PARTE II

MA TE MÁ TICA

PARTE II

MATEMÁTICA

01

CONJUNTOS

meSalva!

CONJUNTOS

O Me Salva! perguntou a alguns estudantes para qual curso eles iriam prestar vestibular/ENEM. Em um primeiro grupo, composto por 40 estudantes, 15 estavam interessados em Psicologia, 10 estavam em dúvida entre Psicologia e Medicina e o restante optou por Medicina. No segundo grupo, 21 estudantes gostaria de cursar Biologia, 15 Física e 25 Psicologia; além disso, 8 estavam em dúvida entre Biologia e Física, 10 entre Biologia e Psicologia, 5 entre Física e Psicologia e 3 ainda não haviam decidido se cursariam Biologia, Física ou Psicologia. Por fim, no último grupo, composto por 15 estudantes, 7 se interessavam por Matemática, 4 por Filosofia, 1 por Química e Filosofia, 2 por Matemática e Filosofia e 4 por Matemática e Química. O restante gostaria de cursar Química e nenhum estava interessado nos três cursos ao mesmo tempo. Como podemos saber quantos estudantes ao todo foram consultados e quantos alunos gostariam de cursar Medicina e Química?

Perceba que há muita informação entre esses três grupos de estudantes e vários cursos diferentes. Para podermos responder à pergunta é preciso organizar toda essa confusão. Para isso podemos utilizar um conceito bem interessante da Matemática, o de conjuntos. Um conjunto é composto por elementos semelhantes que podem ser de qualquer natureza, apesar de os numerais serem os mais comuns. Mesmo assim, nada impede que utilizemos, por exemplo, conjuntos compostos por objetos, por letras, por dias da semana ou até, no nosso caso, cursos de graduação. Vamos fazer grupos que indicam os cursos indicados pelos estudantes. Esses grupos formarão conjuntos que são descritos, em geral, por uma letra e com os seus elementos entre chaves. Veja:

O primeiro grupo de estudantes mencionou os cursos de Psicologia e Medicina. Então o conjunto será:

A = {psicologia, medicina}

A letra que nomeia o conjunto é arbitrária. Não se preocupe com isso, ok? Os cursos são os elementos do conjunto.

O segundo grupo citou os cursos de Biologia, Física e Psicologia, então veja o conjunto:

B = {biologia, física, psicologia}

E o último grupo indicou os cursos de Matemática, Química e Filosofia. O conjunto será:

$C = \{$matemática, química, filosofia$\}$

É essencial, antes de partirmos para a resolução do nosso problema, que façamos uma análise de como as operações matemáticas funcionam quando estamos tratando de conjuntos. Para isso, além dos conjuntos A, B e C que definimos anteriormente, vamos analisar os conjuntos D, E e F, que são: D = {1, 2, 3, 4, 5}, E = {4, 5, 6, 7, 8}, F = {6, 7} e G = {5}.

UNIÃO

Essa operação é baseada em unir os elementos de um conjunto com os de outro (ou outros) em um novo conjunto. Utilizamos um sinal parecido com um grande U para indicar essa operação. Veja os exemplos:

No caso de elementos compostos por cursos de graduação:

$A \cup C = \{$psicologia, medicina$\} \cup \{$matemática, química, filosofia$\}$
$A \cup C = \{$psicologia, medicina, matemática, química, filosofia$\}$

No caso de elementos compostos por numerais:

$D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7\}$
$D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Perceba que é quase uma soma de conjuntos, mas nesse caso a nomenclatura é *união*.

INTERSEÇÃO

Esse termo é provavelmente o que você mais vai ler/ouvir quando trabalha com conjuntos. Ele é representado matematicamente por um símbolo que se parece com um U invertido, ou com uma ferradura, . Quando fazemos a intersecção entre dois ou mais conjuntos significa que teremos um terceiro conjunto que contém apenas os elementos iguais dos conjuntos envolvidos. Veja os exemplos:

$$A \cap B = \{\text{psicologia, medicina}\} \cap \{\text{biologia, física, psicologia}\}$$
$$A \cap B = \{\text{psicologia}\}$$

Perceba que havia apenas um elemento em comum entre os dois conjuntos, mas pode haver mais de um ou, ainda, nenhum! Veja como isso pode ser representado:

$$A \cap C = \{\text{psicologia, medicina}\} \cap \{\text{matemática, química, filosofia}\}$$
$$A \cap C = \varnothing$$

O conjunto que resulta de uma intersecção em que os conjuntos envolvidos não apresentam elementos iguais é um conjunto vazio, representado pelo símbolo $\varnothing$.

Veja agora um exemplo com numerais:

$$D \cap E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$D \cap E = \{4, 5\}$$

Perceba que dessa vez há dois elementos repetidos nos conjuntos e, por isso, nessa intersecção, teremos como resultado um conjunto com esses dois elementos.

Além disso, a intersecção possui algumas propriedades que, como você já sabe, visam facilitar alguns procedimentos que a envolvem. Veja::

A intersecção de um conjunto por ele mesmo é o próprio conjunto, veja:

$$A \cap A = A$$
$$\{\text{psicologia, medicina}\} \cap \{\text{psicologia, medicina}\} = \{\text{psicologia, medicina}\}$$

Faz sentido, já que todos os elementos serão repetidos, né?

Propriedade comutativa é válida para conjuntos em intersecção também, ou seja:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap B = \{\text{psicologia}, \text{medicina}\} \cap \{\text{biologia}, \text{física}, \text{psicologia}\} = \{\text{psicologia}\}$$

$$B \cap A = \{\text{biologia}, \text{física}, \text{psicologia}\} \cap \{\text{psicologia}, \text{medicina}\} = \{\text{psicologia}\}$$

Desde que os elementos sejam repetidos nos conjuntos envolvidos, não importa a ordem dessa operação.

Propriedade associativa em conjuntos em intersecção também é válida:

$$D \cap (E \cap G) = (D \cap E) \cap G$$

Vamos analisar um lado da igualdade por vez. Veja o primeiro:

$$D \cap (E \cap G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap (\{4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{5\})$$

$$D \cap (E \cap G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{5\}$$

$$D \cap (E \cap G) = \{5\}$$

Agora o segundo:

$$(D \cap E) \cap G = (\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8\}) \cap \{5\}$$

$$(D \cap E) \cap G = \{4, 5\} \cap \{5\}$$

$$(D \cap E) \cap G = \{5\}$$

Como esperado, chegamos ao mesmo resultado, então guarde essa informação de propriedade associativa para resolver os problemas de conjuntos mais rapidamente.

DIFERENÇA

Nesse caso a ordem dos conjuntos importa, ou seja, A - B é diferente de B - A. Isso porque no primeiro caso, por exemplo, excluiremos de A os elementos que estão repetidos em B. Veja os exemplos utilizando os mesmos conjuntos do caso anterior:

$$A - B = \{\underline{\text{psicologia}}, \text{medicina}\} - \{\text{biologia}, \text{física}, \underline{\text{psicologia}}\}$$
$$A - B = \{\text{medicina}\}$$

Agora veja o que acontece quando invertemos a diferença:

$$B - A = \{\text{biologia}, \text{física}, \underline{\text{psicologia}}\} - \{\underline{\text{psicologia}}, \text{medicina}\}$$
$$B - A = \{\text{biologia}, \text{física}\}$$

Perceba que o resultado é completamente diferente do anterior, então, tome muito cuidado com essa ordem, ok?

Agora vamos ver o caso em que antes encontramos um conjunto vazio como resultado da intersecção quando fazemos uma diferença:

$$A - C = \{\text{psicologia}, \text{medicina}\} - \{\text{matemática}, \text{químico}, \text{filosofia}\}$$
$$A - C = \varnothing$$
$$A - C = \varnothing = A \cap C$$

Também temos como resultado um conjunto vazio, já que nenhum elemento de A se repete em C, assim como na intersecção.

Veja agora o exemplo numérico:

$$D - E = \{1, 2, 3, \underline{4}, \underline{5}\} - \{\underline{4}, \underline{5}, 6, 7, 8\}$$
$$D - E = \{1, 2, 3\}$$

E se fosse E D?

$$E - D = \{\underline{4}, \underline{5}, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, \underline{4}, \underline{5}\}$$
$$E - D = \{6, 7, 8\}$$

CONJUNTO COMPLEMENTAR

Essa operação é uma particularidade da diferença e faz sentido quando um conjunto está contido em outro, ou seja, todos os seus elementos se repetem no outro conjunto. Então, quando temos um conjunto contido (o símbolo que indica essa relação é parecido com um grande) em outro, obteremos um conjunto complementar ao fazermos a diferença entre eles. Veja o exemplo:

E = {4, 5, **6**, **7**, 8} e F = {**6**, **7**}. Perceba que todo o conjunto F se repete em E, então podemos dizer que E contém F, que, matematicamente, é escrito como E F, ou, ainda, que F está contido em E, FE. Se fizermos a diferença entre E e F, obteremos:

E F = {4, 5, 8}, que são os elementos que faltam para F ser igual a E, ou seja, são os elementos complementares de F em relação a E, de maneira que o conjunto complementar de F em E é essa diferença. Matematicamente isso é descrito assim: $C_F E$ = {4, 5, 8}.

DIAGRAMA DE VENN

Já conhecemos a nomenclatura e as operações realizadas com conjuntos, mas, para podermos resolver os problemas propostos, precisaremos utilizar um recurso chamado **diagrama de Venn** para iniciar a resolução dos nossos problemas. Lembre que as questões eram: quantos alunos foram consultados ao todo? Quantos estudantes estavam interessados apenas em Medicina e apenas em Química?

