werden: Diese Belegungen sind zwar in der Definitionsmenge, aber nicht in der Lösungsmenge enthalten.

(3) die Gleichung kann für eine Belegung der Variablen definiert sein und für dieser Belegung zu einer wahren Aussage werden: Diese Belegungen sind sowohl in der Definitions- als auch in der Lösungsmenge enthalten.

Im Beispiel (1.3.2) ist die Definitionsmenge der Gleichung somit $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, da wir für die Elemente dieser Menge alle in der Gleichung vorkommenden Terme berechnen können. Die Lösungsmenge besteht dagegen nur aus der Menge $\{1\}$, da die Gleichung nur mit der Belegung $x = 1$ zu einer wahren Aussage wird.

Ungleichungen. *Ungleichungen* unterscheiden sich von Gleichungen dadurch, dass zwischen den Termen der linken und rechten Seite nicht das Gleichheitssymbol, sondern eines der Symbole $\neq, <, >, \leq, \geq$ verwendet wird. Da dieses Symbol keine Auswirkungen darauf hat, ob eine Rechenoperation definiert ist, hat eine Ungleichung immer dieselbe Definitionsmenge, wie die zugehörige Gleichung. Da die Wahl des Symbols aber den Wahrheitsgehalt der Gleichung beeinflusst, unterscheidet sich die Lösungsmenge der Ungleichung in der Regel von der Lösungsmenge der entsprechenden Gleichung.

Gleichungen und Ungleichungen mit mehreren Variablen. Die bisher eingeführten Begriffe hängen nicht davon ab, ob in einer Gleichung eine oder mehrere Variablen vorkommen. Die Begriffe Definitionsmenge und Lösungsmenge gelten also sinngemäss auch dann, wenn die auftretenden Terme von mehreren Variablen abhängen oder wenn ein *Gleichungssystem* aus mehreren Gleichungen simultan gelöst werden soll.

1.3.2. Äquivalenzumformungen. Die Lösungsmenge einer Gleichung anzugeben ist mit Hilfe der beschreibenden Mengendarstellung sehr einfach: Im Fall der Gleichung (1.3.2) können wir ohne Rechnung sofort sagen, dass

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \left| \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \right. \right\}$$

die Lösungsmenge der Gleichung ist. Diese Angabe ist zwar korrekt aber nutzlos: Wir wissen nämlich immer noch nicht, welche Werte in dieser Menge liegen. Ziel des Lösens einer Gleichung ist also nicht die Angabe der Lösungsmenge, sondern das Finden einer möglichst einfache Darstellung aller Lösungen. Um diese zu erreichen, verwendet man die Technik der *Äquivalenzumformungen*. Bei diesen Umformungen handelt es sich um Transformationen der Gleichung, bei denen sich die Lösungsmenge nicht verändert.

Eine mögliche Äquivalenzumformung ist z.B. links und rechts der Gleichung (1.3.2) die Zahl 1 zu addieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} && \qquad\qquad | +1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 &= \frac{1}{x^2} + 1 \end{aligned}$$

Dieser Rechenschritt vereinfacht unser Problem zwar nicht, führt jedoch auf eine neue Gleichung, nämlich

$$\frac{1}{x} + 1 \quad = \quad \frac{1}{x^2} + 1$$

mit exakt derselben Lösungsmenge:

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \left| \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \right. \right\} \quad = \quad \left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \left| \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x^2} + 1 \right. \right\}$$

Beim Lösen einer Gleichung (genau wie beim Lösen einer Ungleichung) versuchen wir nun solche Äquivalenzumformungen zu finden, die zu einer vereinfachten Darstellung der Lösungsmenge führen. Hätten wir die Gleichung zum Beispiel mit x^2 multipliziert

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} && \qquad\qquad | \cdot x^2 \\ \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x &= 1 \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

was für alle $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ erlaubt ist, so hätte sich dadurch der der Inhalt der Lösungsmenge nicht verändert. Der Inhalt der Lösungsmenge wäre aber leichter zu erkennen gewesen:

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \left| \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \right. \right\} &= \{ x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \, | x = 1 \} \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

Wir sehen nach dieser Umformung sehr gut, dass die Lösungsmenge ausschliesslich aus dem Wert 1 besteht und haben damit “das Problem gelöst”.

Um bei Gleichungsumformungen auszudrücken, dass sich die Lösungsmenge durch eine Umformung nicht verändert, hat sich das *Äquivalenzsymbol* $\Leftrightarrow$ etabliert. Dieses trennt - anders als das Gleichheitszeichen[16] - Aussagen oder Aussageformen voneinander und besagt, dass die erste Aussageform genau unter den selben Bedingungen wahr wird, wie die zweite Aussageform.

Beispiel. *Logische Ausdrücke (d.h. Aussagen und Aussageformen) lassen sich durch das Äquivalenzzeichen voneinander trennen*

$$\begin{aligned} x^2 = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \\ e^x > 1 &\quad\Leftrightarrow\quad x > 0 \\ \ln(x) = 0 &\quad\Leftrightarrow\quad x = 1 \\ x^2 = 1 &\quad\Leftrightarrow\quad (x = 1 \vee x = -1) \\ \textit{Äpfel sind Birnen} &\quad\Leftrightarrow\quad 0 = 1 \end{aligned}$$

Im Gegensatz dazu werden Terme durch das Gleichheitszeichen getrennt. Sie werden dadurch zu logischen Ausdrücken, d.h. Aussagen bzw. Aussageformen, deren Wahrheitsgehalt sich überprüfen lässt:

$$\begin{array}{rr} x = 5 & \textit{Aussageform} \\ 2 + 2 = 4 & \textit{wahre Aussage} \\ 5 + 3 = 1 & \textit{falsche Aussage} \end{array}$$

Eingeschränkte Gültigkeit einer Äquivalenzumformung. Im Idealfall wird durch eine Äquivalenzumformung der Wahrheitsgehalt einer Aussage oder Aussageform nicht verändert. Beispiele solcher Äquivalenzumformungen sind

(1) Man darf zur linken und rechten Seite einer Gleichung dieselbe Zahl hinzuzählen oder abziehen

(2) Man darf die linke und rechte Seite einer Gleichung mit der selben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl dividieren, solange dieses Zahl von Null verschieden ist

(3) Man darf die Exponentialfunktion auf die linke und rechte Seite einer Gleichung anwenden

[16] Das Gleichheitszeichen wir zwischen zwei Terme (z.B. $x^2 = x$ oder $x = 3$) gesetzt, die für sich genommen jeweils keine logische Aussage bilden

Mit diesen Regeln kann man bereits die Gleichung

Gleichung	Lösungsmenge
$2\ln(x)+1=4 \quad \vert -1$	$\{x\in(0;\infty)\,\vert 2\ln(x)+1=4\}$
$\Leftrightarrow 2\ln(x)=3 \quad \vert :2$	$=\{x\in(0;\infty)\,\vert 2\ln(x)=3\}$
$\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{3}{2} \quad \vert \exp$	$=\left\{x\in(0;\infty)\,\vert\,\ln(x)=\frac{3}{2}\right\}$
$\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$	$=\left\{x\in(0;\infty)\,\vert x=e^{\frac{3}{2}}\right\}$
	$=\left\{e^{\frac{3}{2}}\right\}$

lösen. Rechts ist zur Veranschaulichung die zur jeweiligen Gleichung gehörende Lösungsmenge dargestellt. Das Gleichheitszeichen zwischen den verschiedenen Lösungsmengen zeigt an, dass sich die Lösungsmenge bei den Umformungen nicht verändert. Es hat auf der Gleichungsseite seine Entsprechung im Äquivalenzzeichen $\Leftrightarrow$.

Leider sind viele Gleichungsumformungen nur unter Einschränkungen auch Äquivalenzumformungen. Solche *bedingten Äquivalenzumformungen* haben wir in (1.3.3) bereits gesehen: Wir durften dort die Gleichung nur dann mit x^2 multiplizieren, wenn diese Zahl $\neq 0$ ist. Solche Einschränkungen kann (und sollte man über dem Äquivalenzzeichen dokumentieren):

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} && \vert \cdot x^2 \\ \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x &= 1 \end{aligned}$$

Warum diese Einschränkungen wichtig sind, sehen wir, wenn wir die Gleichung etwas anders umformen. Statt mit x^2 multiplizieren wir die Gleichung im ersten Schritt mit x^3. Auch das ist für $x \neq 0$ erlaubt und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{x^2} && \vert \cdot x^3 \\ \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 &= x \\ \Leftrightarrow x &= 0 \lor x = 1 \end{aligned}$$

Scheinbar liefern uns die beiden Rechnungen unterschiedliche Resultate. Während wir im ersten Fall nur $x = 1$ als Lösung erhalten, taucht im zweiten Fall zusätzlich die Lösung $x = 0$ auf. Dies ist möglich, da die Multiplikation mit x^2 oder mit x^3 nur dort die Lösungsmenge unverändert lässt, wo $x \neq 0$ ist.

Um nicht versehentlich auch die *Scheinlösung* in unserer Lösungsmenge aufzuführen, ist es geschickt, die Bedingung $x \neq 0$ über dem Äquivalenzzeichen zu dokumentieren. Damit drücken wir aus, dass die Gleichung vor und nach dem Äquivalenzzeichen nur unter der Annahme, dass $x \neq 0$ ist, dieselbe Lösungsmenge haben. Die Lösung $x = 0$ in der zweiten Rechnung können wir damit als *Scheinlösung* verwerfen. Damit ist das Ergebnis wieder konsistent: Bei beiden Rechnungen ist $x = 1$ die einzige gültige Lösung, da $x = 0$ nicht im Definitionsbereich unserer Ausgangsgleichung liegt.

Beispiel. *Zu Lösen ist die Gleichung*

$$\frac{x^2-4}{x+2} = -4$$

Um diese Gleichung zu lösen, multiplizieren wir zunächst mit $x+2$, was wir nur machen dürfen, wenn die Bedingung $x+2 \neq 0$ erfüllt ist. Danach lösen wir die Gleichung.

$$\begin{array}{rrcll}
 & \frac{x^2-4}{x+2} & = & -4 & |\cdot(x+2) \\
\overset{x+2\neq 0}{\Leftrightarrow} & x^2-4 & = & -4x-8 & |+4x+8 \\
\Leftrightarrow & x^2+4x+4 & = & 0 & |\textit{Mitternachtsformel} \\
\Leftrightarrow & x & = & \frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2} & |\textit{Ausrechnen} \\
\Leftrightarrow & x & = & -2 & \\
\textit{CHECK:} & -2+2\neq 0? & & \textit{nein} \Rightarrow \textit{Scheinlösung} &
\end{array}$$

Am Ende unserer Rechnung, d.h. in der vorletzten Zeile haben wir das Ergebnis $x=-2$ erhalten. Für dieses Ergebnis müssen wir nun in einem abschliessenden "Check" überprüfen, ob eine der Bedingungen verletzt wurde, durch die die vorher gemachten Äquivalenzumformungen eingeschränkt wurden: In unserem Fall haben wir nur eine Bedingung, nämlich $x+2\neq 0$. Die Richtigkeit unserer Rechnung ist also nur für diejenigen Resultate garantiert, die der Bedingung $x+2\neq 0$ genügen.

Ob das von uns gefundene Resultat -2 den Check besteht, können wir überprüfen, indem wir in der Bedingung $x+2\neq 0$ die Variable x durch -2 ersetzen. Da die daraus resultierende Aussage $-2+2\neq 0$ falsch ist, handelt es sich bei der von uns gefundenen Lösung um eine Scheinlösung*.*

In der Tat ist $x=-2$ nicht einmal in der Definitionsmenge der Ausgangsgleichung. Die Lösungsmenge ist somit die leere Menge $\emptyset$.

1.3.3. Grundlegende Umformungsregeln für Gleichungen. Wenn man sehr sorgfältig arbeitet, lassen sich alle Äquivalenzumformungen für Gleichungen auf die folgenden Grundregeln zurückführen:

(1) Man darf zur linken und rechten Seite einer Gleichung einen beliebigen Term hinzuzählen oder diesen abziehen:

$$\begin{array}{rrcll}
 & T_1(x) & = & T_2(x) & |+S(x) \\
\Leftrightarrow & T_1(x)+S(x) & = & T_2(x)+S(x) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll}
 & T_1(x) & = & T_2(x) & |-S(x) \\
\Leftrightarrow & T_1(x)-S(x) & = & T_2(x)-S(x) &
\end{array}$$

(2) Man darf die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einem beliebigen Term multiplizieren oder durch diesen Term dividieren, sofern dieser Term nicht Null wird:

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \mid \cdot S(x) \\ \overset{S(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} & T_1(x)\cdot S(x) & = & T_2(x)\cdot S(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \mid : S(x) \\ \overset{S(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} & \frac{T_1(x)}{S(x)} & = & \frac{T_2(x)}{S(x)} & \end{array}$$

(3) Man darf eine *injektive* Funktion auf beide Seiten einer Gleichung anwenden, sofern beide Seiten im Definitionsbereich DB_f dieser Funktion liegen

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \mid f(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_1(x),T_2(x)\in DB_f}{\Leftrightarrow} & f(T_1(x)) & = & f(T_2(x)) & \end{array}$$

(4) Man darf die Terme der linken und rechten Seite der Gleichung einzeln vereinfachen, wenn sich dadurch der Definitionsbereich der Gleichung nicht verändert.

Aufgabe 29.

Lösen Sie die folgende Gleichung

$$\ln\left(x^2-1\right) = \ln(-2x-2) \quad \mid \exp(\cdot)$$

ohne vorher die Definitionsmenge zu bestimmen.

Lösungweg

Wie wir in der vorangegangenen Aufgabe gesehen haben, müssen wir bei der Umsetzung der Grundregeln sehr vorsichtig vorgehen. Vor allem dürfen wir, um die Gültigkeit der ersten drei Regeln nicht zu gefährden, in den entsprechenden Arbeitsschritt keine unüberlegten Umformungen der neu entstandenen Terme durchführen.

Beispiel. *Würden wir in der folgenden Rechnung den ersten Rechenschritt (Regel 1) sofort mit der darauffolgenden Vereinfachung der Terme kombinieren, so wäre das Resultat falsch, da in diesem Fall die Bedingung $x \neq 0$ verloren gehen würde:*

$$\begin{array}{crcll} & x+\frac{1}{x} & = & \frac{1}{x} & \mid -\frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow & x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x} & = & \frac{1}{x}-\frac{1}{x} & \mid \textit{vereinfachen} \\ \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} & x & = & 0 & \\ \textit{CHECK} & 0\neq 0 & ? & \textit{nein} \Rightarrow \textit{Scheinlösung} & \end{array}$$

1.3.4. Fallunterscheidungen. Wir haben im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass das Umformen von Gleichungen dadurch erschwert wird, dass Gleichungsumformungen gelegentlich nur in einem eingeschränkten Bereich zu einer äquivalenten Gleichung führen. In den vorigen Beispielen, war dies immer dann der Fall, wenn die Ausgangsgleichung für eine bestimmte Belegung der Variable x nicht definiert war und die umgeformte Gleichung einen grösseren Definitionsbereich hatte.

Auch wenn dieser Fall sehr häufig ist, fallen nicht alle Einschränkungen von Äquivalenzumformungen in diese Kategorie:

Beispiel.

$$\begin{array}{rrcll} & x^2 & = & x & \mid : x \\ \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} & x & = & 1 & \\ \textit{CHECK} & 1 \neq 0? & & \textit{ja}\Rightarrow\textit{x=1 ist Lösung} & \end{array}$$

In diesem Beispiel sind alle auftretenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$ definiert und der nachgelagerte Check zeigt uns, dass die Bedingung $x \neq 0$ von der Lösung $x = 1$ nicht verletzt wird.

Wir haben dieses Mal aber nicht alle Lösungen gefunden. Wie man leicht überprüfen kann, ist nämlich auch $x = 0$ eine Lösung. Anders als in den vorangegangenen Beispielen filtert die Bedingung $x \neq 0$ in diesem Beispiel also keine Definitionslücken heraus, sondern die Bedingung ist erforderlich, weil der Rechenschritt "Teilen durch x" für $x = 0$ nicht erlaubt ist.

Um das vorangegangene Beispiel korrekt zu lösen, benötigen wir eine *Fallunterscheidung*: Der *Hauptfall*, $x \neq 0$ entspricht dabei der oben durchgeführte Rechnung und umfasst alle Belegungen der Variable x, die mit den über den Äquivalenzzeichen dokumentierten Bedingungen (in diesem Fall nur die Bedingung $x \neq 0$) kompatibel sind. Daneben gibt einen oder mehrere *Sonderfälle*, für diejenigen Belegungen von x, die zwar auf Grund der Definitionsmenge erlaubt sind, aber die vom Hauptfall noch nicht abgedeckt wurden.

Im obigen Beispiel bleibt als Sonderfall damit nur die Belegung $x = 0$ übrig. Da in diesem Sonderfall nur eine einzige Zahl enthalten ist, erübrigt sich eine längere Rechnung. Wir können diese Zahl einfach durch *Einsetzen* in die Ausgangsgleichung *testen*: Da die Aussage

$$0^2 = 0$$

wahr ist, ist $x = 0$ eine Lösung der Gleichung und die Lösungsmenge lautet $\{0, 1\}$. Sauber aufgeschrieben hätte die Lösung folgender massen ausgesehen:

- *Aufgabe:* Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung
$$x^2 = x$$
- *Lösung:*
$$\begin{aligned} x^2 &= x && |:x \\ \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad x &= 1 \end{aligned}$$
check $1 \neq 0?$ wahr ⇒x=1 ist Lösung

Sonderfall $x = 0$: Die Aussage

$0^2 = 0?$ wahr ⇒x=0 ist Lösung
- *Resultat:* Die Gleichung hat die beiden Lösungen $x = 0$ und $x = 1$.

Aufgabe 30.

Lösen Sie die Gleichung
$$\sqrt{x^2-10} = \sqrt{x+2}$$

Ergebnis

$x = 4$ ist die einzige Lösung.

Lösungweg

Da es häufig vorkommt, dass Sonderfälle dadurch entstehen, dass die Gleichungsumformung eine Vergrösserung der Definitionsmenge bewirkt, überprüft man diese Situation meist sofort und spart sich so die spätere Behandlung dieser Fälle. Die folgende Dokumentation des Lösungsweges ist damit ideal:

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{x^2-10} &=& \sqrt{x+2} & |\cdot^2_{|\mathbb{R}+} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x^2-10}\right)^2 &=& \left(\sqrt{x+2}\right)^2 & |\text{Vereinfachen} \\ \overset{x^2-10\geq 0, x+2\geq 0, \text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & x^2-10 &=& x+2 & |-x-2 \\ \Leftrightarrow & x^2-x-12 &=& 0 & |\text{Mitternachtsformel} \\ \Leftrightarrow & x &=& \frac{+1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 12}}{2} = \frac{1\pm 7}{2} & \\ \Leftrightarrow & x = 4 &\vee& \cancel{x=-3} & \\ & & & & \\ \text{CHECK} & \surd & & \text{Scheinlösung} & \end{array}$$

Die Gleichung hat nur die Lösung $x = 4$.

Beachten Sie bitte, dass wir im vorangegangenen Beispiel die Gleichung gelöst haben, ohne jemals explizit nach der Definitionsmenge zu suchen. Die Untersuchung der Definitionsmenge machen wir vielmehr “nebenher”, indem wir über den Äquivalenzzeichen dokumentieren, welche Einschränkungen beim Umformen der Gleichung aufgetreten sind. Dieses Vorgehen ist günstig, da bei komplizierteren Aufgaben die Bestimmung der Definitionsmenge meist schwieriger ist, als das Bestimmen der Lösungsmenge selbst.

Aufgabe 31.

Lösen Sie die folgende Gleichung

$$\sqrt{x^3 - 10x} = \sqrt{x^2 + 2x}$$

Ergebnis

Die Lösungsmenge lautet $\{-3, 0, 4\}$.

Lösungweg

1.3.5. Regeln zum Umformen von Gleichungen. Die in Abschnitt 1.3.3 beschriebenen Umformungsregeln sind fehleranfällig. Deshalb lohnt es sich, den Spezialfall der elementaren Funktionen explizit zu behandeln:

(1) Regel zum Wegschaffen einer positiven geraden ganzzahligen Potenz g

$$\begin{aligned} & & (T_1(x))^g &= T_2(x) && |\sqrt[g]{\cdot}\text{ injektiv} \\ &\overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) &= \pm\sqrt[g]{T_2(x)} \end{aligned}$$

(2) Regel zum Wegschaffen einer positiven ungeraden ganzzahligen Potenz u

$$\begin{aligned} & & (T_1(x))^u &= T_2(x) && |\sqrt[u]{\cdot}\text{ injektiv} \\ &\overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst Sonderfall}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) &= \sqrt[u]{T_2(x)} \end{aligned}$$

Sonderfall $T_2(x) < 0$

$$-T_1(x) = \sqrt[u]{-T_2(x)}$$

In folgendem Spezialfall benötigt man keinen Sonderfall:

$$\begin{aligned} & & (T_1(x))^u &= (T_2(x))^u && |\sqrt[u]{\cdot}\text{ injektiv} \\ &\Leftrightarrow & T_1(x) &= T_2(x) \end{aligned}$$

(3) Regel zum Wegschaffen einer nicht-ganzzahligen positiven Potenz p

$$\begin{aligned} & & (T_1(x))^p &= T_2(x) && |(\cdot)^{\frac{1}{p}}\text{ injektiv} \\ &\overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) &= (T_2(x))^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

(4) Regel zum Wegschaffen einer Quadratwurzel (andere Wurzeln sollten als Potenz geschrieben und mit der der vorangegangenen Regel behandelt werden)

$$\begin{aligned} & \sqrt{T_1(x)} &=& T_2(x) \qquad | \cdot^2_{|\mathbb{R}^+} \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0, \text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) &=& (T_2(x))^2 \end{aligned}$$

(5) Regel zum Wegschaffen eines Logarithmus

$$\begin{aligned} & \ln(T_1(x)) &=& T_2(x) \quad | \exp(\cdot) \text{ injektiv} \\ \Leftrightarrow & T_1(x) &=& e^{T_2(x)} \end{aligned}$$

Vorsicht bei Gleichungen vom Typ:

$$\begin{aligned} & \ln(T_1(x)) &=& \ln(T_2(x)) \quad | \exp(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)> 0, \text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) &=& T_2(x) \end{aligned}$$

(6) Regel zum Wegschaffen der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} & e^{T_1(x)} &=& T_2(x) \qquad | \ln(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)> 0, \text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) &=& \ln(T_2(x)) \end{aligned}$$

1.4. Elementare Funktionen: Trigonometrie

1.4.1. Die trigonometrischen Funktionen.

Lernziele:

- *Sie kennen den Unterschied zwischen dem Grad- und dem Bogenmass eines Winkels*
- *Sie wissen was kartesische und was polare Koordinaten sind*
- *Sie kennen die Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens und einige wichtige Rechengesetze*
- *Sie kennen die Graphen der trigonometrischen Funktionen und ihre wichtigsten Funktionswerte*

Die *trigonometrischen Funktionen* sind die ersten elementaren Funktionen, die sich nicht direkt aus den Grundrechenarten ableiten lassen. Sie lösen geometrische Probleme und werden entsprechend definiert. Um allerdings zur Definition dieser Funktionen zu gelangen, benötigen wir einige Vorarbeiten.

Winkel im Bogenmass. Die Messung von Winkeln im *Gradmass*, bei der ein voller Kreis einem Winkel von 360° entspricht, ist historisch bedingt und recht willkürlich. Warum soll der rechte Winkel gerade 90° und nicht etwa 100° betragen (was übrigens in der Vermessung üblich ist)? Eine natürlichere Methode der Winkelmessung wäre es, einen Kreis mit einem gewissen Radius r um den Scheitel des Winkels zu zeichnen und dann die Länge des durch den Winkel herausgeschnittenen Kreisbogens b mit seiner Grösse in Verbindung zu bringen. Da die Länge des Kreisbogens natürlich proportional zu r ist, wäre dies kein gutes Winkelmass. Das Verhältnis zwischen der Länge des vom Winkel ausgeschnittenen Kreisbogens b und dem Radius r des

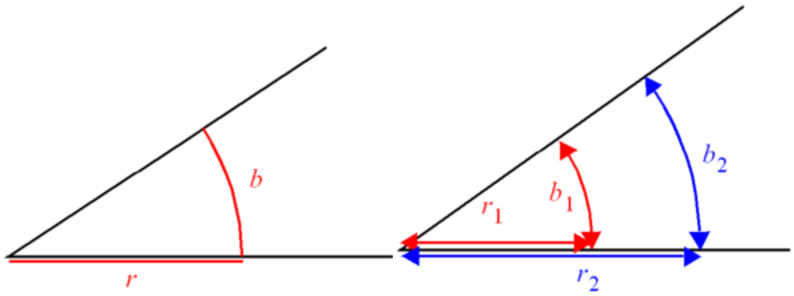


Abbildung 12. Messung eines Winkels im Bogenmass. Anstelle einer Winkeleinteilung die dem Vollkreis $360°$ zumisst, wird im Bogenmass die Grösse eines Winkels mit dem Verhältnis zwischen Länge des vom Winkel aus einem Kreis mit Radius r ausgeschnittenen Kreisbogens b zum Radius des Kreises r, d.h. mit $\frac{b}{r}$ identifiziert.

Kreises $\frac{b}{r}$ ist dagegen unabhängig vom gewählten Kreisradius und hängt ausschliesslich vom Winkel ab. Dieses Verhältnis entspricht genau der Grösse des Winkel im Bogenmass.

Der Zusammenhang zwischen Gradmass und *Bogenmass* ist mit dieser Definition recht einfach. Einem Winkel von $360°$ im Gradmass entspricht ein Vollkreis, welcher bei einem Radius r einen Umfang von $2\pi r$ besitzt. Der gleiche Winkel hat daher im Bogenmass die Grösse 2π. Auf ähnliche Weise sieht man, dass ein rechter Winkel dem Viertel eines vollen Kreisbogens entspricht. Der Winkel $90°$ hat also das Bogenmass $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Oder anders ausgedrückt: der einem $\frac{1}{4}$-Kreis entsprechende Winkel ist $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.

Allgemein lassen sich Winkel von Gradmass dadurch in das Bogenmass umrechnen, dass man sie mit $\frac{2\pi}{360}$ multipliziert. Umgekehrt lässt sich das Bogenmass durch eine Multiplikation mit $\frac{360}{2\pi}$ ins Gradmass zurück rechnen:

$$\text{Winkel im Gradmass} \quad \underset{\cdot\frac{360°}{2\pi}}{\overset{\cdot\frac{2\pi}{360°}}{\rightleftarrows}} \quad \text{Winkel im Bogenmass}$$

Bemerkung. *Es hat sich in der Mathematik durchgesetzt, Winkel im Bogenmass zu messen. Bei der Definition des Sinus und des Kosinus werden wir deshalb annehmen, dass das Argument dieser Funktionen im Bogenmass vorliegt. Dasselbe gilt auch in der Informatik. Der Java-Befehl java.lang.Math.sin(90) berechnet nicht den Sinus des rechten Winkels, sondern den Sinus des Winkels 90 im Bogenmass. Dieser Winkel entspricht im Gradmass aber einem Winkel von*

$$\frac{360}{2\pi} \cdot 90 \approx 5156.6°$$

Der Befehl java.lang.Math.sin(90) ergibt somit nicht den gewünschten Wert 1, sondern 0.893997.

Aufgabe 32.

Wie lautet der Java-Befehl, mit dem Sie den Sinus von $90°$ berechnen.

Lösungweg

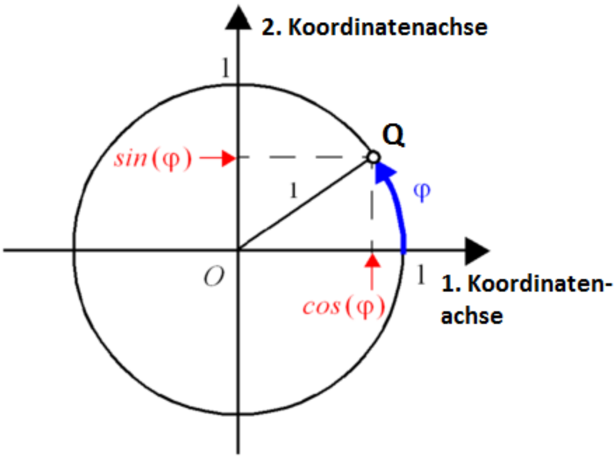


Abbildung 13.

Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis. In Abbildung 13 ist der Punkt Q in ein zweidimensionales Koordinatensystem eingezeichnet. Dieser Punkt befindet sich auf einem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung[17] und auf einer Geraden durch den Ursprung, welche mit der 1. Koordinatenachse einen Winkel von φ einschliesst. Diese beiden Informationen, d.h. der Abstand des Punktes vom Ursprung und die Grösse des Winkel zwischen der Verbindungsgerade von Q mit dem Ursprung und der ersten Koordinatenachse, legen die Position des Punktes Q eindeutig fest und fixieren damit ebenfalls dessen kartesische Koordinaten. Diese Ausgangslage erlaubt uns die trigonometrischen Funktionen zu definieren:

Definition 33. Zu einem beliebigen, im Bogenmass gegebenen Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ konstruieren wir einen Punkt auf dem *Einheitskreis* (=Kreis mit Radius 1 um den Ursprung) eines 2-dimensionalen Koordinatensystem, indem wir die erste Koordinatenachse im mathematisch positiven Drehsinn (=Gegenuhrzeigersinn) um den Winkel φ drehen und den Schnittpunkt Q der so entstandenen Halbgerade mit dem Einheitskreis betrachten (siehe Abbildung 13). Die 1. kartesische Koordinate des so konstruierten Punktes Q nennen wir *Kosinus* des Winkels φ, die 2. kartesische Koordinate des Punktes Q *Sinus* des Winkels φ und das Verhältnis zwischen dem Wert der 2. kartesischen Koordinate und dem Wert der ersten kartesischen Koordinate des Punktes Q *Tangens* von φ.

Da die Koordinaten des Punktes Q stets zwischen -1 und 1 liegen, ergibt sich für die Kosinusfunktion

$$\cos \quad : \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \to [-1;1] \\ \varphi & \mapsto \text{1. Koordinate des in der obigen Definition beschriebenen Punktes } Q \end{cases}$$

für die Sinusfunktion

$$\sin \quad : \quad \begin{cases} \mathbb{R} & \to [-1;1] \\ \varphi & \mapsto \text{2. Koordinate des in der obigen Definition beschriebenen Punktes } Q \end{cases}$$

[17] einen Kreis mit Radius 1 um den Ursprung nennt man auch *Einheitskreis*.

und für die Tangensfunktion

$$\tan \quad : \quad \begin{cases} \{\varphi \in \mathbb{R} | \cos(\varphi) \neq 0\} & \to \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \end{cases}$$

Aufgabe 34.

Überzeugen Sie sich davon, dass durch Definition 33 tatsächlich Funktionen definiert werden, in dem Sie mit Hilfe der obigen Vorschrift den Wert von $\sin(1)$ auf zwei Nachkommastelle genau bestimmen. Verwenden Sie dazu das folgende Werkzeug.

Ergebnis

$\sin(1) \approx 0.84$

Lösungweg

Winkel (Gradmass)	0°	30°	45°	60°	90°
Winkel (Bogenmass)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Kosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tabelle 1. Sinus- und Kosinuswerte einiger Winkel im Gradmass (links) und im Bogenmass (rechts)

Auch wenn Definition Definition 33 jedem Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ einen eindeutigen Sinus- und Kosinuswert zuweist, eignet sich die Definition nicht für die exakte Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten. Für einige wenige Winkel (siehe Tabelle 1 auf Seite 61) reicht die Definition aber aus, die entsprechenden Funktionswerte präzise zu bestimmen: Für den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$ liegt der Punkt Q z.B. auf der 1. Winkelhalbierenden des Koordinatensystems, woraus wir schliessen können, dass in diesem Fall die 1. und 2. Koordinate von Q identisch sind. Mit anderen Worten gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Da wir ausserdem den Abstand des Punktes Q vom Nullpunkt kennen (Q liegt auf einem Kreis mit Radius 1), folgt aus dem Satz des Pythagoras, dass die Summe der Quadrate der 1. und 2.

Koordinate 1 ergeben müssen. Für den Sinus und Kosinus des Winkels $\frac{\pi}{4}$ gilt damit[18]

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da wir ausserdem wissen, dass der Punkt Q im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegt, muss der gesuchte Sinuswert positiv sein und die obige Gleichung lässt sich eindeutig auflösen:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

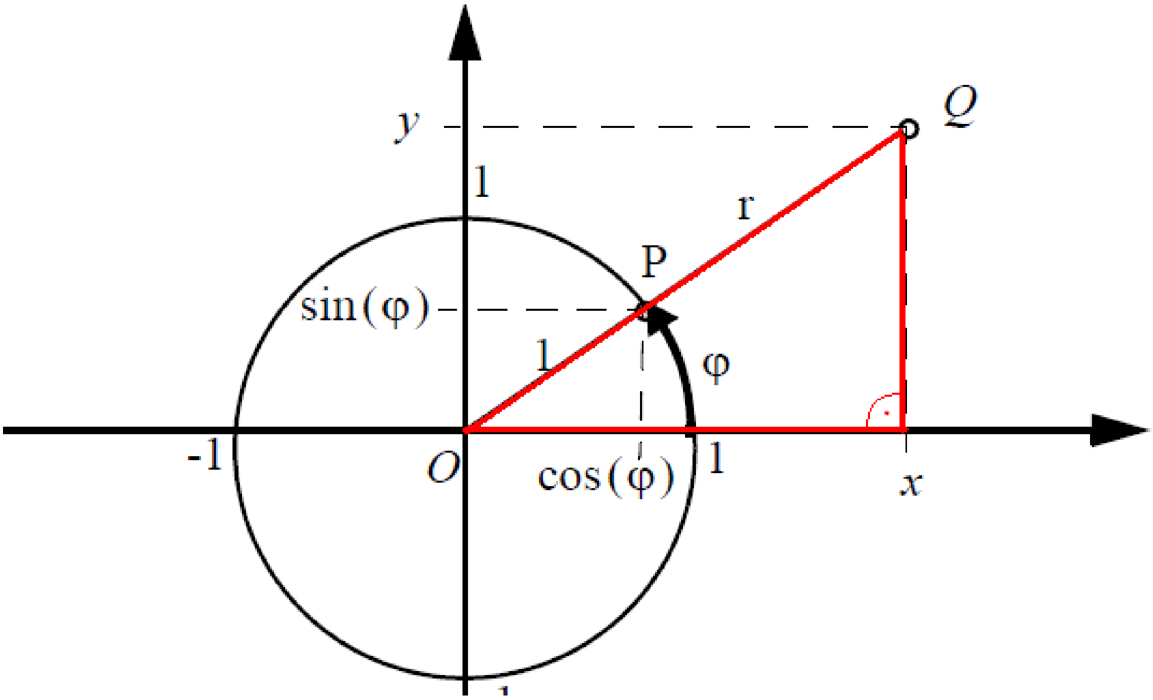


Abbildung 14. Kartesische und polare Koordinaten des Punktes Q

Kartesische und polare Koordinaten. Wiederholen wir die vorangegangene Konstruktion für einen Punkt Q der nicht auf dem Einheitskreis sondern auf einem Kreis mit Radius r um den Ursprung liegt, so wird die Position des Punktes Q durch die Angabe des Winkels φ wieder

[18]Durch die Angabe eines Exponenten direkt hinter dem Funktionsnahmen meinen wir, dass wir den Funktionswert mit dem entsprechenden Exponenten potenzieren müssen, d.h. es gilt

$$\sin^2(x) = (\sin(x))^2$$

wobei wir in der neuen Schreibweise eine Klammer einsparen.

eindeutig festgelegt (siehe Abbildung 14). Auf Grund des Strahlensatzes lassen sich die kartesischen Koordinaten des Punktes Q mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen bestimmen:

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \tag{1.4.1}$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi) \tag{1.4.2}$$

Durch die Angabe der Daten r und φ lässt sich somit die Position eines Punkt in einem zweidimensionalen Koordinatensystems genauso eindeutig bestimmen, wie durch die Angabe seiner kartesischen Koordinaten. Aus diesem Grund nennen wir r und φ in Zukunft die *polaren Koordinaten* von Q.

Trigonometrische Funktionen im Dreieck. Das in Abbildung 14 eingezeichnete rechtwinklige rote Dreieck erlaubt für Winkel $\varphi < \frac{\pi}{2}$ eine weitere Deutung der trigonometrischen Funktionen: Nach (1.4.2) ist $\sin(\varphi)$ nichts anderes als das Verhältnis von *Gegenkathete* zu *Hypotenuse* in einem rechtwinkligen Dreieck. Analog ist (1.4.1) $\cos(\varphi)$ das Verhältnis zwischen *Ankathete* und Hypotenuse.

Fundamentalbeziehungen. Die Fundamentalbeziehungen[19],

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ 1 &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \end{aligned}$$

sind die wichtigsten Rechengesetze in der Trigonometrie. Sie erlauben es, eine Formel, die verschiedene trigonometrische Funktionen enthält, so umzuformen, dass in ihr nur noch ein einziger trigonometrischer Funktionstyp vorkommt. Dies ist beim Gleichungslösen häufig der erste Schritt zum Erfolg, da sich dann die verbleibende trigonometrische Funktionen durch eine Substitution aus der Problemstellung “entfernen lassen”:

Beispiel 35. *Bei der folgenden Gleichung mit trigonometrischen Funktionen handelt es sich eigentlich nur um eine (kompliziert geschriebene) quadratische Gleichung*

Beispiel.

$$\begin{aligned} && \tan(x) \cdot \sin(x) &= \cos(x) & \\ &\Leftrightarrow & \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \sin(x) &= \cos(x) & | \cdot \cos(x) \\ &\overset{\cos(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} & \sin^2(x) &= \cos^2(x) & \\ &\Leftrightarrow & \sin^2(x) &= 1 - \sin^2(x) & |Substitution\ u := \sin(x) \\ &\overset{u:=\sin(x)}{\Leftrightarrow} & u^2 &= 1 - u^2 & \end{aligned}$$

[19] die erste Fundamentalbeziehung ist nichts anderes als die Definition des Tangens. Die zweite Fundamentalbeziehung folgt, wenn man den Satz des Pythagoras auf ein Dreieck mit der Hypotenusenlänge 1 anwendet.

Durch die Fundamentalbeziehungen konnten wir unser Ausgangsproblem also in eine quadratische Gleichung überführen, welche wir bequem lösen können:

$$\begin{array}{rrcll} & u^2 & = & 1-u^2 & \mid +u^2 \\ \Leftrightarrow & 2u^2 & = & 1 & \mid :2 \\ \Leftrightarrow & u^2 & = & \frac{1}{2} & \mid \sqrt{\cdot} \\ \Leftrightarrow & u & = & \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \end{array}$$

Nachdem wir die Lösungen der quadratischen Gleichung bestimmt haben, können wir nun durch eine Rücksubstitution versuchen, unser Ausgangsproblem zu lösen. Die verbleibende Aufgabe lautet damit, alle Zahlen x zu bestimmen, die der Bedingung

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

oder der Bedingung

$$\sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

genügen. Ein Blick in Tabelle 1 auf Seite 61 zeigt uns, dass z.B. $x = \frac{\pi}{4}$ eine Lösung unserer Gleichung ist. Es gibt aber noch weitere Lösungen, die wir erst nach den folgenden Abschnitten bestimmen wollen.

