Pràctica 2: Quadratura i mètode de Newton

Al final del document s'explica amb detall què (i quan) cal entregar en aquesta pràctica.

En aquesta pràctica combinarem el càlcul d'integrals amb el de zeros de funcions.

Primera part: Integració pel mètode dels trapezis

Donada una funció $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es vol trobar una aproximació de $\int_a^b f(x)\, dx$. Per a això es pot usar el mètode dels trapezis compostos fent una partició de l'interval $[a, b]$ en N subintervals iguals. Llavors

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx T_N = \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{N-1} f(a + ih_N) + \frac{1}{2}f(b)\right] h_N,$$

on $h_N = (b - a)/N$. Una manera de trobar una bona aproximació de la integral és començar amb $N = 2$ i anar multiplicant per dos el nombre de subintervals fins que la diferència $|T_{2^n} - T_{2^{n-1}}|$ sigui més petita que una certa tolerància, i en tal cas es dóna per bona l'aproximació T_{2^n}.

- Feu una funció de prototipus `double trapezis (int N, double a, double b);` que calculi l'aproximació T_N de la integral $\int_a^b f(x)\, dx$. Aquesta funció cridrarà a la seva vegada una funció `double f(double x);` que avaluarà la funció a integrar f.

- Feu una funció `main` tal que llegeixi `a`, `b`, la tolerància `tol` i el nombre `nmax` que indicarà el nombre màxim de subdivisions que es fa de l'interval $[a, b]$. Cridarà la funció `trapezis` per a $N = 2, 2^2, ...,$ fins que $|T_N - T_{N/2}| <$`tol`, o fins que $N = 2^{\texttt{nmax}}$. En el primer cas escriurà el valor aproximat de la integral, i en el segon cas donarà un avís que la integral no s'ha pogut calcular amb prou precisió.

  Com a exemple podeu aproximar la integral $\int_0^\pi \sin(x)\, dx$

Segona Part: Mètode de Newton

Donada una funció $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua i derivable, i un nombre real c, es busquen les solucions de l'equació $F(x) = c$. Definint $G(x) = F(x) - c$, podem fer el següent:

a) Dividir l'interval inicial en n subintervals d'igual longitud: $[a, b] = \bigcup_{j=0}^{n-1} [a_j, a_{j+1}]$, amb $a_j = a + j(b - a)/n$.

b) Avaluar $G(a_j)$, $j = 0, 1, 2, ...$ Si per un cert j es compleix $G(a_j)G(a_{j+1}) < 0$ s'usa el mètode de Newton per a trobar un zero a $[a_j, a_{j+1}]$ amb valor inicial $x_0 = \frac{1}{2}(a_j + a_{j+1})$, i després es continua calculant $G(a_{j+2})$ fins a trobar un nou canvi de signe. El procés s'acabarà quan $j = n - 1$ o s'hagin trobat tots els zeros demanats.

- Implementeu una funció per trobar zeros de $F(x) - c$ pel mètode de Newton. La seva capçalera serà:

```
int Newton(double *x, double tol, int itmax, double c);
```

La funció rebrà com a paràmetres l'aproximació inicial `*x`, el nombre màxim d'iterats `itmax`, la tolerància `tol` i la constant `c`. Dins de la funció `Newton` es cridaran dues funcions de capçaleres:

```
double F(double x);   double dF(double x);
```

que calcularan el valor de la funció F i de la seva derivada F', respectivament. Per a implementar el mètode de Newton cal usar la fórmula iterativa:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i) - c}{F'(x_i)},$$

amb x_0 el valor que es passa a la funció `Newton` en `*x`

La funció `Newton` retornarà 0 si, per un cert iterat $i \leq n$, $|x_i - x_{i-1}| \leq$`tol` o $|F(x_i) - c| \leq$`tol`, i `*x` contindrà el valor aproximat del zero; retornarà 1 en cas contrari (sense convergència).

- Dissenyeu una funció `main` que llegeixi els extrems d'un interval $[a, b]$ on es vol trobar un nombre màxim m de solucions de $F(x) = c$ fent servir n subintervals. Es cridarà la funció `Newton` per a trobar aquestes solucions.

  Com a exemple podeu calcular els zeros del polinomi $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, que són tots reals i es troben a l'interval $[-1, 3]$.

Tercera Part: Aplicació

Es vol resoldre el problema: Donada una funció f positiva i un nombre $c > 0$ calculeu un $x > 0$ tal que $\int_{-x}^{x} f(y)\, dy = c$. Per això, feu $F(x) = \int_{-x}^{x} f(y)\, dy$.
A partir de la funció `main` de la primera part, feu una funció `double F(double x);` que calculi l'aproximació de la integral $\int_{-x}^{x} f(y)\, dy$ usant `tol= 1e-8` i `nmax = 30`.
La funció `double dF(double x);` que calcula $F'(x)$, retornarà $f(x) + f(-x)$.
Caldrà una funció a integrar `double f(double x);`
Com a exemple podeu calcular $x > 0$ complint $\int_{-x}^{x} \sin^2(y)\, dy = 1$

Instruccions per a l'entrega

Abans de començar a fer la pràctica heu de crear un subdirectori anomenat:

grup-Cognom1Cognom2Nom-X

on

- grup: és el vostre grup de pràctiques en minúscules (pot ser a, b, c o d).
- Cognom1Cognom2Nom: és el vostre primer cognom, segon cognom i nom.
- X: identifica el número de la pràctica (1, 2, 3, etc).

Exemple: `a-LopezPerezMaria-2` correspon a una alumna del grup a que fa la pràctica 2.
Aquest directori contindrà els arxius .c corresponents a les diverses parts:

a) Arxiu `prac2funs.c` que conté les funcions `trapezis`, `Newton`.

b) Arxiu `prac2funs.h` que conté les **capçaleres** de les funcions `trapezis`, `Newton`, `f`,`F` i `dF` per a usar un `#include` en els arxius .c

c) Arxiu `prac2a.c` que conté la funció `main` i les funcions particulars de la primera part.

d) Arxiu `prac2b.c` que conté la funció `main` i les funcions particulars de la segona part.

e) Arxiu `prac2c.c` que conté la funció `main` i les funcions particulars de la tercera part.

No es poden incloure funcions en els arxius tret de les que apareixen en el texte

Es crearà un arxiu comprimit del directori amb la comanda
`tar -czvf a-LopezPerezMaria-2.tgz a-LopezPerezMaria-2`
executada des del directori pare.

Entregar la pràctica vol dir el següent:

(1) Es penjarà el fitxer comprimit (.tgz) al campus virtual abans del **16 de desembre de 2017**.

Tots els arxius .c lliurats hauran de començar amb les dades de l'alumne en un comentari de la forma

`/* COGNOM1: COGNOM2: NOM: DNI: */`

Tots els programes hauran de compilar amb les opcions: `-ansi -pedantic -O -Wall`.
Lliurar un programa sense les dades personals (usant l'estil anterior), o amb algun error o avís (warning) de compilació, serà avaluat amb la qualificació mínima.

(2) Entregar un document (imprès) durant l'hora del laboratori del **20 de desembre de 2017** on es doni resposta argumentada a les diferents qüestions que es proposin en relació a la pràctica.