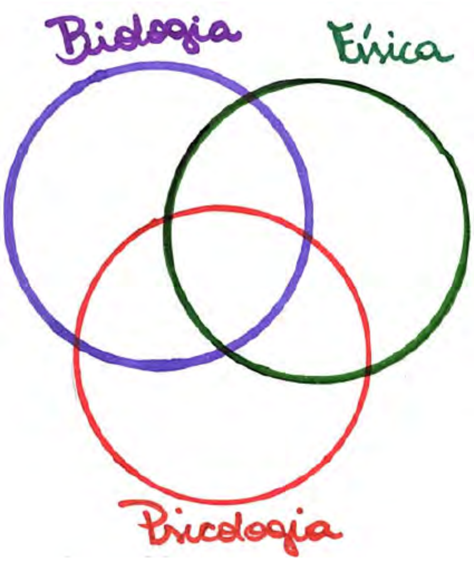
Lembre também que, a partir das informações sobre os cursos, nós criamos três grupos, então vamos analisar um por vez. Sobre a primeira questão, nós sabemos quantos alunos foram entrevistados no primeiro e no terceiro grupos, mas não sabemos quantos temos no segundo. Já a segunda questão pergunta sobre informações do primeiro e do terceiro grupo, que estão faltando. Vamos iniciar nossa análise utilizando o segundo grupo para responder quantos estudantes foram perguntados.

GRUPO 2

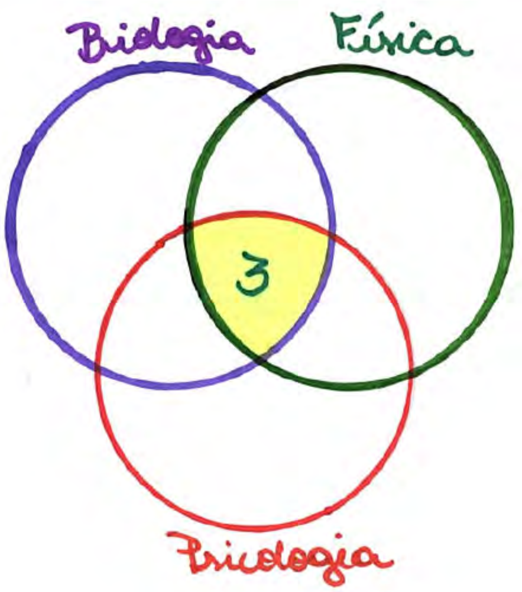
Alunos interessados em Biologia, Física e Psicologia.

Sabemos que 21 estudantes gostariam de cursar Biologia, 15 Física, 25 Psicologia e que, além disso, 8 estavam em dúvida entre Biologia e Física, 10 entre Biologia e Psicologia, 5 entre Física e Psicologia e 3 ainda não haviam decidido se cursariam Biologia, Física ou Psicologia.

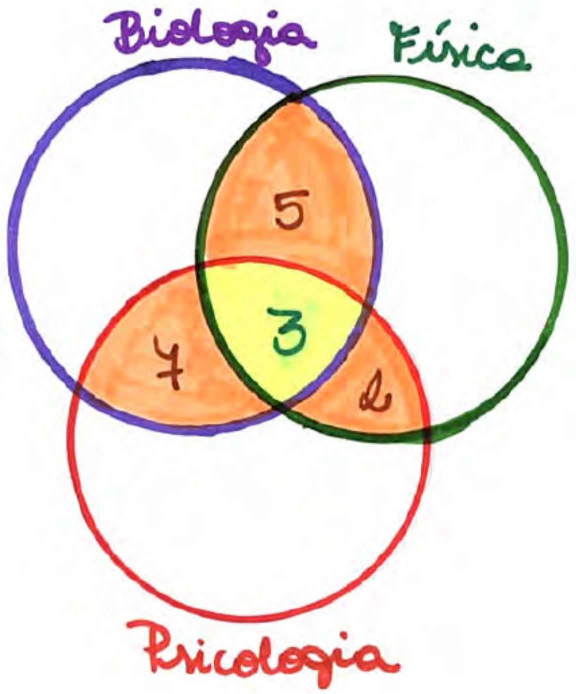
Temos três cursos, então, para montarmos um diagrama de Venn, faremos 3 círculos e os nomearemos com os títulos dos cursos. Segundo o enunciado, há estudantes que estão em dúvida entre dois ou três cursos. Quando estamos tratando de conjuntos, isso descreve uma intersecção, que, no diagrama, é representada por uma sobreposição dos círculos. Veja como fica:



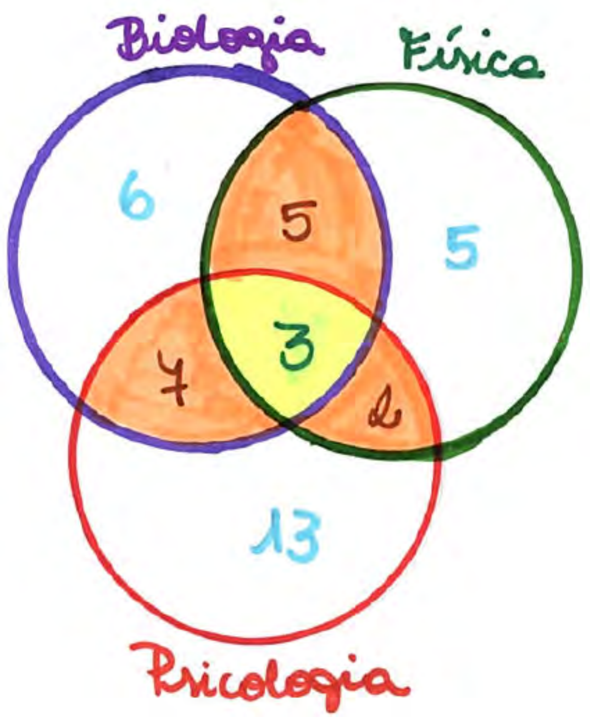
O próximo passo é preencher os espaços dos círculos com os números de estudantes que escolheram tais cursos. Atenção: sempre iniciaremos o preenchimento a partir das intersecções e você logo entenderá o porquê. Sabemos que 3 alunos estavam em dúvida entre os cursos de Psicologia, Física e Biologia, então vamos escrever o número 3 no “centro” dos círculos, ou seja, na intersecção entre os três círculos.



Também há estudantes em dúvida entre dois cursos: 8 estavam em dúvida entre Biologia e Física, 10 entre Biologia e Psicologia e 5 entre Física e Psicologia. No nosso diagrama basta preencher as intersecções entre os dois círculos correspondentes ao número deles, subtraindo o valor da intersecção entre os três cursos. Assim, os interessados em Biologia e Física são 8 -3 = 5; em Biologia e Psicologia 10 - 3 = 7; e em Física e Psicologia 5 - 3 = 2 Veja:



Agora só falta preencher os espaços que não fazem intersecção, mas é preciso muita atenção. Não basta preenchê-los com os números do enunciado em que 21 estudantes gostariam de cursar Biologia, 15 Física e 25 Psicologia. É preciso descontar o que já foi escrito no diagrama, pois, entre esses estudantes que escolheram esses cursos, há os que estão indecisos. Então, vamos olhar um círculo do nosso diagrama por vez. No caso de Biologia, 5 + 3 + 7 = 15 estudantes já estão sendo contados, por isso devemos fazer 21 - 15 = 6 e, portanto, teremos que apenas 6 estudantes estão interessados somente em Biologia. Agora faremos o mesmo com os outros círculos: em Física já temos 5 + 3 + 2 = 10, e o enunciado nos informa que temos 15 alunos interessados em Física, então, 15 - 10 = 5; assim, apenas 5 deles estão interessados *apenas* em Física. Já na Psicologia temos 7 + 3 + 2 = 12 estudantes interessados no curso, mas apenas 25 - 12 = 13 interessados exclusivamente nesse curso. Agora vamos preencher nosso diagrama com essas informações:



Por fim, para sabermos quantos alunos foram entrevistados nesse grupo, vamos somar todos os números do diagrama. Assim, teremos:

6 + 5 + 7 + 3 + 5 + 2 + 13 = 41

Perceba que, se tivéssemos apenas somado os números que o enunciado forneceu, teríamos muitos estudantes a mais, pois estaríamos contando alguns duas ou três vezes; por isso, fazer o diagrama deixa bem mais fácil perceber esses detalhes e mais difícil de errar.

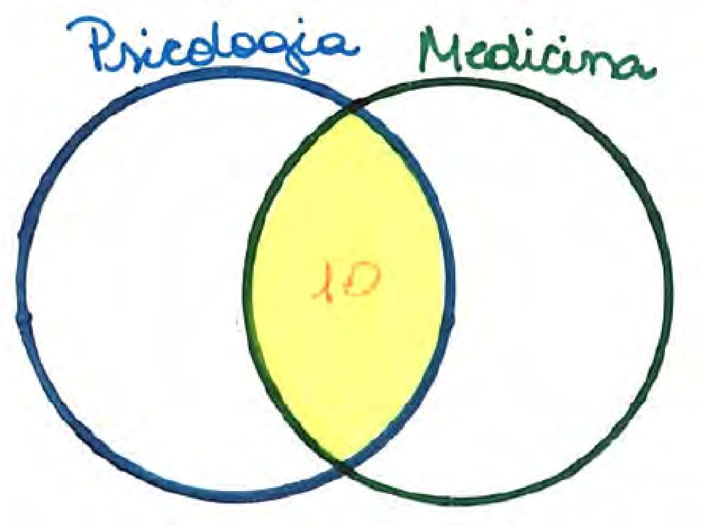
Então, se são 41 alunos nesse grupo, 40 no primeiro e 15 no último, o número de alunos entrevistados foi 41 + 40 + 15 = **96 alunos**.