Quadrantenbeziehungen. Die Quadrantenbeziehungen folgen unmittelbar daraus, dass sich $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$ als kartesische Koordinaten eines Punktes Q interpretieren lassen, welcher von der 1. Koordinatenachse aus gesehen unter dem Winkel φ auf dem Einheitskreis zum liegen kommt. Da eine Vergrösserung von φ um 2π die Position des Punktes Q unverändert lässt, müssen auch die entsprechenden Sinus- und Kosinuswerte unverändert bleiben. Man sagt dazu: Sinus und Kosinus sind *periodische Funktionen* mit *Periode* 2π.

Auf ähnliche Weise sieht man, dass eine Vergrösserung des Winkels φ um π dazu führt, dass der Punkt Q am Ursprung gespiegelt wird und somit die Koordinaten von Q ihr Vorzeichen wechseln, also

$$\begin{aligned} \cos(\varphi+\pi) &= -\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi+\pi) &= -\sin(\varphi) \end{aligned}$$

Schliesslich lassen sich durch die Spiegelung des Punktes Q an der 1. Koordinatenachse, der 2. Koordinatenachse und der 1. Winkelhalbierenden noch weitere Beziehungen herleiten, die man mit den obigen Beziehungen zusammenfassend als *Quadrantenbeziehungen* bezeichnet.

Diese lauten

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi + 2\pi \qquad \varphi \rightsquigarrow \varphi + \pi \qquad \varphi \rightsquigarrow -\varphi \qquad \varphi \rightsquigarrow \pi - \varphi \qquad \varphi \rightsquigarrow \tfrac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi) = -\sin(\varphi + \pi) = -\sin(-\varphi) = \sin(\pi - \varphi) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi) = -\cos(\varphi + \pi) = \cos(-\varphi) = -\cos(\pi - \varphi) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - \varphi)$$

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi + 2\pi) = \tan(\varphi + \pi) = -\tan(-\varphi) = -\tan(\pi - \varphi) = \cot(\tfrac{\pi}{2} - \varphi)$$

Eine Folgerung der Quadrantenbeziehungen ist, dass Sinus und Tangens ungerade Funktionen sind, während der Kosinus gerade ist. Ausserdem lassen sich mit Hilfe von Tabelle 1 auf Seite 61 und den Quadrantenbeziehungen, lassen sich die trigonometrischen Funktionen bereits gut zeichnen (siehe Abbildung 15).

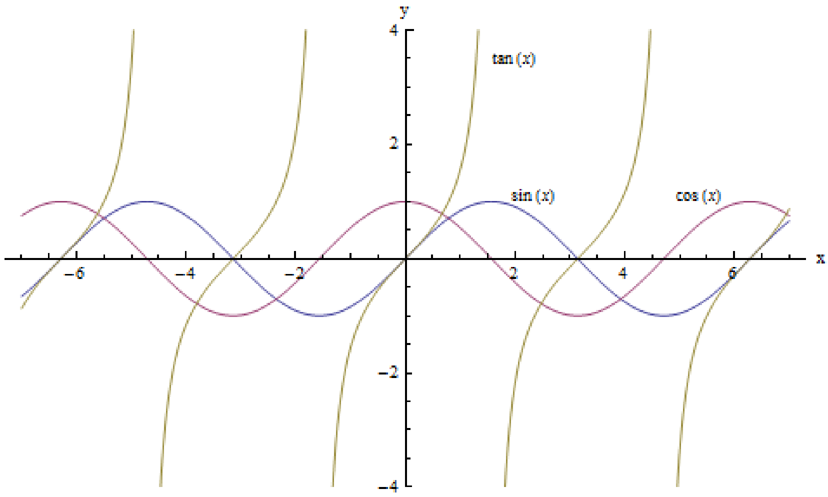


Abbildung 15. Graph des Sinus, Kosinus und Tangens. Man sieht sehr gut die Periodizität der Funktionen, sowie die Spiegelsymmetrie, die sich daraus ergibt, dass der Sinus und der Tangens ungerade sind (punktsymmetrisch zum Ursprung) und der Kosinus gerade ist (Spiegelsymmetrie zur Ordinate).

Beispiel 36. *Die Quadrantenbeziehungen spielen eine wichtige Rolle beim Gleichungslösen. Wir sind damit z.B. in der Lage das Beispiel 35 abzuschliessen. Wir haben bisher gelernt, dass die Lösungsmenge der Gleichung*

$$\tan(x) \cdot \sin(x) = \cos(x)$$

durch die Menge

$$\mathbb{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$$

beschrieben werden kann und dass $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{L}$ *liegt, da* $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

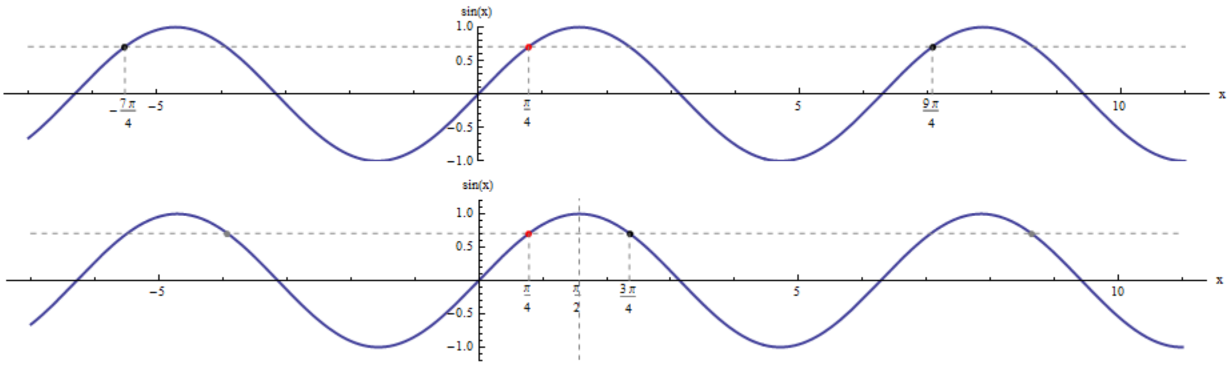


Abbildung 16. Graphische Konstruktion aller Lösungen der Gleichung

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Aufgrund der Quadrantenbeziehungen

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(x + 2\pi) \\ &= \sin(\pi - x) \end{aligned}$$

müssen mit $\frac{\pi}{4}$ *auch die Zahlen* $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ *und* $\pi - \frac{\pi}{4}$ *Lösungen der Gleichung*

$$\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \tag{1.4.3}$$

sein. Weitere Lösungen findet man nun durch wiederholtes Anwenden der Periodizitätsbedingung. Daraus folgt, dass neben $\frac{\pi}{4}$ *auch die Zahlen*

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

und neben $\pi - \frac{\pi}{4}$*auch die Zahlen*

$$x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

diese Gleichung lösen (siehe Abbildung 16). Aus dieser Abbildung entnimmt man auch, dass man damit alle Lösungen der Gleichung (1.4.3) *gefunden hat. Es gilt also*

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \left| \sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \right. \right\} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi \,|k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,|k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Aus der Quadrantenbeziehung

$$\sin(x) = -\sin(-x)$$

folgen nun auch die Lösungen von $\left\{x \in \mathbb{R} \middle| \sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$*. Diese Quadrantenbeziehung besagt nämlich, dass jede Gegenzahlen der bereits gefundenen Lösungen die Gleichung*

$$\sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

löst, womit wir den zweiten Teil der Lösungsmenge bestimmt haben. Es gilt also

$$\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,|k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Additionstheoreme und Doppelwinkeltheoreme. Neben den Fundamentalbeziehungen für trigonometrische Funktionen sind die sog. *Additionstheoreme* und die davon abgeleiteten *Doppelwinkeltheoreme* wichtige Werkzeug zum Umformen von trigonometrischen Ausdrücken.

Die Additionstheoreme lauten

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \end{aligned}$$

wobei diese Formeln so zu lesen sind, dass entweder immer die oberen oder immer die untere Symbole miteinander kombiniert werden.

Die Doppelwinkeltheoreme sind ein Spezialfall der Additionstheoreme ($y = x$) und lauten

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

Die Doppelwinkeltheoreme kommen oft versteckt und in Kombination mit dem Satz von Pythagoras

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

vor (beachten Sie den Unterschied zwischen dem Doppelwinkeltheorem des Kosinus und dem Satz des Pythagoras) und erlauben es, Binome aus trigonometrischen Funktionen umzuformen:

$$\begin{aligned} (\sin(x) + \cos(x))^2 &= \sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 1 + \sin(2x) \\ (\sin(x) - \cos(x))^2 &= \sin^2(x) + \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x) \\ (\sin(x) - \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) &= \sin^2(x) - \cos^2(x) = -\cos(2x) \end{aligned}$$

Diese ist oft beim Kürzen von Brüchen nützlich:

Beispiel.

$$\begin{aligned} \frac{(\cos(x) - \sin(x)) \cdot (1 + 2\cos(x)\sin(x))}{\cos(2x)} &= \frac{(\cos(x) - \sin(x)) \cdot \left(\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\cos(x)\sin(x)\right)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \\ &= \frac{(\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x))^2}{(\cos(x) - \sin(x)) \cdot (\cos(x) + \sin(x))} = \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

1.4.2. Die Arcusfunktionen.

Lernziele:

- *Sie kennen die Arcusfunktionen*
- *Sie kennen den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und Arcusfunktionen*
- *Sie kennen die Graphen der Arcusfunktionen*

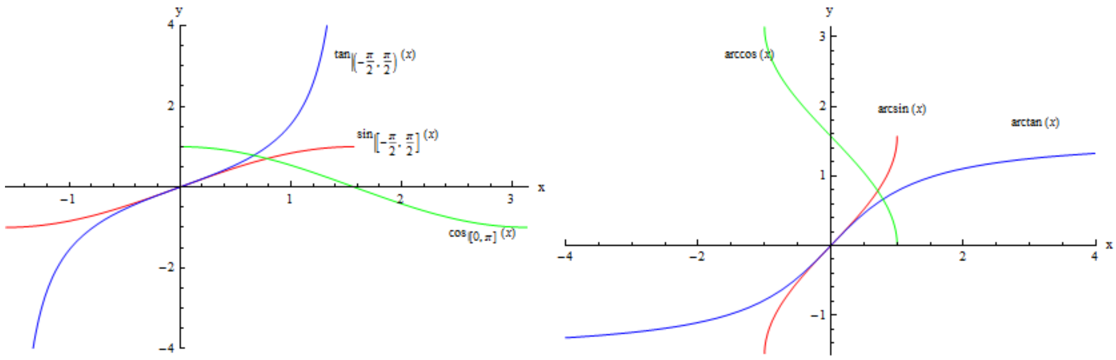


Abbildung 17. Die trigonometrischen Funktionen (links) eingeschränkt auf einen Bereich, indem sie injektiv sind und die zugehörigen Arcusfunktionen als Umkehrfunktionen der links dargestellten Funktionen.

Die *Arcusfunktionen* sind im Grunde nichts anderes als die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

$$\cos \;:\; \begin{cases} \mathbb{R} & \to [-1;1] \\ x & \mapsto \cos(x) \end{cases}$$

$$\sin \;:\; \begin{cases} \mathbb{R} & \to [-1;1] \\ x & \mapsto \sin(x) \end{cases}$$

$$\tan \;:\; \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{cases}$$

Allerdings müssen wir dabei zunächst das Problem lösen, dass die trigonometrischen Funktionen zwar surjektiv, aber auf Grund ihrer Periodizität nicht injektiv sind (siehe auch Abbildung 15). Um die Arcusfunktionen definieren zu können, müssen wir deshalb die trigonometrischen Funktionen zunächst “injektiv machen”, indem wir ihren Definitionsbereich durch *Restriktion* einschränken (siehe Abschnitt 1.2.3).

Genauer definieren wir die Arcusfunktionen als Umkehrfunktionen der Funktionen

$$\cos_{|[0;\pi]}$$
$$\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$$
$$\tan_{|(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})}$$

Es gilt also

- arccos (x) ist diejenige Zahl zwischen 0 und π deren Kosinus x ergibt:

$$\text{arccos}: \begin{cases} [-1;1] & \to [0;\pi] \\ x & \mapsto \text{Lösung } y \in [0,\pi] \text{der Gleichung } \cos(y) = x \end{cases}$$

- arcsin (x) ist diejenige Zahl zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ deren Sinus x ergibt:

$$\text{arcsin}: \begin{cases} [-1;1] & \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto \text{Lösung } y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{der Gleichung } \sin(y) = x \end{cases}$$

- arctan (x) ist diejenige Zahl zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ deren Tangens x ergibt:

$$\text{arctan}: \begin{cases} \mathbb{R} & \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \\ x & \mapsto \text{Lösung } y \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \text{der Gleichung } \tan(y) = x \end{cases}$$

1.5. Eigenschaften von Funktionen

Lernziele:

- *Sie kennen die wichtigsten mathematischen Funktionseigenschaften*
- *Sie können diese*

1.5.1. Zusammenfassung der wichtigsten Funktionseigenschaften. Um das Verhalten von Funktionen besser beschreiben zu können, haben wir verschiedene Funktionseigenschaften kennengelernt. Wir fassen diese hier noch einmal zusammen. Wir bezeichnen dabei mit $DB\,(f)$ jeweils den Definitionsbereich der Funktion f.

Definition 37. Funktionseigenschaften

- Eine Funktion f heisst *gerade*, wenn für alle $x \in DB(f)$ auch $-x \in DB(f)$ ist und gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

  Gerade Funktionen sind spiegelsymmetrisch zur Ordinatenachse. Prototypen gerader Funktionen sind die Potenzen mit geradem ganzzahligem Exponenten.

- Eine Funktion f heisst *ungerade*, wenn für alle $x \in DB(f)$ auch $-x \in DB(f)$ ist und gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

  Ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung. Prototypen gerader Funktionen sind die Potenzen mit ungeradem ganzzahligem Exponenten.

- Eine Funktion f heisst $p-$*periodisch*, wenn für alle $x \in DB(f)$ auch $x+p$ und $x-p$ im Definitionsbereich der Funktion liegen und ausserdem

$$f(x+p) = f(x)$$

gilt. Die Zahl p heisst die *Periode der Funktion* f. Der Graph einer periodischen Funktion wiederholt sich in regelmässigen Abständen. Prototypen periodischer Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen (aber nicht die Arcusfunktionen!).

- Eine Funktion f heisst *injektiv*, wenn für alle $x, y \in DB(f)$ gilt

  $$x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$$

  Injektive Funktionen nehmen jeden Funktionswert nur einmal an. Die Injektivität einer Funktion ist wesentlich dafür, ob eine Funktion umgekehrt werden kann oder nicht (siehe Abschnitt 1.2.3). Sie spielen eine wesentliche Rolle beim Lösen von Gleichungen.

- Eine Funktion f heisst *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in DB(f)$ gilt:

  $$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

  Der Graph einer streng monoton wachsenden Funktion verläuft von links nach rechts gesehen aufwärts. Streng monotone Funktionen spielen eine wichtige Rolle beim Lösen von Ungleichungen. Da diese Funktionen ausserdem immer injektiv sind, sind sie auch für das Lösen von Gleichungen wichtig.

- Eine Funktion f heisst *schwach monoton wachsend*, wenn für alle $x, y \in DB(f)$ gilt:

  $$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

  Der Graph einer schwach monoton wachsenden Funktion verläuft von links nach rechts gesehen aufwärts. Anders als bei streng monotonen Funktionen ist es aber erlaubt, dass der Graph stückweise konstant bleibt.

- Eine Funktion f heisst *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in DB(f)$ gilt:

  $$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

  Der Graph einer streng monoton fallenden Funktion verläuft von links nach rechts gesehen abwärts. Streng monotone Funktionen spielen eine wichtige Rolle beim Lösen von Ungleichungen. Da diese Funktionen ausserdem immer injektiv sind, sind sie auch für das Lösen von Gleichungen wichtig.

- Eine Funktion f heisst *schwach monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in DB(f)$ gilt:

  $$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

  Der Graph einer schwach monoton fallenden Funktion verläuft von links nach rechts gesehen abwärts. Anders als bei streng monotonen Funktionen ist es aber erlaubt, dass der Graph stückweise konstant bleibt.

Beachten Sie, dass es auch Funktionen gibt, die mehrere oder keine der oben genannten Eigenschaften besitzen.

1.5.2. Beziehungen zwischen Funktionseigenschaften*. Die im vorangegangenen Abschnitt aufgelisteten Funktionseigenschaften sind nicht unabhängig voneinander (siehe Abbildung 18). Die Kenntnis dieser Abhängigkeiten kann Ihnen helfen, andere Eigenschaften schneller zu ermitteln:

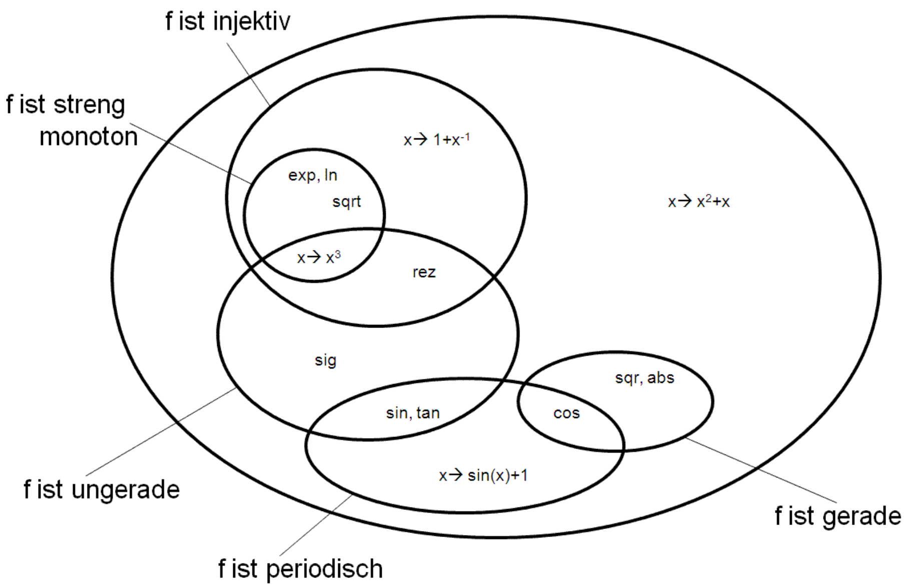


Abbildung 18. Wichtige Beziehungen zwischen Funktionseigenschaften und einige Beispielfunktionen

Satz 38. *Strenge und schwache Monotonie*

Jede streng monotone Funktion ist automatisch auch schwach monoton. Das umgekehrte gilt nicht.

Beweis. Wir nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist. Dann gilt für alle $x, y \in DB(f)$: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Also ist f auch schwach monoton. $\square$

Satz 39. *Monotonie und Injektivität*

Eine streng monotone Funktion (streng monoton wachsend oder streng monoton fallend) ist immer injektiv. Umgekehrt ist eine Funktion, die nicht injektiv ist, nie streng monoton.

Beweis. Wir nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist.

Wir wählen $x, y \in DB(f)$ so, dass $x \neq y$ ist. Dann ist entweder $x < y$ oder $y < x$. Im ersten Fall folgt aus der Tatsache, dass f streng monoton wachsend ist, dass $f(x) < f(y)$ und damit $f(x) \neq f(y)$ ist. Im zweiten Fall folgt auf dieselbe Weise: $y < x \Rightarrow f(y) < f(x) \Rightarrow f(y) \neq f(x)$. In beiden Fällen gilt also $f(x) \neq f(y)$. f ist damit injektiv. $\square$

Satz 40. *Injektiv und gerade*

Eine Funktion kann nicht gleichzeitig injektiv und gerade sein. (Einzige Ausnahme: der Definitionsbereich der Funktion ist $\{0\}$. Diese Situation ist für praktische Belange aber uninteressant).

Beweis. Wir nehmen an, f ist eine gerade Funktion mit $DB(f) \neq 0$. Wir wählen $x \in DB(f)\backslash\{0\}$. Dann muss $-x$ im auch Definitionsbereich von f liegen und es gilt $f(-x) = f(x)$. Damit kann f nicht injektiv sein. ☐

Satz 41. *Injektiv und periodisch*

Eine Funktion kann nicht gleichzeitig injektiv und periodisch sein.

Beweis. Wäre f periodisch mit Periode p, so wäre mit $x \in DB(f)$ auch $y = x + p$ im Definitionsbereich von f und es würde gelten $f(x) = f(x + p) = f(y)$. Damit könnte f nicht injektiv sein. ☐

Bemerkung. *Da streng monotone Funktionen immer injektiv sind, können Sie aus den obigen Aussagen auch folgern, dass eine streng monotone Funktion weder gerade noch periodisch sein kann.*

1.5.3. Verknüpfung von Funktionen*. Verknüpft man verschiedene Funktionen durch Addieren, Subtrahieren, Dividieren, Multiplizieren oder Nacheinander ausführen[20] miteinander, so "vererben" sich manche der oben genannten Funktionseigenschaften auf die verknüpfte Funktion. Die folgenden Aussagen behandeln diese Situationen. Um diese Aussagen abzukürzen, sollen im folgenden

- $g_1$und g_2 zwei gerade Funktionen
- $u_1$und u_2 zwei ungerade Funktionen
- $p_1$und p_2 zwei p-periodische Funktionen
- $i_1$und i_2 zwei injektive Funktionen
- $w_1$und w_2 zwei schwach monoton wachsende Funktionen
- W_1und W_2 zwei streng monoton wachsende Funktionen
- $f_1$und f_2 zwei schwach monoton fallende Funktionen
- F_1und F_2 zwei streng monoton fallend Funktionen

bezeichnen. Ferner bezeichne die Funktion h eine Funktion ohne irgendwelche besonderen Eigenschaften.

Dann gilt:

- Die folgenden Funktionen sind gerade:

  $g_1(x) + g_2(x)$, $g_1(x) - g_2(x)$, $g_1(x) \cdot g_2(x)$, $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$

  $u_1(x) \cdot u_2(x)$, $\frac{u_{1(x)}}{u_2(x)}$

[20]In der Mathematik wird das Nacheinander ausführen von Funktionen auch Verkettung genannt. Es gibt dafür sogar ein eigenes Symbol $\circ$. Unter $f \circ g$ versteht man diejenige Funktion, die dem Wert x den Wert

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

zuordnet.

$g_1(u_1(x))$, $h(g_1(x))$

- Die folgenden Funktionen sind ungerade:

  $u_1(x) + u_2(x)$, $u_1(x) - u_2(x)$

  $u_1(x) \cdot g_1(x)$, $\frac{g_1(x)}{u_1(x)}$, $\frac{u_1(x)}{g_1(x)}$

  $u_1(u_2(x))$

- Sofern p_1 und p_2 beide p-periodisch sind, sind die folgenden Funktionen auch p-periodisch:

  $p_1(x) + p_2(x)$, $p_1(x) - p_2(x)$, $p_1(x) \cdot p_2(x)$, $\frac{p_1(x)}{p_2(x)}$

  $h(p_1(x))$

- Die folgenden Funktionen sind injektiv:

  $i_1(i_2(x))$

  alle Verknüpfungen, die zu einer streng monotonen Funktion führen

- Die folgenden Funktionen sind streng monoton wachsend:

  $W_1(x) + w_2(x)$, $W_1(W_2(x))$

  $W_1(x) - f_2(x)$, $F_1(F_2(x))$

  $-F_1(x)$

- Die folgenden Funktionen sind streng monoton fallend:

  $F_1(x) + f_2(x)$, $F_1(W_2(x))$, $W_1(F_2(x))$

  $F_1(x) - w_2(x)$

  $-W_1(x)$

Die Aussage, dass Verkettungen injektiver Funktionen wieder injektiv sind, hat besonders auch für die Umkehrfunktion Bedeutung:

Satz 42. *Umkehrfunktion und Verkettung*

Sei $f(x) := f_1(f_2(...(f_{n-1}(f_n(x)))))$ eine Verkettung von n umkehrbaren Funktionen. Dann ist auch f umkehrbar und die Umkehrfunktion von f lautet

$$f^{-1} = f_n^{-1}\left(f_{n-1}^{-1}\left(...\left(f_2^{-1}\left(f_1^{-1}(x)\right)\right)\right)\right)$$

wobei der Definitionsbereich von f^{-1}das Bild der Funktion f ist.

Kurz gesagt: “die Umkehrfunktion einer Verkettung von Funktionen ist die Verkettung der Umkehrfunktionen”.

1.5.4. Eigenschaften der elementaren Funktionen. Wir fassen noch einmal einige der elementare Funktionen mit ihren Eigenschaften zusammen

Funktion (surjektiv definiert)	Monotonie	Symmetrie	Periode	bijektiv	Umkehrfunktion
$\cdot^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$	nein	gerade	nein	nein	n/a
$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$	wachsend	nein	nein	ja	$\cdot^2{}_{\mid \mathbb{R}^+}$
$\cdot^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	wachsend	ungerade	nein	ja	kein Name
$\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$	wachsend	nein	nein	ja	$\cdot^3{}_{\mid \mathbb{R}^+}$
exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	wachsend	nein	nein	ja	ln
ln : $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$	wachsend	nein	nein	ja	exp
sin : $\mathbb{R} \to [-1;1]$	nein	ungerade	2π	nein	n/a
cos : $\mathbb{R} \to [-1;1]$	nein	gerade	2π	nein	n/a
tan : $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$	nein	ungerade	π	nein	n/a
arcsin : $[-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	wachsend	ungerade	nein	ja	$\sin_{\mid\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$
arccos : $[-1;1] \to [0;\pi]$	fallend	nein	nein	ja	$\cos_{\mid[0;\pi]}$
arctan : $\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	wachsend	ungerade	nein	ja	$\tan_{\mid\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}$

1.6. Regeln zum Umformen von Gleichungen

Wir wiederholen an dieser Stelle noch einmal alle Regeln zum Umformen von Gleichungen. Dabei unterscheiden wir zwischen den *Grundregeln*, auf denen alle Gleichungsumformungen basieren, und den aus den Grundregeln *abgeleiteten Regeln*, die die Grundregeln für die elementaren Funktionen präzisieren. Letztere erweitern wir in diesem Abschnitt noch um Regeln für den Umgang mit trigonometrischen Umformungen.

1.6.1. Grundregeln. Wenn man sehr sorgfältig arbeitet, lassen sich alle Äquivalenzumformungen für Gleichungen auf die folgenden Grundregeln zurückführen:

(1) Man darf zur linken und rechten Seite einer Gleichung einen beliebigen Term hinzuzählen oder abziehen:

$$\begin{aligned} T_1(x) &= T_2(x) && \mid +S(x) \\ \Leftrightarrow \quad T_1(x) + S(x) &= T_2(x) + S(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1(x) &= T_2(x) && \mid -S(x) \\ \Leftrightarrow \quad T_1(x) - S(x) &= T_2(x) - S(x) \end{aligned}$$

(2) Man darf die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einem beliebigen Term multiplizieren oder durch einen Term dividieren, sofern dieser Term nicht Null wird:

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \mid \cdot S(x) \\ \overset{S(x)\neq 0,\text{ sonst Sonderfall}}{\Leftrightarrow} & T_1(x)\cdot S(x) & = & T_2(x)\cdot S(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \mid : S(x) \\ \overset{S(x)\neq 0,\text{ sonst Sonderfall}}{\Leftrightarrow} & \frac{T_1(x)}{S(x)} & = & \frac{T_2(x)}{S(x)} & \end{array}$$

(3) Man darf eine *injektive* Funktion auf beide Seiten einer Gleichung anwenden, sofern beide Seiten im Definitionsbereich DB_f dieser Funktion liegen

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \mid f(\cdot)\text{ injektiv} \\ \overset{T_1(x),T_2(x)\in DB_f,\text{ sonst Sonderfall}}{\Leftrightarrow} & f(T_1(x)) & = & f(T_2(x)) & \end{array}$$

(4) Man darf die Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung einzeln vereinfachen, wenn sich dadurch der Definitionsbereich der Gleichung nicht verändert.

1.6.2. Abgeleitete Regeln. Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Umformungsregeln sind fehleranfällig. Deshalb lohnt es sich, den Spezialfall der elementaren Funktionen explizit zu untersuchen:

(1) Regel zum Wegschaffen einer positiven geraden ganzzahligen Potenz g

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^g & = & T_2(x) & \mid \sqrt[g]{\cdot}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & \pm\sqrt[g]{T_2(x)} & \end{array}$$

(2) Regel zum Wegschaffen einer positiven ungeraden ganzzahligen Potenz u

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^u & = & T_2(x) & \mid \sqrt[u]{\cdot}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst Sonderfall}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & \sqrt[u]{T_2(x)} & \end{array}$$

Sonderfall $T_2(x) < 0$

$$-T_1(x) = \sqrt[u]{-T_2(x)}$$

In folgendem Spezialfall benötigt man keinen Sonderfall:

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^u & = & (T_2(x))^u & \mid \sqrt[u]{\cdot}\text{ injektiv} \\ \Leftrightarrow & T_1(x) & = & T_2(x) & \end{array}$$

(3) Regel zum Wegschaffen einer nicht-ganzzahligen positiven Potenz p

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^p & = & T_2(x) & \mid (\cdot)^{\frac{1}{p}}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & (T_2(x))^{\frac{1}{p}} & \end{array}$$

(4) Regel zum Wegschaffen einer Quadratwurzel (andere Wurzeln sollten als Potenz geschrieben und mit der der vorangegangenen Regel behandelt werden)

$$\begin{aligned} \sqrt{T_1(x)} &= T_2(x) && \mid \cdot^2_{\mid\mathbb{R}^+} \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= (T_2(x))^2 \end{aligned}$$

(5) Regel zum Wegschaffen eines Logarithmus

$$\begin{aligned} \ln(T_1(x)) &= T_2(x) && \mid \exp(\cdot) \text{ injektiv} \\ \Leftrightarrow \quad T_1(x) &= e^{T_2(x)} \end{aligned}$$

Vorsicht bei Gleichungen vom Typ:

$$\begin{aligned} \ln(T_1(x)) &= \ln(T_2(x)) && \mid \exp(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)>0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= T_2(x) \end{aligned}$$

(6) Regel zum Wegschaffen der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{T_1(x)} &= T_2(x) && \mid \ln(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)>0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= \ln(T_2(x)) \end{aligned}$$

(7) Regel zum Wegschaffen des Sinus

$$\begin{aligned} \sin(T_1(x)) &= T_2(x) \\ \overset{T_2(x)\in[-1;1],\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= \arcsin(T_2(x)) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \vee T_1(x) &= \pi - \arcsin(T_2(x)) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

(8) Regel zum Wegschaffen des Kosinus

$$\begin{aligned} \cos(T_1(x)) &= T_2(x) \\ \overset{T_2(x)\in[-1;1],\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= \pm\arccos(T_2(x)) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

(9) Regel zum Wegschaffen des Tangens

$$\begin{aligned} \tan(T_1(x)) &= T_2(x) \\ \Leftrightarrow \quad T_1(x) &= \arctan(T_2(x)) + \pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

(10) Regel zum Wegschaffen des Arcussinus

$$\begin{aligned} \arcsin(T_1(x)) &= T_2(x) && \mid \sin_{\mid[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}],\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= \sin(T_2(x)) \end{aligned}$$

(11) Regel zum Wegschaffen des Arcuscosinus

$$\begin{aligned} \arccos(T_1(x)) &= T_2(x) && \mid \cos_{\mid[0;\pi]}(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\in[0;\pi],\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= \cos(T_2(x)) \end{aligned}$$

(12) Regel zum Wegschaffen des Arcustangens

$$\begin{aligned} \text{arctan}\,(T_1(x)) &= T_2(x) && \left|\, \tan_{|\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}(\cdot) \text{ injektiv}\right. \\ \overset{T_2(x)\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1(x) &= \tan\,(T_2(x)) \end{aligned}$$

1.7. Ungleichungen

Ungleichungen unterscheiden sich von Gleichungen dadurch, dass die Terme der linken und rechten Seite einer Ungleichung nicht durch das Gleichheitssymbol, sondern durch eines der Symbole $<, >, \geq, \leq$ getrennt werden. Wir wollen uns in diesem Kapitel aber ausschliesslich auf die Symbole $<$ und $>$ beschränken. Die Fälle $\leq$ und $\geq$ lassen sich als Kombination aus dem Lösen einer Gleichung und einer Ungleichung rekonstruieren.

Die grundsätzlichen Regeln der vorangegangenen Abschnitte bleiben mit Ausnahme von Abschnitt 1.6.1 und den daraus abgeleiteten Regeln unverändert. Die Regeln (2) und (3) aus diesem Abschnitt erfahren allerdings eine Veränderung, da diese Regeln die Öffnungsrichtung des Ungleichheitszeichens beeinflussen können.

- Regel (2) muss dahingehend erweitert werden, dass das Ungleichheitszeichen kehrt, wenn eine Gleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird.

- Regel (3) muss abgeändert werden, da die Injektivität einer Funktion nicht mehr ausreicht, um die Öffnungsrichtung des Ungleichheitszeichens unter Kontrolle zu halten. Dazu benötigen wir für Ungleichungen die Monotonie einer Funktion.

Auch wenn diese Änderungen im Grunde klein sind, so sind Ungleichungen deutlich schwieriger zu handhaben als Gleichungen. Das liegt im wesentlichen an den folgenden Punkten:

- zum einen führen die erwähnten Änderungen der Regeln zu einer deutlich grösseren Zahl an Fallunterscheidung,

- zum anderen verkompliziert sich der am Ende der Rechnung durchzuführenden Check zum eliminieren von Scheinlösungen.

- schliesslich gibt es bei Ungleichungen neben dem Zustand "unlösbar" zu sein, auch die Möglichkeit, dass die Ungleichung "immer lösbar" ist. Diese beiden Situationen müssen wir neu unterscheiden.

Nach diesem Vorspann formulieren wir nun die den Regeln aus Abschnitt 1.6.1 für Ungleichungen:

(1) Man darf zur linken und rechten Seite einer Gleichung einen beliebigen Term hinzuzählen oder abziehen:

$$\begin{array}{rcll} & T_1(x) & < & T_2(x) & \quad | + S(x) \\ \Leftrightarrow & T_1(x) + S(x) & < & T_2(x) + S(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} & T_1(x) & < & T_2(x) & \quad | - S(x) \\ \Leftrightarrow & T_1(x) - S(x) & < & T_2(x) - S(x) & \end{array}$$

(2) Man darf die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einem beliebigen Term multiplizieren oder durch einen Term dividieren, sofern dieser Term nicht Null wird. Bei dieser Operation sind allerdings die Fälle $S(x) > 0$ und $S(x) < 0$ zu unterscheiden:

$$\begin{array}{rrcll} & & T_1(x) & > & T_2(x) & \quad | \cdot S(x) \\ \text{Fall 1:} & \overset{S(x)>0}{\Leftrightarrow} & T_1(x) \cdot S(x) & > & T_2(x) \cdot S(x) & \\ & & & ... & & \\ \text{Fall 2:} & \overset{S(x)<0}{\Leftrightarrow} & T_1(x) \cdot S(x) & < & T_2(x) \cdot S(x) & \\ & & & ... & & \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{rrcll} & & T_1(x) & > & T_2(x) & \quad | : S(x) \\ \text{Fall 1:} & \overset{S(x)>0}{\Leftrightarrow} & \frac{T_1(x)}{S(x)} & > & \frac{T_2(x)}{S(x)} & \\ & & & ... & & \\ \text{Fall 2:} & \overset{S(x)<0}{\Leftrightarrow} & \frac{T_1(x)}{S(x)} & < & \frac{T_2(x)}{S(x)} & \\ & & & ... & & \end{array}$$

Die Situation $S(x) = 0$ muss jeweils als Sonderfall betrachtet werden.

(3) Man darf eine *streng monotone* Funktion auf beide Seiten einer Ungleichung anwenden, sofern beide Seiten im Definitionsbereich DB_f dieser Funktion liegen. Ist die Funktion streng monoton wachsend (Symbol $\nearrow$), so kehrt bei dieser Operation das Ungleichheitszeichen nicht, andernfalls, d.h. bei einer streng monoton fallenden Funktion (Symbol $\searrow$), kehrt das Zeichen seine Richtung um. Für streng monoton wachsende Funktionen gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & < & T_2(x) & \quad |f(\cdot) \nearrow \\ \overset{T_1(x),T_2(x) \in DB_f}{\Leftrightarrow} & f(T_1(x)) & < & f(T_2(x)) & \end{array}$$

für streng monoton fallende Funktionen gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & < & T_2(x) & \quad |f(\cdot) \searrow \\ \overset{T_1(x),T_2(x) \in DB_f}{\Leftrightarrow} & f(T_1(x)) & > & f(T_2(x)) & \end{array}$$

Ein grosses Problem ist, dass viele Funktionen (z.B. $\cdot^2$, sin,cos,tan) nicht streng monoton sind. Ähnlich wie bei der Injektivität lässt sich die strenge Monotonie aber durch

Restriktion dieser Funktionen auf einen kleineren Definitionsbereich erreichen. Dies führt in der Regel allerdings zu einer umfangreichen Zahl von Fällen, bzw. einer aufwändigen Fallunterscheidung.

(4) Man darf die Terme auf der linken und rechten Seite der Gleichung einzeln vereinfachen, wenn sich dadurch der Definitionsbereich der Gleichung nicht verändert.

Aufgabe 43.

Für welche x gilt

a)
$$e^{x^2+1} < 5$$

b)
$$e^{x^2+1} > -5$$

c)
$$e^{x^2+1} < -5$$

d)
$$x^2 < x$$

e)
$$x^2 > x$$

Ergebnis

a)
$$-\sqrt{\ln(5)-1} < x < \sqrt{\ln(5)-1}$$

b) Die Lösungsmenge ist $\mathbb{R}$.
c) Die Lösungsmenge ist $\emptyset$.
d) Die Lösungsmenge ist $(0;1)$
e) Die Lösungsmenge ist $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

Lösungweg

1.8. Übungsaufgaben

1.8.1. Mengen.

Aufgabe 44.

Stellen Sie die folgenden Mengen wenn möglich in der aufzählenden Form dar. Falls dies nicht möglich ist, beschreiben sie die mit anderen, einfacheren Mitteln.

a)
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 = 0\right\}$$
b)
$$B = \left\{y \in \mathbb{R} | \left(y^2 - 1\right)\left(y^2 - 2\right) = 0\right\}$$
c)
$$C = \left\{x \in \mathbb{R} | \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 - z^2\right) = 0\right\}$$
d)
$$D = \left\{y \in \mathbb{R} | \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 - z^2\right) = 0\right\}$$
e)
$$E = \left\{z \in \mathbb{Z} | z^2 < 10\right\}$$
f)
$$F = \left\{z \in \mathbb{R} | z^2 < 10\right\}$$

Ergebnis

a)
$$A = \{-1, 1\}$$
b)
$$B = \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$$
c)
$$C = \{y, -y, z, -z\}$$
d) Falls $x \in \{-z, z\}$
$$D = \mathbb{R}$$
sonst
$$D = \{x, -x\}$$
e)
$$E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$
f)
$$F = \left(-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$$

Lösungweg

Aufgabe 45.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch und welche sind nicht sinnvoll gestellt? Korrigieren Sie in diesem Fall die Symbole so, dass eine wahre Aussage entsteht.

a) $0 \in (0;9]$
b) $9 \in (0;9]$
c) $(0;9) \in (0;9]$
d) $0 \in [0;0]$

Ergebnis

a) falsch
b) wahr
c) sinnlos. Richtig wäre $(0;9) \subset (0;9]$
d) wahr

Lösungweg

Aufgabe 46.

Gegeben seien die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,4\} \\ B &= \{3,4,5\} \\ C &= \{2,6,7,9\} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie

a) $$A \cap B$$

b) $$A \cup B$$

c) $$B \cap C$$

d) $$A \backslash B$$

e) $$B \backslash A$$

f) $$A \cap \emptyset$$

g) $$B \cup \emptyset$$

h) Alle Mengen $Q \subset \mathbb{Z}$ mit
$$B = B \cup Q$$

i) Alle Mengen $R \subset \mathbb{Z}$ mit
$$R = B \cap R$$

Ergebnis

a) $$A \cap B = \{3, 4\}$$

b) $$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

c) $$B \cap C = \emptyset$$

d) $$A \backslash B = \{1, 2\}$$

e) $$B \backslash A = \{5\}$$

f) $$A \cap \emptyset = \emptyset$$

g) $$B \cup \emptyset = B$$

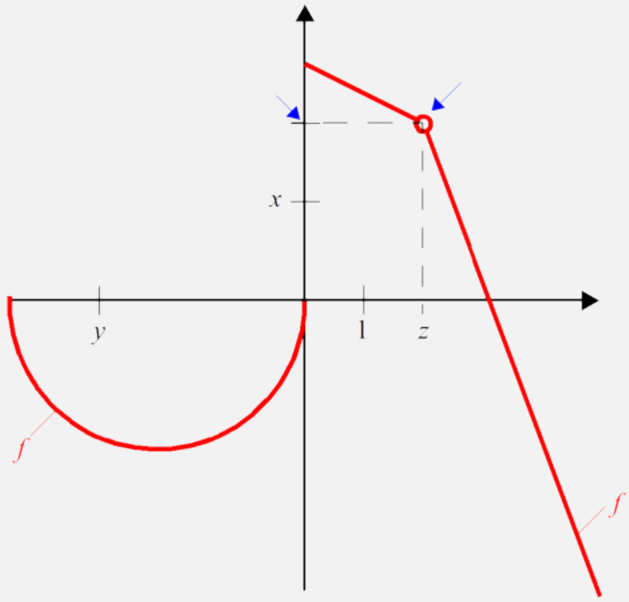
h) Q muss also eine Teilmenge von B sein
i) R muss eine Teilmenge von B sein.

Lösungweg

1.8.2. Funktionen und Funktionsgraphen.

Aufgabe 47.

Die Funktion f hat folgenden Graphen:



a) Schreiben Sie den mit einem Pfeil bezeichneten Graphenpunkt, der die 1. Koordinate z hat, sowie die mit einem Pfeil bezeichnete Stelle auf der Ordinatenachse korrekt an.
b) Tragen Sie $f(y)$ in die Zeichnung ein.
c) Tragen Sie $f(x)$ in die Zeichnung ein.
d) Tragen Sie $f(z+2)$ in die Zeichnung ein.
e) Konstruieren Sie u so, dass $f(u) = x$.

Ergebnis

Siehe Lösungsweg

Lösungweg

Aufgabe 48.

Konstruieren Sie für die folgenden Funktionen den Funktionsgraphen, in dem Sie zunächst eine Wertetabelle anlegen.

a) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion

$$r : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{t+3}{2} \end{cases}$$

im Intervall $[-3; 3]$

b) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion

$$\sqrt{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \text{positive Lösung der Gleichung } s^2 = t \end{cases}$$

im Intervall $[2; 3]$ ohne einen Taschenrechner zu benützen und lesen Sie an Hand des Graphen den Wert von $\sqrt{\frac{5}{2}}$ mit einer Stelle Genauigkeit ab.

Ergebnis

Siehe Lösungsweg

Lösungweg

Aufgabe 49.

Die Funktion g ist wie folgt definiert:

- Für gerade ganze Zahlen ist der Funktionswert 1.
- Für ungerade ganze Zahle ist er 0.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von g, und das Bild von g.

b) Beschreiben Sie den Graphen als Menge und zeichnen Sie ihn für Argumente zwischen −4 und 4.

c) Bestimmen Sie $g(g(9))$.

d) Welches sind die Nullstellen dieser Funktion?

Ergebnis

a) Definitionsbereich $\mathbb{Z}$, Bild $\{0, 1\}$

b)

$$\begin{aligned} Graph\,(g) &= \{(x,y)\,|\,(x \text{ ist gerade und } y=1) \vee (x \text{ ist ungerade und } y=0)\} \\ &= \{(x,1)\,|x \text{ ist gerade}\} \cup \{(x,0)\,|x \text{ ist ungerade}\} \end{aligned}$$

Graph: siehe Lösungsweg

c) $g\,(g\,(9)) = 1$

d) Alle ungeraden Zahlen

Lösungweg

Aufgabe 50.

Die Funktion g ist wie folgt definiert:

- Wenn $x < 0$ ist, dann ist $g\,(x) = 1 - x$
- Wenn $x > 0$ ist, dann ist $g\,(x) = x - 1$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich.

b) Berechnen Sie $g\,(-2)\,, g\,(0)\,, g\,(0.5)\,, g\,(3)$ und die Nullstellen.

c) Zeichnen Sie den Graphen und lesen Sie aus diesem das Bild der Funktion ab.

Ergebnis

a) Definitionsmenge ist damit $\mathbb{R}\backslash\,\{0\}$.

b)

$$\begin{aligned} g\,(-2) &= 1-(-2) = 3 \\ g\,(0) &\text{undefiniert} \\ g\,(0.5) &= 0.5 - 1 = -0.5 \\ g\,(3) &= 3 - 1 = 2 \\ \text{Nullstellen bei} x &= 1 \end{aligned}$$

c) Das Bild der Funktion ist $(-1;\infty)$. Graph der Funktion siehe Lösungsweg.

Lösungweg

Aufgabe 51.

Bei der Abschlussprüfung an der Berufsmittelschule beträgt die maximale Punktzahl 75 und es werden nur ganze Punkte vergeben. Gemäss dem vorgegebenen Notenschlüssel werden die Noten wie folgt gebildet:

Punkte	0-2	3-6	7-10	11-15	16-21	22-28	29-35	36-45	46-55	56-65	66-75
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

a) Ist die Vorschrift, welche jeder Punktzahl eine Note zuordnet, eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild.

c) Schreiben Sie ein Computerprogramm, das diese Funktion abbildet.

Lösungweg

Aufgabe 52.

Eine Geschäft nimmt eine neue Telefonzentrale in Betrieb. Bei dieser Gelegenheit werden auch noch einige organisatorische Änderungen durchgeführt. Der Telefonmonteur erhält folgende Tabelle:

Alte Nummer	11	12	13	15	16	16 (Einkauf)	16 (Verkauf)	...
Neue Nummer	111	120	125	126	316	416	519	...

Ist die Vorschrift, welche jeder alten Nummer eine neue Nummer zuordnet, eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja:

a) Welches sind die Argumente, welches die Werte?
b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild der Funktion.
c) Zeichnen Sie denjenigen Teil des Graphen, für welchen die Argumente kleiner als 20 sind.

Ergebnis

Es handelt sich nicht um eine Funktion.

Lösungweg

Aufgabe 53. Semesteraufgabe

Auf Grund der Überlegungen aus der Semesteraufgabe wurden im Containerschiff verschieden Sensoren eingerichtet. Die Daten der Sensoren erhalten Sie über das Interface:

```
public interface Sensor {
  /* Die Geschwindigkeit des Schiffs in km/h relativ zur Wasseroberfläche gemessen.*/
  public double getSpeedOnSurface();
  /* Die Geschwindigkeit des Schiffs in km/h durch den GPS Sensor gemessen */
  public double getAbsGpsSpeed();
  /* Der gegenwärtige Verbrauch in l/h */
  public double getFuelPerHour();
}
```

Bei einer Testfahrt wurden diese Daten im 10 Minutentakt erhoben und in der folgenden Tabelle eingetragen.

Zeit	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
SpeedOnSurface	0	3	5	8	7.5	11	14	18	20	22
AbsGpsSpeed	0	3.5	2.8	11.2	12.3	11.6	12.8	13.2	21.2	24.8
FuelPerHour	80	90	105	131	140	162	197	251	280	310

Mit Hilfe dieser Tabelle soll eine Verbrauchskennlinie für den Schiffsmotor konstruiert werden.

a) Extrahieren Sie aus der Tabelle diejenigen Zeilen, die sie als Wertetabelle für die Verbrauchskennlinie verwenden möchten.
b) Welche Definitions- und Zielmenge sind für die Verbrauchskennlinienfunktion geeignet.
c) Skizzieren Sie den Graphen der Verbrauchskennlinie? Was fällt Ihnen am Graphen auf?

Ergebnis

a) Die zweite und vierte Zeile.
b) Definitionsmenge: $[0, v_{max}]$ (v_{max} ist dabei die Höchstgeschwindigkeit des Schiffes).
   Zielmenge: $\mathbb{R}^+$
c) Die Daten zur Zeit 30 und 40 Minuten sind in der Wertetabelle in der falschen Reihenfolge eingetragen. Der Messpunkt nach 40 Minuten ist vermutlich ein Messfehler.

Lösungweg

Aufgabe 54.

Beim Bau eines 100 m hohen Fernsehturmes ist eine Aussichtsplattform geplant, die im Falle einer Katastrophe so schnell wie möglich evakuiert werden muss. Für die Evakuierung stehen zwei Varianten zur Diskussion:

(1) Der Bau eines Fahrstuhls, der pro Fahrt 50 Personen evakuieren kann. Der geplante Fahrstuhl benötigt für die Abfahrt und die Auffahrt jeweils 20s Zeit. Für das Betreten und Verlassen des Fahrstuhls inkl. dem Öffnen und Schliessen der Türen wird im Katastrophenfall mit jeweils 15 Sekunden pro Fahrt gerechnet.
(2) Der Bau einer Fluchttreppe (Länge von oben bis unten 300m) durch die ca. 3 Personen nebeneinander absteigen können, wobei im Durchschnitt ein Abstand von 70 cm zum Vordermann eingehalten wird. Es wird angenommen, dass die zu evakuierenden Gäste die Treppe mit einer Geschwindigkeit von ca. 3.6 km/h begehen werden.

Skizzieren Sie für beide Varianten den Graphen einer Funktion, anhand welcher sich ablesen lässt, zu welcher Zeit wieviele Personen den Fernsehturm verlassen haben. Ermitteln Sie anhand Ihrer Skizze, wieviele Personen sich auf der Aussichtsplattform aufhalten müssen, damit der Fahrstuhl / die Treppe der bessere Fluchtweg ist.
Bewerten Sie das Ergebnis auf seine Sinnhaftigkeit (am besten in einer Diskussion mit Ihrem Nachbarn).

Hinweis

- Überlegen Sie sich, nach welcher Zeit zum ersten Mal Personen den Fahrstuhl verlassen und wie lange es dauert bis eine zweite Gruppe dazu kommt. Wieviele Personen haben den Fahrstuhl verlassen, wenn der Fahrstuhl dann zum zweiten mal nach oben fährt? Überlegen Sie sich dann, mit welchem “Muster” die Flucht weiter verläuft. Überlegen Sie sich dann, wie lange es dauert, bis die erste Person den Turm über die Treppe verlässt und wieviele Personen danach jede Sekunde dazu kommen.Zeichnen Sie beide Graphen.

- Was bedeutet es, wenn der zur Treppe gehörende Graph unter- bzw. oberhalb des zum Fahrstuhl gehörigen Graphen liegt?Was passiert am Schnittpunkt der beiden Graphen?Zu welchem Zeitpunkt und bei welcher Personenzahl liegt der Schnittpunkt?

Ergebnis

Bis 250 Personen ist der Turm über den Fahrstuhl schneller evakuiert. Ab der 251. Person ist der Turm über die Treppe schneller evakuiert.

Lösungweg

Aufgabe 55.

Konstruieren Sie die Funktionsdefinition für die Funktionen, die die folgenden Graphen erzeugen:

a) Eine Gerade, die durch den Punkt $(2, 4)$ verläuft und die die Steigung 2 hat.
b) Eine Gerade durch die Punkte $(2, 3)$ und $(3, -1)$
c) Eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt an der Stelle $(1, 3)$, die durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.
d) Eine Parabel durch die Punkte $(2, 4)$, $(1, 3)$ und $(3, 2)$.

Hinweis

Eine Gerade ist eine Funktion

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto m \cdot x + b \end{cases}$$

in der die Zahlenwerte m und b geeignet festzulegen sind.
Eine Parabel ist eine Funktion

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c \end{cases}$$

in der die Zahlenwerte a, b, c geeignet festzulegen sind.
Mit den obigen Formeln können Sie im Grunde jedes Geraden- oder Parabelproblem lösen. Einfacher sind aber in vielen Fällen die sog. Punkt-Steigungs-Form der Geraden

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a \cdot (x - x_0) + y_0 \end{cases}$$

und die Scheitelform der Parabel

$$p : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto a \cdot (x - x_0)^2 + y_0 \end{cases}$$

In beiden Fällen ist der Punkt (x_0, y_0) automatisch ein Punkt des Funktionsgraphen, wobei dieser Punkt bei Parabeln immer der Scheitel ist (bzw. sein muss).

Ergebnis

a)

$$g:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 2\cdot(x-2)+4\end{cases}$$

oder

$$g:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto 2x\end{cases}$$

b)

$$g:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto -4\cdot(x-2)+3\end{cases}$$

c)

$$p:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto -3\,(x-1)^2+3\end{cases}$$

d)

$$p:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto -\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}x-1\end{cases}$$

Lösungweg

Aufgabe 56.

Schreiben Sie (wenn möglich) die Funktionsdefinition zu den folgenden Berechnungsvorschriften auf und werten Sie die Funktion für die Argumente 3,y und 2x aus:

a) Die Funktion a, die jedem Argument den Kehrwert seines doppelten Quadrates als Wert zuweist.

b) Die Funktion b, welche jedem Argument x den Wert

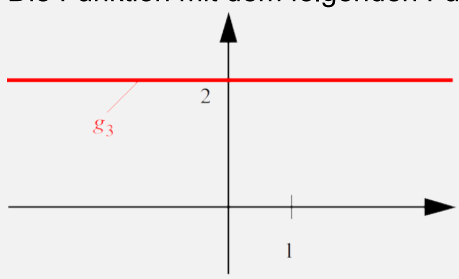
$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

c) Die Funktion c, welche jedem Argument y den durch

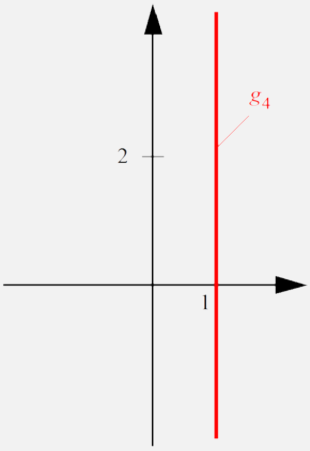
$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

gegebenen Wert x zuordnet.

d) Die Funktion mit dem folgenden Funktionsgraphen



e) Die Funktion mit dem folgenden Funktionsgraphen



Ergebnis

a)

$$a:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0\} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \frac{1}{2x^2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(3) &= \frac{1}{18}\\ a(y) &= \frac{1}{2y^2}\\ a(2x) &= \frac{1}{8x^2}\end{aligned}$$

b)

$$b:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{-1\} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \frac{x-1}{x+1}\end{cases}$$

$$\begin{aligned} b(3) &= \frac{1}{2}\\ b(y) &= \frac{y-1}{y+1}\\ b(2x) &= \frac{2x-1}{2x+1}\end{aligned}$$

c)

$$c:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{1\} & \to \mathbb{R}\\ y & \mapsto \frac{-y-1}{y-1}\end{cases}$$

$$\begin{aligned} c(3) &= -2\\ c(y) &= \frac{-y-1}{y-1}\\ c(2x) &= \frac{-2x-1}{2x-1}\end{aligned}$$

d)

$$g_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2 \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} g_3(3) &= 2 \\ g_3(y) &= 2 \\ g_3(2x) &= 2 \end{aligned}$$

e) Diese “Funktion” hat zum Argument $x = 1$ mehrere Funktionswerte und ist deshalb nicht wohldefiniert. Es handelt sich also nicht um eine Funktion.

Lösungweg

Aufgabe 57. Semesteraufgabe: lineare Splines

Mit Hilfe der Wertetabelle aus Aufgabe 1.8.2 haben wir den Graph der Verbrauchskennlinie des Schiffes als Funktion

$$f : [0, v_{max}] \to \mathbb{R}^+$$

konstruiert, indem wir benachbarte Punkte durch Linien miteinander verbunden haben. Dieses Vorgehen nennt man eine lineare Interpolation. Den resultierenden Funktionsgraphen auch lineares Spline.

a) Bestimmen Sie die Werte $f(4)$ und $f(12)$.
b) Kopieren Sie das Projekt Eclipse Übung auf Ihren Laptop und importieren Sie es danach über die Option `Import->Existing Projects into Workspace->Select Archive File` in einen geöffneten Eclipse-Workspace. Öffnen Sie danach die Klasse `Solution` im Package `ch.hsr.an1I.ship`, initialisieren Sie die unter `WERTETABELLE` aufgeführten Variablen und implementieren Sie die Funktion `double getFuelPerHourLinear(double speedOnSurface)` als lineares Spline der Wertetabelle. Achten Sie bei Ihrer Implementierung auch auf die Definitionsmenge der Funktion.
Starten Sie danach Ihr Programm aus Eclipse heraus und überprüfen Sie Ihre Lösung, indem Sie den Button “Aufgabe 1” anklicken.

Ergebnis

a) $f(4) = \frac{195}{2}$, $f(12) = \frac{521}{3}$
b) Die Musterlösung befindet sich in der Klasse `SolutionReference`

Lösungweg

1.8.3. Elementare Funktionen und Gleichungen ohne Trigonometrie.

Aufgabe 58.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a)

$$\frac{-3^6\left(4ab^{-2}\right)^3}{\left(\frac{6a}{b}\right)^6}$$

b)

$$\frac{a^4\left(4b^2\right)^3c^{-1}}{a\cdot\frac{(3b^3)^2}{a^{-3}c}}$$

c)

$$\frac{a^{-3}(a+2)^2\left(\frac{a^3}{a+b}\right)^2}{\left(\frac{a+2}{a+b}\right)^2}$$

Ergebnis

a) $-a^{-3}$ b) $\frac{64}{9}$ c) a^3

Lösungweg

Aufgabe 59.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a)

$$\frac{s}{s^2+5s+6}-\frac{6}{(s+2)(s-1)}-\frac{s+3}{(s+3)(s-1)}$$

b)

$$\frac{2s}{(s-3)(s+4)}-\frac{s}{(s^2+4s)(s-2)}+\frac{2-s}{s^2-4s+4}$$

c)

$$\frac{2}{(t+1)(t-3)}-\frac{1}{t^2-1}+\frac{4}{9-t^2}$$

Ergebnis

a) $\frac{-12}{(s+3)(s-1)}$ b) $\frac{s^2-6s+15}{(s-3)(s+4)(s-2)}$ c) $\frac{-3t+7}{(t-3)(t-1)(t+3)}$

Lösungweg

Aufgabe 60.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a)
$$\frac{\sqrt{16a^5}b^{-\frac{2}{3}}\left(c^4a^{-1}\right)^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{8bc^6}}$$

b)
$$\frac{2^x\cdot 3^x\cdot 4^x}{24^{(x-1)}}$$

c)
$$\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt[3]{xy^2}}$$

d)
$$\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$$

e)
$$\frac{\sqrt[4]{9a}}{\left(ab^{-3}\right)^{1/2}}\cdot\sqrt{a^{-3/2}\sqrt{b^{-1}}}$$

f)
$$\frac{\sqrt{ab}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}{\sqrt{ab}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}\cdot\frac{a+1}{b+1}$$

Ergebnis

a) $\frac{2c^6}{b}$
b) 24
c) $x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}$
d) $a^{\frac{3}{8}}b^{-\frac{3}{8}}$
e) $\frac{\sqrt{3}b^{5/4}}{a}$
f) $\frac{a}{b}$

Lösungweg

Aufgabe 61.

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a)
$$e^{(\ln(x)\cdot 2)}-x\cdot\ln(e^x)$$

b)
$$\frac{e^{3x}-2e^{2x}+e^x}{e^{2x}-e^x}$$

c)
$$\frac{\ln(a-b)-\ln\left((a+b)^2\right)}{2+\ln\left(\frac{a-b}{e^2}\right)+2\cdot\ln\left(\frac{1}{a+b}\right)}$$

d)

$$\ln(x) - \frac{(\ln(x))^2 - \ln(x^2)}{\ln\left(\frac{x}{e}\right) + 1}$$

e)

$$\ln(\sqrt{x}) + \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(4x)$$

Ergebnis

a) 0
b) $e^x - 1$
c) 1
d) 2
e) 0

Lösungweg

Aufgabe 62.

Ein Internetdienst bietet eine Dienstleistung an, für deren Benutzung sich die Kunden zunächst registrieren müssen. Bei der Registrierung muss der Kunde dabei lediglich einen Loginnamen und ein Passwort angeben und zustimmen, dass er weder den Loginnamen noch das Passwort an einen Dritten weitergibt. Der Loginname wird nur akzeptiert, wenn er nicht bereits vergeben ist.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

a) Die Abbildungsvorschrift, die jedem Loginnamen den Kunden zuordnet, der die Registrierung durchgeführt hat, ist wohldefiniert und injektiv. Er kann zur Definition einer umkehrbaren Funktion verwendet werden.
b) Die Abbildungsvorschrift, die jedem Loginnamen ein passendes Passwort zuordnet, erlaubt die Definition einer Funktion. Diese Funktion ist aber nicht injektiv
c) Die Abbildungsvorschrift, die jedem Passwort einen passenden Loginnamen zuordnet, erlaubt die Definition einer Funktion.

Ergebnis

a) falsch
b) wahr
c) falsch

Lösungweg

Aufgabe 63.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an

a)

$$x - \frac{1}{x} = 1$$

b)

$$\left(\sqrt{x} + 1\right)^2 = 2\sqrt{x}$$

c)

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

d)

$$e^{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{3}$$

e)

$$\ln\left(e^{\sqrt{\ln(x)-1}} - e^2\right) = 2$$

f)

$$\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2} + 5} = 3$$

Ergebnis

a) $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$
b) $\emptyset$
c) $\{3\}$
d) $\emptyset$
e) $\left\{e^{1+\left(\ln\left(2e^2\right)\right)^2}\right\}$
f) $\left\{-\frac{2}{3}, -2\right\}$

Lösungweg

Aufgabe 64.

Bestimmen Sie - wenn mögliche - die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen

a)

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2x \end{cases}$$

b)

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto 2x \end{cases}$$

c)

$$h : \begin{cases} (0;\infty) & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln(x) + 1 \end{cases}$$

d)

$$y : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to [-2; \infty) \\ x & \mapsto \sqrt{x} - 2 \end{cases}$$

e)

$$f : \begin{cases} (0; \infty) & \to (0; \infty) \\ t & \mapsto e^t - 1 \end{cases}$$

Ergebnis

a) nicht umkehrbar

b) $g^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto \frac{y}{2} \end{cases}$

c) $h^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to (0; \infty) \\ y & \mapsto e^{y-1} \end{cases}$

d) $y^{-1} : \begin{cases} [-2; \infty) & \to \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto (y+2)^2 \end{cases}$

e) $f^{-1} : \begin{cases} (0; \infty) & \to (0; \infty) \\ y & \mapsto \ln(y+1) \end{cases}$

Lösungweg

Aufgabe 65.

Finden und korrigieren Sie die Fehler in den folgenden Rechnungen. Geben Sie danach jeweils die korrekte Lösungsmenge an.

$$\begin{array}{rrcll} & \ln\left(e^{\sqrt{\ln(x)-1}} + 3\right) & = & 1 & |e^{\cdot} \\ \Leftrightarrow & e^{\sqrt{\ln(x)-1}} + 3 & = & e & |-3 \\ \Leftrightarrow & e^{\sqrt{\ln(x)-1}} & = & e - 3 & |\ln(\cdot) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\ln(x) - 1} & = & \ln(e-3) & |\cdot^2_{|\mathbb{R}^+} \\ \Leftrightarrow & \ln(x) - 1 & = & (\ln(e-3))^2 & |+1 \\ \Leftrightarrow & \ln(x) & = & 1 + (\ln(e-3))^2 & |e^{\cdot} \\ \Leftrightarrow & x & = & e^{1+(\ln(e-3))^2} & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\left\{e^{1+(\ln(e-3))^2}\right\}$

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{2e^x - e^{2x}} + 2 & = & e^x & |-2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2e^x - e^{2x}} & = & e^x - 2 & |\cdot^2_{|\mathbb{R}^+} \\ \Leftrightarrow & 2e^x - e^{2x} & = & (e^x - 2)^2 & |\text{linke Seite umformen} \\ \Leftrightarrow & -e^x\left(e^x - 2\right) & = & (e^x - 2)^2 & |:(e^x - 2) \\ \Leftrightarrow & -e^x & = & e^x - 2 & |+e^x + 2 \\ \Leftrightarrow & 2 & = & 2e^x & |:2 \\ \Leftrightarrow & e^x & = & 1 & |\ln(\cdot) \\ \Leftrightarrow & x & = & 0 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge ist $\{0\}$

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 1} = & & x & |\cdot^2_{|\mathbb{R}^+} \\ \Leftrightarrow & x - 2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1 & = & x^2 & |-x^2 + 1 - x \\ \Leftrightarrow & -2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1} & = & 1 - x & |\cdot(-1) \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{x}\sqrt{x^2-1} & = & x - 1 & |\cdot^2_{|\mathbb{R}^+} \\ \Leftrightarrow & 4x\left(x^2 - 1\right) & = & (x-1)^2 & |\text{linke Seite umformen} \\ \Leftrightarrow & 4x\left(x-1\right)\left(x+1\right) & = & (x-1)^2 & |:(x-1) \\ \Leftrightarrow & 4x\left(x+1\right) & = & x - 1 & |-x+1 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 3x + 1 & = & 0 & |\text{Mitternachtsformel} \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{8} & \end{array}$$

Die Gleichung ist unlösbar. Die Lösungsmenge ist $\emptyset$

Ergebnis

siehe Lösungsweg

Lösungweg

Aufgabe 66.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an

a)

$$\frac{1-e}{1+e^{\sqrt{x^2-1}}} = 1$$

b)

$$\frac{2x-2}{x-\frac{1}{x}} = 3$$

c)

$$\ln\left(2x^2 - x\right) - \ln(x) = 2\ln(x)$$

d)

$$\ln\left((x+1)^2\right) = \ln\left(x^2+x\right)$$

Ergebnis

a) $\emptyset$

b) $\{-3\}$

c) $\{1\}$

d) $\emptyset$

Lösungweg

Aufgabe 67.

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie die Lösungsmenge an

a)

$$|2-x| = \frac{x}{2}+3$$

b)

$$|x+3|+5 = |x-2|$$

Ergebnis

a)

$$\left\{-\frac{2}{3}, 10\right\}$$

b)

$$(-\infty; -3]$$

Lösungweg

1.8.4. Elementare Funktionen und Gleichungen mit Trigonometrie.

Aufgabe 68.

Der folgende Programmcode illustriert, wie Sie die Klasse ch.hsr.util.Diagramm aus dem Eclipse Projekt verwenden können, um Linien zu zeichnen.

```
import javax.swing.JFrame;
import ch.hsr.util.*;
class Test {
  public static void main(String[] args) {
  JFrame frame = new JFrame("Analysis 1 für Informatiker - Diagramm");
  frame.setPreferredSize(new Dimension(400,400));
  Diagramm diagramm = new Diagramm();
```

```
  frame.getContentPane().add(diagramm);
  Diagramm.Polygon poly = diagramm.createPolygon();

  // ********************************************
  // Zeichnet ein Rechteck durch die Punkte
  // (1.2,2.4), (4.7,2.4), (4.7,7.1) und (1.2,7.1)
  poly.addPoint(1.2,2.4);
  poly.addPoint(4.7,2.4);
  poly.addPoint(4.7,7.1);
  poly.addPoint(1.2,7.1);
  poly.addPoint(1.2,2.4);
  // ********************************************

  frame.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
  frame.pack();
  frame.setVisible(true);
  }
}
```

a) Ändern Sie den Code so ab, dass ein Kreis mit Radius 1 gezeichnet wird.
b) Ändern Sie den Code so ab, dass ein Viertelkreis mit Radius 1 gezeichnet wird.
c) Ändern Sie den Code so ab, dass er ein regelmässiges 12-Eck erzeugt.

Ergebnis

a)
```
...
  // ********************************************
  for (double x = 0; x < 2 * Math.PI; x += 0.01) {
    poly.addPoint(Math.cos(x), Math.sin(x));
  }
  // ********************************************
...
```

b)
```
...
  // ********************************************
  for (double x = 0; x < Math.PI / 2; x += 0.01) {
    poly.addPoint(Math.cos(x), Math.sin(x));
  }
  // ********************************************
...
```

c)
```
...
  // ********************************************
  for (int i = 0; i < 13; i++) {
    poly.addPoint(Math.cos(i*2*Math.PI/12), Math.sin(i*2*Math.PI/12));
  }
  // ********************************************
...
```

.

Lösungweg

Aufgabe 69.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

a)

$$\tan(x) = \cos(x)$$

b)

$$\cos^2(2x+4) = \cos(2x+4) + 2$$

Ergebnis

a) $\left\{\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{2} - 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} - 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

Lösungweg

Aufgabe 70.

Finden und korrigieren Sie die Fehler in den folgenden Rechnungen. Geben Sie danach jeweils die korrekte Lösungsmenge an.

a)

$$\begin{aligned}
 & e^{3\tan(x^2)} &=& \ 3 && |\ln(\cdot) \\
\Leftrightarrow\ & 3\tan(x^2) &=& \ \ln(3) && |:3 \\
\Leftrightarrow\ & \tan(x^2) &=& \ \frac{\ln(3)}{3} && |\arctan(\cdot) \\
\Leftrightarrow\ & x^2 &=& \ \arctan\left(\frac{\ln(3)}{3}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} && |\sqrt{\cdot} \\
\Leftrightarrow\ & x &=& \ \pm\sqrt{\arctan\left(\frac{\ln(3)}{3}\right) + k\pi},\ k \in \mathbb{Z} &&
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\left\{\sqrt{\arctan\left(\frac{\ln(3)}{3}\right) + k\pi} | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\sqrt{\arctan\left(\frac{\ln(3)}{3}\right) + k\pi} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

b)

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\tan(x^2)} &=& \ \tan(x^2) && |\cdot^2_{|\mathbb{R}+} \\
\Leftrightarrow\ & \tan(x^2) &=& \ \tan^2(x^2) && |:\tan(x^2) \\
\Leftrightarrow\ & 1 &=& \ \tan(x^2) && |\arctan(\cdot) \\
\Leftrightarrow\ & x^2 &=& \ \underbrace{\arctan(1)}_{=\frac{\pi}{4}} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} && |\sqrt{\cdot} \\
\Leftrightarrow\ & x &=& \ \pm\sqrt{\frac{\pi}{4} + 2k\pi},\ k \in \mathbb{Z} &&
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $\left\{\sqrt{\frac{\pi}{4}+2k\pi}|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\sqrt{\frac{\pi}{4}+2k\pi}|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Ergebnis

siehe Lösungsweg

Lösungweg

Aufgabe 71.

Geben Sie für die folgenden Funktionsterme an, ob sie gerade, ungerade, periodisch, monoton wachsend, monoton fallend oder umkehrbar sind:

a) $\cos(-x)$

b) $e^x\cdot e^{-\sqrt{2}x}$

c) $\sqrt{x}+\ln(x)$

Ergebnis

a) gerade, periodisch

b) monoton fallend, umkehrbar

c) monoton wachsend, umkehrbar

Lösungweg

1.8.5. Gleichungen und Ungleichungen.

Aufgabe 72.

Lösen Sie die folgenden Ungleichungen

a)

$$\ln(x^2+1) > 2$$

b)

$$x\cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)} > \sqrt{e}\cdot x$$

c)

$$\sqrt{2+x} > 2+8x$$

Ergebnis

a)

$$\left(-\infty;-\sqrt{e^2-1}\right)\cup\left(\sqrt{e^2-1};\infty\right)$$

b)

$$(-\infty;0)\cup(0;2)$$

Lösungweg

Aufgabe 73.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen

a)
$$a(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

b)
$$b(x) = \frac{\sqrt{4-3x}}{1-\sqrt{y+2}}, \text{ für } y > 0$$

c)
$$c(y) = \frac{\sqrt{y+2}}{1-\sqrt{y-4}}$$

d)
$$d(t) = \frac{\arcsin(2t)}{\arccos(3t)}$$

e)
$$e(x) = \frac{\left(x^3-4x\right)\ln(3-2x)}{1-\sqrt{9-x^2}}$$

Ergebnis

a) $(-1;1)$
b) Die Funktion ist für $x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$ definiert.
c) Die Funktion ist für $y \in [4;\infty) \setminus \{5\}$ definiert.
d) Die Funktion ist für $t \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$definiert.
e) Die Funktion ist für $x \in \left[-3; \frac{3}{2}\right) \setminus \left\{-\sqrt{8}\right\}$ definiert.

Lösungweg

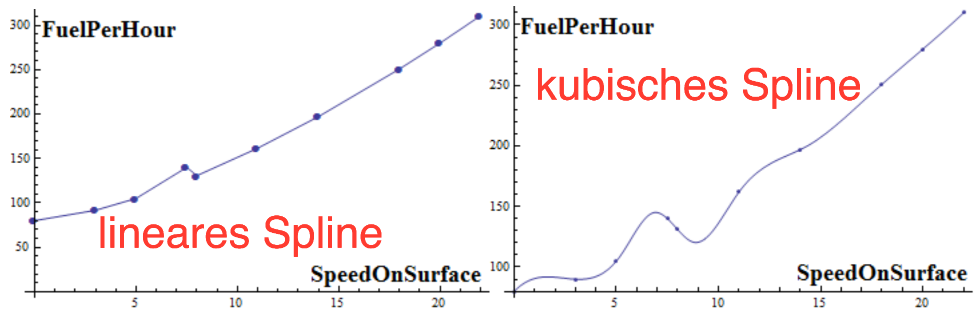
KAPITEL 2

Differentialrechnung

2.1. Splines

Lernziele:

- *Sie wissen, was Splines sind und wozu diese verwendet werden*
- *Sie können aus einer Wertetabelle ein lineares Spline konstruieren*
- *Sie kennen den Begriff des Freiheitsgrads und können diesen gezielt einsetzen*



SpeedOnSurface	0	3	5	7.5	8	11	14	18	20	22
FuelPerHour	80	90	105	140	131	162	197	251	280	310

Abbildung 1. Fit einer Wertetabelle durch lineare Splines (links) und durch Splines 3. Grades (rechts)

In der Semesteraufgabe haben Sie mittels linearer Interpolation aus einer Wertetabelle eine Funktion konstruiert, die man auch als *Spline 1. Grades* bzw. als *lineares Spline* bezeichnet (siehe Abbildung 1). Allgemeiner nennt man eine Funktion, die stückweise aus Polynomen von höchstens n-tem Grad zusammengesetzt ist, auch *Spline n-ten Grades*. Ein Spline n-ten Grades ist also eine Funktion $s : [a; b] \to \mathbb{R}$, für die es eine Sequenz von $(k + 1)$ Knoten

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_k = b$$

gibt, so dass das Spline jeweils zwischen zwei benachbarten Knoten x_i und x_{i+1} als Polynom höchstens n-ten Grades geschrieben werden kann. Für jedes $i \in \{0, 1, 2, ..., k - 1\}$ gibt es damit eine Liste von Polynomkoeffizienten $a_{i,*} \in \mathbb{R}$, so dass

$$s(x) = a_{i,n} \cdot x^n + ... + a_{i,2} \cdot x^2 + a_{i,1} \cdot x + a_{i,0} \text{ für } x \in [x_i; x_{i+1}]$$

gilt.

Nach dieser formalen Definition von Splines, können wir versuchen, Splines zu konstruieren. Dabei gehen wir allerdings den umgekehrten Weg: Ausgangspunkt ist typischer Weise eine Wertetabelle, aus deren erster Zeile sich die Werte für die Knoten ergeben: Für die in Abbildung 1 dargestellte Tabelle liegen die Knoten also bei

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= 3 \\ &\vdots \\ x_8 &= 20 \\ x_9 &= 22 \end{aligned}$$

Nachdem die Knoten festgelegt sind versuchen wir in einem zweiten Schritt für jedes der Intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ ein Polynom zu konstruieren, welches an den Randpunkten x_i und x_{i+1} jeweils die in der zweiten Zeile der Wertetabelle hinterlegten Funktionswerte $s_i = s(x_i)$ und $s_{i+1} = s(x_{i+1})$ annimmt. In unserem Beispiel suchen wir also zu $x_0 = 0$ und $x_1 = 3$ ein Polynom $p_0(x)$, mit

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 80 \\ p_0(3) &= 90 \end{aligned}$$

und zu $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ ein Polynom $p_1(x)$, mit

$$\begin{aligned} p_1(3) &= 90 \\ p_1(5) &= 105 \end{aligned}$$

Für die (noch unbekannten) Koeffizienten $a_{0,*}$ jedes der Polynome, erhalten wir auf diese Weise jeweils zwei Gleichungen. Für $p_0(x)$ sind dies in unserem Beispiel die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{0,n} \cdot 0^n + ... + a_{0,2} \cdot 0^2 + a_{0,1} \cdot 0 + a_{0,0} &= 80 \\ a_{0,n} \cdot 3^n + ... + a_{0,2} \cdot 3^2 + a_{0,1} \cdot 3 + a_{0,0} &= 90 \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

und für das Polynom $p_1(x)$ die Gleichungen[1]

$$\begin{aligned} a_{1,n} \cdot 3^n + ... + a_{1,2} \cdot 3^2 + a_{1,1} \cdot 3 + a_{1,0} &= 90 \qquad (2.1.2) \\ a_{1,n} \cdot 5^n + ... + a_{1,2} \cdot 5^2 + a_{1,1} \cdot 5 + a_{1,0} &= 105 \end{aligned}$$

Allgemeiner formuliert konstruieren wir ein Spline vom Grad n für eine Wertetabelle mit k Spalten

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$s(x)$	s_0	s_1	s_2	$\cdots$	s_k

also, indem wir versuchen $k-1$ Polynome

$$p_i(x) = a_{i,n} \cdot x^n + ... + a_{i,2} \cdot x^2 + a_{i,1} \cdot x + a_{i,0} \qquad (2.1.3)$$

[1]Beachten Sie, dass die Gleichungen (2.1.1) und (2.1.2) für die Koeffizienten benachbarter Polynome zwar unterschiedliche (unbekannte) Koeffizienten enthalten, aber ansonsten aus den selben Zahlenwerten (hier $3^n, 3^{n-1}, \ldots, 3$ und 90) bestehen. Dies hat damit zu tun, dass benachbarte Polynome an den Knotenpunkten identische Werte annehmen sollen.

zu konstruieren, die an den durch die Wertetabelle vorgegebenen Knoten jeweils den Bedingungen

$$p_i(x_i) = s_i \quad i = 0, ..., k-1 \tag{2.1.4}$$
$$p_i(x_{i+1}) = s_{i+1} \; i = 0, ..., k-1$$

genügen. In vielen Fällen reichen dieses Bedingungen jedoch nicht aus, um alle Polynomkoeffizienten $a_{i,j}$ eindeutig festzulegen.