Beleza! Nosso primeiro problema foi resolvido, agora vamos aos outros, iniciando pelo primeiro grupo, que envolve apenas dois elementos e de um deles não sabemos o número de interessados.

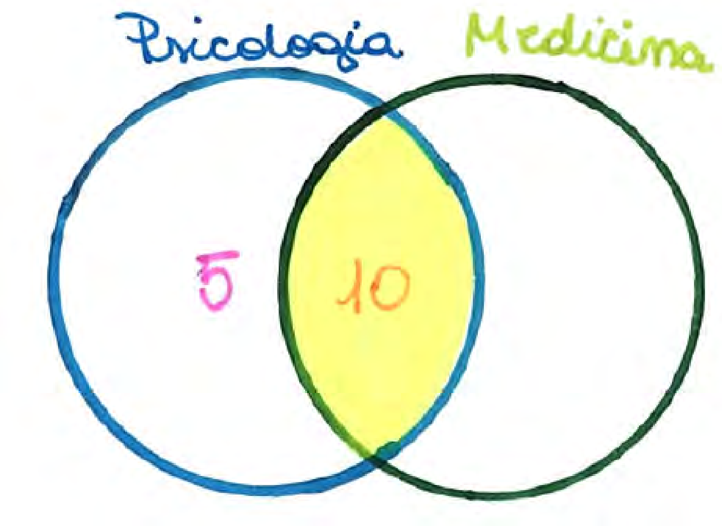
GRUPO 1

Composto por 40 estudantes, 15 estavam interessados em Psicologia, 10 estavam em dúvida entre Psicologia e Medicina e o restante optou por Medicina. Quantos são os estudantes que querem exclusivamente cursar Medicina? Vamos montar o Diagrama de Venn para descobrir!

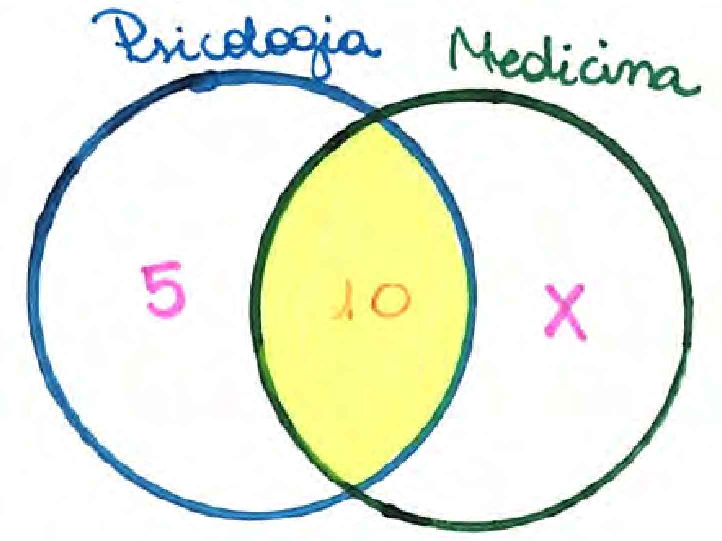
Como temos dois cursos, dessa vez teremos apenas dois círculos. Veja que há estudantes que estão em dúvida e indicaram os dois cursos, por isso teremos uma intersecção entre eles. Lembre que sempre iniciamos o preenchimento do diagrama a partir das informações da intersecção, ok? Então, vamos montar o diagrama e preencher a intersecção com o número 10, que é o número de estudantes em dúvida:



Sabemos que o número de estudantes que expressou interesse por Psicologia é 15, mas lembre que, ao preenchermos o diagrama, precisamos descontar o valor contido na intersecção. Portanto, no lugar de apenas Psicologia teremos 15 - 10 = 5 estudantes:



O nosso problema está perguntando o número de estudantes com interesse exclusivo em Medicina, então, como não sabemos que número é esse, vamos substituí-lo por um x.



Lembre que antes o procedimento foi somar todos os valores contidos no diagrama para podermos saber o número de estudantes daquele grupo. Agora faremos algo muito parecido, só que somaremos os números e a incógnita (o "x") e igualaremos ao número de estudantes deste grupo, que, como mencionado anteriormente, é 40. Então, teremos o seguinte:

$5 + 10 + x = 40$

Para podermos saber o valor de x e, assim, o número de estudantes que escolheu cursar Medicina, é necessário isolá-lo. Ficará assim:

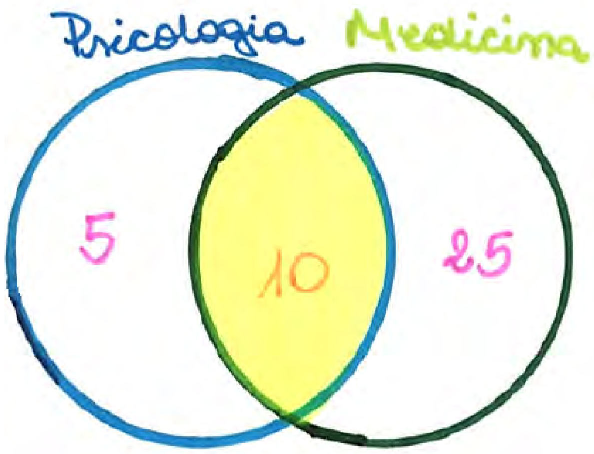
5 + 10 + x = 40

15 + x = 40

x = 40 - 15

x = 25

Portanto, 25 estudantes optaram exclusivamente pelo curso de Medicina. Se você preencher esse número no diagrama, chegará no seguinte:



E por fim:

5 + 10 + 25 = 40

40 = 40

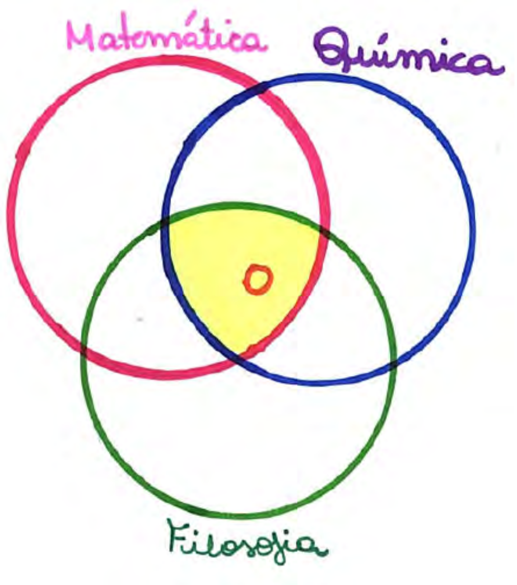
Logo, o procedimento realizado é verdadeiro!

Agora falta apenas um problema a ser resolvido, o que envolve os estudantes do terceiro grupo. O procedimento será o mesmo que realizamos no problema anterior, mas é necessário mais atenção, já que teremos um elemento a mais envolvido.

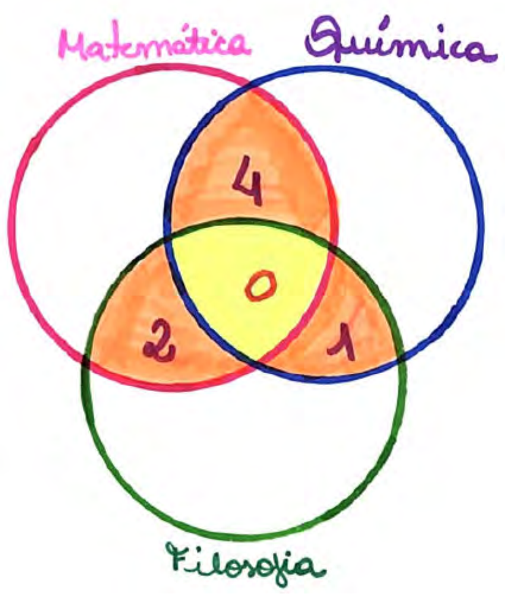
GRUPO 3

Grupo composto por 15 alunos, 7 estudantes se interessaram por Matemática, 4 por Filosofia, 1 por Química e Filosofia, 2 por Matemática e Filosofia e 4 por Matemática e Química. O restante gostaria de cursar Química e nenhum estava interessado nos três cursos. Quantos estudantes estavam interessados exclusivamente Química?