2.1.1. lineare Splines. Bei linearen Splines ist jedes der Spline-Polynome (2.1.3) eine lineare Funktion. Es gilt also

$$p_i(x) = a_{i,1} \cdot x + a_{i,0}$$

Der Bequemlichkeit halber bezeichnen wir die Koeffizienten $a_{i,1}$ und $a_{i,0}$ im Folgenden mit m_i (Steigung einer Geraden) und b_i (Offset vom Nullpunkt). Ein Spline 1. Grades besteht also aus den Funktionen

$$p_i(x) = m_i \cdot x + b_i, \; i = 0, ..., (k-1) \tag{2.1.5}$$

mit vorerst noch unbekannten Werten m_i und b_i. Die Bedingung (2.1.4) hat für lineare Splines damit die Form

$$m_i x_i + b_i = s_i, \; i = 0, ..., k-1 \tag{2.1.6}$$
$$m_i x_{i+1} + b_i = s_{i+1}, \; i = 0, ..., k-1 \tag{2.1.7}$$

Die Gleichungen 2.1.6 und 2.1.7 stellen für die noch unbekannten Werte m_i und b_i ein lineares Gleichungssystem dar (zur Erinnerung: x_i und s_i sind Zahlen, die man einer Wertetabelle entnimmt), welches sich mit Hilfe des Gaussalgorithmus lösen lässt: Zieht man nämlich (2.1.6) von (2.1.7) ab, so erhält man

$$\begin{aligned} m_i (x_{i+1} - x_i) &= s_{i+1} - s_i, \; i = 1, ...(k-1) \\ \Leftrightarrow m_i &= \frac{s_{i+1} - s_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (2.1.6) ein, so ergibt sich ausserdem

$$b_i = s_i - m_i x_i$$

Zusammengefasst erhalten wir damit den folgenden

Satz 74 (lineare Splines). *Sei $x_0 < x_1 < ... < x_k$. Ein lineares Spline s, dessen Graph die Punkte $(x_0, s_0), ...(x_k, s_k)$ enthält, besteht aus k Geradenstücken*

$$s_{|[x_i;x_{i+1}]}(x) = m_i \cdot x + b_i$$

mit

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{s_{i+1} - s_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{für } i = 0, 1, ..., (k-1) \\ b_i &= s_i - m_i x_i = \frac{s_i x_{i+1} - s_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{für } i = 0, 1, ..., (k-1) \end{aligned}$$

2.1.2. Freiheitsgrade. Die Bedingung (2.1.4) reicht für Splines höheren Grades als 1 nicht aus, um die Koeffizienten aller Splinepolynome eindeutig festzulegen. Um dies besser zu verstehen, eignet sich der Begriff des Freiheitsgrads (engl. degree of freedom). Darunter versteht man in der Mathematik die Anzahl unabhängiger (!) Parameter, die einer spezifischen Fragestellung "anhaften". Im Fall von Splines sind die "unabhängigen Parameter" durch die Polynomkoeffizienten

$$a_{i,j},\ 0 \le i \le k-1,\ 0 \le j \le n$$

gegeben, da unabhängig von den Werten, die diese Koeffizienten annehmen, stets ein anderes Spline resultiert. Ein Spline n-ten Grades mit $k+1$ Knoten[2] besitzt in dieser Terminologie also

$$k \cdot (n+1) \tag{2.1.8}$$

Freiheitsgrade.

Um diese Zahl der Freiheitsgrade einzuschränken, brauchen wir Bedingungen (engl. constraints). Jede neue (!) Bedingung[3], die an die zur Verfügung stehenden freien Parameter (=Freiheitsgrade) gestellt wird, erlaubt uns, einen der bisher unabhängigen Parameter durch die anderen Parameter auszudrücken: Die Zahl der Freiheitsgrade reduziert sich durch jede neue Bedingung also um 1.

Beispiel. *Da die Bedingungen* (2.1.4) *unabhängig voneinander sind, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade für ein Spline vom Grad n, welches an vorgegebenen Stellen Werte aus einer Wertetabelle annehmen soll, auf*

$$k \cdot (n+1) - 2k \quad = \quad k \cdot (n-1) \tag{2.1.9}$$

Im Fall linearer Splines ($n = 1$*), ist die Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade somit* 0*, was nichts anderes bedeutet, als dass ein lineares Spline durch die Forderung* (2.1.4) *vollständig bestimmt wird (siehe Satz 74). Ist dagegen der Grad des Splines grösser 1, so ist die Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade 2.1.9 echt grösser als 0. In diesen Fällen benötigen wir also weitere Bedingungen, um das Spline eindeutig festzulegen.*

2.1.3. Splines höheren Grades. Für Splines mit einem höheren Grad als 1 fehlen nach (2.1.9) noch $k \cdot (n-1)$ Bedingungen, um *alle Freiheitsgrade zu eliminieren* bzw. um das Spline eindeutig festzulegen.

Diese "zusätzlichen Freiheitsgrade" erlauben uns, weitere Bedingungen an das Spline zu stellen, was wir dazu nutzen können, einen "besseren Fit" der Wertetabelle zu erreichen. Konkret werden wir verlangen, dass der Graph des Splines an den Knotenpunkten keine Knicke aufweist (siehe Abbildung 1 rechts), oder - mathematisch ausgedrückt - dass der Graph des Splines *glatt* verläuft. Mit unserem jetzigen Wissen können wir diesen Gedanken allerdings noch nicht präzise formulieren. Dazu benötigen wir das Werkzeug der Differentialrechnung, welches wir im Folgenden einführen.

---

[2] $k+1$ Knoten entsprechen k verschiedenen Splinepolynomen

[3] Eine neue oder *unabhängige* Bedingung ist eine Bedingung, die sich nicht aus den vorgängig bereits aufgestellten Bedingungen herleiten lässt. So sind für die freien Parameter x und y die Bedingungen $x+y=0$ und $x-y=0$ unabhängig voneinander, da wir aus der Gültigkeit der Bedingung $x+y=0$ nichts über den Wahrheitsgehalt der Gleichung $x-y=0$ aussagen können. Dagegen sind die Bedingungen $x+y=0$ und $2x+2y=0$ nicht unabhängig voneinander, da die $2x+2y=0$ automatisch erfüllt ist, wenn $x+y=0$ gilt.

2.2. Stetige Funktionen

2.2.1. Stetigkeit.

Lernziele:

- *Sie wissen, was eine stetige Funktion ist, und können anhand des Graphen einer Funktion erkennen, ob eine Funktion stetig ist*
- *Sie können die Unstetigkeitsstellen einer Funktion im Funktionsgraph identifizieren*

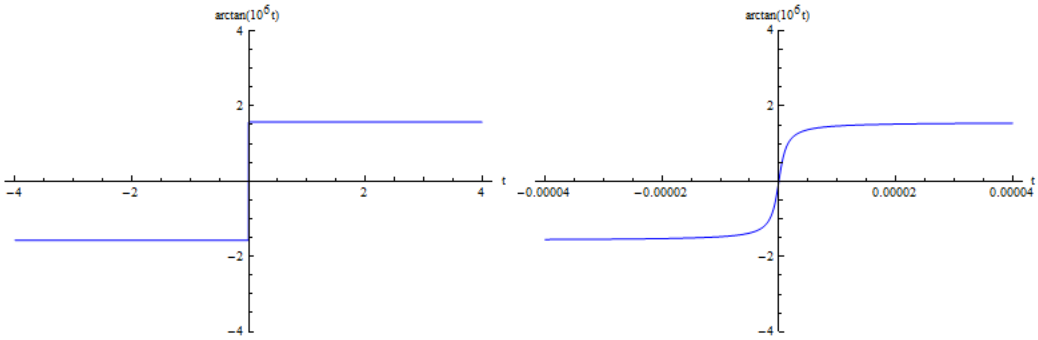


Abbildung 2. Die Funktion arctan $(10^6 t)$ scheint an der Stelle 0 schlagartig vom Wert $-\frac{\pi}{2}$ auf den Wert $\frac{\pi}{2}$ zu springen (links). Untersucht man den Prozess aber genauer, d.h. mit einer kleineren Auflösung auf der "Zeitachse", so verläuft der Prozess dennoch kontinuierlich (rechts).

Die Natur macht keine Sprünge: Prozesse in der Natur verhalten sich in der Regel so, dass eine kleine Änderung der Ausgangslage nur zu einer kleinen Veränderung der Konsequenzen führt: Es ist beispielsweise nicht möglich, mit einem Fahrzeug *spontan* 10 km/h schneller zu fahren. Stattdessen wird das Fahrzeug nacheinander alle Geschwindigkeitswerte durchlaufen, bis es die um 10 km/h erhöhte Endgeschwindigkeit erreicht hat.

Dieser Sachverhalt gilt sogar für sehr schnelle Prozessen, wie z.B. Explosionen oder die heute von der Klimaforschung gerne erwähnten Tipping-Points. Bei solchen Prozessen handelt es sich in der Regel um Kettenreaktionen, die einmal angestossen nur sehr schwer zu stoppen sind. Dennoch verlaufen sie kontinuierlich: Die Energie einer Explosion wird zu Beginn erst langsam und dann immer schneller freigesetzt, so dass ein aussenstehender Beobachter den Eindruck gewinnt, der Vorgang wäre schlagartig abgelaufen.

Für solche kontinuierlich ablaufende Prozesse hat die Mathematik einen eigenen Begriff geprägt:

Definition 75 (Stetigkeit). Eine Funktion f heisst *stetig* (engl.: *continuous*), wenn eine kleine Änderung des Funktionsarguments nur eine kleine Änderung des Funktionswerts zur Folge hat, d.h. wenn wir aus $x \approx y$ folgern können, dass auch die zugehörigen Funktionswerte nahe beieinander liegen:

$$x \approx y \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(y)$$

Formaler nennen wir eine Funktion f an der Stelle x_0 stetig, wenn es für jedes noch so kleine (rote) Intervall

$$I_\epsilon \quad = \quad (f(x_0) - \epsilon; f(x_0) + \epsilon)$$

(die Zahl ϵ, die zur Angabe des Intervalls benötigt wird, soll klein aber echt grösser 0 sein) um den Funktionswert $f(x_0)$ (siehe Abbildung 3) immer ein (grünes) Intervall

$$I_\delta \quad = \quad (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$$

um das Argument x_0 herum ($\delta > 0$) gibt, so dass die Funktionswerte für alle Argumente aus dem grünen Intervall immer im roten Intervall I_ϵ liegen:

$$x \in I_\delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \in I_\epsilon$$

Wichtig an dieser Definition ist, dass die Streifen I_ϵ und I_δ echte Intervalle sind ($\epsilon = 0$ und $\delta = 0$ sind nicht zulässig).[4]

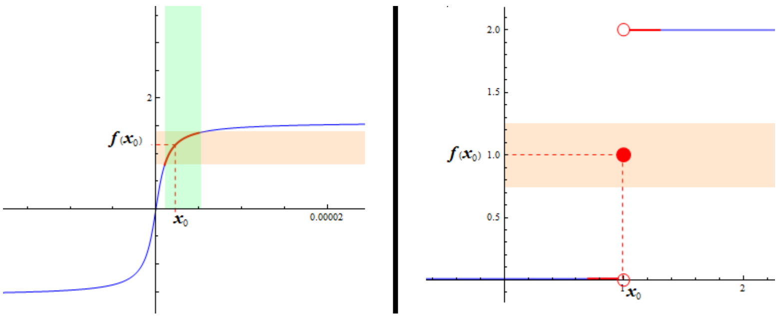


Abbildung 3. Stetige Funktion (links): Unabhängig davon, wie schmal man den roten Streifen I_ϵ wählt, wird man immer einen schmalen grünen Streifen I_δ um x_0 herum finden, so dass der Graph der Funktion innerhalb des grünen Streifens nie den roten Streifen verlässt.
Unstetige Funktion (rechts): Wählt man den roten Streifen zu schmal, so gibt es keinen grünen Streifen um die Stelle x_0 mehr, innerhalb dessen der Graph der Funktion den roten Streifen nicht verlässt.

Bemerkung. *Die Abbildung 2 zeigt eine stetige Funktion, die ihre Werte in der Nähe von 0 sehr schnell, d.h. auf einer Skala von 10^{-5} Einheiten auf der t-Achse, ändert. Dennoch nennen wir diese Funktion stetig. Die Definition der Stetigkeit erlaubt also durchaus Funktionen, die sich sehr schnell verändern: Für solche Funktionen ist lediglich das in Abbildung 3 dargestellte grüne Intervall I_δ, relativ zum roten Intervall gesehen, sehr klein. Oder anders ausgedrückt: Die Zahl δ ist dann sehr viel kleiner als die Zahl ϵ.*

Da der Wert $\delta = 0$ bei der Definition der Stetigkeit explizit verboten ist, verbietet die Stetigkeit aber sprunghafte Veränderungen des Funktionsgraphen (siehe Abbildung 3 rechts): Verkleinern

[4] Mit Hilfe sogenannter Quantoren kann man auch kurz schreiben:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Man liesst diesen Ausdruck: “Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $|x - x_0| < \delta$ automatisch $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ gilt” *wir nämlich an der* Sprungstellen *den roten Streifen so, dass er schmaler als die Sprungweite der Funktion ist, besteht das grüne Intervall nur noch aus einem einzigen Zahlenwert, nämlich* x_0*. Damit ist es aber zwingend erforderlich, dass* $\delta = 0$ *ist, was wir bei der Definition der Stetigkeit aber explizit verboten haben: eine Funktion ist also an einer Sprungstelle nicht stetig, bzw.* unstetig*.*

Nach der vorangegangenen Bemerkung lässt sich die Stetigkeit einer Funktion f leicht am Funktionsgraphen ablesen: Ist die Funktion in der unmittelbaren Umgebung von x_0 definiert, so ist die Funktion in x_0 genau dann stetig, wenn der Graph dort aus einer durchgehenden Linie besteht, d.h. wenn der Graph dort mit einem Stift "ohne abzusetzen" gezeichnet werden kann. Wichtig ist, dass dabei nur die unmittelbare Umgebung des Punktes $(x_0, f(x_0))$ eine Rolle spielt. Ein klein wenig vom Punkt $(x_0, f(x_0))$ entfernt darf der Stift schon wieder abgesetzt werden.

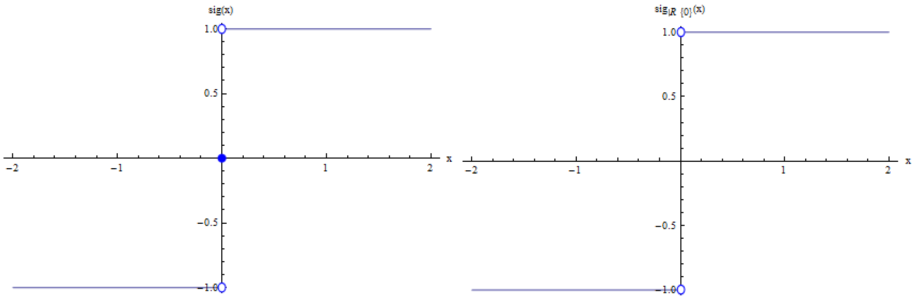


Abbildung 4. Die Signumfunktion (links) kann durch Entfernen der Unstetigkeitsstelle 0 zu einer stetigen Funktion gemacht werden (rechts). Die Funktion ist an den verbleibenden Argumenten $x \neq 0$ überall stetig.

Beispiel. *Die Vorzeichenfunktion (*Signum-Funktion*)*

$$\textit{sig}: \begin{cases} \mathbb{R} & \to \{-1, 0, 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} -1 & \textit{falls } x < 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \\ 1 & \textit{falls } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

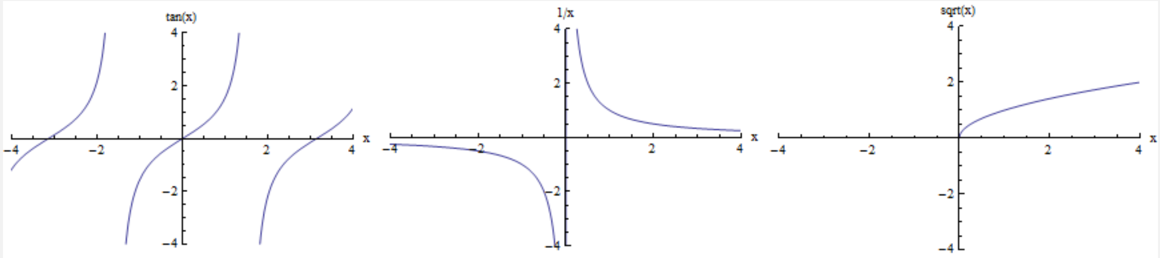
ist an der Stelle $x = 0$ *unstetig, da in jeder noch so kleinen Umgebung von* 0 *immer auch Funktionswerte liegen, die den Wert* 1 *oder* -1 *annehmen. Überall sonst ist die Signum-Funktion dagegen stetig. Entsprechend dieser Beobachtung besteht der Funktionsgraph in Abbildung 4 aus drei Segmenten: je eine Linie für* $x < 0$ *und* $x > 0$ *und ein Punkt an der Stelle* $x = 0$.

Die Funktion sig$_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ *ist dagegen stetig, da wir die einzige Unstetigkeitsstelle* $x = 0$ *aus dem Definitionsbereich der Funktion entfernt haben. Für jede andere Stelle* x_0 *aus dem Definitionsbereich* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *der Funktion gibt es nämlich einen kleinen Bereich, in dem der Graph der Funktion ohne Abzusetzen gezeichnet werden kann: Man muss beim Zeichnen lediglich aufpassen, dass man dabei die Ordinatenachse nicht überschreitet.*

Beispiel. *Wie man aus Abbildung 1 ersehen kann sind Splines stetige Funktionen. Dies liegt daran, dass Polynome innerhalb ihres Definitionsbereichs grundsätzlich stetig sind und dass wir an den Nahtstellen der Splinepolynome mit der Forderung* (2.1.4) *sicherstellen, dass die* *aneinander grenzenden Polynome dort stets den selben Funktionswert annehmen (siehe auch den Kommentar zu* (2.1.1) *und* (2.1.2)*).*

Aufgabe 76.

Untersuchen Sie die elementaren Funktionen auf ihre Stetigkeit. Denken Sie dabei vor allem auch an die Funktionen



a) tan

b) $\cdot^{-1}$

c) $\sqrt{\cdot}$

Ergebnis

Alle elementaren Funktionen sind stetig.

Lösungweg

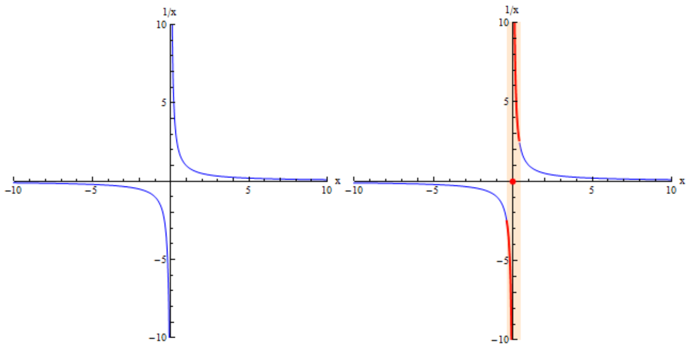


Abbildung 5. Die Kehrwertfunktion (links) kann durch Hinzunahme eines Funktionswerts an der Stelle 0 zu einer unstetigen Funktion gemacht werden (rechts). In jeder noch so kleinen Umgebung um das Argument $x = 0$ gibt es Funktionswerte, die sehr weit vom Funktionswert $\widehat{\text{rez}}\,(0) = 0$ entfernt liegen.

Beispiel. *Wie wir in der vorangegangenen Aufgabe gesehen haben, ist die Kehrwertfunktion*

$$\mathit{rez}: \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$$

stetig. Wir können diese Funktion aber leicht so erweitern, dass die Funktion unstetig wird. Dazu müssen wir der Funktion an der Stelle 0 lediglich einen Funktionswert zuweisen. Die Funktion

$$\widehat{\text{rez}}:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \begin{cases}\frac{1}{x} & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{falls } x=0\end{cases}\end{cases}$$

ist an der Stelle 0 unstetig, da in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 immer auch Funktionswerte liegen, die weit von $\widehat{\text{rez}}\,(0)=0$ entfernt sind (siehe rote Linien in Abbildung 5).

Beispiel 77. *Ohne Beweis: Eine Funktion die durch einen Term definiert ist, in dem nur stetige Funktionen und die Operationen Plus, Minus, Mal, Geteilt und Hoch vorkommen, ist innerhalb ihres Definitionsbereichs stetig.*

Beispiel. *Diese wichtige Aussage ermöglicht uns, in der Regel sofort zu erkennen, ob eine Funktion, die durch einen Term definiert ist, stetig ist: Kommen in diesem Term nämlich nur stetige Funktionen und die oben genannten Rechenoperationen vor, so ist die resultierende Funktion sicher stetig. Ist eine der im Funktionsterm enthaltenen Funktionen dagegen unstetig (z.B. die Signumfunktion), so ist die Chance gross, dass die daraus gebildete Funktion wieder unstetig ist, wobei letzteres immer einer genaueren Untersuchung bedarf.*

Beispiel. *Nach der vorangegangenen Feststellung ist die Funktion*

$$f(x) = \frac{e^{x^2-3x+7}+\ln(x-2)}{x+9}$$

innerhalb ihres Definitionsbereichs stetig. Die Funktion

$$g(x) = e^{\text{sig}(x-3)}$$

ist dagegen an der Stelle $x=3$ vermutlich unstetig. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} g(x)=e^{-1}=\frac{1}{e} &\quad \text{für} \quad x<3\\ g(3)=e^{0}=1 &\quad \text{für} \quad x=3\\ g(x)=e &\quad \text{für} \quad x>3\end{aligned}$$

Der Graph springt in der Nähe von $x=3$ also von der Zahl $\frac{1}{e}$ über 1 auf die Zahl e. Die Funktion ist also tatsächlich an der Stelle $x=3$ unstetig.

2.2.2. Stetige Fortsetzung.

Lernziele:

- *Sie können entscheiden, ob eine Funktion stetig fortgesetzt werden kann und die stetige Fortsetzung einer Funktion angeben*

Wir betrachten die Funktion

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{0\} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \frac{x^2}{x}\end{cases}$$

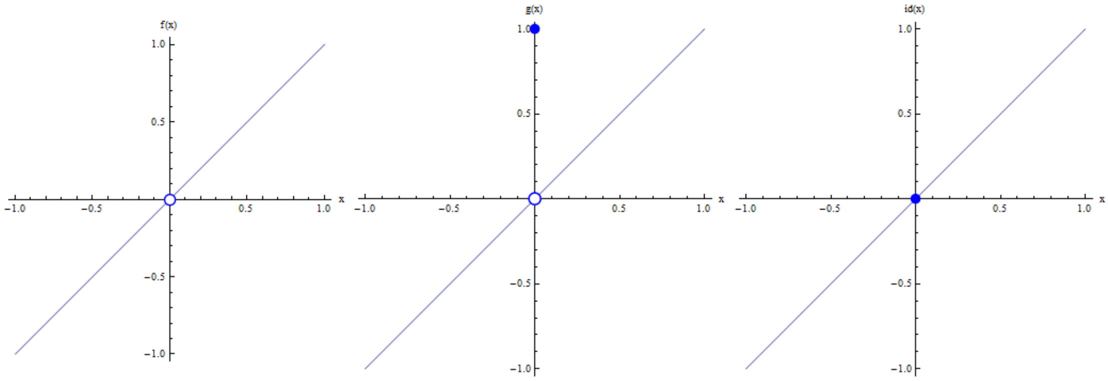


Abbildung 6. Eine an der Stelle $x = 0$ nicht definierte Funktion f (links) kann an dieser Stelle durch Hinzunahme eines weiteren Funktionswerts fortgesetzt werden (Mitte). Selbst wenn f eine stetige Funktion war, muss die Fortsetzung dieser Funktion nicht stetig sein. Ist die Fortsetzung der Funktion f weiterhin stetig (rechts), so spricht man von einer *stetigen Fortsetzung*.

Da der Term, durch den die Funktion f definiert wird, an der Stelle $x = 0$ undefiniert ist, haben wir $x = 0$ aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen. Überall sonst ist die Funktion f stetig (siehe 77), wie man auch am Graph von f gut erkennen kann (siehe Abbildung 6).

Da die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, können wir der Funktion an dieser Stelle irgendeinen Wert zuweisen, ohne die Wohldefiniertheit zu verletzten. Eine mögliche *Erweiterung* der Funktion f wäre also, der Funktion an der Stelle $x = 0$ den Wert 1 zuzuweisen. Die so entstandene Funktion

$$\hat{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

hat allerdings den Nachteil an der Stelle $x = 0$ unstetig zu sein (siehe Abbildung 6).

Aufgabe 78.

Finden Sie für die Funktion f eine Erweiterung, die ausserdem stetig ist.

Lösungweg

Allgemein definieren wir

Definition 79. Sei $f : D \to Z$ eine stetige Funktion. Eine in $D^\star \supset D$ definierte stetige Funktion $g : D^\star \to Z^\star$ mit der Eigenschaft

$$g(x) \quad = \quad f(x) \text{ für alle } x \in D$$

heisst *stetige Fortsetzung* von f.

Hat eine stetige Funktion vereinzelte Definitionslücken, so ist die stetige Fortsetzung, falls sie existiert, eindeutig bestimmt.

Aufgabe 80. stetige Fortsetzung

Bestimmen Sie die Definitionsmenge der folgenden Funktionen, und geben Sie - wenn möglich - eine stetige Fortsetzung der Funktionen an:

a) $a(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

b) $b(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$

c) $c(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

d) $d(h) = \frac{(2+h)^2-2^2}{h}$

Lösungweg

2.3. Glatte Funktionen

2.3.1. Glatte Funktionen.

Lernziele:

- *Sie wissen, was eine glatte Funktion ist, und können anhand des Graphen einer Funktion erkennen, ob eine Funktion glatt ist*
- *Sie können an den Graphen einer glatten Funktion eine Tangente anlegen und deren Steigung ablesen*

Eine stetige Funktion f, d.h. eine Funktion deren Graph keine “Sprünge” macht, heisst *glatt* (engl.: *smooth*), wenn der Graph ausserdem keine Knicke besitzt (siehe Abbildung 7). Ist eine Funktion glatt, so lässt sich an jedem Punkt des Funktionsgraphen nur eine einzige *Tangente* einzeichnen (die Tangente des Graphen an der Stelle x ist dabei diejenige Gerade, die den Funktionsgraphen im Punkt $(x, f(x))$ *berührt*, aber nicht durchquert[5]).

Beispiel. *Splines 1. Grades haben an den Knotenpunkten in der Regel Knicke (siehe Abbildung 1). Sie sind also nicht glatt. Da dieser Sachverhalt für viele Anwendungen störend ist, wäre es schön, wenn wir diese Knicke vermeiden könnten. Dies lässt sich für Splines 1. Grades leider nicht erreichen, da dort durch die Vorgabe der Splinewerte an den Knotenpunkten bereits alle Freiheitsgrade eliminiert sind (siehe 2.1.9).*

Da Splines mit einem Grad > 1 aber noch weitere Freiheitsgrade besitzen, die nicht durch die vorgegebenen Werte an den Knotenpunkten eliminiert wurden, ist es für solche Splines möglich, zu verlangen, dass ihr Graph glatt verläuft. Um diese zusätzlichen Bedingungen zu formulieren, muss man allerdings zunächst die Steigung *der Tangente an den Knotenpunkten rechnerisch bestimmen können. Dass dies möglich ist, ist eines der wichtigsten Ergebnisse der Analysis.*

[5] Diese Aussage gilt strenggenommen nur, wenn der Graph in der Umgebung der Stelle x keine Gerade ist. Sonst würde man als Tangente ebendiese Gerade verwenden

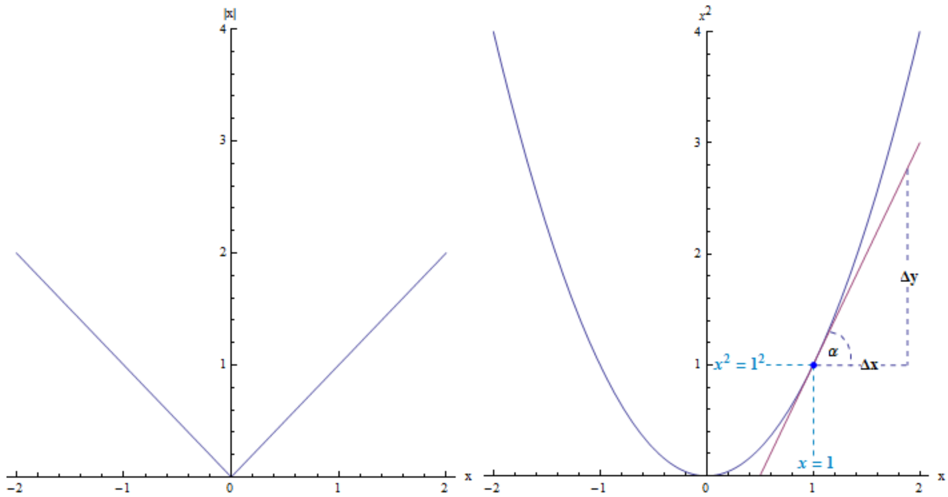


Abbildung 7. Der Graph der Betragsfunktion (links) hat an der Stelle $x = 0$ einen Knick. Die Betragsfunktion ist also nicht *glatt*. Anders verhält es sich mit der Quadratfunktion (rechts). Bei ihrem Graphen lässt sich an jedem Punkt eine Tangente einzeichnen. Eine davon ist am Punkt $(1, 1)$ zusammen mit dem Steigungswinkel α violett dargestellt. Die Quadratfunktion ist damit glatt.

Aufgabe 81.

Überlegen Sie sich anhand der Funktionsgraphen der elementaren Funktionen, welche dieser Funktionen glatt verlaufen und welche nicht.

Ergebnis

Die Graphen aller elementaren Funktionen sind glatt.

ohne Lösungsweg

2.3.2. Differenzenquotientent und Differentialquotient.

Lernziele:

- *Sie kennen die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient und wissen, in welchem Zusammenhang diese Begriffe stehen*
- *Sie wissen, wie der Differentialquotient mit der Tangente eines Funktionsgraphen zusammenhängt*
- *Sie können die Steigung einer Funktion an einer vorgegebenen Stelle berechnen*

In Abbildung 7 ist die Tangente an den Graphen der Quadratfunktion im Punkt $(1, 1)$ eingezeichnet. Wie man aus der Darstellung entnimmt, hat der Steigungswinkel der Tangente dabei Grösse α. Es hat sich in der Analysis allerdings als günstig erwiesen, dass man die Steigung der Tangente nicht in Form des Winkels α (im Bogen- oder Gradmass) angibt, sondern stattdessen die “prozentuale Steigung”, d.h. das Verhältnis aus Gegenkathete zu Ankathete eines rechtwinkligen Dreiecks

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.3.1}$$

verwendet.

Aufgabe 82.

Bestimmen Sie für die Gerade

$$g(x) = m \cdot x + b$$

den Steigungswinkel und die (prozentuale) Steigung der Tangente an einer beliebigen Stelle x_0.

Ergebnis

Die Geraden hat überall dieselbe Steigung m. Der Steigungswinkel beträgt $\alpha = \arctan(m)$.

Lösungweg

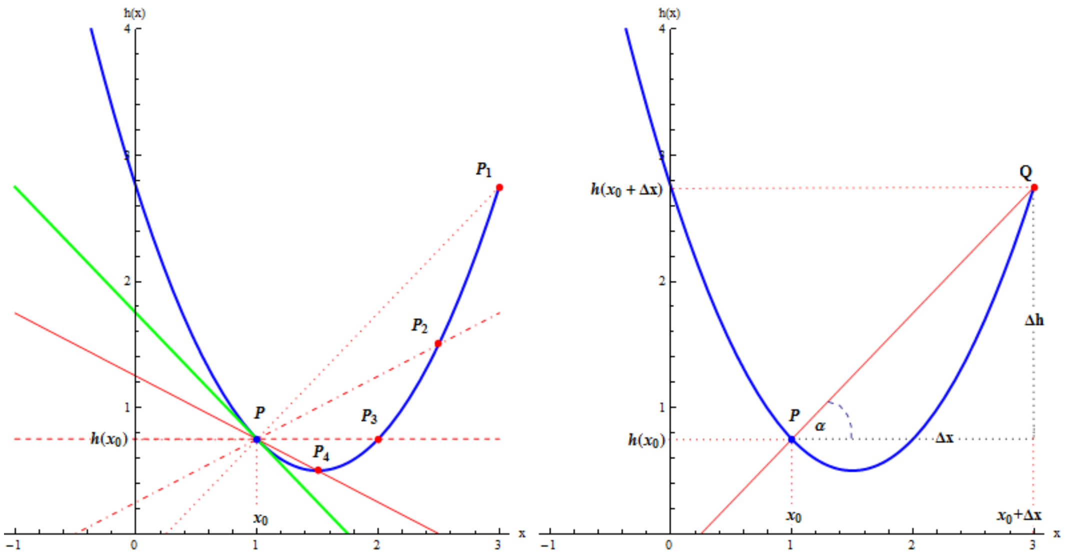


Abbildung 8. Annäherung einer Sequenz mehrerer, den Punkt P enthaltender Sekanten an die Tangente des Funktionsgraphen im Punkt P (links): Die Steigung der Sekanten durch die Punkte $P_1, P_2, P_3, P_4, ...$ nähert sich dabei schrittweise an die Steigung der Tangente im Punkt P an (siehe auch Demo Sekantensteigung). Rechts: Konstruktion der Geradengleichung einer Sekante durch die Punkte P und Q.

In der vorigen Aufgabe haben wir gesehen, wie man die Steigung der Tangente einer Gerade bestimmen kann. Für kompliziertere Funktionen

$$h:\begin{cases}D & \to Z\\ x & \mapsto h\left(x\right)\end{cases}$$

versagt das dort beschriebene Verfahren allerdings. Um auch in diesen Fällen die Steigung einer Tangente bestimmen zu können, machen wir einen Umweg über *Sekantensteigungen*.

Eine *Sekante* ist dabei nichts anderes als eine Gerade, die zwei *verschiedene* Punkte des Funktionsgraphen miteinander verbindet. Die Sekante der Funktion h durch die Punkte P und Q ist auf der rechten Seite von Abbildung 8 rot dargestellt. Für die dort eingezeichnete Sekante gilt

$$\Delta h = h\left(x_0+\Delta x\right)-h\left(x_0\right)$$

woraus für die Steigung dieser Sekante

$$m_{PQ}=\tan\left(\alpha\right) = \frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{h\left(x_0+\Delta x\right)-h\left(x_0\right)}{\Delta x} \tag{2.3.2}$$

folgt.

Um nun die Steigung der auf der linken Seite von Abbildung 8 grün dargestellten Tangente des Graphen von h an der Stelle x_0 zu bestimmen, versuchen wir, diese Tangente durch eine Sequenz von Sekanten anzunähern, die alle durch den Punkt $P=\left(x_0,h\left(x_0\right)\right)$ gehen. Einige dieser Sekanten sind in dieser Abbildung rot eingezeichnet. Für die Steigungen der Sekante durch die Punkte $P=\left(x_0,h\left(x_0\right)\right)$ und $P_i=\left(x_i,h\left(x_i\right)\right)$ gilt nach den vorgängig gemachten Überlegungen

$$m_{PP_i} = \frac{h\left(x_i\right)-h\left(x_0\right)}{x_i-x_0}$$

Für die Steigung einer beliebigen, durch den Punkt $P=\left(x_0,h\left(x_0\right)\right)$ verlaufenden Sekante, müssen wir zunächst den zur Konstruktion der Sekante benötigten zweiten Punkt auf dem Funktionsgraphen auswählen. Dies machen wir, indem wir die 1. Koordinate dieses zweiten Punktes vorgeben: Für die Sekante durch die Punkte $P=\left(x_0,h\left(x_0\right)\right)$ und $Q\left(x\right)=\left(x,h\left(x\right)\right)$ gilt damit

$$m_{PQ(x)} = \frac{h\left(x\right)-h\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

Damit haben wir für jedes x_0 aus dem Definitionsbereich D der Funktion h eine neue Funktion

$$m_{x_o}:\begin{cases}D\backslash\left\{x_0\right\} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}\end{cases}$$

konstruiert, mit der wir die Sekantensteigungen aller Sekanten durch den Punkt $P=\left(x_0,h\left(x_0\right)\right)$ leicht angeben können. Diese Funktion nennen wir in Zukunft den *Differenzenquotient* der Funktion h. In Anlehnung an 2.3.2 hat sich dafür die etwas unsaubere Notation

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h\left(x\right)-h\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

eingebürgert.

Wichtig ist, dass der Differenzenquotient m_{x_0} an der Stelle x_0 undefiniert ist, da eine Sekante stets durch zwei verschiedene Punkt $P\neq Q$ des Funktionsgraphen von h verläuft. Wenn die

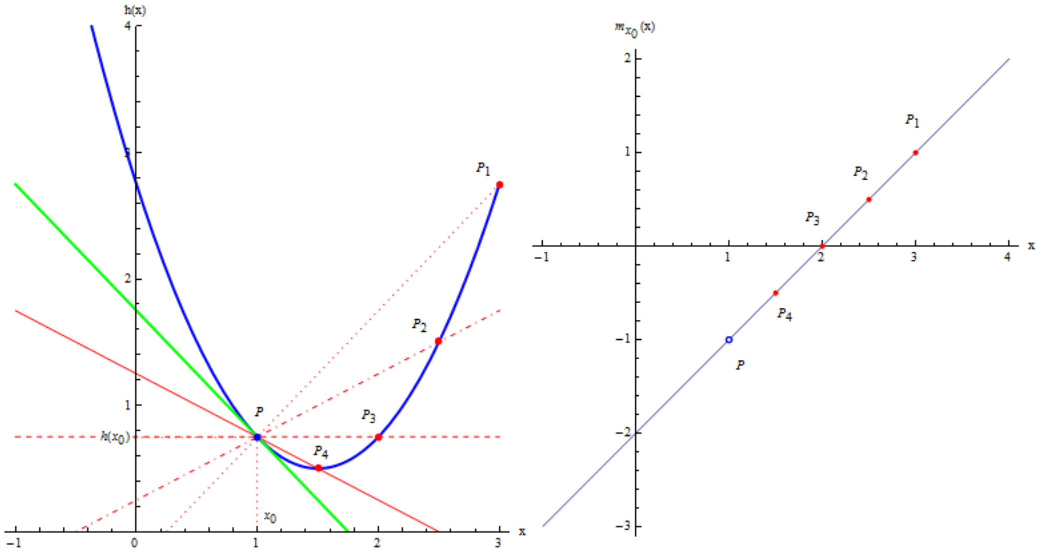


Abbildung 9. Graph der Funktion $h(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ (links) und ihres Differenzenquotienten $m_{x_0}(x)$ für $x_0 = 1$ (rechts). Der Differenzenquotient zeigt die Steigung der Sekanten zwischen den Punkten $P = (x_0, h(x_0))$ und $Q(x) = (x, h(x))$ an. Er ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht definiert, lässt sich dort aber stetig fortsetzten, sofern die Funktion h an dieser Stelle eine eindeutige Tangente besitzt, d.h. glatt ist. Der Funktionswert $m_{x_0}(x_0)$ dieser stetigen Fortsetzung entspricht dann der Steigung der (links grün dargestellten) Tangente im Punkt P.