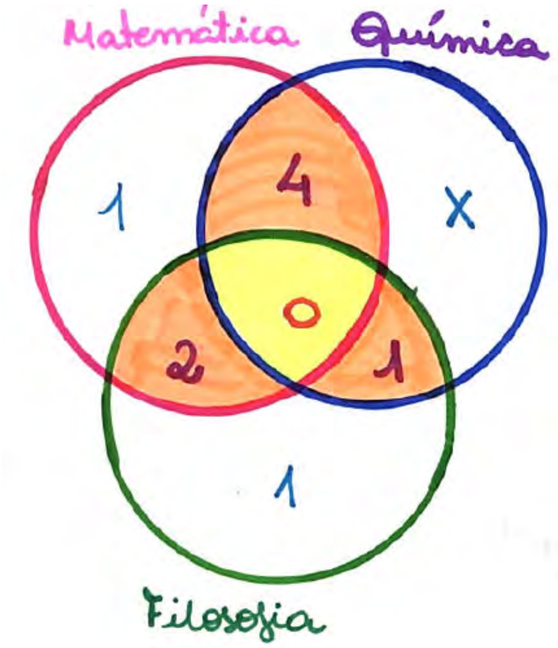
Como temos três cursos, teremos três círculos no Diagrama de Venn. Perceba que na intersecção entre os três há um conjunto vazio, já que nenhum aluno ficou em dúvida entre os três cursos. Então, construindo o diagrama e preenchendo a intersecção entre os três, teremos:



O segundo "nível" de intersecções é aquele que ocorreu apenas entre dois cursos. Então, vamos preencher o número 4 entre Matemática e Química, o número 2 entre Matemática e Filosofia, o número 1 entre Química e Filosofia:



Por fim, vamos preencher os espaços que restam, mas lembre que devemos levar em consideração o que já foi preenchido. Então, no círculo do curso de Matemática há 2 + 4 = 6 alunos. O enunciado diz que eram 7 alunos interessados. Por isso, faremos 7 - 6 = 1, e esse é o número que será preenchido, já que apenas um estudante estava interessado exclusivamente em Matemática. O mesmo será feito com o curso de Filosofia, em que já há 2 + 1 = 3 alunos. Como eram 4 interessados, teremos que 4 - 3 = 1, assim somente um estudante queria cursar apenas Filosofia. No caso do curso de Química nós colocaremos um x no espaço em branco.



Para sabermos o número de estudantes que optou por esse curso devemos somar todos os números do diagrama e igualar ao número de estudantes entrevistados nesse grupo, que nós sabemos ser 15:

$1 + 2 + 4 + 0 + 1 + 1 + x = 15$

Resolvendo, teremos:

$9 + x = 15$

$x = 15 - 9$

$x = \mathbf{6}$

Então, 6 estudantes estavam interessados em cursar exclusivamente Química.

O Diagrama de Venn é um recurso bastante utilizado e bem interessante. Isso porque ele proporciona uma organização das informações a partir da análise visual. A grande chave para conseguir resolver problemas que envolvem conjuntos a partir do Diagrama de Venn é começar pelas informações das intersecções. Você consegue resolver muito facilmente problemas que aparentemente são bem complicados ao aplicar os procedimentos que acabamos de analisar.

Resolva as questões:

(FATEC) Sejam a e b números irracionais. Dada as afirmações:

I) a.b é um número irracional.

II) a + b é um número irracional.

III) a - b pode ser um número racional.

Podemos concluir que:

a) as três são falsas.

b) as três são verdadeiras.

c) somente I e III são verdadeiras.

d) somente I é verdadeira.

e) somente I e II são falsas.

Alternativa correta: E

(UFRGS) Se x = 0,949494... e y = 0,060606..., então x + y é igual a

a) 1,01

b) 1,11

c) 10/9

d) 100/99

e) 110/9

Alternativa correta: D

(UFV) Considere as afirmações a seguir:

(I) O número 2 é primo.

(II) A soma de dois números ímpares é sempre par.

(III) Todo número primo multiplicado por 2 é par.

(IV) Todo número par é racional.

(V) Um número racional pode ser inteiro.

Atribuindo V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, assinale a sequência CORRETA:

a) V, V, V, V, V

b) V, F, V, V, V

c) V, F, V, V, F

d) F, F, V, V, V

e) V, F, V, F, F

Alternativa correta: A

(UEL) Observe os seguintes números.

I. 2,212121...

II. 3,212223...

III. 5 Π

IV. 3,1416

V. -4

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais.

a) I e II

b) I e IV

c) II e III

d) II e V

e) III e V

Alternativa correta: C

(UFF) Segundo o matemático LeopoldKronecker (1823-1891), “Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem.” Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

Alternativa correta: D

REFERÊNCIAS

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PARTE II

MATEMÁTICA

02

FUNÇÕES I
RETAS E PARÁBOLAS

FUNÇÕES I - RETAS E PARÁBOLAS

TEORIA DE FUNÇÕES

Iniciar o estudo de conceitos abstratos a partir de situações cotidianas é parte do objetivo dessa apostila para que você consiga fazer a conexão entre conhecimentos práticos e teóricos. Por isso, uma situação estudada em diversas áreas do conhecimento é o movimento de um carro com velocidade constante, que permite que sejam avaliados fatores que podem aparentemente passar despercebidos. Então, a partir do movimento de um carro nessa condição, anotamos as distâncias que ele percorreu a cada hora, com velocidade constante de 80 km/h. Veja a tabela abaixo:

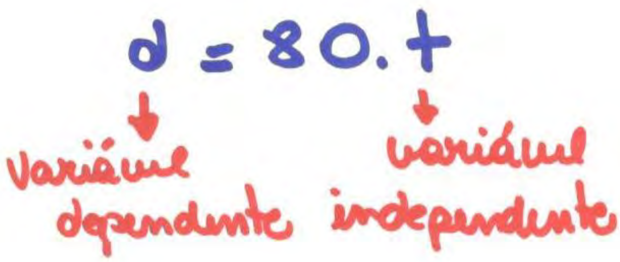
Tempo (h)	1	2	3	4	5
Distância (km)	80	160	240	320	400

Na Física, isso é tratado como Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e você deve lembrar que a equação que o rege é: x = v.t (ou d = v.t, como você preferir), conhecida como equação horária da distância. Perceba que, se substituirmos o valor da velocidade, que já sabemos ser 80 km/h, e o valor do tempo, por exemplo, 1 hora, é possível calcular a distância, que será x = 80.1 = 80 km. Se quisermos saber a distância na segunda hora, basta fazer x = 80.2 = 160 km e assim por diante. Veja, então, que há uma relação de dependência entre uma grandeza e outra. No caso, a distância percorrida depende do tempo que o carro andou, sempre com velocidade de 80 km/h. Assim, podemos reescrever a equação horária da distância como:

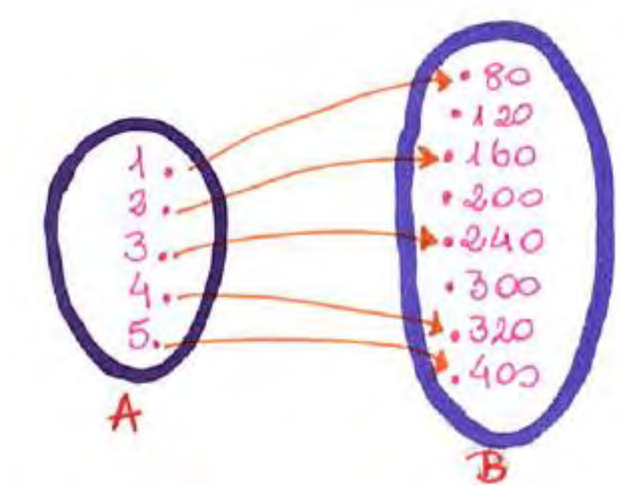
$$d = v.t$$

$$d = 80.t$$

Portanto, seria possível calcular a distância que o carro percorreu em qualquer tempo a partir da equação acima. Essa dependência entre duas grandezas variáveis (uma dependente e outra independente) é chamada de função. Podemos dizer que a distância é dada em função do tempo, ou, simplesmente, que a distância depende do tempo e por isso será a variável dependente (enquanto o tempo é a independente). Veja:



Outra forma de entendermos funções é utilizando o conceito de conjuntos. Considere que o conjunto A é formado por horas e que o conjunto B é formado por distâncias:



Perceba que as setas que ligam os conjuntos saem de A e chegam em B e isso pode ser entendido como: todos os elementos de A têm correspondente em B. A notação matemática é f: A -> B (lê-se “f é uma função de A em B”). Sempre que descrevemos uma função teremos uma letra ao lado de outra entre parênteses para indicar em função de qual variável está sendo escrita aquela equação. Tínhamos a seguinte equação da distância em função do tempo, por exemplo:

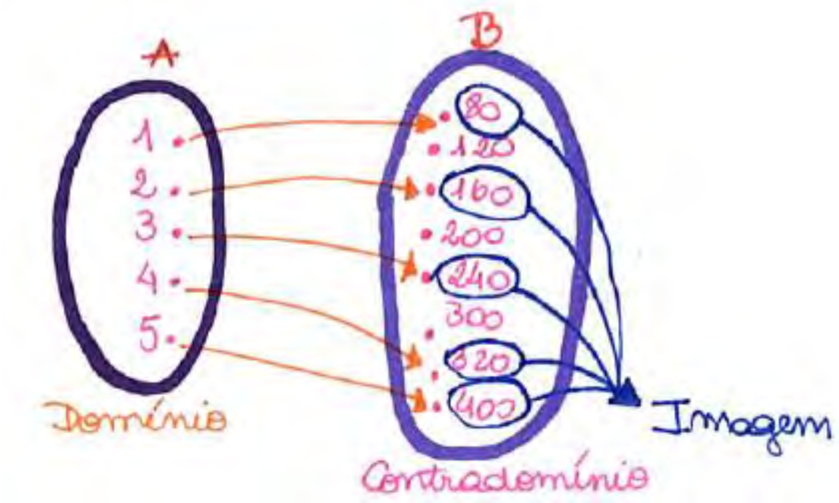
$$f: A \rightarrow B$$

Para indicarmos explicitamente que é uma função, poderíamos escrever

$$f(t) = 80.t$$

O mais comum é encontrarmos equações sendo expressas por f(x) ou g(x), já que o termo entre parênteses, que é a variável independente, quando traçamos um gráfico, ocupa o lugar do eixo das abscissas (coordenada horizontal), enquanto que o valor resultante da função ocupa o eixo das ordenadas (coordenada vertical).