Funktion h an der Stelle x_0 allerdings glatt ist, so existiert die stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten an der Stelle $x = x_0$ (siehe Abbildung 9) und ihr Wert entspricht der Steigung der Tangente.

Beispiel. *Die in Abbildung 9 dargestellte Funktion lautet*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Der Differenzenquotient an der Stelle $x_0 = 1$ ist demnach für $x \neq 1$ definiert und es gilt

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\cancelto{\frac{3}{4}}{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right)}{x - 1} \\ &= \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}}{x - 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \end{aligned}$$

Die Steigung der Sekante durch die Punkte P und $P_3 = (2, h(2))$ lässt sich mit dem Differenzenquotientent leicht berechnen. Es gilt

$$m_1(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 0$$

was bedeutet, dass diese Sekante flach verläuft, bzw. nicht ansteigt.

Zeichnet man den Funktionsgraphen von $m_1(x)$, so erhält man die auf der rechten Seite von Abbildung 9 dargestellte Kurve. Die überraschend einfache Form dieses Graphen hat ihren Ursprung darin, dass die Ausgangsfunktion $h(x)$ eine Parabel war. Für den Differenzenquotient $m_1(x)$ gilt in diesem Fall nämlich

$$\begin{aligned} m_1(x) &= \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}} \\ &= x-2 \end{aligned}$$

Die stetige Fortsetzung des bei $x = 1$ undefinierten Differenzenquotient $m_1(x)$ ist damit die Gerade $x \mapsto x-2$.

Die Tatsache, dass der Differenzenquotienten m_{x_0} an der Stelle $x = x_0$ stetig fortsetzbar ist, ist kein Zufall: Dies hat damit zu tun, dass die Funktion h an der Stelle x_0 glatt ist (der Graph aus Abbildung 8 hat keinen Knick) und somit an dieser Stelle eine Tangente besitzt, deren Steigung durch den Wert $m_{x_0}(x)$ immer besser angenähert wird, je näher das Argument x dem Ausgangspunkt x_0 kommt.

Dem Wert dieser stetigen Fortsetzung des Differenzenquotient an der Stelle $x = x_0$ entspricht also die *Steigung der Tangente des Graphen von h an der Stelle x_0*. Diesen Wert nennen wir in Zukunft den *Differentialquotient* von h an der Stelle x_0 und schreiben dafür das Symbol[6]

$$\left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Mit Hilfe des Differentialquotienten und dem Funktionswert $h(x_0)$ können wir die Tangentengleichung der Tangente des Graphen von h an der Stelle $x = x_0$ anzugeben. Für diese gilt:

$$t_{x_0}(x) = \left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + h(x_0) \tag{2.3.3}$$

Beispiel. *Der Differentialquotient der im vorangegangenen Beispiel definierten Funktion*

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

[6]Durch diese Notation möchte man zum Ausdruck bringen dass der Differentialquotient aus dem Differenzenquotient

$$\frac{\Delta h}{\Delta x}$$

hervorgeht, indem man den Abstand der beiden Sekantenpunkte $(x_0, h(x_0))$ und $(x, h(x))$

$$\begin{aligned} \Delta x &= x - x_0 \\ \Delta h &= h(x) - h(x_0) \end{aligned}$$

immer kleiner macht, bis die Werte Δx und Δh zu "infinitesimal kleinen Zahlenwerten" dx und dh "entarten", die beide für sich genommen Null sind, deren Verhältnis $\frac{dh}{dx}$ aber im Sinne der stetige Fortsetzung der Sekantensteigung $\frac{\Delta h}{\Delta x}$ weiterhin von Null verschieden sein kann.

beträgt an der Stelle 1 (siehe auch Abbildung 9)

$$\left.\frac{dh\left(x\right)}{dx}\right|_{x=1}=\left.\frac{d\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^{2}+\frac{1}{2}\right)}{dx}\right|_{x=1}=\left.x-2\right|_{x=1}=-1$$

Die Steigung der in Abbildung 8 grün dargestellten Tangenten ist demnach -1 und die Tangente wird durch die Gleichung

$$t_{1}\left(x\right)=\left.\frac{dh\left(x\right)}{dx}\right|_{x=1}\cdot\left(x-1\right)+h(1)=-1\cdot\left(x-1\right)+\frac{3}{4}$$

beschrieben.

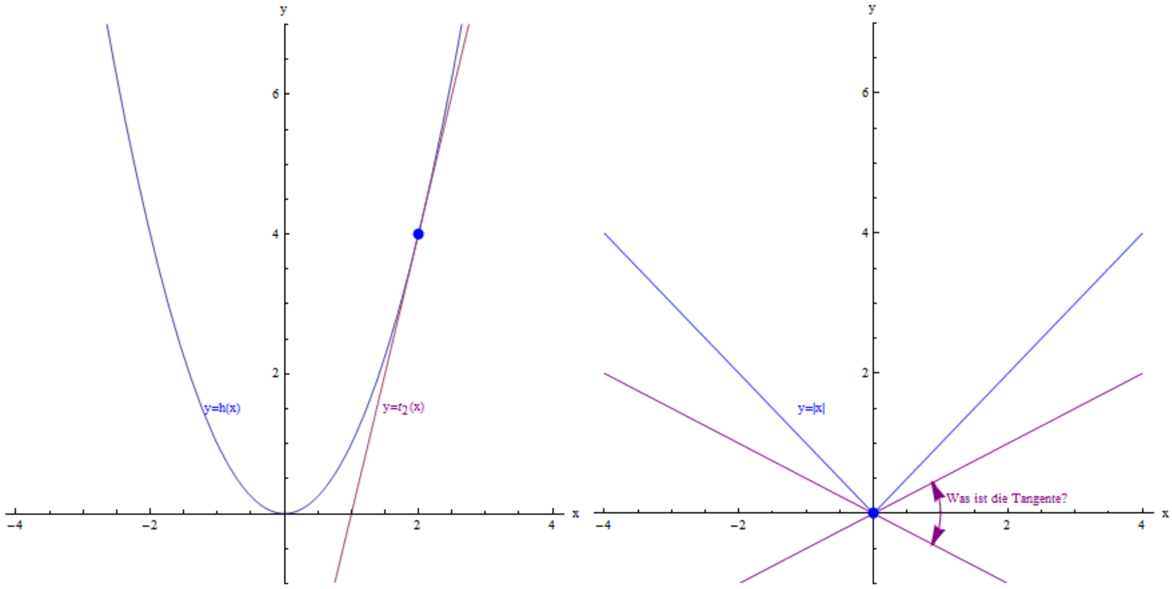


Abbildung 10. Links: Tangente des Graphen $h\left(x\right)=x^{2}$ an der Stelle $x_{0}=2$. Rechts: Die Betragsfunktion hat an der Stelle $x_{0}=0$ einen Knick. Eine eindeutige Tangente lässt sich an dieser Stelle nicht finden.

Beispiel. *Sei*

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto x^{2}\end{cases}$$

Der Differenzenquotientent an der Stelle 2 ist

$$m_{2}:\begin{cases}\mathbb{R}\backslash\left\{2\right\} & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto\frac{x^{2}-2^{2}}{x-2}\end{cases}$$

Es gilt also

$$m_{2}\left(x\right)=\frac{x^{2}-2^{2}}{x-2}=\frac{\cancel{\left(x-2\right)}\left(x+2\right)}{\cancel{x-2}}=x+2$$

Die stetige Fortsetzung von m_2 existiert existiert und der Differentialquotient an der Stelle 2 lautet

$$\left.\frac{d\left(x^2\right)}{dx}\right|_{x=2} = \left. x+2\right|_{x=2} = 2+2 = 4$$

Die Tangente der Quadratfunktion an der Stelle $x=2$ hat damit die Steigung 4 und die Tangentengleichung lautet (siehe Abbildung 10)

$$t_2\left(x\right) = \frac{dx^2}{dx}_{|x=2}\left(x-2\right)+2^2 = 4\left(x-2\right)+4$$

Beispiel. *Die Betragsfunktion*

$$\textit{abs}:\begin{cases}\mathbb{R} & \to \mathbb{R}\\ x & \mapsto \left|x\right|\end{cases}$$

hat an der Stelle $x=0$ einen Knick. Der entsprechende Differenzenquotient ist für $\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$ definiert und es gilt

$$m_0\left(x\right) = \frac{\left|x\right|-\left|0\right|}{x-0} = \frac{\left|x\right|}{x} = \textit{sig}\left(x\right)$$

Es gilt also $m_0 = \textit{sig}_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}$. Diese Funktion ist nicht stetig fortsetzbar. Der Differentialquotient

$$\frac{d|x|}{dx}_{|x=0}$$

existiert also nicht, was sich mit der Beobachtung deckt, dass die Betragsfunktion an dieser Stelle einen Knick hat und dort keine Tangente besitzt (siehe Abbildung 10).

Aufgabe 83. Tangente eines Funktionsgraphen

Bestimmen Sie die Steigung der Tangente des Graphen von

$$r:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\left\{0\right\} & \to \mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}\\ x & \mapsto \frac{1}{x}\end{cases}$$

an der Stelle $x=3$, geben Sie die Tangentengleichung für diese Tangente an und skizzieren Sie den Graphen dieser Tangente zusammen mit der Funktion $r\left(x\right)$ in einem Diagramm.

Ergebnis

Die Steigung der Tangente ist gleich dem Differentialquotient an der Stelle 3. Dieser beträgt

$$\frac{dr(x)}{dx}_{|x=3} = -\frac{1}{9}$$

Die Tangentengleichung lautet damit

$$t_3\left(x\right) = -\frac{1}{9}\left(x-3\right)+\frac{1}{3}$$

Die Skizze findet sich im Lösungsweg.

Lösungweg

2.3.3. Tangentengleichung und Linearisierung.

Lernziele:

- *Sie wissen, was die Linearisierung einer Funktion ist und kennen den Zusammenhang zwischen Linearisierung und Tangentengleichung*
- *Sie können die Linearisierung einer Funktion nutzen, um mit dem Computer Gleichungen zu lösen*

Es ist eines der erstaunlichsten Ergebnisse, der Analysis, dass sich Differentialquotienten durch eine Liste einfacher Rechenregeln leicht bestimmen lassen. Bevor wir uns diesen Regeln widmen, möchten wir aber eine wichtige Anwendung des Differentialquotienten diskutieren.

Wie wir in (2.3.3) gesehen haben, lässt sich mit Hilfe des Differentialquotienten die Gleichung der Tangente einer Funktion $h(x)$ an einer beliebigen Stelle angeben. Die Tangentengleichung für die Tangente an der Stelle x_0 lautet in diesem Fall

$$t_{x_0}(x) = \left.\frac{dh(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + h(x_0)$$

Auch wenn die Tatsache, dass t_{x_0} eine Tangente des Funktionsgraphen ist, interessant sein kann, so liegt die Stärke der Tangentengleichung in einem ganz anderen Bereich: Mit einer gewissen Berechtigung können wir nämlich sagen, dass die Tangente $t_{x_0}(x)$ die "beste Gerade" ist, durch die wir die Funktion $h(x)$ in der Nähe von x_0 *approximieren* können. Diese Beobachtung erlaubt uns, in Aufgaben, in denen wir nur an Funktionswerten interessiert sind, die in der Nähe von x_0 liegen, die (in der Regel komplizierte) Funktion $h(x)$ durch die (viel einfachere) Funktion $t_{x_0}(x)$ zu ersetzten.

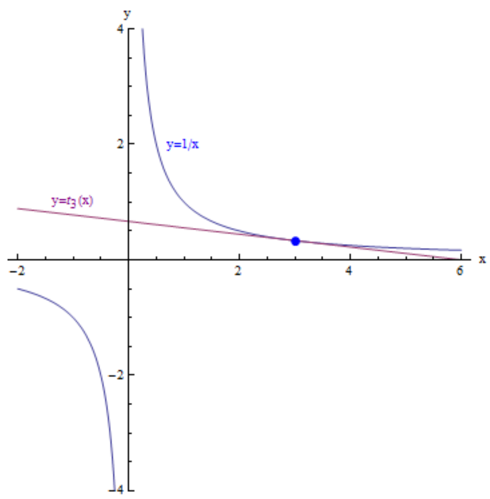


Abbildung 11. Die Funktionswerte der Funktionen $t_3(x)$ und $r(x) = \frac{1}{x}$ stimmen für x-Werte zwischen 2.5 und 3.5 nahezu überein.

Beispiel. *Die Funktion* $r(x) = \frac{1}{x}$ *hat an der Stelle* $x = 3$ *die Tangente*

$$t_3(x) = -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3}$$

Wie man aus Abbildung 11 sieht, stimmen also für Argumente x *in der Nähe von* 3 *die Funktionswerte von* $r(x)$ *und die Funktionswerten von* $t_3(x)$ *näherungsweise übereinstimmen, d.h. es gilt*

$$\frac{1}{x} \approx -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3} \text{für } x \approx 3$$

Für diese Tatsache verwenden wir in Zukunft einen neuen Begriff: die *Linearisierung*. Die Tangente $t_3(x)$ lässt sich also durch folgenden Aussagen beschreiben:

- "$t_3(x)$ ist die Tangente der Funktion $r(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 3$"
- "$t_3(x)$ ist die Linearisierung der Funktion $r(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 3$"

Beide Aussagen beschreiben inhaltlich ein und denselben Sachverhalt und sind deshalb äquivalent. Die zweite Aussage setzt aber einen anderen Fokus: sie besagt nämlich, dass wir die Funktion $r(x)$ in Aufgaben, in denen nur solche Funktionsargumente relevant sind, die "in der Nähe" der Zahl 3 liegen, gefahrlos durch die Funktion $t_3(x)$ ersetzen dürfen, ohne dabei unser Ergebnis zu sehr zu verfälschen.

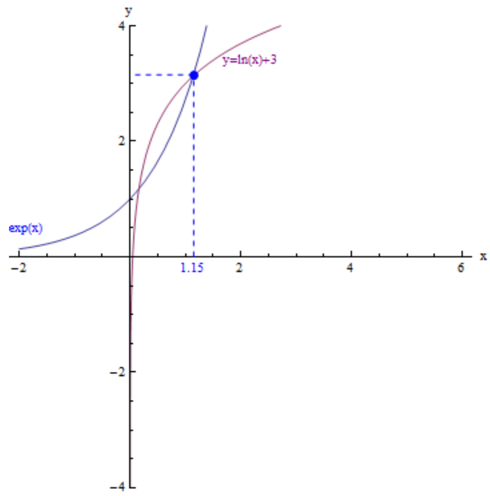
Beispiel. *Sie möchten die Gleichung*

$$e^x = \ln(x) + 3$$

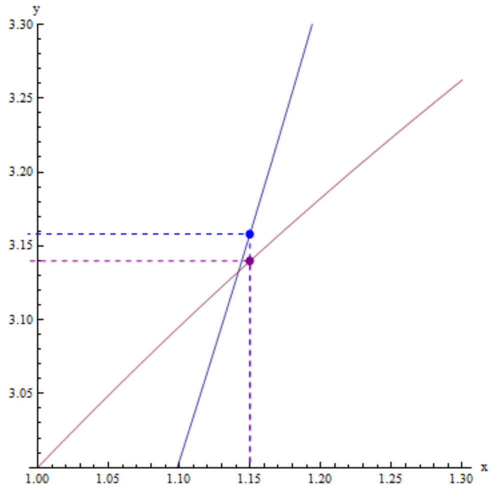
lösen. Diese Aufgabe erscheint auf den ersten Blick einfach, aber selbst Computerprogramme wie WolframAlpha *geben Ihnen für diese Aufgabe nur näherungsweise Lösungen an.*

Solche Lösungen können Sie mit Hilfe der Linearisierung finden. Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

(1) *Lösen Sie die Gleichung graphisch. (Den Graph der Exponentialfunktion kennen Sie. Der Graph der rechten Seite der Gleichung entspricht dem Graph des Logarithmus, wobei dieser um 3 Einheiten nach oben verschoben werden muss):*



(2) *Am Graph der beiden Funktionen können Sie erkennen, dass die Gleichung zwei Lösungen besitzt, von denen wir uns im folgenden nur für diejenige Lösung interessieren, die aufgrund des Graphen bei ungefähr* $x \approx 1.15$ *liegt (die andere Lösung bestimmen wir in Aufgabe 2.5.2). Zoomen wir in den entsprechenden Bereich des Diagramms hinein, so sehen wir, dass die Zahl* $x = 1.15$ *die Gleichung nicht exakt löst, sondern dass die Lösung etwas links davon beim Schnittpunkt der beiden Kurven liegen muss:*



Gut zu sehen ist auch, dass der blaue Graph der Exponentialfunktion und der lila Graph der Funktion $\ln(x) + 3$ *in diesem Bereich annähernd wie Geraden aussehen. Entsprechende Geradengleichungen können wir mit Hilfe der Linearisierung konstruieren: Für* $x \approx 1.15$ *gilt*

$$\begin{aligned} e^x &\approx \left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=1.15} (x - 1.15) + e^{1.15} \\ \ln(x) + 3 &\approx \left.\frac{d(\ln(x) + 3)}{dx}\right|_{x=1.15} (x - 1.15) + \ln(1.15) + 3 \end{aligned}$$

(3) *Bestimmen Sie den Differentialquotienten rechnerisch exakt (siehe Kapitel 2.4) oder ungefähr mit Hilfe eines Computers. Mit dem in Aufgabe 99 geschriebenen Computerprogramm erhalten wir für* $f(x) = e^x$

```
Der Differentialquotient der Funktion f an der Stellen 1.15 ungefähr:
Wert = 3.158194488854815
```

und für $f(x) = \ln(x) + 3$

```
Der Differentialquotient der Funktion f an der Stellen 1.15 ungefähr:
Wert = 0.869564839316921
```

(4) *Setzten Sie das Ergebnis in die Linearisierungsformel ein:*

$$\begin{aligned} e^x &\approx 3.15819\,(x - 1.15) + 3.15819 \\ \ln(x) + 3 &\approx 0.86956\,(x - 1.15) + 3.13976 \end{aligned}$$

(5) *Ersetzen Sie in der Gleichung die rechte und linke Seite durch ihre Linearisierung. Statt*

$$e^x \quad = \quad \ln(x) + 3$$

lösen Sie jetzt also die Gleichung

$$\begin{aligned}
3.15819\,(x-1.15) + 3.15819 &= 0.86956\,(x-1.15) + 3.13976 && \mid -3.13976 \\
3.15819\,(x-1.15) + 0.01843 &= 0.86956\,(x-1.15) && \mid -3.15819\,(x-1.15) \\
0.01843 &= \underbrace{(0.86956 - 3.15819)}_{=-2.28863}(x-1.15) && \mid : (-2.28863) \\
-0.00805285 &= x - 1.15 && \mid +1.15 \\
1.14195 &= x
\end{aligned}$$

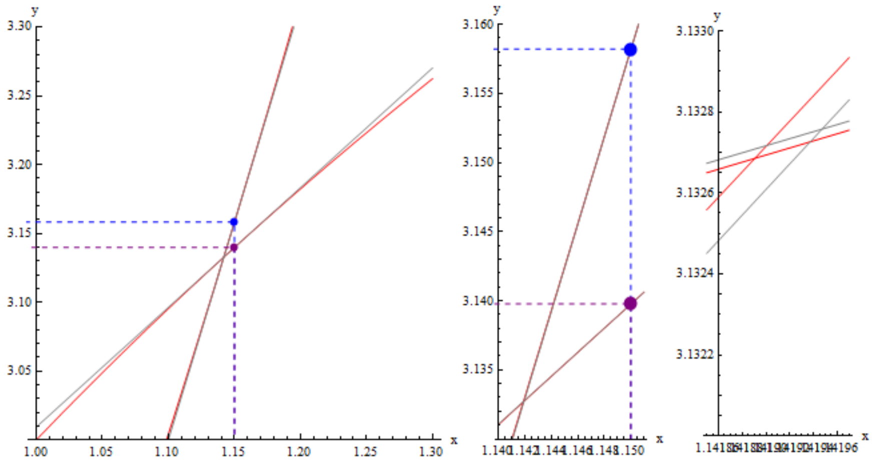


Abbildung 12. Links: die Graphen der Funktionen e^x und $\ln(x)+3$ in der Nähe von $x = 1.15$ (rot). Diese Graphen sind kaum von den im selben Diagramm eingezeichneten Graphen der zugehörigen Linearisierungen (grau) zu unterscheiden. Mitte: dieselben Graphen mit einer höheren Auflösung. Auch wenn sich die beiden roten und die beiden grauen Graphen an unterschiedlichen Stellen schneiden, ist diese Tatsache auch mit der höheren Auflösung nicht mehr zu erkennen. Rechts: erst bei noch höherer Auflösung (4 Dezimalen) sind die unterschiedlichen Schnittpunkte der roten Kurven und grauen Geraden wieder zu erkennen.

Im letzten Rechenschritt haben wir anstelle des Schnittpunktes der beiden in Abbildung 12 dargestellten roten Graphen den Schnittpunkt der beiden dort ebenfalls eingezeichneten, grau dargestellten Tangenten bestimmt. Da die roten und grauen Graphen für $x \approx 1.15$ allerdings kaum zu unterscheidenden sind, liegt auch der Schnittpunkt der grauen Tangenten nicht sehr weit vom Schnittpunkt der roten Graphen entfernt. Wir haben unser Ausgangsproblem also mit sehr guter Genauigkeit gelöst. Das lässt sich auch rechnerisch bestätigen: Das neu gewonnene Resultat $x \approx 1.14195$ liegt in deutlich näher am korrekten Ergebnis $x = 1.14189054891578...$ (Fehler: 0.005%) als unser Startwert 1.15 (Fehler: 0.7%). Wollen wir die Genauigkeit unserer

Rechnung noch weiter verbessern, so wiederholen[7] wir die Schritte 1-5 mit dem neu errechneten Wert $x = 1.14195$ als neuem Startwert. In vielen Fälle verdoppelt sich mit jeder Wiederholung des Verfahrens die Zahl der gültigen Nachkommastellen.

2.4. Die Ableitung

2.4.1. Differentialquotient und Ableitungsfunktion.

Lernziele:

- *Sie kennen die Begriffe Ableitung und Ableitungsfunktion*
- *Sie kennen den Zusammenhang zwischen Ableitung, Differentialquotient und Tangente*

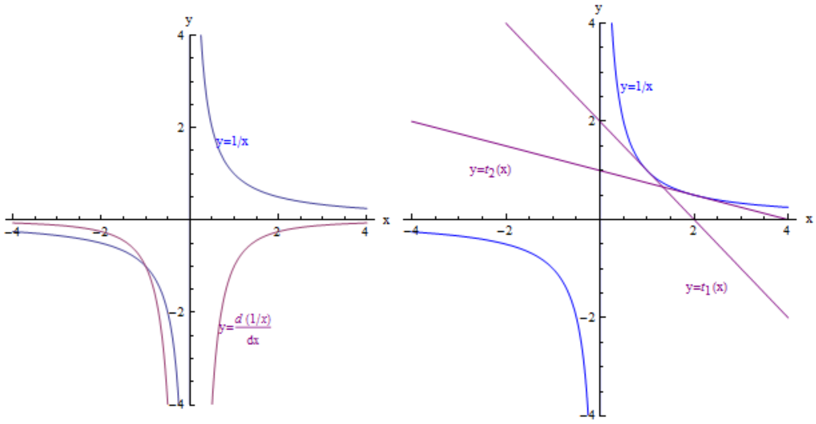


Abbildung 13. Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ und ihrer Ableitungsfunktion (links), sowie der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zusammen mit den beiden Tangentenfunktionen $t_1(x)$ und $t_2(x)$ an den Stellen 1 und 2 (rechts).

In Kapitel 2.3 haben wir uns mit der Frage befasst, wie wir an einer vorgegebenen Stelle x_0 die Tangente an den Graphen einer Funktion f konstruieren können, und sind dabei auf das Konzept des Differentialquotienten gestossen. Diesen konnten wir dadurch bestimmen, dass wir zunächst die Steigung aller durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ verlaufenden Sekanten als Funktion (Differenzenquotient) $m_{x_0}(x)$ aufgefasst haben, und dann in einem zweiten Schritt die stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten an der Stelle $x = x_0$ konstruiert haben. Der Differentialquotient $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ war dann nichts anderes als der Wert dieser stetigen Fortsetzung an der Stelle x_0.

Da wir diese Konstruktion prinzipiell an jeder Stelle x_0, an der die Funktion $f(x)$ glatt ist, durchführen können, können wir grundsätzlich auch die Steigung einer beliebigen Tangente des Funktionsgraphen bestimmen und mittels (2.3.3) sogar deren Tangentengleichung angeben.

[7] Das daraus resultierende Verfahren läuft unter dem Namen *Newton-Verfahren* zur Lösung von Gleichungen

Da es an jeder Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich von f, an der f glatt ist, genau eine solche Tangente gibt, handelt es sich bei der Abbildung, die der Stelle x_0, die Steigung derjenigen Tangente zuordnet, die den Funktionsgraphen am Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührt, sogar um eine Funktion. Da diese Funktion in vielen Anwendungen wichtig ist, wollen wir ihr ab sofort einen eigenen Namen geben:

Definition 84. Sei $f : D \to Z$ eine Funktion, die für alle $x \in D$ glatt ist. Dann existiert die Funktion

$$f' : \begin{cases} D & \to Z \\ x & \mapsto \text{Steigung derjenigen Tangente, die den Graph von } f \text{an der Stelle } (x, f(x)) \text{ berührt} \end{cases}$$

Diese Funktion nennen wir die *Ableitungsfunktion* (oder kurz die *Ableitung*) der Funktion f.

Mit Hilfe des Differentialquotienten können wir die Ableitungsfunktion auch folgender Massen definieren:

$$f' : \begin{cases} D & \to Z \\ x_0 & \mapsto \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \end{cases}$$

Der Bequemlichkeit halber schreiben wir in Zukunft aber nur noch $\frac{df(x_0)}{dx_0}$ anstelle von $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$, womit wir die Ableitung auf zwei Arten schreiben können:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Die *Ableitung an der Stelle* x_0

$$f'(x_0) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$$

entspricht damit der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Bemerkung. *Es ist wichtig zu erkennen, dass es sich bei der Ableitungsfunktion $f'(x)$ und der Tangentenfunktion $t_{x_0}(x)$ um völlig unterschiedliche Objekte handelt: $f'(x)$ entspricht dem Wert der Steigung derjenigen Tangente, die die Funktion an der Stelle $(x, f(x))$ berührt, und $t_{x_0}(x)$ ist der Wert, den die Tangente, die die Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührt, an der Stelle x annimmt (siehe Abbildung 13). Der Graph der Ableitungsfunktion lässt sich damit, anders als die Tangentenfunktion, nicht unmittelbar geometrisch aus dem Graph der Funktion $f(x)$ konstruieren. Zu einer vorgegebenen Funktion $f(x)$ gibt es ausserdem nur* eine einzige *Ableitungsfunktion aber meist sehr viele Tangentenfunktionen, nämlich eine Tangentenfunktion pro Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich von f, an der f glatt ist.*

Nach (2.3.3) *gibt es aber eine Beziehung zwischen dem Funktionswert der Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 und der Tangente durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$, nämlich*

$$t_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiel. *Der Differenzenquotient der $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 ist*

$$\begin{aligned} m_{x_o}(x) &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= x + x_0 \end{aligned}$$

Damit gilt für den Differentialquotient von $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0

$$\begin{aligned} \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} &= m_{x_0}(x_0) = x_0 + x_0 \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

Die Ableitungsfunktion lautet damit

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 2x$$

Die Steigung der Tangente der Quadratfunktion an der Stelle $x = 3$ ist demnach $f'(3) = 6$ und die Tangentengleichung an dieser Stelle lautet

$$\begin{aligned} t_3(x) &= f'(3)(x - 3) + f(3) \\ &= 6(x - 3) + 9 \end{aligned}$$

Die Tangentenfunktion des Graphen von $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 ist demnach durch

$$\begin{aligned} t_{x_0}(x) &= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= 2x_0(x - x_0) + x_0^2 \end{aligned}$$

gegeben.

Aufgabe 85.

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Ergebnis

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Lösungweg

2.4.2. Die Ableitungsregeln.

Lernziele:

- *Sie kennen die Ableitungsfunktionen der elementaren Funktionen*
- *Sie können die Besonderheit der eulerschen Zahl erklären*
- *Sie kennen die Ableitungsregeln*

Wir haben bereits mehrfach erwähnt, dass es eine überschaubare Zahl von Regeln gibt, mit deren Hilfe sich Funktionen, die aus elementaren Funktionen zusammengesetzt sind, ableiten lassen. Diese Regeln bestehen aus zwei Teilen:

(1) Formeln für die Ableitung der elementaren Funktionen

(2) Regeln, durch die man die Ableitung von Funktionen bestimmen kann, die aus solchen Funktionen "zusammengesetzt sind".

Wir geben im Folgenden zunächst alle Regeln an und kümmern uns erst danach um deren Verwendung und Herleitung.

Ableitungen wichtiger elementarer Funktionen. Die folgende Tabelle stellt die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen zusammen. Es wird erwartet, dass Sie die Ableitung dieser Funktionen auswendig kennen oder sich herleiten können. Viele dieser Regeln sind Spezialfälle der ersten Regel. Versuchen Sie, den unter "Bemerkungen" aufgeführten Zusammenhang zu verstehen, damit Sie weniger lernen müssen und sich darin üben, entsprechende Muster in Termen zu wiederzuerkennen.

	Funktion	Ableitungsfunktion	Termschreibweise	Bemerkungen
1.	$x \mapsto x^a$	$x \mapsto a \cdot x^{a-1}$	$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{dx^a}{dx} = a \cdot x^{a-1}$	gilt für $x > 0,\ a \in \mathbb{R}$ und für $x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{Z}$
2.	$x \mapsto 1$	$x \mapsto 0$	$\frac{d}{dx}(1) = \frac{d1}{dx} = 0$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = 0$
3.	$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\frac{d}{dx}(x) = \frac{dx}{dx} = 1$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = 1$
4.	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{dx^2}{dx} = 2x$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = 2$

Auswendig!

Funktion	Ableitungsfunktion	Termschreibweise	Bemerkungen
5. $x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d(x^{-1})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = -1$
6. $x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = \frac{1}{2}$
7. $x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{de^x}{dx} = e^x$	
8. $x \mapsto a^x$	$x \mapsto \ln(a) \cdot a^x$	$\frac{da^x}{dx} = \ln(a) \cdot a^x$	Spezialfall von Gleichung (7): $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(a)})$
9. $x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$	
10. $x \mapsto \log_b(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$	$\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$	Spezialfall von Gleichung (9): $\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{d\frac{\ln(x)}{\ln(b)}}{dx}$
11. $x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$	
12. $x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$	
13. $x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	Folgt wegen $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ aus (11) und (12)
14. $x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x)$	Alternative Darstellung zu (13)

Neben diesen Regeln sind auch die folgenden Ableitungsregeln wichtig. Sie werden in der Prüfung aber als Formelsammlung angegeben:

Funktion	Ableitungsfunktion	Termschreibweise
15. $x \mapsto \arcsin(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{d\arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Damit gilt für den Differentialquotient von $f(x) = x^n$ an der Stelle x_0

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dx^n}{dx}\right|_{x=x_0} &= m_{x_0}(x_0) \\
&= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0^1 + x_0^{n-3}x_0^2 + ... + x_0^1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} \\
&= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + ... + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} \\
&= n x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

Die Ableitungsfunktion lautet damit

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktion. Die Berechnung der Ableitung der Exponentialfunktion ist trickreich. Der Differenzenquotient von $\text{exp}_a(x) = a^x$ an der Stelle x_0 beträgt

$$\begin{aligned}
m_{x_o}(x) &= \frac{\text{exp}_a(x) - \text{exp}_a(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \frac{a^{x-x_0}a^{x_0} - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Für den Spezialfall $x_0 = 0$ gilt damit

$$m_0(x) = \underbrace{a^0}_{=1} \cdot \frac{a^{x-0} - 1}{x - 0} = \frac{a^x - 1}{x} \tag{2.4.1}$$

Dies erlaubt uns nun umgekehrt $m_{x_0}(x)$ durch $m_0(x)$ auszudrücken: Wegen

$$m_0(x - x_0) = \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

gilt nämlich

$$m_{x_0}(x) = a^{x_0} \cdot m_0(x - x_0) \tag{2.4.2}$$

Da nun der Graph der Exponentialfunktion keine Knicke enthält, dürfen wir annehmen, dass die Exponentialfunktion glatt ist (der formale Beweis dieser Aussage, ist schwierig). Deshalb muss $m_0(x)$ an der Stelle $x = 0$ eine stetige Fortsetzung besitzen, deren Wert der Ableitung $\text{exp}'_a(0)$ entspricht. Bezeichnen wir diese stetige Fortsetzung mit $\hat{m}_0(x)$, folgt aus (2.4.2), dass auch m_{x_0} eine stetige Fortsetzung

$$\hat{m}_{x_0}(x) = a^{x_0} \cdot \hat{m}_0(x - x_0)$$

besitzt. Ersetzen wir in dieser Formel x durch x_0, so erhalten wir wegen $\hat{m}_{x_0}(x_0) = \text{exp}'_a(x_0)$ eine Formel für die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $x = x_0$:

$$\begin{aligned}
\text{exp}'_a(x_0) &= a^{x_0}\,\text{exp}'_a(0) \\
&= \text{exp}'_a(0) \cdot \text{exp}_a(x_0)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist verblüffend. Es besagt nämlich, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder proportional zur Exponentialfunktion ist, wobei der Proportionalitätsfaktor nichts anderes als die Ableitung der Exponentialfunktion an der Stelle $x = 0$ ist. Leider lässt sich dieser Proportionalitätsfaktor (ähnlich, wie die Zahl π) nicht mehr exakt bestimmen. Mit dem Computerprogramm aus 99 können wir den Proportionalitätsfaktor aber "abschätzen". Für die Exponentialfunktion zur Basis 2 erhalten wir mit diesem Programm beispielsweise die Ausgabe

```
Der Differentialquotient der Funktion f an der Stellen 0.0 ist ungefähr:
Wert = 0.6931474207938493
```

woraus wir nacheinander $\exp_2'(0) \approx 0.6931$ und

$$\exp_2'(x) \approx 0.6931 \cdot \exp_2(x)$$

schliessen können.

Um dieses unbefriedigende Resultat zu verbessern, drehen die Mathematiker an dieser Stelle den Spiess um. Sie versuchen diejenige Basis a zu bestimmen, für welche die Ableitung der Exponentialfunktion $\exp_a$ an der Stelle $x = 0$ den Wert $\exp_a'(0) = 1$ annimmt. Dazu müssen Sie die Gleichung (2.4.1) nach a auflösen, wobei die Zahl a umso genauer wiedergegeben wird, je näher sich die Zahl x bei 0 befindet ($x = 0$ ist nicht erlaubt, da $m_0(x)$ an dieser Stelle eine Definitionslücke hat). Mit diesem Ansatz erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{a^x - 1}{x} &= 1 \\
a^x &= x + 1 \\
\log_{x+1}(a^x) &= \log_{x+1}(x+1) \\
x \log_{x+1}(a) &= 1 \\
\log_{x+1}(a) &= \frac{1}{x} \\
a &= (x+1)^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Setzten wir in dieser Formel für x nacheinander die Zahlen 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ... ein, so können wir den Wert der Basis a berechnen (versuchen Sie es mit dem Computer!). Es gilt

$$a \approx 2.718281828459045 23...$$

Da sich diese Zahl (ähnlich wie π) nicht 100%-ig exakt berechnen lässt, haben sich die Mathematiker entschieden, der Zahl einen eigenen Namen zu geben: man nennt sie die *eulersche Zahl* und kürzt sie durch das Symbol e ab. Die Basis der "natürlichen" Exponentialfunktion

$$\exp(x) = e^x$$

ist also genau so gewählt, dass

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

gilt.

Das erstaunliche ist nun, dass wir - mit dem neu gewonnen Wissen - auch die Ableitung der Exponentialfunktion zu anderen Basen bestimmen können. Formt man $\exp_a(x) = a^x$ nämlich um, so erhält man den Ausdruck

$$\exp_a(x) = a^x = e^{\ln(a)\cdot x} = \exp(\ln(a)\cdot x)$$

der sich mit Hilfe der Kettenregel, die wir später beweisen werden, ableiten lässt.

Linearitätsregel. Der Differenzenquotient von $f(x) + g(x)$ an der Stelle x_0 ist

$$\begin{aligned} m_{x_o}(x) &= \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

und damit gleich der Summe der Differenzenquotienten der Funktionen f und g. Die stetige Fortsetzung von $m_{x_0}(x)$ an die Stelle $x = x_0$ ist damit nichts anderes, als die Summe der stetigen Fortsetzungen der Differenzenquotienten von f und g, woraus sich die Formel

$$\left.\frac{d}{dx}(f(x) + g(x))\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dx}(f(x))\right|_{x=x_0} + \left.\frac{d}{dx}(g(x))\right|_{x=x_0}$$

bzw.

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

ergibt.

Produktregel. Der Differenzenquotient von $f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle x_0 ist

$$\begin{aligned} m_{x_o}(x) &= \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)\cdot g(x) \overbrace{-f(x_0)\cdot g(x) + f(x_0)\cdot g(x)}^{=0} - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot g(x) + f(x_0)\cdot\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

und lässt sich damit durch die Differenzenquotienten der Funktionen f und g ausdrücken. Für den Differentialquotienten (bzw. für die stetige Fortsetzung von $m_{x_0}(x)$) an der Stelle $x = x_0$ ergibt sich also

$$\left.\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x))\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{dx}(f(x))\right|_{x=x_0}\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\left.\frac{d}{dx}(g(x))\right|_{x=x_0}$$

Ausgedrückt durch die Ableitungsfunktion erhalten wir damit

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

Kettenregel. Der Differenzenquotient der $f(g(x))$ an der Stelle x_0 beträgt

$$\begin{aligned} m_{x_o}(x) &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

und lässt sich damit durch die Differenzenquotienten der Funktionen f und g ausdrücken. Beachten wir, dass der Differenzenquotient des ersten Faktors an der Stelle $g(x_0)$ auszuwerten ist, ergibt sich für die stetige Fortsetzung von $m_{x_0}(x)$ an die Stelle $x = x_0$

$$\left.\frac{d}{dx}(f(g(x)))\right|_{x=x_0} = \left.\frac{d}{du}(f(u))\right|_{u=g(x_0)} \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

bzw. für die Ableitungsfunktion

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))\, g'(x)$$

2.4.3. Anwendung der Ableitungsregeln.

Lernziele:

- *Sie können aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Funktionen ableiten*

Ziel dieses Abschnittes ist das systematische Einüben der Ableitungsregeln. Dazu ist es wichtig, dass Sie die Ableitungen der elementaren Funktionen auswendig kennen, so dass Sie sich auf die Verwendung der Regeln konzentrieren können.

Ableitung elementarer Funktionen.

Aufgabe 86.

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen

a)
$$\frac{d}{dx}x^6$$

b)
$$\frac{d}{dx}x^{-3}$$

c)
$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

d)
$$\frac{d}{dx}2^x$$

e)
$$\frac{d}{dx}x^y$$

f)
$$\frac{d}{dy}x^y$$

Ergebnis

a)
$$6x^5$$

b)
$$-3x^{-4}$$

c)
$$-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

d)
$$\ln(2)\,2^x$$

e)
$$yx^{y-1}$$

f)
$$\ln(x)\,x^y$$

Lösungweg

Linearitätsregel und Produktregel mit einer Konstanten. Das abzuleitende Objekt besteht in diesem Fall aus einer Summe verschiedener elementarer Funktionen, die allenfalls noch mit konstanten Vorfaktoren multipliziert werden, z.B.

$$3\sin(x) + 2e^x - \ln(x) - 3x^4$$

Um einen solchen Term abzuleiten, müssen Sie lediglich die im Term auftretenden Funktionen durch ihre jeweilige Ableitung ersetzt. Der Rest des Terms, d.h. seine Struktur, bleibt unverändert. Schreiben Sie also in diesem Fall zum Ableiten einfach den Ausgangsterms ab und ersetzen Sie beim Abschreiben die auftretenden Funktionen durch ihre Ableitung. Vereinfachen Sie danach das Ergebnis

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{d}{dx}(& 3 & \underbrace{\sin(x)} & +2 & \underbrace{e^x} & - & \underbrace{\ln(x)} & -3 & \underbrace{x^4} &) = \\ & & \downarrow\frac{d}{dx} & & \downarrow\frac{d}{dx} & & \downarrow\frac{d}{dx} & & \downarrow\frac{d}{dx} & \\ = & 3 & \boxed{\cos(x)} & +2 & \boxed{e^x} & - & \boxed{\frac{1}{x}} & -3 & \boxed{\cdot 4x^3} & = \\ = & & 3\cos(x) & & +2e^x & & -\frac{1}{x} & & -12x^3 & \end{array}$$

In komplizierteren Fällen, wie z.B.

$$\frac{d}{dx}\left(2 + 3\tan(x) - \sqrt{2x} - 3x^{-2}\right)$$

kann es passieren, dass Sie die Ableitung einzelner Komponenten nicht direkt in den Ableitungstabellen finden. Das ist hier für den 3. Summand der Fall, den Sie zunächst noch mit den

Potenzgesetzen vorbereiten müssen. Verfahren Sie dann bei den “einfachen” Summanden wie im vorangegangenen Beispiel - vergessen Sie aber auf keinen Fall die Klammersetzung. Auf die Ableitung des “schwierigen”, 3. Summanden können Sie im ersten Schritt verzichten, indem Sie das Ableitungssymbol $\frac{d}{dx}$ vor diejenigen Summanden schreiben, die Sie im ersten Schritt noch nicht ableiten möchten:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{d}{dx}(& 2 & +3 & \tan(x) & - & \sqrt{2x} & -3 & x^{-2} \quad) = \\
 & \downarrow \frac{d}{dx}2=0 & & \downarrow \frac{d}{dx}\tan(x)=\left(1+\tan^2(x)\right) & & \downarrow Vereinfachen & & \downarrow \frac{d}{dx}x^{-2}=-2x^{-3} \\
= & \boxed{0} & +3 & \boxed{\left(1+\tan^2(x)\right)} & -\frac{d}{dx} & \boxed{\left(\sqrt{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)} & -3 & \boxed{\cdot\left(-2x^{-3}\right)} \quad = \\
 & & & & & \downarrow \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} & & \\
= & & & 3+3\tan^2(x) & -\sqrt{2} & \boxed{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)} & & +6x^{-3} \quad = \\
= & & & 3+3\tan^2(x) & & -\frac{1}{\sqrt{2x}} & & +6x^{-3} \quad =
\end{array}
$$

Aufgabe 87.

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen

a)

$$\frac{d}{dx}\left(4+e^x-\cos(x)+\frac{4}{x}\right)$$

b)

$$\frac{d}{dt}\left(\sin(2)-3e^t-4t\right)$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(3\ln(x)+a^2-\frac{a}{x^2}\right)$$

d)

$$\frac{d}{dx}\left(4+e^{3+x}-\ln(2x)\right)$$

Lösungweg

Produktregel. Das abzuleitende Objekt besteht aus einem Produkt von zwei oder mehr elementaren Funktionen, z.B.

$$\sin(x)\cdot\ln(x)$$

In diesen Fällen entsteht durch die Ableitung eine Summe, in der jeder Summand mit Ausnahme einer Stelle dem Ausgangsterm entspricht. An dieser Stelle ist dann der entsprechende Faktor durch seine Ableitung zu ersetzen. Schreiben Sie bei der Produktregel also den abzuleitenden Term ab und ersetzen Sie dabei die erste Funktion durch ihre Ableitung. Fahren Sie dann fort, indem Sie den Term ein weiteres Mal (als zweiten Summanden) abschreiben, wobei Sie nun den 2. Faktor durch seine Ableitung ersetzen.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\cdot\ln(x)\right) &= \overset{\downarrow\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)}{\boxed{}}\cdot\ln(x)+\\ &+\ \sin(x)\cdot\overset{\downarrow\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}}{\boxed{}}\\ &= \cos(x)\ln(x)+\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Dieses Verfahren funktioniert auch, wenn das Produkt aus mehr als zwei Faktoren besteht. Sie müssen den Ausgangsterm dann allerdings so oft kopieren, wie es der Zahl der Faktoren im Ausgangsterm entspricht und dabei jedes Mal einen anderen Faktor durch seine Ableitung ersetzten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\cdot\ln(x)\cdot\tan(x)\right) =& \overset{\downarrow\frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)}{\boxed{}}\cdot\quad\ln(x)\cdot\quad\tan(x)\\ &+\ \sin(x)\cdot\overset{\downarrow\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}}{\boxed{}}\cdot\quad\tan(x)\\ &+\ \sin(x)\cdot\quad\ln(x)\cdot\quad\overset{\downarrow\frac{d}{dx}\tan(x)=\left(1+\tan^2(x)\right)}{\boxed{}}\\ &= \cos(x)\cdot\quad\ln(x)\cdot\quad\tan(x)\\ &+\ \sin(x)\cdot\quad\frac{1}{x}\cdot\quad\tan(x)\\ &+\ \sin(x)\cdot\quad\ln(x)\cdot\left(1+\tan^2(x)\right)\end{aligned}$$

Der Term kann nach Anwendung der Produktregel meist noch etwas (aber selten stark!) vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(\sin(x)\cdot\ln(x)\cdot\tan(x)\right)=\\ &=\cancel{\cos(x)}\cdot\ln(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}}+\sin(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\tan(x)+\sin(x)\cdot\ln(x)\cdot\left(1+\tan^2(x)\right)=\\ &=\sin(x)\cdot\left(2\ln(x)+\frac{\tan(x)}{x}+\ln(x)\tan^2(x)\right)\end{aligned}$$

Bemerkung. *Die Produktregel funktioniert auch für konstante Faktoren. Dazu müssen Sie sich allerdings daran erinnern, dass die Ableitung einer konstanten Funktion immer gleich 0 ist. So* *gilt zum Beispiel*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(4\cdot\ln\left(x\right)\right) &= \overset{\downarrow \frac{d}{dx}4=0}{\boxed{}}\cdot \ln\left(x\right) \\ &+ 4\cdot \overset{\downarrow \frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}}{\boxed{}} \\ &= \cancel{0\cdot\ln\left(x\right)} + 4\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{4}{x}\end{aligned}$$

Da die Ableitung eines konstanten Faktors Null ist, verschwindet derjenige Summand, bei dem der konstante Faktor abgeleitet wird. Diese Tatsache erlaubt uns konstante Faktoren "einfach vor die Ableitung zu ziehen", wie wir das im vorangegangenen Abschnitt bereits getan haben.

Aufgabe 88.

Leiten Sie die folgenden Terme ab

a)

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)\right)$$

b)

$$\frac{d}{dt}\left(t^2e^t\sin\left(t\right)\right)$$

c)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)\ln\left(x\right)\right)$$

d)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^a\tan\left(x\right)\ln\left(x\right)}{x}\right)$$

Lösungweg

Kettenregel. Die Kettenregel folgt dem Matrjoschka-Prinzip. Das abzuleitende Objekt besteht - ähnlich wie eine Matrjoschka (siehe Abbildung 14) - aus einer Ineinanderverschachtelung von zwei oder mehr elementaren Funktionen

$$\sin\left(\sin\left(\sin\left(\sin\left(\sin\left(x\right)\right)\right)\right)\right)$$

Bei der Kettenregel wird dann zunächst nur die äusserste Funktion (= die grösste Puppe) abgeleitet, während der Rest (= das "Innere") unverändert bleibt. Danach wird dann das in der äussersten Funktion enthaltene Innere erneut abgeleitet und als zusätzlicher Faktor mit dem vorgängig bestimmten Term multipliziert. Das Verfahren geht dann solange rekursiv weiter, bis

Abbildung 14. Eine Matrjoschka besteht aus einer Sequenz von Puppen, die jeweils alle in der nächstgrösseren Puppe enthalten sind (Quelle: Wikipedia)

das innerste Objekt (= das kleinste Kind) erreicht ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))\\
&=\cos(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))\cdot\frac{d}{dx}\sin(\sin(\sin(\sin(x))))\\
&=\cos(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))\cdot\quad\cos(\sin(\sin(\sin(x))))\cdot\frac{d}{dx}\sin(\sin(\sin(x)))\\
&=\cos(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))\cdot\quad\cos(\sin(\sin(\sin(x))))\cdot\quad\cos(\sin(\sin(x)))\cdot\frac{d}{dx}\sin(\sin(x))\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\quad\ddots
\end{aligned}$$

Denken Sie bei der Kettenregel immer auch an die Klammersetzung. Beachten Sie auch, dass nicht jede geschachtelte Funktionen einfach zu erkennen ist (hier z.B. die Quadratfunktion):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\tan\left((x+1)^2\right)\right)\right) &= \frac{1}{\tan\left((x+1)^2\right)}\cdot\frac{d}{dx}\left(\tan\left((x+1)^2\right)\right)\\
&= \frac{1}{\tan\left((x+1)^2\right)}\cdot\left(1+\tan^2\left((x+1)^2\right)\right)\cdot\frac{d}{dx}\left((x+1)^2\right)\\
&= \frac{1}{\tan\left((x+1)^2\right)}\cdot\left(1+\tan^2\left((x+1)^2\right)\right)\cdot 2(x+1)\cdot\frac{d}{dx}(x+1)\\
&= \frac{1}{\tan\left((x+1)^2\right)}\cdot\left(1+\tan^2\left((x+1)^2\right)\right)\cdot 2(x+1)\cdot 1
\end{aligned}$$

Mit etwas Übung können Sie sich bei der Kettenregel die Zwischenschritte sparen und direkt das Ergebnis angeben. Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

Aufgabe 89.

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

a)
$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\cos\left(x\right)\right)\right)$$

b)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos\left(x\right)}\right)$$

c)
$$\frac{d}{dx}\left(\cos^2\left(e^x\right)\right)$$

d)
$$\frac{d}{dx}\left(\sin^2\left(e^{\ln\left(x^2\right)}\right)\right)$$

Lösungweg

Quotientenregel. Die Quotientenregel hat zwar die komplizierteste Form, ist aber in der Anwendung die einfachste aller Regeln. Sie können die Quotientenregel nämlich nur in exakt der vorgeschriebenen Form verwenden. Denken Sie aber auch hier immer an die Klammersetzung

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\tan\left(x\right)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin\left(x\right)}{\cos\left(x\right)}\right) = \frac{\overset{\downarrow \frac{d}{dx}\sin(x)=\cos(x)}{\boxed{}}\cdot\cos\left(x\right)-\sin\left(x\right)\cdot\overset{\downarrow \frac{d}{dx}\cos(x)=-\sin(x)}{\boxed{}}}{\cos^2\left(x\right)}\\ &= \frac{\cos^2\left(x\right)+\sin^2\left(x\right)}{\cos^2\left(x\right)} = \overset{1}{\cancel{\frac{\cos^2\left(x\right)}{\cos^2\left(x\right)}}}+\overset{\tan^2\left(x\right)}{\cancel{\frac{\sin^2\left(x\right)}{\cos^2\left(x\right)}}}\\ &= 1+\tan^2\left(x\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 90.

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

a)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{\ln\left(x\right)}\right)$$

b)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\tan\left(x\right)}{x^2}\right)$$

c)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)$$

Lösungweg

Kombiniertes Anwenden der Ableitungsregeln. Die Ableitungen der elementaren Funktionen in der Ableitungstabelle sind Spezialfälle für Ableitungen, die Sie auswendig kennen sollten. Sie unterscheiden sich aber nicht grundsätzlich von Ableitungen zusammengesetzter Funktionen. Das bedeutet insbesondere, dass Ableitungsregeln wie die Kettenregel oder die Produktregel auch auf zusammengesetzte Funktionen angewendet werden können.

So können wir, um den Term

$$\sin(x\cdot e^x)$$

abzuleiten, dem Argument des Sinus einen eigenen Funktionsnamen

$$g(x) = x\cdot e^x$$

zuweisen und damit die Kettenregel anwenden

$$\frac{d}{dx}\sin(x\cdot e^x) = \frac{d}{dx}\sin(g(x)) = \cos(g(x))\cdot g'(x)$$

Es verbleibt, die Funktion $g(x)$ abzuleiten. Dazu benötigen wir in diesem Fall die Produktregel

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x\cdot e^x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = (1+x)\cdot e^x$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die obige Formel ein, so erhalten wir schliesslich die gesuchte Ableitung

$$\frac{d}{dx}\sin(x\cdot e^x) = \cos(g(x))\cdot g'(x) = \cos(x\cdot e^x)\cdot(1+x)\cdot e^x$$

Beispiel. *Mit Hilfe dieser Technik können wir die Quotientenregel aus der Produkt- und der Kettenregel herleiten:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) &= \overset{\textit{Ableitung von } f(x)}{f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}} + \overset{\textit{Ableitung von } \frac{1}{g(x)} \textit{ mit Kettenregel}}{f(x)\cdot\left(\overset{\textit{Ableitung von } \frac{1}{g}}{-\frac{1}{(g(x))^2}}\cdot\overset{\textit{Ableitung von } g}{g'(x)}\right)} \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

Erweitern wir nun den ersten Faktor noch einmal mit $g(x)$ so erhalten wir die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Beispiel. *Die Ableitungsregel für Potenzen mit reellen Exponenten lässt sich folgender Massen zeigen:*

$$\frac{dx^a}{dx} =$$
$$= \frac{d}{dx} e^{\ln(x)\cdot a} = \overbrace{e^{\ln(x)\cdot a}}^{\text{Ableitung von } e^{\cdot}} \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}(a \cdot \ln(x))}_{=a\cdot\frac{1}{x}}$$
$$= a \cdot x^a \cdot x^{-1} = a \cdot x^{a-1}$$

Aufgabe 91.

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

a)
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\sin(x)}}{\ln(x)}\right)$$

b)
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot e^{\cos(x)}\right)$$

c)
$$\frac{d}{dx}\left(\cos^2(x) + 3\sin\left(x + x^3 - 1\right)\right)$$

Lösungweg

2.4.4. Ableitungen höherer Ordnung.

Lernziele:

- *Sie wissen, was eine höhere Ableitung ist und wie Sie diese berechnen können*
- *Sie haben ein grobes Verständnis, wozu höhere Ableitungen da sind*

Im vorausgegangenen Abschnitt haben Sie gelernt, dass jede glatte Funktion eine Ableitungsfunktion besitzt und wie Sie diese berechnen können. Da die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ist, kann man sich nun fragen, ob auch diese Ableitungsfunktion ableitbar, d.h. glatt ist. Dabei handelt es sich zunächst nur um eine mathematische Spielerei.

Beispiel. *Die Ableitung der Funktion*

$$f(x) = \sin(e^x)$$

lautet

$$f'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x$$

Dies ist wieder eine glatte Funktion, d.h. man kann auch diese Funktion ableiten. Es gilt

$$\frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\cos\left(e^x\right)\cdot e^x\right) = -\overbrace{\sin\left(e^x\right)\cdot e^x}^{\text{Ableitung von }\cos(e^x)}\cdot e^x \quad + \quad \cos\left(e^x\right)\cdot\overbrace{e^x}^{\text{Ableitung von }e^x}$$

Wir nennen diese Ableitung die 2. Ableitung und schreiben dafür auch kurz $f''(x)$ oder $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$. Es gilt also

$$f''(x) = \frac{d^2\sin\left(e^x\right)}{dx^2} \qquad = -\sin\left(e^x\right)e^{2x} + \cos\left(e^x\right)e^x$$

Ebenso, wie wir die Ableitung 2. Ordnung bestimmt haben, kann man sich fragen, ob auch $f''(x)$ eine glatte Funktion ist. Ist dies der Fall, so kann man auch die 3. Ableitung $f'''(x)$ berechnen. Dieses Spiel kann man solange fortfahren, bis eine der entstehenden Ableitungsfunktionen aufhört glatt zu sein. Erstaunlicher Weise, scheint das nicht allzu häufig der Fall zu sein. Die elementaren Funktionen lassen sich z.B. alle unendlich oft ableiten.

Beispiel. *Die Ableitung der Exponentialfunktion ist wieder die Exponentialfunktion:*

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Also ist auch die 2. wieder eine Exponentialfunktion

$$\frac{d^2e^x}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{de^x}{dx}\right) = \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Dasselbe gilt auch für die 3., 4. ... Ableitung der Exponentialfunktion. Die Exponentialfunktion ist damit unendlich oft ableitbar und für die n. Ableitung der Exponentialfunktion gilt

$$\frac{d^ne^x}{dx^n} = e^x$$

Allgemein bezeichnet man die n. Ableitung einer Funktion mit den Symbolen[8]

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

Wenn n bekannt ist, verwendet man aber auch Striche (oder Punkte, wenn das Argument der Funktion t heisst) um die Ordnung der Ableitung anzugeben. Die dritte Ableitung einer Funktion kann also durch folgende Symbole bezeichnet werden[9]

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}f(x)$$

[8]Achtung: Bei dieser Notation ist die Klammer um den Index n ausgesprochen wichtig, da das Symbol ansonsten eine andere Bedeutung bekommt:

$$f^n(x) = (f(x))^n$$

hat nichts mit der Ableitung zu tun.

[9]Gelegentlich findet man auch das Symbol $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ für die Ableitung. Bei diesem Symbol ist allerdings Vorsicht angesagt. Es hat zwar sehr viel mit der Ableitung zu tun, entspricht aber nicht in allen Fällen dem Ableitungssymbol $\frac{df(x)}{dx}$, welches wir in der Vorlesung eingeführt haben.

oder durch

$$\dddot{f}(t) = f^{(3)}(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \frac{d^3}{dt^3} f(t)$$

Aufgabe 92.

Bestimmen Sie

a)
$$\frac{d^4 x^5}{dx^4}$$

b)
$$\cos^{(2)}(x)$$

c)
$$\sin'''(x)$$

d)
$$\cos^2(x) + \sin^2(x)$$

Lösungweg

Wie wir später sehen werden, sind höhere Ableitungen aus vielerlei Hinsicht nützlich. Einem Funktionsgraphen kann man mit blossem Auge zwar nur ansehen, ob die erste Ableitung existiert (der Graph hat keine Knicke), die zweite und dritte Ableitung haben aber immer noch eine geometrische Bedeutung (man spricht hier von der Krümmung und der Torsion).

Wichtiger ist an dieser Stelle jedoch, dass die Natur eine Vorliebe für Funktionen zu haben scheint, die sich unendlich oft ableiten lassen: Funktion, die nicht unendlich oft abgeleitet werden können, treten in physikalischen Prozessen jedenfalls eher selten auf und weissen immer auf ein besonderes Ereignis hin. Ein wichtiges Beispiel ist hier das Gebiet der Thermodynamik (Wärmelehre) in der das Auftreten von Funktionen, die sich nicht unendlich oft ableiten lassen, als Indikator dient, um *Phasenübergänge*, wie zum Beispiel den Gefrier- oder Siedepunkt von Wasser, zu erkennen.

2.5. Übungsaufgaben

2.5.1. Splines und Freiheitsgrade.

Aufgabe 93.

Vervollständigen Sie die Implementierung der Klasse LinearSpline an den drei mit TODO gekennzeichneten Stellen:

```
public class LinearSpline {
  /* x-Werte der Knotenpunkte */
  private double xKnoten[];
  /* s-Werte der Knotenpunkte */
  private double sKnoten[];
```

```
  /* Steigungswerte der linearen Spline-Polynome */
  private double m[];
  /* Achsenabschnittswerte der linearen Spline-Polynome */
  private double b[];

  /*@param x x-Werte der Knotenpunkte
   *@param y y-Werte der Knotenpunkte */
  public LinearSpline(double x[], double s[])
  {
    if (x.length != s.length) {
      throw new IllegalArgumentException(
            "Die Listen x und y sind nicht gleich lang");
    }
    xKnoten = x;
    sKnoten = s;
    int anzahlSplinePolynome =
      // TODO: wieviele Spline-Polynome sind nötig;
    m = new double[anzahlSplinePolynome];
    b = new double[anzahlSplinePolynome];

    // TODO: Fügen Sie hier Ihren Code ein um die
    // Steigungswerte m und Achsenabschnittswerte b
    // der linearen Polynome zu bestimmen
  }

  public double getValueAt(double x)
  {
    // TODO: Fügen Sie hier Ihren Code ein um den
    // Funktionswert an der Stelle x zu berechnen
  }
}
```

Lösungweg

Aufgabe 94.

Die folgende Notenskala von 1 (schlechteste Note) bis 6 (beste Note) soll durch ein neues feineres Benotungssystem von 0 (schlechteste Note) bis 15 (beste Note) ersetzt werden. Die alten Noten wurden dabei nach der folgenden Tabelle vergeben:

Punkte	0..5	6..12	13..20	21..30	31..45	46..55
Note	1	2	3	4	5	6

Wandeln Sie das Notensystem mit Hilfe von Splines 1. Grades in das neue Benotungssystem um. Gehen Sie dabei folgender Massen vor:

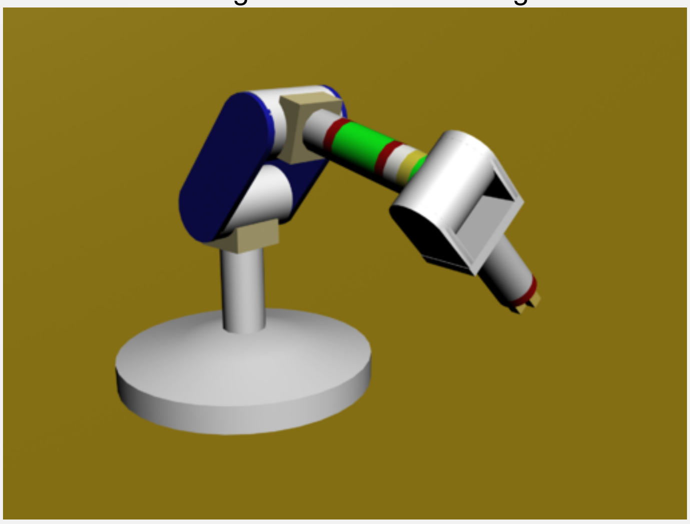
a) Konstruieren Sie aus den obigen Daten eine geeignete Wertetabelle für die Splineknoten.
b) Überlegen Sie sich eine Formel, durch die sich die neuen Noten auf faire Weise aus den alten Noten berechnen lassen, wobei Sie an dieser Stelle annehmen, dass für die neuen und alten Noten auch Nachkommastellen zugelassen sind.
c) Vervollständigen Sie die Implementierung der Klasse Noten an den drei mit TODO gekennzeichneten Stellen:

```
public class Noten {
  public static void main(String[] args)
  {
    double xKnoten[] = { TODO: x-Werte der Wertetabelle };
    double sKnoten[] = { TODO: s-Werte der Wertetabelle };
    LinearSpline noten = new LinearSpline(xKnoten, sKnoten);
    for(int punkte = 0; punkte <= 55; punkte++)
    {
      double neueNote = TODO: Berechnung der neuen Note;
      System.out.println("Die Punktzahl " + punkte
        + " ergibt die neue Note " + Math.round(neueNote));
    }
}
```

Lösungweg

Aufgabe 95.

a) In einem Kochrezept steht: “Pro Person benötigen Sie 100g Mehl, 1 Ei, 1 kleine Zwiebel und eine Messerspitze Salz”. Wieviele Freiheitsgrade gibt es in diesem Kochrezept.
b) Wieviele Freiheitsgrade hat der hier dargestellte Roboterarm?



c) Für ein Problem mit 4 Freiheitsgraden a, b, c, d sind die folgenden Bedingungen gegeben:

$$\begin{aligned} 2a + 3b^2 &= 0 \\ c - d &= 0 \end{aligned}$$

Wieviele Freiheitsgrade werden durch diese Bedingungen eliminiert.

d) Dem Problem aus Teil (c) wird eine weitere Bedingung

$$2a + 3b^2 + c - d = 0$$

hinzugefügt. Ist diese Bedingung unabhängig zu den vorangegangenen Bedingungen? Wieviele Freiheitsgrade verbleiben in dem Problem?

e) Dem Problem aus Teil (c) wird die Bedingung

$$d = 0$$

hinzugefügt. Ist diese Bedingung unabhängig zu den vorangegangenen Bedingungen? Wieviele Freiheitsgrade verbleiben in dem Problem?

Ergebnis

a) 1 Freiheitsgrad
b) 6 Freiheitsgrade
c) 2 Freiheitsgrade werden eliminiert
d) Die Bedingung ist nicht unabhängig. Es verbleiben 2 Freiheitsgrade.
e) Die Bedingung ist unabhängig. Es verbleibt noch ein Freiheitsgrad.

Lösungweg

Aufgabe 96.

Bewerten Sie die Qualität des folgenden Codes. Argumentieren Sie dabei mit Freiheitsgraden. Überlegen Sie sich, wie Sie die Qualität des Codes verbessern können.

```
class DataInfo {
  /** Anzahl Bytes die in der Zeit dataTransferTime übertragen wurden */
  private long bytesTransferred;
  /** Zeit der Datenübertragung in Sekunden */
  private long dataTransferTime;
  /** Durchsatzrate beim Übertragen von Daten */
  private double dataThroughput;

  public void setBytesTransferred(long bytes) {
    bytesTransferred = bytes;
  }
  public void setDataTransferTime(long seconds) {
    dataTransferTime = seconds;
  }
  public void setThroughput(double bytesPerSecond) {
```

```
    dataThroughput = bytesPerSecond;
  }
}
```

Lösungweg

2.5.2. Stetige und glatte Funktionen.

Aufgabe 97.

Bestimmen Sie die Definitionsmenge der folgenden Funktionen und geben Sie - wenn möglich - die stetige Fortsetzung an.

a) $f(x) = \frac{x \cdot (x-1)^2}{x^2 - x}$
b) $g(x) = \ln\left(x^2\right)$
c) $h(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}$
d) $f(\Delta x) = \frac{3(2+\Delta x)^2 - 3 \cdot 2^2}{\Delta x}$

Ergebnis

a) Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Stetige Fortsetzung: $\hat{f}(x) = x - 1$
b) Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nicht stetig fortsetzbar.
c) Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Stetige Fortsetzung: $\hat{h}(x) = e^x + e^{-x}$

Lösungweg

Aufgabe 98.

Bestimmen Sie die Differenzenquotienten und - wenn möglich - den Differentialquotienten der folgenden Funktionen.

a) $a(t) = (t-2)^2$ an der Stelle $t = 0$
b) $b(x) = 3(x+1)^3$ an der Stelle $x = 3$
c) $c(s) = |s|^3$ an der Stelle $s = 0$
d) $d(s) = |s-1|$ an der Stelle $s = 1$

Ergebnis

a)

$$m_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto t - 4 \end{cases}$$

$$\frac{d(t-2)^2}{dt}_{|t=0} = -4$$

b)

$$m_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 6x + 21 \end{cases}$$

$$\frac{d3\,(x+1)^3}{dx}_{|x=3} = 144$$

c)

$$m_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to \mathbb{R} \\ s & \mapsto |s| \cdot s \end{cases}$$

$$\frac{d|s|^3}{ds}_{|s=0} = 0$$

d)

$$m_1 \quad : \quad \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to \mathbb{R} \\ s & \mapsto \text{sig}\,(s-1) \end{cases}$$

Der Differentialquotient existiert nicht.

Lösungweg

Aufgabe 99. Computergestützte Berechnung des Differentialquotienten

Schreiben Sie ein Computerprogramm mit dessen Hilfe Sie den Differenzen- und den Differentialquotienten einer frei programmierbaren Javafunktion zwischen zwei beliebigen Punkten des Funktionsgraphen berechnen können. Verwenden Sie dazu den folgenden Code.

```
package ch.hsr.util;
public class DifferenzenQuotient {


  double f(double x){
    // TODO hier soll eine beliebige Funktion stehen
  }

  public double differenzenQuotient(double x0, double x1) {
    // TODO implmentieren Sie diese Funktion
  }

  public double differentialQuotient(double x) {
    // TODO implmentieren Sie diese Funktion
  }

  public static void main(String[] args)
  {
   DifferenzenQuotient d = new DifferenzenQuotient();
```

```
  if (args.length == 2)
  {
    double x0 = Double.parseDouble(args[0]);
    double x1 = Double.parseDouble(args[1]);
    System.out.println("Der␣Differenzenquotient␣der␣Funktion␣f␣zwischen␣den␣Stellen␣" + x0
      + "␣und␣" + x1 + "␣beträgt:");
    System.out.println("Wert␣=␣" + d.differenzenQuotient(x0, x1));
  } else if (args.length == 1)
  {
    double x = Double.parseDouble(args[0]);
    System.out.println("Der␣Differentialquotient␣der␣Funktion␣f␣an␣der␣Stellen␣" + x
       + "␣ungefähr:");
    System.out.println("Wert␣=␣" + d.differentialQuotient(x));
  } else {
      System.out.println("Das␣Programm␣erwartet␣1␣oder␣2␣Argumente");
  }
 }
}
```

a) Berechnen Sie mit Hilfe Ihres Computerprogramms den Differenzenquotient der Funktionen

$$\begin{array}{rll} e^x & \text{zwischen den Stellen} & 0 \text{ und } 1 \\ \sin(x) & \text{zwischen den Stellen} & \pi \text{ und } \pi+1 \\ x^2 & \text{zwischen den Stellen} & 1 \text{ und } 3 \\ \ln(x) & \text{zwischen den Stellen} & 11 \text{ und } 14 \\ \dfrac{\cos(x)e^{\tan(x)}}{4x^2} & \text{zwischen den Stellen} & 6 \text{ und } 8 \end{array}$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe Ihres Computerprogramms den Differentialquotient der Funktionen

$$\begin{array}{rll} e^x & \text{an der Stelle} & 0 \\ \sin(x) & \text{an der Stelle} & \pi \\ x^2 & \text{an der Stelle} & 2 \\ \ln(x) & \text{an den Stellen} & 11 \\ \dfrac{\cos(x)e^{\tan(x)}}{4x^2} & \text{an der Stelle} & 7 \end{array}$$

auf mindestens 3 Nachkommastellen genau.

Ergebnis

Siehe Lösungsweg

Lösungweg

Aufgabe 100.

Bestimmen Sie (wenn möglich) die Tangente der Funktionen und zeichnen Sie die entsprechenden Funktionsgraphen

a) $a(t) = (t+2)^2$ an der Stelle $t = -1$
b) $b(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 3$
c) $c(s) = |s|^3$ an der Stelle $s = 0$
d) $d(s) = |s-1|$ an der Stelle $s = 1$

Ergebnis

a)

$$t_{-1}(t) = 2(t+1)+1$$

b)

$$t_3(x) = -\frac{1}{9}(x-3)+\frac{1}{3}$$

c)

$$t_0(s) = 0$$

d) Die Funktion hat an der Stelle $s = 1$ keine eindeutig definierte Tangente.

Lösungweg

Aufgabe 101. Computergestütztes Lösen von Gleichungen mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahren

a) Erweitern Sie das Computerprogramm aus Aufgabe 99 so, dass Sie damit Gleichungen der Form

$$f(x) = 0$$

lösen können, wenn Sie als Startwert eine ungefähre Lösung der Gleichung vorgeben. Suchen Sie dann mit Ihrem Programm die grössere Lösung der Gleichung

$$e^x = \ln(x)+3$$

b) Verbessern Sie das Ergebnis aus der vorangegangenen Aufgabe, indem Sie die vorangegangenen Rechenschritte drei mal wiederholen und vergleichen Sie das Ergebnis mit WolframAlpha. Dieses Verfahren nennt sich auch das Newtonsche Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen (siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren).

Hinweis

Lösen Sie die Gleichung

$$m \cdot (x-x_0)+b = 0$$

für beliebige Werte von m und b nach x auf. Überlegen Sie sich danach, welche Werte Sie für m, b und x_0 einsetzen müssen.

Ergebnis

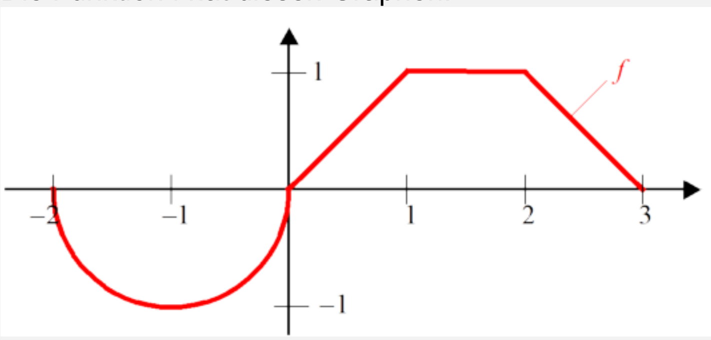
a) Das Ergebnis ist $x = 1.141946723525875$. Details siehe Lösungsweg.
b) Das Ergebnis ist $x = 1.1418905489157845$. Details siehe Lösungsweg.

Lösungweg

2.5.3. Graphische Interpretation der Ableitung.

Aufgabe 102.

Die Funktion f hat diesen Graphen:

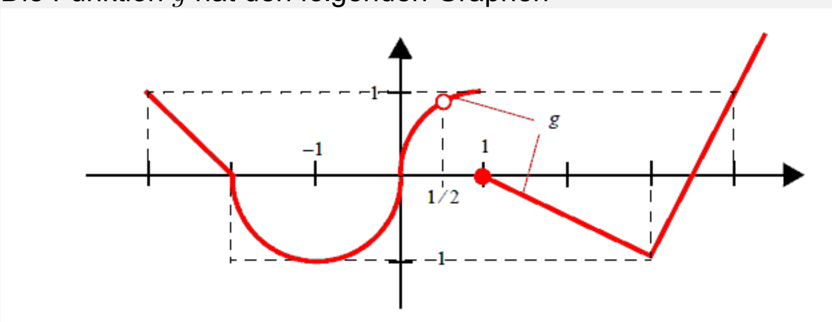


Zwischen -2 und 0 hat die Funktion die Form eines Halbkreises. Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion.

Lösungweg

Aufgabe 103.

Die Funktion g hat den folgenden Graphen



Für Argumente in den Intervallen $[-3; -2)$, $[1; 3]$ und $[3; 5]$ handelt es sich um Geradenstücke, die Kurve im Intervall $[-2; 0]$ ist ein Halbkreis und die Kurve in $[0; 1]$ ein Viertelkreis. Bei $\frac{1}{2}$ ist die Funktion nicht definiert.

Bestimmen Sie

a) $g'(4)$
b) $g'(2)$
c) $g'(-1)$
d) $g'(3)$
e) $g'(1)$
f) $g'(0)$
g) $g'(1/2)$
h) $g'(-2)$

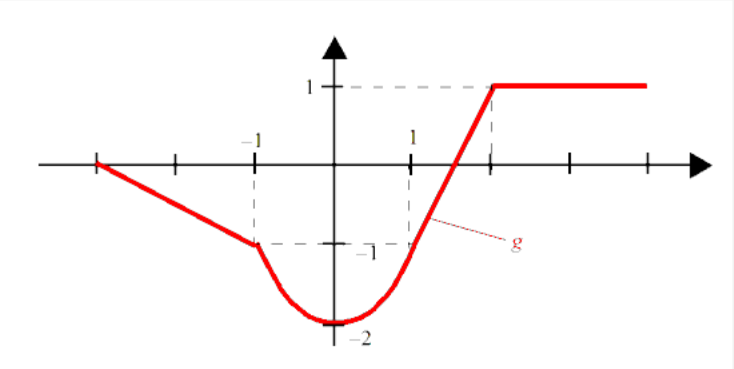
Ergebnis

a) $g'(4) = 2$
b) $g'(2) = -\frac{1}{2}$
c) $g'(-1) = 0$
d) $g'(3)$ existiert nicht
e) $g'(1)$existiert nicht
f) $g'(0)$ existiert nicht
g) $g'(1/2)$ existiert nicht
h) $g'(-2)$ existiert nicht

Lösungweg

Aufgabe 104.

Die Funktion $g : (-3; 4) \to \mathbb{R}$ hat folgenden Graphen:



Für Argumente zwischen −1 und 1 ist der Graph ein Parabelstück, in den anderen Bereichen ist er aus Geradenstücken zusammengesetzt.

a) Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion g' an.
b) Skizzieren Sie den Graphen von g'.
c) Wie lautet die Gleichung der Tangente t der Funktion g an der Stelle $x = \frac{1}{2}$

Ergebnis

a) Definitionsmenge:

$$(-3; 4) \setminus \{-1; 2\}$$

b) siehe Lösung

c)

$$t(x) = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{7}{4}$$

Lösungweg

2.5.4. Ableitungsregeln.

Aufgabe 105.

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen

a)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(2) - 4e^x - 3\tan(x) + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)$$

b)

$$\frac{d}{dx}(x+2)^2$$

c)

$$\frac{d}{dt}\left(te^2 - 3e^t - 4t^e\right)$$

d)

$$\frac{d}{ds}\left(s^t - 2t^2 + 4s\right)$$

e)

$$\frac{d}{dx}\left(x^y - 4y^x\right)$$

f)

$$\frac{d}{dy}\left(-4e^{y-x} - 3\sqrt{xy} + \ln\left(\frac{2x}{y}\right)\right)$$

Ergebnis

a) $-4e^x - 3\left(1 + \tan^2(x)\right) - 2x^{-\frac{3}{2}}$
b) $2x + 4$
c) $e^2 - 3e^t - 4et^{e-1}$
d) $4 + ts^{t-1}$
e) $y \cdot x^{y-1} - 4\ln(y)\, y^x$
f) $-4e^{y-x} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y}$

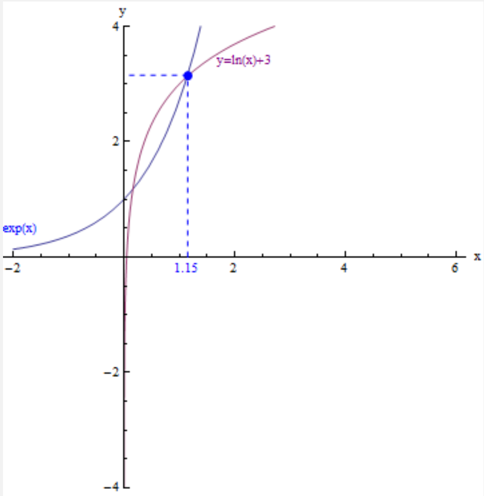
Lösungweg

Aufgabe 106.