Voltando à nossa análise a partir de conjuntos, para que você se familiarize com a nomenclatura, chamamos A o conjunto das variáveis independentes de Domínio, e chamamos o conjunto das possíveis distâncias de Contra domínio. Por fim, os valores que têm correspondência do conjunto A ao conjunto B são denominados Imagem. No nosso exemplo, teremos o seguinte:



Reorganizando todas essas informações, teremos:

- ✓ Domínio: {1, 2, 3, 4, 5};
- ✓ Contradomínio: {80, 120, 160, 200, 240, 300, 320, 400};
- ✓ Imagem: {80, 160, 240, 320, 400}.

Resolva o exercício abaixo:

Um serviço de motorista por aplicativo oferece a locomoção aos seus passageiros sobre as seguintes regras.
- tarifa de R$ 12,00 iniciais para percorrer qualquer distância
- tarifa de R$ 0,50 para cada km rodado
Dentre as alternativas abaixo, qual representa uma possível lei de formação para a função do valor a ser pago em função do km rodado

a) y = 0,50x+12

b) y = 5x +12

c) y = 12x

d) y = 0,5x

e) y = 0,5 + 12x

Alternativa correta: A

FUNÇÕES DE 1º GRAU (INTRODUÇÃO, COEFICIENTES E GRÁFICO)

Funções de 1º Grau são compostas por Equações de 1º Grau e, por isso, possuem comportamento linear, podendo ser crescentes, decrescentes ou constantes. Em geral, as funções desse tipo são chamadas de Função Afim, tendo como um caso particular a Função Linear. Vamos estudar isso em detalhes a seguir.

FUNÇÃO AFIM

Voltando ao problema que atacamos anteriormente, do carro andando a velocidade constante, vamos imaginar que, ao iniciar a contagem do tempo, o carro já tivesse andado 10 km. Devemos considerar essa informação quando formos calcular a distância total a cada hora, certo? Então, a função que descreve esse movimento não seria apenas d = 80.t, mas teria uma informação a mais, os 10 km. Veja como ficaria:

$$f(t) = 80.t + 10$$

Funções desse tipo são chamadas de Funções Afim e sua forma geral é dada por:

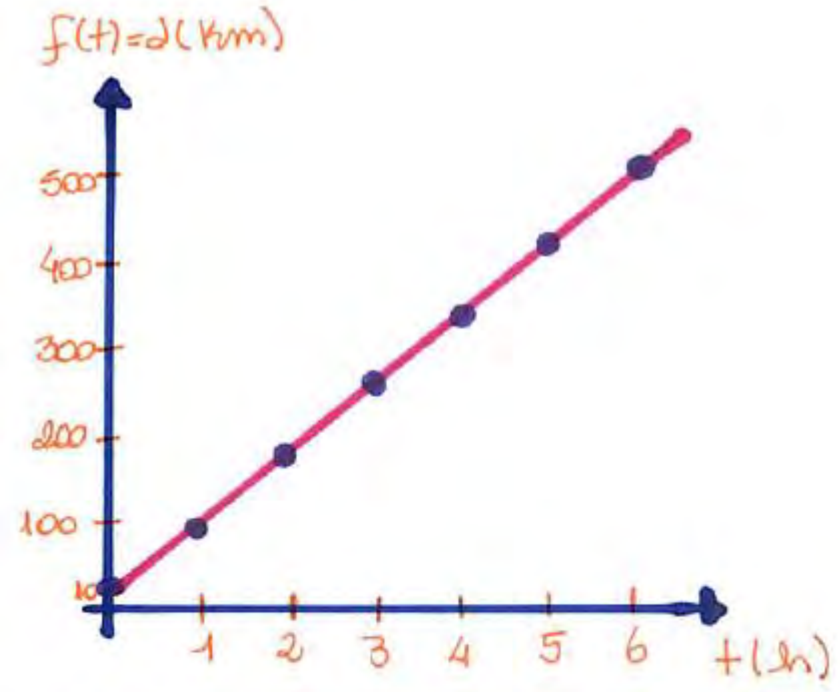
$$f(x) = ax + b$$

Em que a e b são os coeficientes da função. No caso do nosso exemplo, a = 80 (a velocidade) e b = 10, o termo independente, que é a distância que foi percorrida antes mesmo de o tempo começar a ser contado.

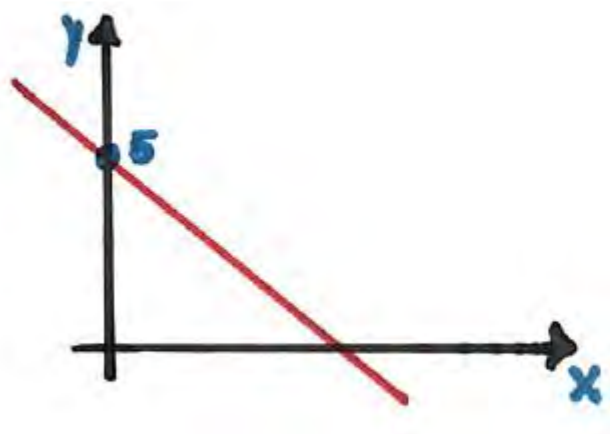
A função nos ajuda a compreender o comportamento de uma determinada grandeza em função de outra, mas tudo fica muito mais fácil a partir do momento em que conseguimos demonstrar isso visualmente, como em gráficos. Por isso, vamos montar uma tabela que relaciona o tempo (t) com a distância percorrida (f(t) = d) a partir da função afim que acabamos de estudar (f(t) = 80.t + 10) para podermos traçar o gráfico. Você pode colocar quantos valores de t achar necessário. Acompanhe:

t	$f(t) = 80t + 10$	$f(t) = d$
0	$f(0) = 80(0) + 10$	10
1	$f(1) = 80(1) + 10$	90
2	$f(2) = 80(2) + 10$	170
3	$f(3) = 80(3) + 10$	250
4	$f(4) = 80(4) + 10$	320
5	$f(5) = 80(5) + 10$	410
6	$f(6) = 80(6) + 10$	500

Agora é possível traçar o gráfico da distância em função do tempo, ou seja, o tempo estará no eixo x e a distância no eixo y:



Veja que, à medida que o tempo avança, a distância aumenta, então temos uma função crescente (sempre analisamos da esquerda para a direita). Isso já era possível saber apenas analisando a função, sem substituir valores. Se a > 0, teremos uma função crescente (exatamente como a do nosso exemplo). Caso a < 0, teremos uma função decrescente, então a linha que liga os pontos estará "descendo". Além disso, outra informação que é facilmente obtida apenas olhando para o termo independente da função é o ponto pelo qual a reta passa (ou corta) pelo eixo y. No gráfico da função crescente, a reta corta o eixo y em 10, que é o termo independente. Veja abaixo outro exemplo:



Apesar de não sabermos exatamente qual é a função que descreve esse gráfico, sabemos que é decrescente (já que a reta está descendo) e que, portanto, o coeficiente a é menor do que zero; sabemos também que o termo independente é 5 (já que é nesse ponto que a reta corta o eixo y). Além disso, sabemos que a função é linear, já que temos a representação de uma reta ligando seus possíveis pontos.

Além de a função poder ser crescente ou decrescente, ela pode ser constante. Ou seja, se tivermos f(x) = 2, essa função não varia e seus coeficientes são a = 0 e b = 2. Como b é o termo independente que corta o eixo y, teremos o gráfico abaixo:

FUNÇÃO LINEAR

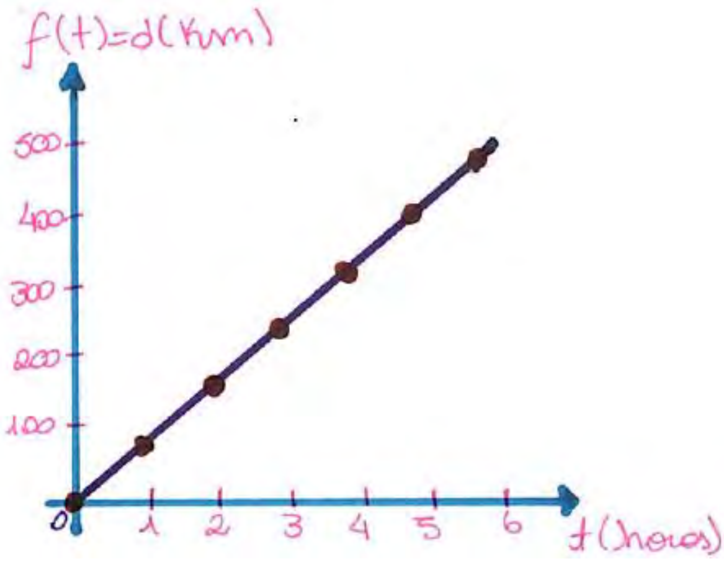
Um caso particular da função afim é a função linear. Ela ocorre quando b = 0, então a função será f(x) = ax. Já vimos um exemplo nesse formato, aquele primeiro sobre velocidade constante, em que a função era descrita como:

$$d = 80.t$$

A partir dessa função podemos reproduzir e estender a primeira tabela relacionando o tempo e encontrando a distância. Acompanhe:

t	$f(t)=80.t$	$f(t)=d$
0	$f(0)=80.0$	0
1	$f(1)=80.1$	80
2	$f(2)=80.2$	160
3	$f(3)=80.3$	240
4	$f(4)=80.4$	320
5	$f(5)=80.5$	400
6	$f(6)=80.6$	480

Com os dados da tabela acima podemos traçar o gráfico da distância em função do tempo, mas, antes disso, perceba que, como a > 0, teremos uma reta crescente, e como b = 0, essa reta passará pela origem (0, 0). Confira:



Exatamente como havíamos previsto, certo? Note que, como a função linear é um caso particular da função afim, ela também pode ser crescente ou decrescente.

Resolva os exercícios:

(Cesgranrio) O valor de um carro novo é de R$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

a) R$8.250,00

b) R$8.000,00

c) R$7.750,00

d) R$7.500,00

e) R$7.000,00

Alternativa correta: C

(UFPI) A função real de variável real, definida por f (x) = (3 – 2a).x + 2, é crescente quando:

a) a>0

b) a<3/2

c) a = 3/2

d) a> 3/2

e) a<3

Alternativa correta: B

(FGV) Uma função polinomial f do 1°grau é tal que f(3) = 6 e f(4) = 8. Portanto, o valor de f(10) é:

a) 16

b) 17

c) 18

d) 19

e) 20

Alternativa correta: E

Uma companhia de gás irá pagar para um proprietário de terra $ 15.000,00 pelo direito de perfurar a terra para encontrar gás natural, e $ 0,3 para cada mil pés cúbicos de gás extraído. Expresse o total que o proprietário irá receber com função da quantidade de gás extraído

a) y = 15000x + 0,3

b) y = 15000x + 0,3/1000

c) y = 0,3x/1000 + 15000

d) y = 15000

e) y = 0,3x

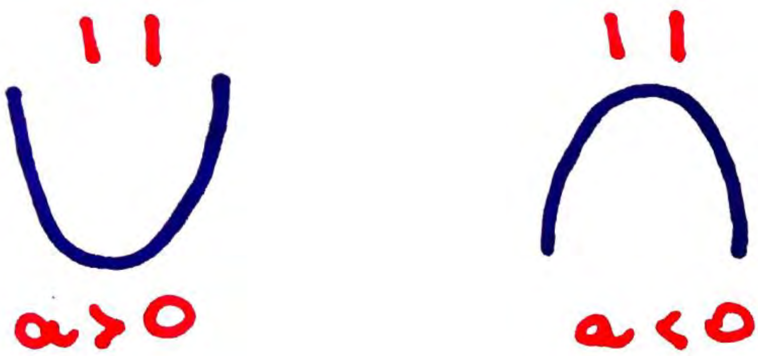
Alternativa correta: C

FUNÇÕES DE 2º GRAU (INTRODUÇÃO E RAÍZES)

Funções de 2º grau também são conhecidas como funções quadráticas justamente por relacionar uma variável com outra a partir de uma equação de 2º grau. Por isso, a forma de uma Função de 2º Grau é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Novamente esses coeficientes carregam bastante informação sobre essa função. Perceba que, como temos uma equação de 2º grau, agora o termo independente volta a ser o c. Além disso, como a função não é linear, no lugar de termos uma reta caracterizando a relação entre as duas grandezas, teremos uma parábola cuja concavidade é dada pelo coeficiente a. Então, se a > 0, a concavidade será para cima; se a < 0, a concavidade será para baixo. Um macete para lembrar disso é pensar que a parábola sorri quando a é positivo e fica triste quando a é negativo. Dá uma olhada:



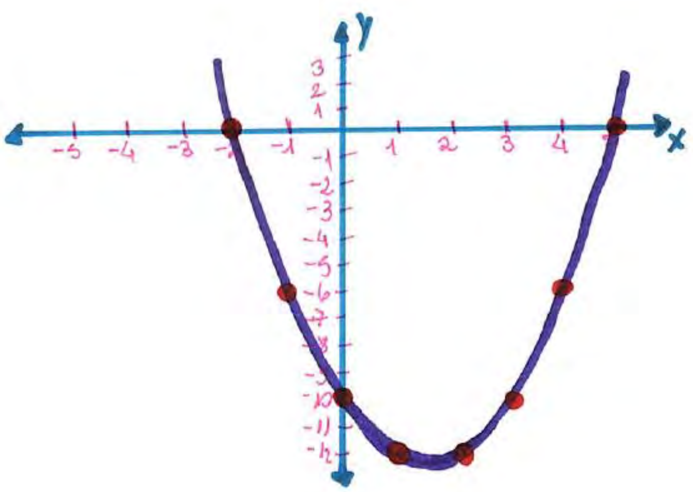
Vamos analisar a equação de 2º grau que utilizamos para descobrir o lado da mesa que seu avô havia solicitado que você fizesse variando o x (apostila de Álgebra II). Então, essa equação será transformada na seguinte função:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

Veja que a > 0, então a concavidade da função será para cima e o termo independente é -10, valor em que a parábola encostará (ou cortará) o eixo y. Sabendo disso, vamos arbitrar valores para x e analisar o valor que a função assumirá a partir deles na tabela abaixo.

x	$f(x) = x^2 - 3x - 10$	$f(x) = y$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 10$	$f(-2) = 0$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 10$	$f(-1) = -6$
0	$f(0) = 0^2 - 3(0) - 10$	$f(0) = -10$
1	$f(1) = 1^2 - 3(1) - 10$	$f(1) = -12$
2	$f(2) = 2^2 - 3(2) - 10$	$f(2) = -12$
3	$f(3) = 3^2 - 3(3) - 10$	$f(3) = -10$
4	$f(4) = 4^2 - 3(4) - 10$	$f(4) = -6$
5	$f(5) = 5^2 - 3(5) - 10$	$f(5) = 0$

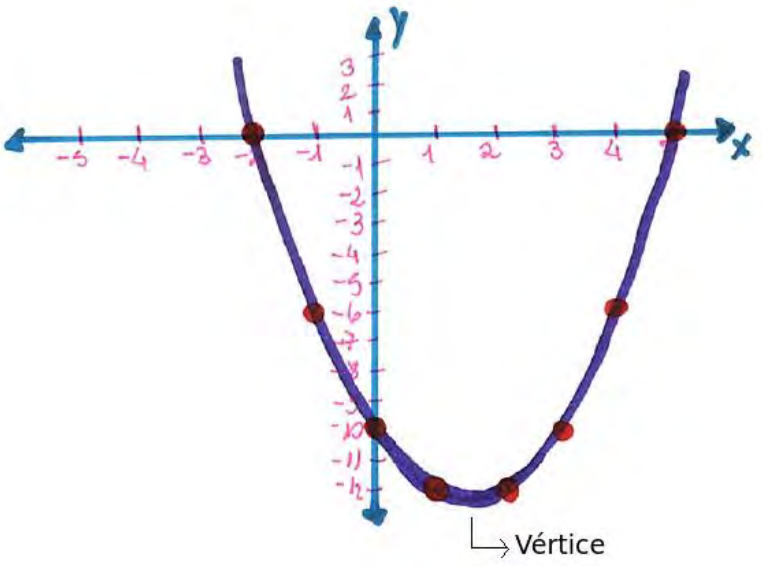
Agora que temos todos os valores, podemos traçar o gráfico de f(x) em função de x. Veja:



Perceba que a parábola toca o eixo x duas vezes, uma em -2 e outra em 5; essas são as raízes da função. Caso você tenha dúvidas, basta aplicar a Bhaskara e conferir, ok? Mas isso também é visível na tabela que fizemos, já que o resultado é zero quando substituímos esses valores na equação. Faça o teste!

FUNÇÕES DE 2º GRAU (ANÁLISE GRÁFICA)

Agora que já estudamos como são as funções de 2º grau, podemos analisar com mais detalhes seus gráficos. É possível calcular o vértice da parábola, por exemplo, e a partir dele saber o ponto máximo ou mínimo que ela atinge. Vamos começar voltando à função que estudamos anteriormente. Veja no gráfico onde fica o vértice da parábola:



Perceba que o vértice é o encontro entre a parte decrescente com a parte crescente da parábola. Em alguns casos você poderá estar procurando o valor máximo ou mínimo que um produto descrito por uma função de 2º grau pode atingir, e por isso é bastante útil saber qual será seu ponto máximo ou mínimo. Vamos encontrar o vértice da função que estamos estudando. As equações que facilitam esse cálculo são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Outra forma de calcular x_v é fazendo a média aritmética das raízes (somando as duas raízes e dividindo por 2).