Die Gleichung

$$e^x = \ln(x) + 3$$

aus Aufgabe 2.5.2 besitzt den folgenden Graphen:



Aus diesem Graphen ersieht man, dass die Gleichung zwei Lösungen hat. Die erste Lösung haben wir in Aufgabe 2.5.2 mittels Computer bei $x \approx 1.14189$ lokalisiert. Die zweite Lösung liegt ungefähr bei $x \approx \frac{1}{5}$. Bestimmen Sie diese Lösung mit Hilfe der Linearisierung näherungsweise.

Ergebnis

Die gesuchte Lösung liegt ungefähr bei $x \approx \frac{1}{5} + \frac{3-\ln(5)-e^{\frac{1}{5}}}{e^{\frac{1}{5}}-5} \approx 0.155$

Lösungweg

Aufgabe 107.

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen ohne die Terme zu vereinfachen

a)

$$f(x) = e^x \sin(x)$$

b)

$$g(x) = x^2 \cos(x)\, e^x \sin(x)$$

c)

$$h(x) = \sqrt{2x} \ln(2) \tan(x) \ln(x)$$

Ergebnis

a) $f'(x) = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$
b) $g'(x) = 2x \cdot \cos(x)\, e^x \sin(x) - x^2 \sin(x)\, e^x \sin(x) + x^2 \cos(x)\, e^x \sin(x) + x^2 \cos(x)\, e^x \cos(x)$
c) $h'(x) = \sqrt{2} \ln(2) \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \tan(x) \ln(x) + x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \tan^2(x)\right) \ln(x) + x^{\frac{1}{2}} \tan(x) \frac{1}{x}\right)$

Lösungweg

Aufgabe 108.

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie diese Ableitungen soweit als möglich. Bestimmen Sie danach sämtliche Nullstellen der Ableitungsfunktion.

a)

$$f(t) = e^t \frac{3}{t^3} \sin(3)\, t$$

b)

$$g(x) = \frac{-3x^2\sqrt{\frac{2}{x}}}{xe^{-x}}$$

Ergebnis

a) Für die Ableitung gilt:

$$f'(t) = 3 \sin(3)(t-2) \cdot t^{-3} \cdot e^t$$

Die Nullstelle der Ableitungsfunktion liegt bei $t = 2$.

b) Für die Ableitung gilt:

$$g'(x) = -\frac{3e^x(1+2x)}{\sqrt{2x}}$$

Die Ableitungsfunktion hat keine Nullstellen.

Lösungweg

Aufgabe 109.

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

a)

$$f(x) = \sin(\sin(x))$$

b)

$$h(t) = e^{e^{e^t}}$$

c)

$$g(x) = e^{\sin(x^2)}$$

d)

$$h(x) = \cos(\cos(\cos(\cos(x))))$$

e)

$$f(t) = \sin\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)$$

f)

$$f(x) = \cos(\tan(2x)+1)$$

g)

$$f(x) = \frac{1}{\sin(e^{-x}+3x-\ln(2))}$$

Ergebnis

a) $f'(x) = \cos(\sin(x)) \cdot \cos(x)$

b) $h'(t) = e^{e^{e^t}} e^{e^t} e^t$

c) $g'(x) = 2x\cos\left(x^2\right) e^{\sin\left(x^2\right)}$

d) $h'(x) = \sin(\cos(\cos(\cos(x)))) \cdot \sin(\cos(\cos(x))) \cdot \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)$

e) $f'(t) = \frac{e^{-\frac{1}{t}}\cos\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)}{t^2}$

f) $f'(x) = -2\sin(\tan(2x)+1) \cdot \left(1+\tan^2(2x)\right)$

g) $f'(x) = \frac{\cos\left(e^{-x}+3x-\ln(2)\right)\cdot\left(e^{-x}-3\right)}{\left(\sin\left(e^{-x}+3x-\ln(2)\right)\right)^2}$

Lösungweg

Aufgabe 110.

Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen. Die Terme müssen nicht vereinfacht werden

a)

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{3}{\ln(x^2-e^x)}\right)$$

b)

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2+3x}\cos\left(\sin(x)\,e^{-x}\right)\right)$$

c)

$$\frac{d}{dy}\left(e^{xy} - \cos\left(y^{2x} - x^{2y}\right)\right)$$

d)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin(x\cdot t)\cdot e^x}{\cos\left(3+e^{2t^2}\right)}\right)$$

Ergebnis

a) $-\frac{1}{x}+3\frac{1}{\ln^2\left(x^2-e^x\right)}\cdot\frac{1}{x^2-e^x}\cdot\left(2x-e^x\right)$
b) $e^{x^2+3x}\cdot(2x+3)\cdot\cos\left(\sin(x)\,e^{-x}\right)-e^{x^2+3x}\cdot\sin\left(\sin(x)\,e^{-x}\right)\cdot\left(\cos(x)\cdot e^{-x}-\sin(x)\cdot e^{-x}\right)$
c) $xe^{xy}+\left(2xy^{2x-1}-2\ln(x)\,x^{2y}\right)\sin\left(y^{2x}-x^{2y}\right)$
d) $\frac{xe^x\cdot\cos(xt)\cdot\cos\left(3+e^{2t^2}\right)+4te^{2t^2}\cdot e^x\cdot\sin(x\cdot t)\cdot\sin\left(3+e^{2t^2}\right)}{\cos^2\left(3+e^{2t^2}\right)}$

Lösungweg

Aufgabe 111.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Ableitung der folgenden Funktionen (berücksichtigen Sie dabei auch die Definitionsmenge der Funktion):

a)
$$x(t) = e^{t^2\cdot\ln(t)}$$

b)
$$y(x) = \frac{1}{\ln\left(x^3-12x\right)}$$

Ergebnis

a) $t=\frac{1}{\sqrt{e}}$. Die zweite „Nullstelle” der Ableitung $t=0$ liegt nicht in der Definitionsmenge.
b) $x=-2$. Die zweite „Nullstelle” der Ableitung $x=2$ liegt nicht in der Definitionsmenge.

Lösungweg

Aufgabe 112.

Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke und vereinfachen sie die Ausdrücke soweit wie möglich (als “besonders einfach” gelten Darstellungen, bei denen man “Nullstellen” sofort ablesen kann)

a)
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2}\right)$$

b)
$$\frac{d^7}{dt^7}\left(\sin(2t)\right)$$

c)
$$\frac{d^3}{dx^3}\left(e^{-x}\cdot\sin(x)\right)$$

d)
$$\ln^{(4)}(u)$$

Ergebnis

a) $\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}$
b) $-2^7\cos(2t)$
c) $2e^{-x}(\cos(x)+\sin(x))$
d) $-6u^{-4}$

Lösungweg

Aufgabe 113.

Die folgende Gleichung soll näherungsweise mit Hilfe der Linearisierung gelöst werden:

$$3x^{\frac{2}{3}}+x=4\cos(x)$$

Gehen Sie dabei folgender Massen vor:

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Gleichung an.
b) Lösen Sie die Gleichung graphisch und geben Sie an wieviele Lösungen es gibt. Bestimmen Sie anhand Ihrer Graphik die ganze Zahl zwischen 1 und 8, die am nächsten bei einer Lösung der Gleichung liegt. Es wird erwartet, dass die Genauigkeit Ihrer Graphik es erlaubt, diesen Zahlenwert abzulesen.
c) Linearisieren Sie die Gleichung um diese Stelle und lösen Sie die linearisierte Gleichung.

Ergebnis

a) Die Definitionsmenge ist $\mathbb{R}^+$
b) Die beiden Graphen schneiden sich an einer Stelle. Diese liegt ungefähr bei $x=1$. (Graph siehe Lösungsweg)
c) $x=1+\frac{4\cos(1)-4}{3+4\sin(1)}\approx 0.711149$

Lösungweg

KAPITEL 3

Anwendungen

3.1. Kubische Splines

Lernziele:

- *Sie wissen, was kubische Splines sind und können eine Wertetabelle mit Hilfe eines kubischen Splines interpolieren.*
- *Sie kennen den physikalischen Prozess, der zu kubischen Splines führt*

In diesem Abschnitt wiederholen das Verfahren aus Abschnitt 2.1 für Splines 3. Ordnung, d.h. für kubische Splines[1]. Diese sind besonders wichtig, da ihnen ein physikalischer Prozess zu Grunde liegt, der zu besonders natürlichen Kurven führt: das Verlegen von Straklatten (siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Straklatte`), die man bereits seit dem Mittelalter im Schiffsbau einsetzt.

Bei kubischen Splines ist der Ansatz (2.1.3) für die Interpolation bereits recht kompliziert, da jedes Segment des Splines durch ein Polynom 3. Grades dargestellt wird:

$$s_{|[x_i;x_{i+1}]}(x) = p_i(x) \quad = \quad a_{i,3} \cdot x^3 + a_{i,2} \cdot x^2 + a_{i,1} \cdot x + a_{i,0},\ i = 0, ..., (k-1)$$

Es erweist sich deshalb als günstig, das i. Splinepolynom um den Punkt x_i “zu entwickeln” und die Koeffizienten $a_{i,j}$ umzubenennen. Unser Ansatz für das i. Polynom eines kubischen Splines lautet der Ansatz damit

$$s_{|[x_i;x_{i+1}]}(x) = p_i(x) \quad = \quad a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i \tag{3.1.1}$$

mit den vorerst noch unbekannten Werten a_i, b_i, c_i, d_i.

Nach (2.1.8) hat ein kubisches Spline mit $k+1$ Knoten (bzw. k Splinepolynomen) $4k$ Freiheitsgrade. Die Bedingung (2.1.4), dass ein Spline an den Knoten $x_0, ...x_k$ vorgegebene Werte $s_0, ..., s_k$ annimmt, führt für kubische Splines auf die folgenden $2k$ Bedingungen

$$\begin{aligned} a_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^3 + b_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + d_i &= s_{i+1},\ i = 0, ..., k-1 \\ \underbrace{a_i \cdot (x_i - x_i)^3 + b_i \cdot (x_i - x_i)^2 + c_i \cdot (x_i - x_i)}_{=0} + d_i &= s_i,\ i = 0, ..., k-1 \end{aligned}$$

[1] Da kubische Splines in der Praxis die grösste Bedeutung haben, verzichten wir auf die Berechnung von Splines anderen Grades. Das Vorgehen zur Berechnung von Splines eines anderen Grades unterscheidet sich aber nicht vom Vorgehen bei der Berechnung kubischer Splines. Die Spline Bedingungen (3.1.4) bis (3.1.9) werden lediglich um zusätzliche “Glattheitsbedingungen” erweitert, sofern die Zahl der Freiheitsgrade dies erforderlich machen sollte.

Es fehlen uns also noch $4k - 2k = 2k$ weitere Bedingungen, um alle Polynomkoeffizienten des Splines eindeutig festzulegen. Diese verbleibenden $2k$ Freiheitsgrade erlauben uns, weitere Eigenschaften der Splinefunktion zu verlangen, und ermöglichen die Forderung, dass die Splinekurve glatt verlaufen soll, d.h. dass der Graph des Splinekurve (bzw. die Straklatte) keine Knicke aufweist.

Da jedes Polynom bereits glatt ist, reicht dafür die Forderung aus, dass das Spline auch an den Übergängen $x_1, ..., x_{k-1}$ glatt verläuft, d.h. dass die Ableitung benachbarter Splinepolynome an den Knotenstellen denselben Wert liefert:

$$p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i) \text{ für } i = 1, ..., (k-1) \qquad (3.1.2)$$

Da diese Glattheitsforderung aber nur auf $k-1$ Bedingungen führt, verbleiben für das kubische Spline immer noch

$$2k - (k-1) = k+1$$

unbestimmte Freiheitsgrade. Um diese zu eliminieren, wiederholen wir die “Glattheitsforderung” ein zweites Mal und verlangen, dass auch die Ableitung der Splinefunktion wieder glatt ist. Mit anderen Worten: wir fordern für kubische Splines neben der Bedingung (3.1.2) auch noch[2]

$$p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i) \text{ für } i = 1, ..., (k-1) \qquad (3.1.3)$$

Selbst jetzt verbleiben immer noch

$$k + 1 - (k-1) = 2$$

Freiheitsgrade. Wir müssen also noch 2 weitere Bedingungen finden, um alle Freiheitsgrade zu eliminieren.

Für diese beiden Bedingungen gibt es unterschiedliche Ansätze. Für sogenannte *natürliche C^2-Splines*, welche den physikalischen Prozess des Verlegens einer Straklatten mit lose eingespannten Rändern repräsentieren, lauten die beiden fehlenden Bedingungen

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= 0 \\ s''(x_k) &= 0 \end{aligned}$$

Zusammengefasst fordern wir für ein kubisches Spline mit $k+1$ Knoten $(x_0, s_0), ... (x_k, s_k)$ also

$$\begin{aligned}
p_i(x_{i+1}) &= s_{i+1} && \text{für } i = 0, ..., (k-1) \\
p_i(x_i) &= s_i && \text{für } i = 0, ..., (k-1) \\
p'_{i-1}(x_i) &= p'_i(x_i) && \text{für } i = 1, ..., (k-1) \\
p''_{i-1}(x_i) &= p''_i(x_i) && \text{für } i = 1, ..., (k-1) \\
p''_0(x_0) &= 0 && \\
p''_{k-1}(x_k) &= 0 &&
\end{aligned}$$

[2] Diese Bedingungen lassen sich aus dem Biegeverhalten einer Straklatte herleiten, was wir im folgenden aber nicht weiter untersuchen.

Um diese Bedingungen auf unsere in (3.1.1) definierten Splinepolynome anwenden zu können, lohnt es sich die ersten beiden Ableitungen der Splinepolynome vorab zu berechnen:

$$\begin{aligned} p_i(x) &= a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i \\ p_i'(x) &= 3a_i \cdot (x - x_i)^2 + 2b_i \cdot (x - x_i) + c_i \\ p_i''(x) &= 6a_i \cdot (x - x_i) + 2b_i \end{aligned}$$

Setzten wir diese Formeln in die vorher gefundenen Bedingungen ein, so ergibt sich ein (auf den ersten Blick) kompliziertes System von Gleichungen

$$a_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^3 + b_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) + d_i = s_{i+1} \text{ für } i = 0, ..., (k-1) \quad (3.1.4)$$

$$d_i = s_i \quad \text{für } i = 0, ..., (k-1) \quad (3.1.5)$$

$$3a_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + 2b_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_{i-1} = c_i \quad \text{für } i = 1, ..., (k-1) \quad (3.1.6)$$

$$6a_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) + 2b_{i-1} = 2b_i \quad \text{für } i = 1, ..., (k-1) \quad (3.1.7)$$

$$2b_0 = 0 \quad (3.1.8)$$

$$6a_{k-1} \cdot (x_k - x_{k-1}) + 2b_{k-1} = 0 \quad (3.1.9)$$

Ersetzten wir in diesem Gleichungssystem allerdings x_i und s_i durch die (bekannten) Werte der Knotenpunkte des Splines, so wird aus diesem Gleichungssystem eine Liste lineare Gleichungen zur Bestimmung der Variablen a_i, b_i, c_i, d_i. Das Gleichungssystem lässt sich damit prinzipiell mit dem Gaussalgorithmus lösen, wobei dies ohne Computer sehr aufwendig ist. Selbst mit dem Computer ist diese Aufgabe noch knifflig, weshalb wir das Gleichungssystem etwas vereinfachen wollen:

Zunächst erlaubt uns Bedingung (3.1.5), die Variable d_i in (3.1.4) durch die Zahl s_i zu ersetzen. Nehmen wir s_i dann auch noch auf die andere Seite der Gleichung, so erhalten wir anstelle von (3.1.4)

$$a_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^3 + b_i \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 + c_i \cdot (x_{i+1} - x_i) \quad = \quad s_{i+1} - s_i$$

Führen wir nun noch die Hilfsgrössen $h_i = x_{i+1} - x_i$ und $y_i = s_{i+1} - s_i$ ein, so erhalten wir den folgenden

Satz 114 (kubische Splines). *Sei $x_0 < x_1 < ... < x_k$. Ein natürliches C^2-Spline s, dessen Graph die Punkte $(x_0, s_0), ...(x_k, s_k)$ enthält, besteht aus k kubischen Polynomen*

$$s_{|[x_i;x_{i+1}]}(x) \quad = \quad a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i$$

deren Koeffizienten den Bedingungen

$$d_i \quad = \quad s_i \text{ für } i = 0, ..., (k-1)$$

und

$$\begin{aligned} a_i \cdot h_i^3 + b_i \cdot h_i^2 + c_i \cdot h_i &= y_i \text{ für } i = 0, ..., (k-1) \\ 3a_{i-1} \cdot h_{i-1}^2 + 2b_{i-1} \cdot h_{i-1} + c_{i-1} &= c_i \text{ für } i = 1, ..., (k-1) \\ 3a_{i-1} \cdot h_{i-1} + b_{i-1} &= b_i \text{ für } i = 1, ..., (k-1) \\ b_0 &= 0 \\ 3a_{k-1} \cdot h_{k-1} + b_{k-1} &= 0 \end{aligned}$$

genügen, wobei wir in diesen Formeln die Hilfsgrössen $h_i = x_{i+1} - x_i$ und $y_i = s_{i+1} - s_i$ verwendet haben.

Die Koeffizienten a_i, b_i, c_i lassen sich aus diesen Gleichungen mit Hilfe des Gaussalgorithmus bestimmen.

3.2. Kurvendiskussionen

Lernziele:

- *Sie kennen den Unterschied zwischen globalen und lokalen Extrema*

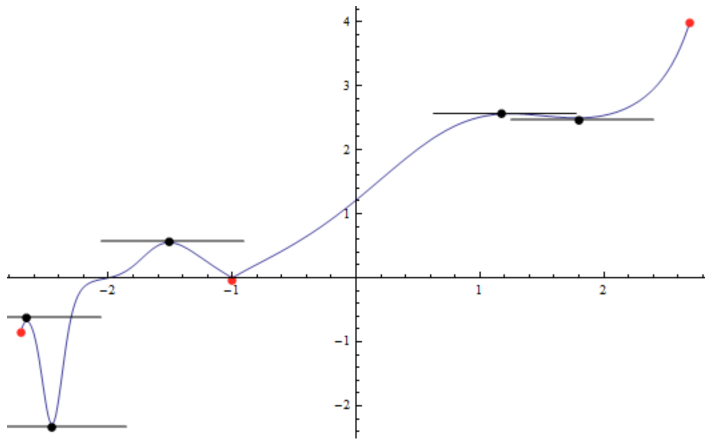


Abbildung 1. Verschieden Extremalstellen einer Funktion. Die schwarz markierten Extremalstellen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Tangente des Funktionsgraphen dort parallel zur Abszissenachse verläuft. Dies gilt für die rot markierten Extremalstellen nicht. Diese liegen entweder am Rand, oder der Funktionsgraph ist an der entsprechenden Stelle nicht glatt (hat einen Knick).

In Abschnitt 2.3.3 (Linearisierung) und in Kapitel 3.1 (kubische Splines) haben wir bereits erste Anwendungen der Ableitung kennengelernt. In diesem Kapitel wollen wir uns einem weiteren Anwendungsfeld der Ableitung, den sogenannten *Optimierungsaufgaben*, widmen. Bei diesen Aufgaben geht es darum, diejenigen Stellen einer Funktion zu bestimmen, bei denen die Funktion möglichst grosse oder möglichst kleine Funktionswerte annimmt[3].

[3]Ein solches Problem finden Sie auch in unserer Semesteraufgabe: “Für welche Geschwindigkeit des Schiffes, ist der Verbrauch pro zurückgelegtem km Seeweg am kleinsten?”

Bei dieser Untersuchung unterscheiden wir zwischen *globalen Maxima*, d.h. Stellen, an denen die Funktion ihren maximalen Wert annimmt, *globalen Minima* (=Stellen mit kleinstmöglichem Funktionswert) und *lokalen Maxima* bzw. *lokalen Minima*, d.h. solchen Stellen, an denen die Funktion zumindest „kurzfristig" einen besonders grossen oder einen besonders kleinen Wert annimmt.

Der Graph in Abbildung 1 hat also von links nach rechts gesehen zunächst ein lokales Minimum (roter Punkt ganz links), danach ein lokale Maximum (1. schwarzer Punkt) und dann das globale Minimum (2. schwarzer Punkt). Danach folgen nacheinander ein lokales Maximum, ein lokales Minimum (2. roter Punkt), ein weiteres lokales Maximum und noch ein lokales Minimum (letzter schwarzer Punkt). Ganz rechts (roter Punkt) folgt dann das globale Maximum.

Zur Berechnung von (lokalen und globalen) Extremalstellen hat es sich als praktisch erwiesen, Extremalstellen in die folgenden drei Kategorien einzuteilen (siehe Abbildung 1), da sich für jede dieser Kategorien auf einfache Weise eine „Short-List" von geeigneten Kandidaten bestimmen lässt:

- Extremalstellen im Inneren des Definitionsbereichs an Stellen, an denen die Funktion glatt verläuft (schwarz markiert). An diesen Stellen ist die Tangente des Funktionsgraphen stets parallel zur ersten Koordinatenachse. Kandidaten dieses Typs sind also dadurch gekennzeichnet, dass die 1. Ableitung der Funktion an diesen Stellen verschwindet. Diese Kandidaten werden auch als *stationäre Punkte* bezeichnet.
- Extremalstellen am Rand des Definitionsbereichs (rot markiert).
- Die übrigen Extremalstellen, also Stellen im Inneren des Definitionsbereichs, an denen die Funktion nicht glatt ist, d.h. entweder einen Knick aufweist oder unstetig ist (ebenfalls rot markiert).

3.2.1. lokale Funktionseigenschaften (stationäre Punkte, lokale Extremalstellen).

Lernziele:

- *Sie wissen, was stationäre Punkte und lokale Extremalstellen sind*
- *Sie können lokale Extremalstellen von glatten Funktionen mit Hilfe der Ableitung berechnen*

In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode entwickeln, die es ermöglicht, alle in Abbildung 1 durch schwarze Punkte markierten Extremstellen zu finden. Dazu definieren wir zunächst

Definition 115. Sei $f : D \to Z$ eine glatte Funktion. Eine Stelle $x \in D$, mit der Eigenschaft

$$f'(x) \quad = \quad 0$$

heisst stationär.

Ist $x \in D$ eine stationäre Stelle der Funktion f und ist die Funktion f in der unmittelbaren Umgebung von x definiert, so verläuft der Graph der Funktion in der Nähe von x "flach" und sieht damit qualitativ wie einer der in Abbildung 2 dargestellten Graphen aus.

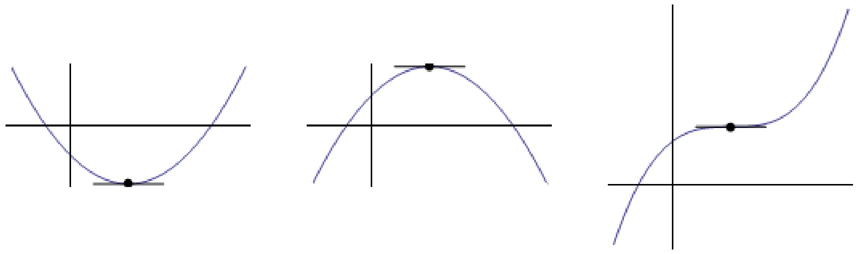


Abbildung 2. Stationäre Punkte sind dadurch gekennzeichnet, dass die Tangente an den Funktionsgraph parallel zur Abszissenachse verläuft. Dies ist nur möglich, wenn der Funktionsgraph in der Nähe des stationären Punktes qualitativ einem der obigen Graphen entspricht: die Funktion hat also entweder ein lokales(!) Minimum, ein lokales(!) Maximum oder einen Sattelpunkt (rechts).

Aufgabe 116.

Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion

$$f(x) \quad = \quad (x-1)^3\left(x^2-2x\right)$$

Lösungweg

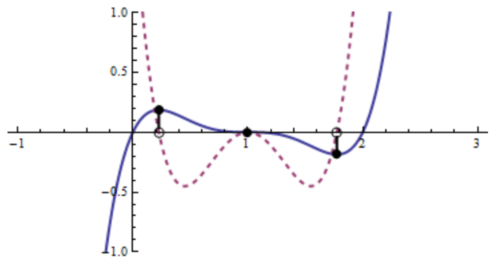


Abbildung 3. Durchgezogene Linie: Graph der Funktion

$$f(x) = (x-1)^3\left(x^2-2x\right)$$

mit den schwarz markierten stationären Punkten. Gestrichelt: Ableitungsfunktion $f'(x)$. Man erkennt gut, dass die Ableitungsfunktion bei allen stationären Punkten der Funktion den Wert Null annimmt, und dass die Steigung der Tangente vor einem Maximum positiv (es geht aufwärts) und nach einem Maximum negativ (es geht abwärts) ist. Analog wechseln die Funktionswerte die Ableitungsfunktion bei einem Minimum von negativen (es geht abwärts) zu positiven (es geht aufwärts) Zahlenwerten.

Beispiel. *Der Graph der Funktion*

$$f(x) \quad = \quad (x-1)^3\left(x^2-2x\right)$$

hat nach der vorigen Aufgabe stationäre Stellen bei $x = 1$, $x = 1 + \frac{\sqrt{60}}{10}$ und $x = 1 - \frac{\sqrt{60}}{10}$. Die stationären Punkte des Funktionsgraphen sind in Abbildung 3 schwarz markiert. Es handelt sich (von links nach rechts) nacheinander um ein lokales Maximum, einen Sattelpunkt und ein lokales Minimum.

Wie man aus Abbildung 2 sieht, sind stationäre Stellen Kandidaten für Extremalstellen. Die Bedingung

$$f'(x) \quad = \quad 0 \tag{3.2.1}$$

ist damit ein hervorragender Filter, um die lokalen Extremalstellen im Inneren des Definitionsbereichs einer glatten Funktion zu finden. Die Bedingung (3.2.1) identifiziert allerdings nicht nur lokale Extremalstellen, sondern auch Sattelpunkte. Deswegen nennt man (3.2.1) auch *notwendig aber nicht hinreichend* dafür, dass eine glatte Funktion f an der Stelle x ein lokales Extremum besitzt.

Um Entscheiden zu können, ob eine stationäre Stelle ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt ist, bedarf es also einer weitergehenden Analyse. Auch hier kann die Ableitungsfunktion helfen.

In Abbildung 3 ist die Funktion

$$f(x) \quad = \quad (x-1)^3 \left(x^2 - 2x\right)$$

zusammen mit ihrer Ableitungsfunktion $f'(x)$ (gestrichelt) dargestellt. Ein lokales Maximum ist dadurch charakterisiert, dass der Funktionsgraph vor dem Maximum ansteigt und nach dem Maximum abfällt. Die Tangente des Funktionsgraphen weisst also unmittelbar vor einem Maximum nach oben und unmittelbar nach dem Maximum nach unten. Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ wechselt bei einem lokalen Maximum damit das Vorzeichen von positiven zu negativen Zahlenwerten.

Auf ähnliche Weise sieht man, dass wir in der Nähe eines lokalen Minimums ein “Tal durchwandern” und die Ableitungsfunktion daher von negativen Werten (=die Steigung zeigt nach unten) zu positiven Werten wechselt.

Bei einem Sattelpunkt wechseln die Funktionswerte der Ableitungsfunktion schliesslich das Vorzeichen nicht. In Abbildung 3 ist die Ableitungsfunktion vor und nach dem Sattelpunkt zum Beispiel negativ, was nichts anderes bedeutet, als dass die Steigung permanent ≤ 0 ist: die Funktion wird also mit wachsenden x-Werten immer kleiner. Möglich wären aber auch Sattelpunkte, bei denen die Funktion mit wachsenden x-Werten grösser wird. Für diese wäre die Ableitung vor und nach der stationären Stelle ≥ 0.

Wir halten fest

Satz 117. *Sei $f : D \to Z$ eine glatte Funktion und $x_0 \in D$ eine stationäre Stelle d.h. $f'(x_0) = 0$. Dann hat f an der Stelle x_0*

- *ein lokales Maximum, wenn sich die Funktionswerte von $f'(x)$ in der Nähe von x_0 von positiven zu negativen Werten hin verändern*
- *ein lokales Minimum, wenn sich die Funktionswerte von $f'(x)$ in der Nähe von x_0 von negativen zu positiven Werten hin verändern*

- *einen Sattelpunkt, wenn $f'(x)$ in der Nähe von x_0 das Vorzeichen nicht verändert, d.h. wenn $f'(x)$ ein lokales Extremum besitzt*

Ein einfaches Kriterium, ob in einem konkreten Fall ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt, liefert uns die Ableitung der Ableitung. Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ kann nämlich nur dann das Vorzeichen von positiven zu negativen Werten wechseln, wenn sie selbst negative Steigung aufweist, d.h. wenn ihre Ableitung negativ ist. Wir halten diesen Sachverhalt fest:

Satz 118. *Sei $f : D \to Z$ eine glatte Funktion und $x_0 \in D$ eine stationäre Stelle, d.h. $f'(x_0) = 0$. Gilt zusätzlich*

- *$f''(x_0) < 0$, so hat f an der der Stelle x_0 ein lokales Maximum*
- *$f''(x_0) > 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum*

gilt dagegen auch $f''(x_0) = 0$, so hat auch f' an der Stelle x_0 einen stationären Punkt. Handelt es sich bei diesem Punkt um ein lokales Extremum der Ableitungsfunktion, so hat $f(x)$ nach Satz 117 einen Sattelpunkt. Genauer: Gilt

- *$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt*

Liegt keiner dieser drei Fälle vor, d.h. gilt

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$$

so müssen wir Satz 117 bemühen, um zu entscheiden, ob ein lokales Maximum oder Minimum vorliegt. Dies ist sehr viel aufwendiger, kommt jedoch glücklicher Weise nicht allzu oft vor.

Aufgabe 119.

In Aufgabe 3.2.1 haben Sie die erste Ableitung und die stationären Stellen der Funktion

$$f(x) \quad = \quad (x-1)^3 \left(x^2 - 2x\right)$$

bestimmt. Die erste Ableitung war dabei

$$f'(x) \quad = \quad (x-1)^2 \left(5x^2 - 10x + 2\right)$$

und die stationären Stellen waren bei $x = 1$, $x = 1 + \frac{\sqrt{60}}{10}$ und $x = 1 - \frac{\sqrt{60}}{10}$. Finden Sie heraus, bei welchen dieser Stellen ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

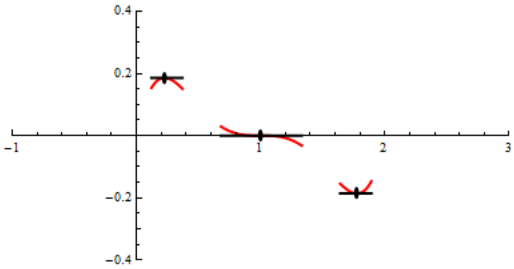
Lösungweg

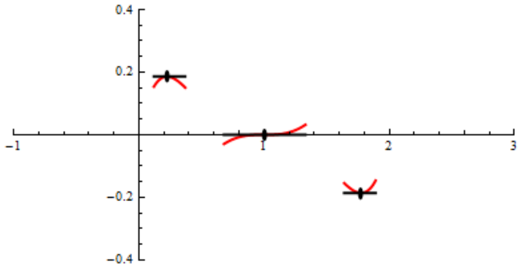
Nachdem wir mit Hilfe der vorangegangenen Aufgabe die lokalen Extremalstellen und Sattelpunkte der Funktion $f(x)$ gefunden haben, können wir diese Informationen nutzen, um den Graph der Funktion zu zeichnen. Wir wissen, dass

- Der Punkt $\left(1 - \frac{\sqrt{60}}{10}, f\left(1 - \frac{\sqrt{60}}{10}\right)\right) \approx (0.225, 0.186)$ ein lokales Maximum ist
- Der Punkt $(1, 0)$ ein Sattelpunkt ist

- Der Punkt $\left(1+\frac{\sqrt{60}}{10}, f\left(1+\frac{\sqrt{60}}{10}\right)\right) \approx (1.775, -0.186)$ ein lokales Minimum ist

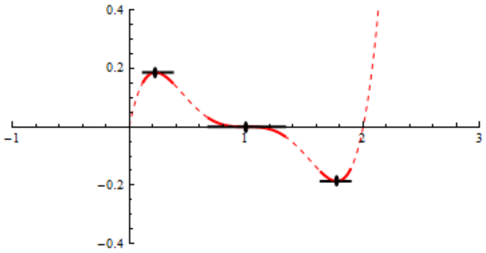
Der Graph der Funktion muss also kompatibel mit einer der folgenden Skizzen sein:





Von diesen beiden Darstellungen kommt aber nur die linke Skizze in Frage, da die Abschnitte der rechten Seite nicht miteinander verbunden werden, ohne ein weiteres lokales Minimum zwischen den stationären Stellen $1-\frac{\sqrt{60}}{10}$ und 1 einzufügen.

Da die Funktion keine weiteren Extremalstellen und Sattelpunkte mehr enthält, kommen wir mit diesem Wissen bereits dadurch zu einer sehr guten Darstellung des Funktionsgraphen, dass wir die verschiedenen Extremalstellen und Sattelpunkte durch Linien miteinander verbinden.



3.2.2. Kurvendiskussion.

Lernziele:

- *Sie wissen, was Wendestellen sind, und wie Sie diese mit Hilfe der Ableitung berechnen können*
- *Sie wissen, wie Sie den Graphen einer Funktion mit Hilfe von lokalen Extremalstellen und Wendestellen skizzieren können*

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass die Untersuchung der stationären Stellen einer Funktion helfen kann, den Graphen einer Funktion zu skizzieren. Um zu einer noch besseren Skizze des Funktionsgraphen zu gelangen, suchen wir noch weitere markante Stellen des Funktionsgraphen, nämlich diejenigen Stellen, an denen die Funktion kurzfristig eine maximale oder eine minimale Steigung besitzt (siehe Abbildung 4). Diese Stellen werden auch *Wendestellen* genannt, da sich dort das Steigungsverhalten der Funktion umkehrt.

Nach ihrer Definition sind Wendestellen nichts anderes als lokalen Extrema der Ableitungsfunktion $f'(x)$. Notwendig für das Vorhandensein einer Wendestelle ist damit, dass die Tangente

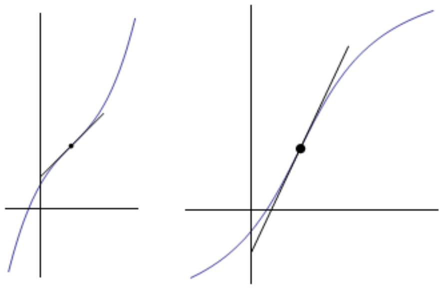


Abbildung 4. Wendestellen sind Stellen minimaler (links) oder maximaler (rechts) Steigung

der Ableitungsfunktion parallel zur 1. Koordinatenachse verläuft, d.h. dass

$$f''(x) = 0 \tag{3.2.2}$$

gilt. Nach Satz 118 liegt sogar mit Sicherheit eine Wendestellen vor, wenn zusätzlich zu (3.2.2) auch noch

$$f'''(x) \neq 0$$

gilt. Ähnlich wie bei der Suche nach Extremalstellen erfordert der Fall $f'''(x) = 0$ eine genauere Untersuchung. Wir wollen an dieser Stelle aber aufhören und halten fest:

Satz 120 (Kurvendiskussion). *Eine glatte Funktion, die mindestens drei Mal abgeleitet werden kann hat an jeder Stelle mit*

- $f'(x) = 0, f''(x) < 0$ *ein lokales Maximum*
- $f'(x) = 0, f''(x) > 0$ *ein lokales Minimum*
- $f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$ *eine Wendestelle (unabhängig davon, welchen Wert* $f'(x)$ *annimmt)*

Ist $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ *so haben wir es mit einer besonderen Situation zu tun. Die Funktion kann in diesen Fällen ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt besitzen und man benötigt Satz 117, um diese Frage zu beantworten.*

Aufgabe 121.

Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion

$$g(t) = \ln(t) + t^2 - 3t + 4$$

und analysieren Sie die Funktion mit Hilfe von Satz 120. Skizzieren Sie abschliessend den Funktionsgraphen.
Überlegen Sie sich dazu auch, wie sich die Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs verhält, in dem Sie in der Nähe dieser Stellen exemplarisch jeweils einen Funktionswert berechnen.

Lösungweg

3.2.3. globale Extremalstellen.

Lernziele:

- *Sie können globale Extremalstellen bestimmen*

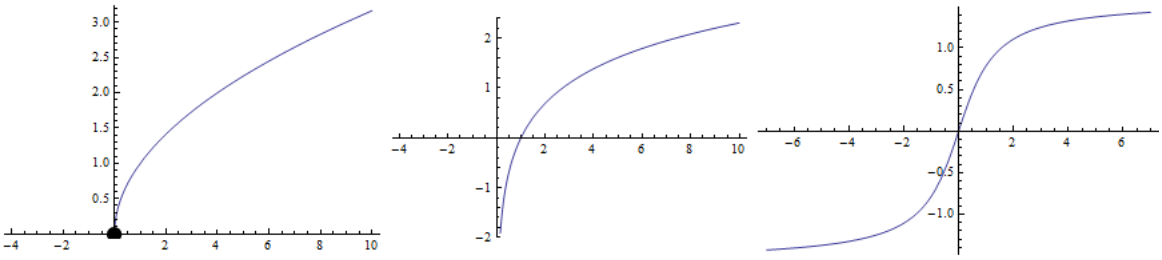


Abbildung 5. Während die Wurzel (links) ein globales Minimum besitzt, haben der Logarithmus (Mitte) und der Arcustangens weder ein globales Minimum noch ein globales Maximum.

In Satz 120 haben Sie eine Methode kennengelernt, mit der Sie alle im Inneren des Definitionsbereichs liegenden Extremalstellen einer glatten Funktion bestimmen können. Das reicht aber in der Regel nicht aus, um Optimierungsaufgaben zu lösen, bei denen in der Regel nur globale Extremwerte (je nach Problem entweder Maximal- oder Minimalstellen) von Interesse sind, da globale Extremalstellen nicht zwingen zu einem stationären Punkt der Funktion gehören. Zum Auffinden globaler Extremwerte müssen deshalb ausserdem die folgenden Stellen untersucht werden (siehe Abbildung 1):

- alle Stellen, an denen die Funktion nicht glatt ist
- Argumente an den "Rändern" des Definitionsbereichs der Funktion

Da den meisten Optimierungsproblemen eine glatte Funktion zu Grunde liegt, beschränken wir uns im Folgenden auf die Untersuchung der "Ränder des Definitionsbereichs".