Obteremos um valor para x e outro para y substituindo os coeficientes da função nas equações acima, ou seja, teremos um par ordenado, descrito como:

$$V = (x_v, \ y_v) \quad \Rightarrow \quad V = \left(-\frac{b}{2a}, \ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Lembre que nossos coeficientes são a = 1, b = -3 e c = -10. Vamos aplicar os valores nas equações acima para encontrarmos o vértice da parábola que descreve essa função:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_v = -\frac{(-3)}{2(1)} \qquad y_v = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$$

$$x_v = \frac{3}{2} \qquad y_v = -\frac{((-3)^2-4(1)(-10))}{4(1)}$$

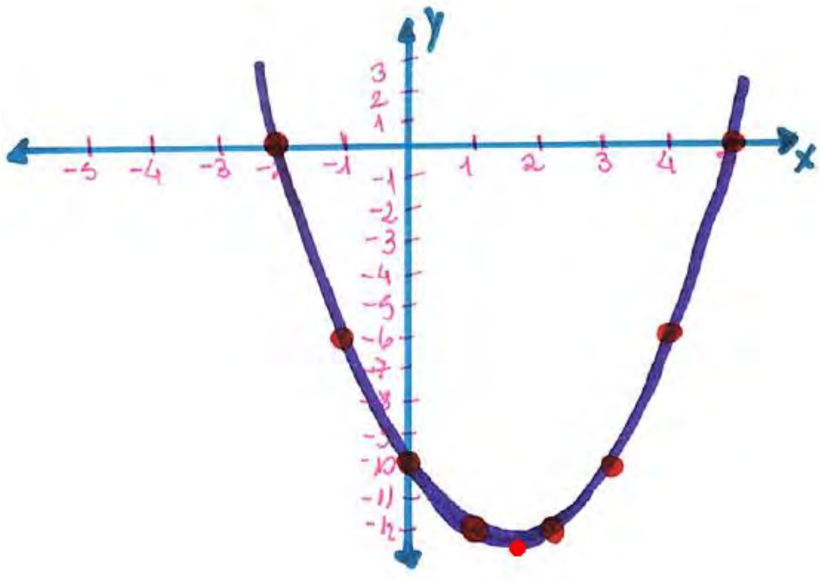
$$x_v \simeq 1{,}5 \qquad y_v = -\frac{(9+40)}{4}$$

$$y_v = -\frac{49}{4} \simeq -12{,}25$$

Veja então que o par ordenado do vértice dessa função é:

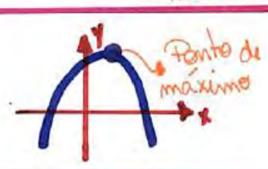
$$V = (1{,}5, \ -12{,}25)$$

Agora podemos acrescentar esse ponto à nossa parábola. Lembre que o valor que vem antes corresponde a x e em seguida ao y:

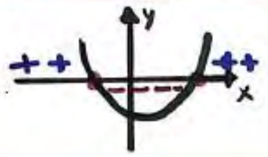
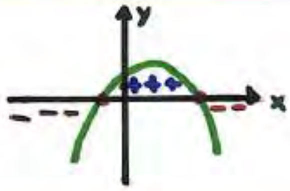
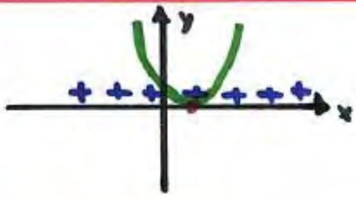
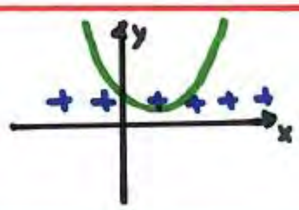


Perceba que V(xv, yv) é o menor valor que a parábola pode atingir, logo este é o ponto mínimo da função. Isso acontece porque a parábola tem concavidade para cima (lembre que a > 0). Se a concavidade fosse para baixo, no vértice teríamos um ponto de máximo, calculado da mesma forma.

Vamos fazer um esqueminha para lembrar desses detalhes:

Coeficiente a	Concavidade	Vértice	Gráfico
a > 0	Para cima	Ponto de mínimo	
a < 0	Para baixo	Ponto de máximo	

Veja outro esqueminha que relaciona o coeficiente a, o discriminante e os sinais das funções.

Coeficiente a	Raízes	Gráfico e Sinal
$a > 0$	$\Delta > 0$ Reais e distintas	
$a < 0$	$\Delta > 0$ Reais e distintas	
$a > 0$	$\Delta = 0$ uma raiz real	
$a < 0$	$\Delta = 0$ uma raiz real	
$a > 0$	$\Delta < 0$ Nenhuma raiz real	
$a < 0$	$\Delta < 0$ Nenhuma raiz real	

Note que a análise do sinal, nesses casos, é feita a partir do eixo y (a parábola é positiva quando está com uma parte acima do eixo x, caso contrário é negativa). Além disso, perceba que a parábola não toca o eixo x nos dois últimos gráficos. Isso acontece quando não temos raízes reais (ela toca duas vezes se temos duas raízes reais e uma vez quando há apenas uma raiz). Guarde essa informação para quando formos estudar Números Complexos, ok?

Perceba que não é sempre necessário construir a tabela arbitrando valores para x para conhecermos o gráfico da função. Se você lembrar de alguns detalhes, como a concavidade a partir do coeficiente a, o valor que a parábola corta o eixo y com o coeficiente c e o número de raízes a partir do valor do discriminante, o trabalho de calcular fica bem menor. Comece devagar, lembrando desses detalhes e tentando esboçar o gráfico, depois faça a tabela e trace os pontos que encontrou e veja o que você errou ou acertou. Assim você vai pegando o jeito!

Resolva os exercícios:

(UFSM) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t)=at^2+b$, onde v(t) é o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando t=12 meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10° mês é

a) 80

b) 100

c) 120

d) 220

e) 300

Alternativa correta: D

(Unirio) Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $c(x)=-x^2+22x+1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R$10,00, o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R$44,00 é:

a) 3

b) 10

c) 12

d) 13

e) 15

Alternativa correta: E

(UFRGS) O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação $y = -40x^2 + 200x$. Onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar corresponde, respectivamente, a

a) 6,25 m, 5s

b) 250 m, 0s

c) 250 m, 5s

d) 250 m, 200s

e) 10.000 m, 5s

Alternativa correta: C

(VUNESP) A parábola de equação $y = ax^2$ passa pelo vértice da parábola y = 4x - x2. Ache o valor de a

a) 1

b) 2

c) 3

d) -1

e) n.d.a

Alternativa correta: A

Sabe-se que o custo de C para produzir x unidades de certo produto é dado pela expressão $C = x^2 - 80x + 3000$. Calcule o a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.

a) 40 unidades e R$1400

b) 50 unidades e R$1600

c) 0 unidades e R$0

d) 60 unidades e R$1700

e) 70 unidades e R$1900

Alternativa correta: A

INEQUAÇÕES DE 1º E DE 2º GRAUS

Vimos no estudo de álgebra que inequações são equações que resultam em um valor diferente de zero, podendo ser maiores, menores ou maiores e iguais, menores e iguais a zero. Vimos também que as funções podem ser descritas como equações de 1º e de 2º graus e já sabemos como resolvê-las, mas algumas vezes estamos interessados em estudar apenas o sinal dessas funções – e é aí que entram as inequações. A grande diferença aqui é que não precisamos montar tabelas para analisarmos funções que envolvem inequações, mas apenas ver qual é o comportamento do seu gráfico. Por isso, precisamos estudar os sinais dessas funções e é bastante importante que você lembre dos detalhes que comentamos anteriormente: se a função é crescente ou decrescente a partir do coeficiente “a” ou sua concavidade. Vamos iniciar nosso estudo pelas inequações de 1º grau que já conhecemos e depois vamos partir para as inequações de 2º grau.

INEQUAÇÃO DE 1º GRAU

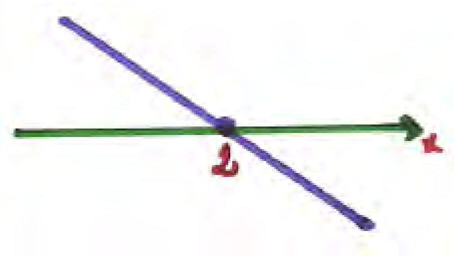
Temos uma inequação de primeiro grau quando o grau do x que envolve essa inequação é 1, assim teremos uma inequação linear. Disso você deve lembrar, certo? Agora vamos analisar a inequação abaixo.

$$f(x) = -3x + 6 \geq 0$$

Essa inequação busca encontrar valores de x que fazem com que a função f(x) seja positiva (veja que o sinal indica maior ou igual a zero). Como já foi dito, não precisamos construir uma tabela para ver quais valores obteremos para f(x) variando o x, basta analisarmos o gráfico. Por isso, vamos iniciar encontrando a solução dessa inequação:

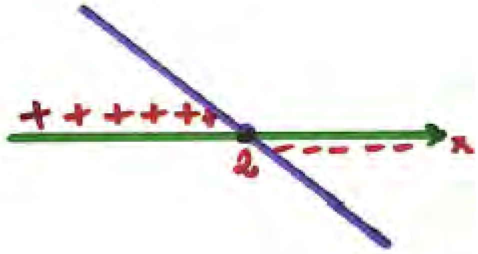
$$-3x + 6 \geq 0$$
$$-3x \geq -6$$
$$-x \geq -\frac{6}{3}$$
$$x \geq 2$$

Encontramos que x deve ser maior ou igual a 2. O sinal maior ou igual indica que o 2 está incluso na solução. A forma de representarmos isso no gráfico é preenchendo a bolinha que indica o número 2. Além disso, o coeficiente a dessa inequação vale -1, ou seja, é menor do que zero. Vimos no nosso estudo de funções de 1º grau que quando $a < 0$ a função é decrescente (reta descendo). Vamos construir o gráfico com essas informações:



Veja que nem é necessário traçarmos o eixo y, já que não teremos valores para marcar, por isso é bastante comum que façamos o gráfico de funções com inequações apenas traçando o eixo x. Não se apavore, é a mesma coisa de antes, ok?