Beispiel. *In Abbildung 5 sind die Graphen der folgenden Funktionen dargestellt:*

- *Die Quadratwurzelfunktion, die für $x \in [0; \infty)$ definiert ist. Sie hat ein globales Minimum an der Stelle 0 aber kein globales Maximum, da Sie für immer grösser werdende Argumente x immer grössere Werte annehmen kann. Man sagt dazu, dass die Quadratwurzel* nach oben unbeschränkt *ist.*
- *Der Logarithmus, der für $x \in (0; \infty)$ definiert ist, hat - ähnlich, wie die Quadratwurzel - kein globales Maximum. Der Logarithmus besitzt aber auch kein globales Minimum, da die Zahl Null nicht mehr im Definitionsbereich des Logarithmus liegt. Der Logarithmus ist also weder* nach oben noch nach unten beschränkt*.*
- *Die Arcustangensfunktion, die für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, nimmt nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ an. Sie ist somit* durch $\frac{\pi}{2}$ nach oben *und* durch $-\frac{\pi}{2}$ nach unten beschränkt. *Da die*

Werte $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ aber nie erreicht werden, besitzt auch der Arcustangens keine globalen Extremalstellen. Eine Funktion muss also selbst dann keine globalen Extremwerte besitzen, wenn sie beschränkt ist.

Aufgabe 122.

Geben Sie die globalen Extremstellen der folgenden Funktionen an, sofern diese Funktionen solche globalen Extremstellen besitzen:

a)

$$f(x) = x^2$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

c)

$$f(x) = \text{arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Lösungweg

Kehren wir nun ein letztes Mal zu Optimierungsaufgaben zurück. Bei solchen Aufgaben muss in einem ersten *Modellierungsschritt* die zu optimierende Grösse als Funktion eines oder mehrerer Parameter dargestellt werden. Diese Funktion nennt man in diesem Kontext auch *Zielfunktion.*

Sobald die Zielfunktion definiert ist, befassen wir uns mit der Frage, wie die noch unbekannten Parameter gewählt werden müssen, damit die Zielfunktion ihr globales Minimum oder Maximum annimmt. Sehr häufig sind dabei die Definitionsbereiche der Zielfunktion so eingeschränkt, dass die Funktion entweder an einem ihrer stationären Punkte oder am Rand des erlaubten Parameterbereichs tatsächlich einen globalen Extremwert annimmt.

Beispiel. *Sie haben eine 4 Meter lange Holzleiste und sollen daraus einen rechteckigen Hamsterkäfig bauen, so dass der Hamster im Käfig möglichst viel Platz hat. Ziel ist es also den Flächeninhalt des Käfigs zu maximieren. Der Flächeninhalt des Käfigs beträgt in Abhängigkeit von seiner Länge l und Breite b*

$$A = l \cdot b$$

Da Sie nur 4 Meter Holz haben, und da der Käfig umso grösser wird, je mehr Holz Sie verwenden, sollten Sie das ganze Holz für den Käfig verwenden. Dies führt auf die Bedingung:

$$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot l + 2 \cdot b \\ \Leftrightarrow 2 &= l + b \end{aligned}$$

Die Aufgabe, die es zu Lösen gilt lautet also: Maximieren Sie $A = l \cdot b$ unter Berücksichtigung der zusätzlichen Bedingung $l + b = 2.$

Wegen der Bedingung $l+b=2$ besitzt die Problemstellung nur einen Freiheitsgrad. Wir können also die Breite des Hamsterkäfigs aus dessen Länge berechnen

$$b = 2-l$$

und somit den Flächeninhalt des Käfigs als Funktion seiner Länge ausdrücken. Berücksichtigen wir abschliessend noch die Bedingung $0 \leq l \leq b$, so erhalten wir die gesuchte Zielfunktion:

$$A : \begin{cases} [0;2] & \rightarrow \mathbb{R} \\ l & \mapsto l \cdot (2-l) \end{cases}$$

Die Optimierungsaufgabe unseres Problems lautet also: "Für welchen Wert $l \in [0;2]$ wird $A(l)$ maximal?"

Aufgabe 123.

Finden Sie das globale Maximum der Funktion $A(l)$

Lösungweg

Wir widmen uns zum Abschluss dieses Kapitels noch einmal der Semesteraufgabe und versuchen jetzt die Frage zu beantworten, für welche Geschwindigkeit des Schiffes der Verbrauch pro zurückgelegtem Streckenkilometer am kleinsten ist..

Aufgabe 124.

Der Treibstoffverbrauch (in Liter pro Stunde) eines Lastschiffes, das maximal die Geschwindigkeit $v_{max} = 20\frac{km}{h}$ fahren kann, sei durch die folgende Verbrauchsfunktion gegeben:

$$f \quad : \quad \begin{cases} [0; v_{max}] & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ v & \mapsto v^3 + 54 \end{cases}$$

a) Rechnen Sie den Treibstoffverbrauch pro Stunde in einen Treibstoffverbrauch pro Kilometer um.
b) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Treibstoffverbrauch minimal.
c) Was ändert sich im Fall, dass $v_{max} = 2\frac{km}{h}$ wäre?

Ergebnis

a) Der Treibstoffverbrauch pro km beträgt

$$F \quad : \quad \begin{cases} (0; v_{max}] & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ v & \mapsto \frac{v^3+54}{v} \end{cases}$$

b) Der Treibstoffverbrauch ist bei einer Geschwindigkeit von $v = 3\frac{km}{h}$ minimal.
c) Der Treibstoffverbrauch wäre dann bei einer Geschwindigkeit von $v = 2\frac{km}{h}$ minimal.

Lösungweg

3.3. Übungsaufgaben

Wichtig für die folgende Aufgabe ist, dass Sie sich daran erinnern, dass die Werte h_i und y_i alle bekannt sind und dass sich das obigen Gleichungen deshalb mit Hilfe des Gaussalgorithmus lösen lässt. Wir machen dies aber nicht von Hand sondern verwenden dafür die *Apache Commons Mathematics Library*, eine recht umfangreiche Mathematikbibliothek, die bereits weit über den Stoff dieser Vorlesung hinausreicht.

Aufgabe 125. Semesteraufgabe - Kubische Splines

Ziel der Aufgabe ist die Berechnung eines kubischen Splines, das die Punkte

SpeedOnSurface (x_i)	0	3	5	7.5	8	11	14	18	20	22
FuelPerHour (s_i)	80	90	105	140	131	162	197	251	280	310

enthält. Überprüfen Sie am Ende der Aufgabe die Korrektheit Ihres Programms durch drücken auf den Button "Aufgabe 2".

a) Berechnen Sie in der Methode `calculateCubicSplineParameters()` in unserem Java-Programm die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i. Gehen Sie dabei folgender Massen vor:
   a) Berechnen Sie zunächst die Hilfsgrössen h_i und y_i.
   b) Erzeugen Sie danach eine Klasse vom Typ `Array2DRowRealMatrix` in der richtigen Grösse und initialisieren Sie die Koeffizienten dieser Klasse mit den entsprechenden Koeffizienten aus dem vorher hergeleiteten Gleichungssystem. Die Spalten sollen so gewählt werden, dass die ersten 3 Spalten den Koeffizienten von a_0, b_0, c_0 entsprechen, die nächsten drei Spalten den Werten von a_1, b_1, c_1, ... usw.
   c) Lösen Sie dann das Gleichungssystem mit Hilfe des Computers und den Klassen `LUDecomposition` und `DecompositionSolver`. Dieser Code ist bereits implementiert.
   d) Extrahieren Sie danach aus dem Ergebnis die Werte der Parameter a_i, b_i, c_i.

b) Implementieren Sie die Methode `getFuelPerHourCubic`, die die obige Wertetabelle durch ein kubisches Spline interpoliert.

Ergebnis

a) Siehe Musterlösung in der Klasse `SolutionReference`
b) Siehe Musterlösung in der Klasse `SolutionReference`

Lösungweg

Aufgabe 126.

Bestimmen Sie zunächst die Definitionsmenge und danach alle relativen Extremwerte der folgenden Funktionen. Geben Sie an, ob es sich bei den relativen Extrema um Minima oder Maxima handelt. Skizzieren Sie die Funktionen danach in einem geeigneten Bereich

a)

$$y(x) = x^2 e^{-x}$$

b)

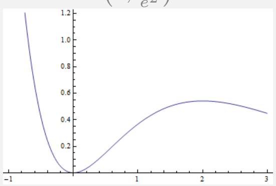
$$y(x) = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 - 4x - 2$$

c)

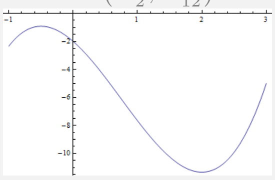
$$y(x) = -\frac{(x-1)^2}{x+2}$$

Ergebnis

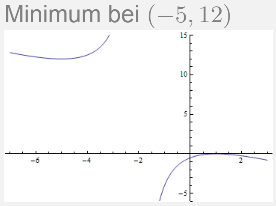
a) Definitionsmenge $\mathbb{R}$, lokales Minimum bei $(0,0)$, lokales Maximum bei $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$



b) Definitionsmenge $\mathbb{R}$, lokales Minimum bei $\left(2, -\frac{34}{3}\right)$, lokales Maximum bei $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{12}\right)$



c) Definitionsmenge $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, lokales Maximum bei $(1,0)$, lokales Minimum bei $(-5,12)$



Lösungweg

Aufgabe 127.

Bestimmen Sie für die Funktionen aus Aufgabe 3.3 auch noch die Wendestellen. Die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung finden Sie in der Lösung der vorangegangenen Aufgabe.

Ergebnis

a) Die Wendestellen befinden sich bei $x = 2 \pm \sqrt{2}$
b) Die Funktion hat an der Stelle $x = \frac{3}{4}$ eine Wendestelle.
c) Die Funktion hat keine Wendestellen.

Lösungweg

Aufgabe 128.

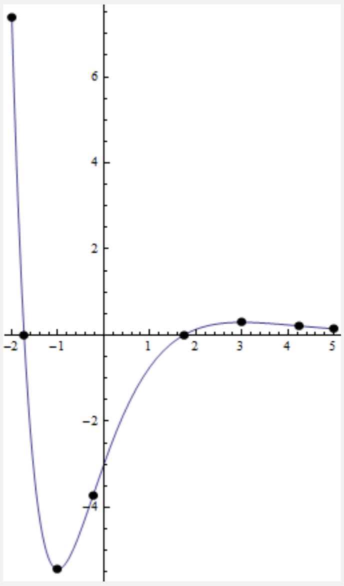
Gegeben sei die folgende Funktion

$$f \quad : \quad \begin{cases} [-2;5] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \left(x^2-3\right)\cdot e^{-x} \end{cases}$$

Bestimmen Sie
a) alle Nullstellen
b) alle lokalen Extremalstellen
c) alle Wendestellen
d) alle globalen Extremalstellen
e) Skizzieren Sie mit diesen Informationen die Funktionsgraphen.

Ergebnis

a) Die Nullstellen liegen bei $x = \sqrt{3}$ und bei $x = -\sqrt{3}$.
b) Die Funktion hat ein lokales Maximum bei $x = 3$ und ein lokales Minimum bei $x = -1$
c) Die Funktion hat Wendestellen bei $x = 2+\sqrt{5}$ und bei $x = 2-\sqrt{5}$
d) Das globale Minimum ist bei $x = -1$, das globale Maximum bei $x = -2$

e) 

Lösungweg

Aufgabe 129.

Gegeben sei die folgende Funktion

$$f \quad : \quad \begin{cases} [-3;3] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \cos(x)\cdot e^{x} \end{cases}$$

Bestimmen Sie
a) alle Nullstellen
b) alle lokalen Extremalstellen

c) alle Wendestellen
d) alle globalen Extremalstellen
e) Skizzieren Sie mit diesen Informationen die Funktionsgraphen.

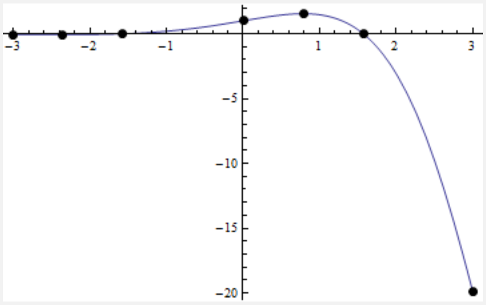
Ergebnis

a) Die Nullstellen liegen bei $x = \frac{\pi}{2}$ und bei $x = -\frac{\pi}{2}$.

a) Die Funktion hat ein lokales Maximum bei $x = \frac{\pi}{4}$ und ein lokales Minimum bei $x = -\frac{3\pi}{4}$

b) Die Funktion hat bei $x = 0$ eine Wendestelle

a) Das globale Minimum liegt bei $x = 3$, das globale Maximum bei $x = \frac{\pi}{4}$.

a) 

Lösungweg

Aufgabe 130.

a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen der Funktion $y(x) = 2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+1}, -1 \leq x \leq 1$.
b) Die Bremskraft K einer Wirbelstrombremse in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v ist: $K(v) = \frac{v}{v^2+a^2}, a > 0, v \geq 0$. Bei welcher Geschwindigkeit erreicht die Bremskraft ihren grössten Wert? (Sie dürfen annehmen, dass $K(v)$ für grosse Werte von v ungefähr gleich 0 ist)

Ergebnis

a) Die Funktion hat an der Stelle $x = 0$ ein globales Maximum und an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ jeweils ein globales Minimum.
b) Die Bremskraft erreicht an der Stelle $v = a$ ihren grössten Wert.

Lösungweg

Aufgabe 131.

Für ein Grundstück beträgt der grosse und der kleine Grenzabstand $5m$. Der Strassenabstand beträgt $2m$. Ziel dieser Aufgabe ist es, herauszufinden, welche Länge und Breite für ein rechteckiges Grundstück mit einer Fläche von $1000m^2$ am günstigsten, wenn bei der Bebauung an drei Seiten der kleine Grenzabstand und an einer Seite der Strassenabstand eingehalten werden muss. Gehen Sie dabei folgender Massen vor:

a) Drücken Sie die gesamte Grundstücksfläche von $A = 1000m^2$ sowie die bebaubare Grundstücksfläche A_{Bau} als Funktion der Länge und Breite des Grundstücks aus.
b) Benutzen Sie die beiden Gleichungen, um A_{Bau} als Funktion der Grundstückslänge darzustellen. Definieren Sie A_{Bau} als Funktion, indem Sie sowohl die Definitionsmenge als auch die Berechnungsvorschrift angeben.
c) Suchen Sie die Länge und Breite des globalen Maximums von A_{Bau} an.

Ergebnis

a)

$$\begin{aligned} A &= l \cdot b \\ A_{Bau} &= (l-7)(b-10) \end{aligned}$$

b)

$$A_{Bau} \quad : \quad \begin{cases} [7, 100] & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ l & \mapsto (l-7)(\frac{1000}{l} - 10) \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} l &= 10\sqrt{7} \\ b &= \frac{1000}{10\sqrt{7}} = \frac{100\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

Lösungweg

Aufgabe 132.

Der Graph der Funktion

$$f \quad : \quad \begin{cases} (0; \infty) & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^x - \ln(x) \end{cases}$$

hat ein globales Minimum.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Minimums durch eine Rechnung ungefähr mit Hilfe der Linearisierung.
b) Verbessern Sie die Lösung mit Hilfe des Programms aus Aufgabe Aufgabe 2.5.2.
c) Verbessern Sie Ihr Ergebnis weiter, indem Sie die Methode `public double differentialQuotient(double x)` für die spezifische Situation dieser Aufgabe implementieren.

Ergebnis

a) Das Minimum liegt ungefähr bei $\frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}+4}$

b)
```
Die Lösung der Gleichung f(x)=0 liegt ungefähr bei:
x = 0.5671432899120064
```

c)
```
Die Lösung der Gleichung f(x)=0 liegt ungefähr bei:
x = 0.5671432898896052
```

Lösungweg

Aufgabe 133. Semesteraufgabe - automatische Geschwindigkeitssteuerung

In Aufgabe 3.3 haben Sie die Funktion `getFuelPerHourCubic` als kubisches Spline implementiert. Wir möchten dieses Resultat nun benutzen, um eine automatische Geschwindigkeitssteuerung des Schiffes zu implementieren. Dazu wiederholen wir die Arbeitsschritte aus 3.2.3 für eine Treibstoffverbrauchskurve

$$s \quad : \quad [0; v_{max}] \to \mathbb{R}^+$$

die einem kubischen Spline entspricht. Da sich ein solches Spline stückweise aus Polynomen dritten Grades zusammensetzt, können wir in dieser Aufgabe annehmen, dass wir es mit mehreren Funktionen vom Typ

$$f \quad : \quad \begin{cases} [v_l; v_r] & \to \mathbb{R}^+ \\ v & \mapsto a\,(v - v_l)^3 + b\,(v - v_l)^2 + c\,(v - v_l) + d \end{cases}$$

zu tun haben, wobei v_l und v_r jeweils dem 1. Argumente zweier benachbarter Knotenpunkte des Splines entsprechen (siehe auch (3.1.1)).

a) Rechnen Sie den durch f gegebenen Treibstoffverbrauch pro Stunde bei einer Fahrtgeschwindigkeit v relativ zur Wasseroberfläche in einen Treibstoffverbrauch pro zurückgelegtem Kilometer F um. Berücksichtigen Sie dabei, dass das Wasser mit der Strömungsgeschwindigkeit $v_{Ström}$ fliesst (der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Schiff auf einem Fluss fährt).

b) Welchen Definitionsbereich hat die Funktion F aus dem vorangegangenen Aufgabenteil sinnvoller Weise?

c) Finden Sie eine Gleichung, mit der Sie alle stationären Punkte der Funktion F in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit $v_S = v - v_l$ und der Parameter a, b, c, d bestimmen können. In welchem Bereich muss v_S liegen? (Die Gleichung selbst können Sie mit den Ihnen bekannten Methoden nur mit dem Newtonverfahren lösen).

Ergebnis

a)

$$F(v) = \frac{a(v-v_l)^3 + b(v-v_l)^2 + c(v-v_l) + d}{v + v_{Ström}}$$

b)

$$[v_l; v_r] \cap (-v_{Ström}; \infty)$$

c) Die Bedingung lautet

$$2a \cdot v_S^3 + (b + 3a(v_l + v_{Ström})) \cdot v_S^2 + 2b(v_l + v_{Ström}) \cdot v_S + c(v_l + v_{Ström}) - d = 0$$

wobei $v_S \in [0; v_r - v_l] \cap (-v_l - v_{Ström}; \infty)$

Lösungweg

Aufgabe 134. Semesteraufgabe - automatische Geschwindigkeitssteuerung

In Aufgabe 3.3 haben wir herausgefunden, dass der optimale Treibstoffbedarf des Schiffs bei der Geschwindigkeit liegt, bei der sich das globale Minimum der Funktion

$$F : \begin{cases} (-v_{Ström}; v_{max} - v_{Ström}] & \to \mathbb{R}^+ \\ v & \mapsto \frac{s(v)}{v + v_{Ström}} \end{cases}$$

befindet. Ziel dieser Aufgabe ist eine Software, die diese optimale Geschwindigkeit (zu einer vorgegebenen Strömungsgeschwindigkeit $v_{Ström}$) dadurch bestimmt, dass sie unter allen stationären Stellen und den Rändern des Definitionsbereichs von F diejenige Geschwindigkeit ermittelt, die F minimiert. Die notwendige Hilfsfunktion zum Lösen von Gleichungen des Typs

$$2a \cdot v_S^3 + (b + 3a(v_l + v_{Ström})) \cdot v_S^2 + 2b(v_l + v_{Ström}) \cdot v_S + c(v_l + v_{Ström}) - d = 0$$

(Herleitung siehe Aufgabe 3.3) finden Sie in ch.hsr. util .PolynomDienste.
Implementieren Sie dazu die Funktion `onSensorDataAvailable`, welche durch drücken des Buttons „Aufgabe 3" aufgerufen wird. Diese Methode erhält über das Argument `shipSensor` alle aktuellen Geschwindigkeits- und Verbrauchsinformationen des Schiffes. Zu diesen Daten soll dann eine aus der Perspektive des Treibstoffbedarfs optimale Geschwindigkeit für das Schiff relativ zur Wasseroberfläche berechnet und danach durch einen Aufruf der Methode `shipSteering.setSpeedOnSurface()` an die Motoren des Schiffs weitergeben werden.

Ergebnis

Siehe Referenzimplementation in der Klasse `SolutionReference`

Schlusswort

In dieser Vorlesung haben Sie gelernt,

(1) wie Sie mit Hilfe der Linearisierung und dem Newton-Verfahren auch komplizierte Gleichungen lösen können

(2) wie Sie mit Hilfe der Ableitung Optimierungsprobleme lösen können

(3) wie Sie mit Hilfe von Splines einen Datensatz samplen können

Im Rahmen der Semesteraufgabe haben Sie auch gesehen, wie all diese Aufgaben ineinander greifen. So haben wir Messdaten durch ein Splines gesampled und daraus eine Verbrauchsfunktion gebastelt, von der wir mit Hilfe der Ableitung die Geschwindigkeit des Schiffes mit momentan günstigstem Treibstoffbedarf finden konnten. Dabei mussten wir eine Gleichung Lösen, die bereits so kompliziert war, dass wir an dieser Stelle das Newton-Verfahren hätten verwenden können.

Auch wenn die Aufgabe, die Sie in dieser Vorlesung gelöst haben, vielleicht etwas künstlich war, so werden die hier beschriebenen Techniken in der Praxis recht intensiv eingesetzt. Computerspiele und Bildverarbeitung wäre ohne die hier verwendeten Techniken nicht möglich. Viel wichtiger ist aber, dass sich der Computer in den letzten Jahren mehr und mehr von einem "Sachbearbeiter", der klar definierte Arbeitsprozesse schrittweise lösen soll, hin zu einem "Berater" entwickelt hat, der versucht, die Bedürfnisse seines Benutzers zu erraten und den Alltag durch Ratschläge positiv zu beeinflussen.

Gerade bei diesem Typ von Problemen sind den klassischen Programmiertechniken Grenzen gesetzt. Zum Einsatz kommen hier häufig statistische Methoden, die zum Teil wiederum stark auf den in dieser Vorlesung gelehrten Inhalten aufbauen. Für viele dieser Aufgaben gibt es heute schon gute APIs. Deren Verwendung ist allerdings in der Regel nicht einfach und meist wird von den Benutzern solcher APIs ein solides Verständnis der zugrundeliegenden Materie gefordert.

Auch wenn ich Ihnen vermutlich an der ein oder anderen Stelle recht harten Stoff zugemutet habe, so hoffe ich doch, dass ich Ihnen mit meiner Vorlesung für Ihre berufliche Zukunft wenigstens ein paar Methoden mit auf den Weg geben konnte, die Sie im Laufe ihre noch langen Berufskarriere hin und wieder gebrauchen können. In diesem Sinne wünsche ich Ihnen für Ihre Zukunft alles gute und natürlich auch viel Erfolg bei der anstehenden Prüfung.

ANHANG A

Formelsammlung

A.1. Potenzgesetze

Die Potenzgesetze

$$
\begin{aligned}
a^n a^m &= a^{n+m}\\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}\\
a^n b^n &= (ab)^n\\
\frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n\\
a^{n\cdot m} &= (a^n)^m\\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n}\\
a^0 &= 1\\
a^1 &= a
\end{aligned}
$$

gelten in “zwei unterschiedlichen Welten”, die Sie auf keinen Fall vermischen dürfen, da sonst Ihre Berechnungen falsch werden:

- für “ganzzahlige Exponenten”, d.h. für $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$
- für “reelle Exponenten”, d.h. für $a, b > 0$ und $m, n \in \mathbb{R}$.

In “beiden Welten” ist es sogar erlaubt, dass a oder b den Wert 0 annehmen, wenn nicht durch Null geteilt wird und der Term 0^n nicht mit einem Exponenten $n < 0$ vorkommt.

Bemerkung. *In der zweiten Form $a, b > 0$ stellen die Potenzgesetze auch die Rechenregeln für den Umgang mit der Exponentialfunktion* $\exp_a(x) = a^x$ *dar, wobei die Exponentialfunktion nur für $a > 0,\ a \neq 1$ definiert ist.*

A.2. Spezialfälle der Potenzgesetze

A.2.1. Wurzel.

$$
\sqrt[n]{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \to \mathbb{R}^+\\ x & \mapsto x^{\frac{1}{n}} \end{cases}
$$

Bemerkung. *Wird der Index n bei der Wurzelfunktion weggelassen, so wird angenommen, dass es sich dabei um die Zahl 2 handelt. Es gilt also*

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Sei $a, b \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{falls } b \neq 0 \\ \sqrt{1} &= 1 \\ \sqrt{0} &= 0\end{aligned}$$

Bemerkung. *Diese Regeln gelten auch für Wurzeln mit anderen Wurzelexponenten. Meist benötigt man diese Regeln aber nicht, da solche Wurzeln in der Regel durch Potenzen ausgedrückt werden.*

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2} &= |a| \text{ für } a \in \mathbb{R} \\ \sqrt{a}^2 &= a \text{ für } a \geq 0\end{aligned}$$

Bemerkung. *Die Zusatzregeln gelten für den Fall $a < 0$ nur für gerade Exponenten. Für ungerade Exponenten und negative a ist der Term $\sqrt[n]{a^n}$ nämlich nicht definiert.*

A.2.2. Exponentialfunktion.

$$\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \\ x & \mapsto a^x \end{cases}$$

Bemerkung. *Wird der Index a bei der Exponentialfunktion weggelassen, so wird angenommen, dass es sich bei a um die Eulersche Zahl e handelt. Es gilt also*

$$\exp(x) = e^x$$

Sei $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\exp_a(x+y) &= \exp_a(x)\exp_a(y) \\ \exp_a(x-y) &= \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)} \\ \exp_a(-x) &= \frac{1}{\exp_a(x)} \\ (\exp_a(x))^y &= \exp_a(x \cdot y) \\ \exp_a(0) &= 1 \\ \exp_a(1) &= a\end{aligned}$$

A.2.3. Logarithmen.

$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \log_a(x) \end{cases}$$

Bemerkung. *Handelt es sich bei der Zahl a um die Eulersche Zahl e, so schreiben wir für den Logarithmus auch* ln*. Es gilt also*

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

Sei $x, y > 0$, $a \in (0; \infty) \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^{\log_a(x)} &= x \\ \log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\ \log_a\left(x^b\right) &= b \cdot \log_a(x) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt auch

$$\begin{aligned} \log_a(a^x) &= x \\ \log_a(1) &= 0 \\ \log_a(a) &= 1 \end{aligned}$$

A.2.4. Sinus, Kosinus, Tangens.

Fundamentalbeziehungen.

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ 1 &= \cos^2(x) + \sin^2(x) \end{aligned}$$

Quadrantenbeziehungen.

$$\varphi \rightsquigarrow \varphi + 2\pi \qquad \varphi \rightsquigarrow \varphi + \pi \qquad \varphi \rightsquigarrow -\varphi \qquad \varphi \rightsquigarrow \pi - \varphi \qquad \varphi \rightsquigarrow \tfrac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \sin(\varphi + 2\pi) = -\sin(\varphi + \pi) = -\sin(-\varphi) = \sin(\pi - \varphi) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) \\ \cos(\varphi) &= \cos(\varphi + 2\pi) = -\cos(\varphi + \pi) = \cos(-\varphi) = -\cos(\pi - \varphi) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) \\ \tan(\varphi) &= \tan(\varphi + 2\pi) = \tan(\varphi + \pi) = -\tan(-\varphi) = -\tan(\pi - \varphi) = \cot(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) \end{aligned}$$

Additionstheoreme und Doppelwinkeltheoreme. Die Additionstheoreme lauten

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

wobei diese Formeln so zu lesen sind, dass entweder immer die oberen oder immer die untere Symbole miteinander kombiniert werden. Die Doppelwinkeltheoreme sind ein Spezialfall der Additionstheoreme ($y = x$) und lauten

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)\end{aligned}$$

A.3. Umkehrfunktionen

Der Logarithmus ist Umkehrfunktion der Exponentialfunktion und umgekehrt:

$$\begin{aligned}\ln\left(e^x\right) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}\\ e^{\ln(x)} &= x \text{ für } x \in (0;\infty)\text{ , sonst undefiniert}\end{aligned}$$

Die Quadratwurzel ist die Umkehrfunktion der Quadratfunktion, wenn man die Quadratfunktion vorher auf $\mathbb{R}^+$ einschränkt. Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2} &= x \text{ nur für } x \in \mathbb{R}^+\text{, sonst falsch}\\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}^+\text{, sonst undefiniert}\end{aligned}$$

aber

$$\sqrt{x^2} = |x| \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Die Arcusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, wenn Sie diese vorher auf einen geeigneten Definitionsbereich einschränken:

$$\begin{aligned}\arcsin &= \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}\\ \arccos &= \cos_{|[0;\pi]}\\ \arctan &= \tan_{|\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}\arcsin\left(\sin(x)\right) &= x \text{ nur für } x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\text{ , sonst falsch}\\ \arccos\left(\cos(x)\right) &= x \text{ nur für } x \in [0;\pi]\text{ , sonst falsch}\\ \arctan\left(\tan(x)\right) &= x \text{ nur für } x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\text{ , sonst falsch}\end{aligned}$$

Für x aus dem Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen können Sie dagegen nur sagen, dass

$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin(x)) &\in (\{x+2\pi k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}) \cap \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\
\arccos(\cos(x)) &\in (\{x+2\pi k | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}) \cap [0; \pi] \\
\arctan(\tan(x)) &\in \{x+\pi k | k \in \mathbb{Z}\} \cap \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin(x)) &= x \text{ für } x \in [-1; 1]\text{, sonst undefiniert} \\
\cos(\arccos(x)) &= x \text{ für } x \in [-1; 1]\text{, sonst undefiniert} \\
\tan(\arctan(x)) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

ANHANG B

Gleichungsumformungen

B.1. Grundregeln

Wenn man sehr sorgfältig arbeitet, lassen sich alle Äquivalenzumformungen für Gleichungen auf die folgenden Grundregeln zurückführen:

(1) Man darf zur linken und rechten Seite einer Gleichung einen beliebigen Term hinzuzählen oder diesen abziehen:

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \quad | + S(x) \\ \Leftrightarrow & T_1(x) + S(x) & = & T_2(x) + S(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \quad | - S(x) \\ \Leftrightarrow & T_1(x) - S(x) & = & T_2(x) - S(x) & \end{array}$$

(2) Man darf die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einem beliebigen Term multiplizieren oder durch diesen Term dividieren, sofern dieser Term nicht Null wird:

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \quad | \cdot S(x) \\ \overset{S(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} & T_1(x) \cdot S(x) & = & T_2(x) \cdot S(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \quad | : S(x) \\ \overset{S(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} & \frac{T_1(x)}{S(x)} & = & \frac{T_2(x)}{S(x)} & \end{array}$$

(3) Man darf eine *injektive* Funktion auf beide Seiten einer Gleichung anwenden, sofern beide Seiten im Definitionsbereich DB_f dieser Funktion liegen

$$\begin{array}{rrcll} & T_1(x) & = & T_2(x) & \quad |f(\cdot) \text{ injektiv} \\ \overset{T_1(x),T_2(x)\in DB_f}{\Leftrightarrow} & f(T_1(x)) & = & f(T_2(x)) & \end{array}$$

(4) Man darf die Terme der linken und rechten Seite der Gleichung einzeln vereinfachen, wenn sich dadurch der Definitionsbereich der Gleichung nicht verändert.

B.2. Erweiterte Regeln

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Umformungsregeln sind fehleranfällig. Deshalb lohnt es sich, den Spezialfall der elementaren Funktionen explizit zu untersuchen:

(1) Regel zum Wegschaffen einer positiven geraden ganzzahligen Potenz g

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^g & = & T_2(x) & |\sqrt[g]{\cdot}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & \pm\sqrt[g]{T_2(x)} & \end{array}$$

(2) Regel zum Wegschaffen einer positiven ungeraden ganzzahligen Potenz u

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^u & = & T_2(x) & |\sqrt[u]{\cdot}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst Sonderfall}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & \sqrt[u]{T_2(x)} & \end{array}$$

Sonderfall $T_2(x) < 0$

$$-T_1(x) = \sqrt[u]{-T_2(x)}$$

In folgendem Spezialfall benötigt man keinen Sonderfall:

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^u & = & (T_2(x))^u & |\sqrt[u]{\cdot}\text{ injektiv} \\ \Leftrightarrow & T_1(x) & = & T_2(x) & \end{array}$$

(3) Regel zum Wegschaffen einer nicht-ganzzahligen positiven Potenz p

$$\begin{array}{rrcll} & (T_1(x))^p & = & T_2(x) & |(\cdot)^{\frac{1}{p}}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & (T_2(x))^{\frac{1}{p}} & \end{array}$$

(4) Regel zum Wegschaffen einer Quadratwurzel (andere Wurzeln sollten als Potenz geschrieben und mit der der vorangegangenen Regel behandelt werden)

$$\begin{array}{rrcll} & \sqrt{T_1(x)} & = & T_2(x) & |\cdot^2_{|\mathbb{R}^+}\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)\geq 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & (T_2(x))^2 & \end{array}$$

(5) Regel zum Wegschaffen eines Logarithmus

$$\begin{array}{rrcll} & \ln(T_1(x)) & = & T_2(x) & |\exp(\cdot)\text{ injektiv} \\ \Leftrightarrow & T_1(x) & = & e^{T_2(x)} & \end{array}$$

Vorsicht bei Gleichungen vom Typ:

$$\begin{array}{rrcll} & \ln(T_1(x)) & = & \ln(T_2(x)) & |\exp(\cdot)\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)> 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & T_2(x) & \end{array}$$

(6) Regel zum Wegschaffen der Exponentialfunktion

$$\begin{array}{rrcll} & e^{T_1(x)} & = & T_2(x) & |\ln(\cdot)\text{ injektiv} \\ \overset{T_2(x)> 0,\text{ sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} & T_1(x) & = & \ln(T_2(x)) & \end{array}$$

(7) Regel zum Wegschaffen des Sinus

$$\begin{aligned} \sin\left(T_1\left(x\right)\right) &= T_2\left(x\right) \\ \overset{T_2(x)\in[-1;1],\ \text{sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1\left(x\right) &= \arcsin\left(T_2\left(x\right)\right) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \vee T_1\left(x\right) &= \pi - \arcsin\left(T_2\left(x\right)\right) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

(8) Regel zum Wegschaffen des Kosinus

$$\begin{aligned} \cos\left(T_1\left(x\right)\right) &= T_2\left(x\right) \\ \overset{T_2(x)\in[-1;1],\ \text{sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1\left(x\right) &= \pm\arccos\left(T_2\left(x\right)\right) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

(9) Regel zum Wegschaffen des Tangens

$$\begin{aligned} \tan\left(T_1\left(x\right)\right) &= T_2\left(x\right) \\ \Leftrightarrow \quad T_1\left(x\right) &= \arctan\left(T_2\left(x\right)\right) + \pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

(10) Regel zum Wegschaffen des Arcussinus

$$\begin{aligned} \arcsin\left(T_1\left(x\right)\right) &= T_2\left(x\right) && \mid \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}(\cdot)\ \text{injektiv} \\ \overset{T_2(x)\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ \text{sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1\left(x\right) &= \sin\left(T_2\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

(11) Regel zum Wegschaffen des Arcuscosinus

$$\begin{aligned} \arccos\left(T_1\left(x\right)\right) &= T_2\left(x\right) && \mid \cos_{|[0;\pi]}(\cdot)\ \text{injektiv} \\ \overset{T_2(x)\in[0;\pi],\ \text{sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1\left(x\right) &= \cos\left(T_2\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

(12) Regel zum Wegschaffen des Arcustangens

$$\begin{aligned} \arctan\left(T_1\left(x\right)\right) &= T_2\left(x\right) && \mid \tan_{|\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}(\cdot)\ \text{injektiv} \\ \overset{T_2(x)\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\ \text{sonst unlösbar}}{\Leftrightarrow} \quad T_1\left(x\right) &= \tan\left(T_2\left(x\right)\right) \end{aligned}$$

ANHANG C

Ableitungsregeln

C.1. Ableitungen wichtiger elementarer Funktionen

Die folgende Tabelle stellt die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen zusammen. Es wird erwartet, dass Sie die Ableitung dieser Funktionen auswendig kennen oder sich herleiten können.

	Funktion	Ableitungsfunktion	Termschreibweise	Bemerkungen
1.	$x \mapsto x^a$	$x \mapsto a \cdot x^{a-1}$	$\frac{d}{dx}(x^a) = \frac{dx^a}{dx} = a \cdot x^{a-1}$	gilt für $x > 0,\ a \in \mathbb{R}$ und für $x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{Z}$
2.	$x \mapsto 1$	$x \mapsto 0$	$\frac{d}{dx}(1) = \frac{d1}{dx} = 0$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = 0$
3.	$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\frac{d}{dx}(x) = \frac{dx}{dx} = 1$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = 1$
4.	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{dx^2}{dx} = 2x$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = 2$
5.	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = \frac{d(x^{-1})}{dx} = -\frac{1}{x^2}$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = -1$
6.	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	Spezialfall von Gleichung (1) für $a = \frac{1}{2}$
7.	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{de^x}{dx} = e^x$	

	Funktion	Ableitungsfunktion	Termschreibweise	Bemerkungen
8.	$x \mapsto a^x$	$x \mapsto \ln(a) \cdot a^x$	$\frac{da^x}{dx} = \ln(a) \cdot a^x$	Spezialfall von Gleichung (7): $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(a)})$
9.	$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}$	
10.	$x \mapsto \log_b(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$	$\frac{d}{dx} \log_b(x) = \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$	Spezialfall von Gleichung (9): $\frac{d}{dx} \log_b(x) = \frac{d \frac{ln(x)}{ln(b)}}{dx}$
11.	$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$	
12.	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$	
13.	$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	Folgt wegen $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ aus (11) und (12)
14.	$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x)$	$\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$	Alternative Darstellung zu (13)

Neben diesen Regeln sind auch die folgenden Ableitungsregeln wichtig. Sie werden in der Prüfung aber als Formelsammlung angegeben:

	Funktion	Ableitungsfunktion	Termschreibweise
15.	$x \mapsto \arcsin(x)$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{d \arcsin(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16.	$x \mapsto \arccos(x)$	$x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{d \arccos(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
17.	$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{d \arctan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

C.2. Regeln für Funktionen

Name der Regel	Regel für Funktionen	Regeln für Funktionen, ausgewertet an einer Stelle x
Linearitätsregel	$(f+g)' = f' + g'$	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Produktregel mit Konstante c	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
Kettenregel	$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$	$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Dieselben Regeln für Terme

Name der Regel	Regel für Terme
Linearitätsregel	$\frac{d}{dx}\left(f(x) + g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$
Produktregel	$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}$
Produktregel mit Konstante c	$\frac{d}{dx}\left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot \frac{df(x)}{dx}$
Kettenregel	$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(u)}{du}_{\vert u=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$
Quotientenregel	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df(x)}{dx} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx}}{(g(x))^2}$

C.3. Kurvendiskussion

- Stationäre Punkte: $f'(x) = 0$
  - lokale Maxima: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$
  - lokale Minima: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$
  - unentschieden : $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$
- Wendestellen:

  - Sicher eine Wendestelle: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
  - unentschieden : $f''(x) = 0$ und $f'''(x) = 0$
- Nullstellen:
  - Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$
- globale Extremalstellen einer glatten Funktion mit berandetem Definitionsbereich:
  - Short-List bestehend aus allen Randstellen des Definitionsbereichs und und allen Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$
  - Die Argumente der Short-List, die den grösstmöglichen Funktionswert liefern, sind globale Maxima
  - Die Argumente der Short-List, die den kleinstmöglichen Funktionswert liefern, sind globale Minima

C.4. Linearisierung

$$f(x) \overset{x \approx x_0}{\approx} f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Index