Mas lembre que a função está pedindo valores maiores ou iguais a zero, por isso precisamos estudar o sinais desse gráfico. Não se engane pensando que, como 2 é maior do que zero, a resposta é essa! Lembre que o sinal da função é analisado olhando para o que está cima e o que está abaixo do eixo x. Então, no nosso caso, a função ficará acima do eixo x. Isso significa que ela é positiva para valores de x até 2 e negativa para valores a partir de 2. Veja o gráfico:



Então, o problema solicita valores maiores ou iguais a 0, ou seja, positivos, e para isso x deve ser menor ou igual a 2. Você deve lembrar que a notação correta é:

$$S = \{x \in \Re \mid x \leq 2\}\ para\ f(x) \geq 0$$

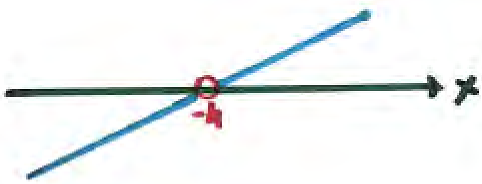
Pode parecer complicado no início, mas você vai pegar o jeito. Sempre analise o gráfico e você entenderá o resultado. Vamos analisar outro problema; veja o caso em que queremos obter uma função positiva (sinal maior do que zero):

$$f(x) = x + 4 > 0$$

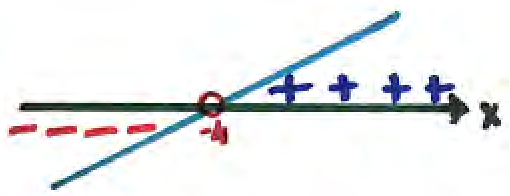
Perceba que agora a função solicita valores maiores do que zero e não maiores ou iguais a zero, ok? Para resolvê-la, vamos iniciar encontrando a raiz:

$$x + 4 > 0$$
$$x > -4$$

Veja que x deve ser maior do que -4; para representarmos essa informação no gráfico vamos utilizar uma bolinha sem preenchimento no lugar do -4, que se chama intervalo aberto. Analisando o coeficiente a, vemos que a função é crescente (já que nesse caso a > 0). Podemos construir o gráfico dessa função a partir dessas informações. Veja:



E a análise dos sinais dessa função, feita a partir do gráfico, ficará dessa forma:



Novamente você precisa prestar muita atenção do que está sendo dito na função. Para sabermos para quais valores de x a função é positiva, precisamos analisar os sinais. Lembre que o que está acima do eixo x é positivo e o restante é negativo, mas atente para um detalhe: nesse caso temos uma bolinha "aberta" no -4, então a função será negativa para valores menores que -4 e positiva para valores maiores do que -4. A diferença é sutil, mas em nenhum dos casos o -4 foi incluído, ok? Portanto, a solução para o problema que solicita valores positivos (f(x) > 0) é:

$$S = \{x \in \Re \mid x > -4\} \; para \; f(x) > 0$$

INEQUAÇÃO DE 2º GRAU

Agora que estamos bastante familiarizados com equações de 1º e 2º graus, já que analisamos funções desse tipo e inequações de 1º grau, vai ser moleza entender inequações de 2º grau, que são basicamente funções que aplicam equações de segundo grau diferentes de zero. Novamente não precisaremos construir tabelas para entendermos o comportamento dessas funções; basta analisarmos os coeficientes, as raízes e traçarmos o gráfico entendendo o comportamento dos sinais. Vamos aplicar todos os conhecimentos que aprendemos anteriormente no problema abaixo:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 > 0$$

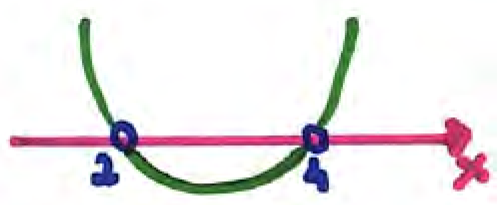
Assim como fizemos nos exemplos de funções aplicadas a inequações de 1º grau, vamos encontrar as raízes dessa inequação de 2º grau. Apesar daquele sinal "estranho", podemos aplicar Bhaskara normalmente (ou soma e produto, caso você prefira) para encontrá-las. Vamos encontrar o discriminante, veja que a = 1, b = -6 e c = 8:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8)$$
$$\Delta = 36 - 32$$
$$\Delta = 4$$

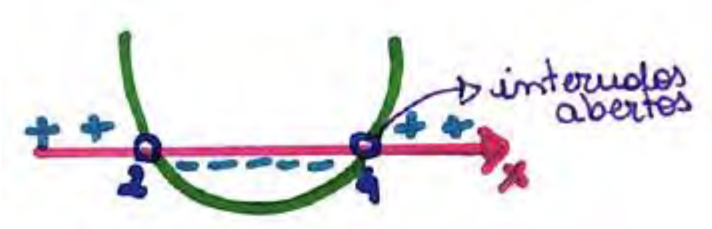
Como o discriminante é maior do que zero, sabemos que teremos duas raízes reais e distintas; vamos aplicar a fórmula de Bhaskara para encontrá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2(1)}$$
$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ x'' = \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Agora você precisa lembrar o que são, conceitualmente, as raízes de uma (in)equação. O que acontecerá se substituirmos os valores das raízes na inequação? O resultado deve ser zero, certo? Se não for zero, não é raiz. Lembre que o problema está pedindo por valores MAIORES do que zero, portanto, quando formos expressar essas raízes no gráfico, será necessário fazer a bolinha sem preenchimento, para que esses valores não sejam incluídos na solução. Outra informação que a função nos fornece é o coeficiente a, que é maior do que zero, então a concavidade da função será para cima. Sabendo as raízes e sabendo a concavidade, já podemos esboçar o gráfico dessa função:



Lembre-se que não precisamos expressar o eixo y nessa representação, mas devemos fazer a análise do sinal da função. Então, o que está acima do eixo x é positivo e o que está abaixo é negativo. No nosso caso, até o 2 é positivo (sem incluir o 2) e depois do 4 também (sem incluir o 4). O que está entre 2 e 4 (sem incluí-los) é negativo. Veja como fica a representação:



Note que o problema solicita valores maiores do que zero, então o conjunto solução dessa inequação deve abranger apenas os intervalos positivos que vemos no gráfico. Por isso, x é positivo para valores menores do que 2 e para maiores do que 4. Representamos essa solução na forma:

$$S = \{x \in \Re \mid x < 2 \ e \ x > 4\} \ para \ f(x) > 0$$

Vamos resolver o problema abaixo, que tem uma cara um pouco diferente:

$$f(x) = -x^2 + 4 \leq 0$$

Nosso primeiro passo é analisar o discriminante. Perceba que os coeficientes são a=-1, b=0 e c=4, já que temos uma inequação de 2º grau incompleta. Então vamos lá:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (0)^2 - 4(-1)(4)$$
$$\Delta = 16$$

Como o discriminante é maior do que zero, já sabemos que vamos obter duas raízes reais e distintas. Portanto, aplicando a Bhaskara, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x = \frac{\pm 4}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x'' = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Agora lembre que o problema pede por valores menores ou iguais a zero, então essas nossas raízes podem fazer parte da resposta, concorda? Se as substituirmos na função, teremos zero como resultado, mas, como os valores aceitos são os menores ou iguais a zero, está tudo bem. Então, os valores -2 e 2 serão representados no gráfico como bolinhas preenchidas. Além disso, analisando o coeficiente a, sabemos que a concavidade da função será para baixo (já que a < 0). Com essas informações podemos esboçar o gráfico:

Veja que os valores abaixo de -2 (incluindo -2) são negativos e os valores acima de 2 (incluindo 2) também são negativos. A parte positiva está entre -2 e 2, incluindo ambos. Perceba:

Note que, para satisfazer a desigualdade, é necessário que os valores sejam menores ou iguais a zero. Então, o conjunto solução NÃO inclui a parte entre -2 e 2, mas os valores abaixo de -2 e acima de 2. Veja como esse conjunto solução é representado:

$$S = \{x \in \Re \mid x \leq -2 \text{ e } x \geq 2\}$$

Bastante parecido com todas as outras inequações sobre as quais já conversamos, certo? Para resolver problemas desse tipo você precisa prestar atenção nos detalhes. São eles que vão definir se a função cresce ou decresce, se é de 2º grau ou se é uma inequação. Então, a grande dica não é decorar, mas entender e se concentrar!

Faça os exercícios abaixo:

(UFG - 2003 - adaptada) Um posto de combustíveis vende em média 2.140 litros de gasolina, por dia, a R$ 1,75 por litro. O proprietário constatou que, ao reduzir o preço do litro, ocorre um aumento no volume de combustível vendido, na proporção de 20 litros vendidos a mais por dia, para cada centavo de redução no preço do litro. Com base no exposto, determine o maior desconto que o posto pode dar sem diminuir sua arreacadação diária.

a) 28 centavos

b) 48 centavos

c) 68 centavos

d) 88 centavos

e) 1,08 reais

Alternativa correta: C

(UEG - 2012 - adaptada) Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular, conforme figura abaixo. Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9 m e 4 m, quais as possíveis dimensões do menor lado do jardim para garantir que a sua área seja maior que 6,75m2?

a) Entre 1m e 3m

b) Entre 2m e 4m

c) Entre 1m e 4m

d) Maior que 1m

e) Maior que 2m

Alternativa correta: A

Resolva a seguinte inequação: -6(2x-5)+1 > -4 -2(7-x)

a) x > 3,5

b) x < 3,5

c) x > 2

d) x < -2

e) x < -3,5

Alternativa correta: B

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE II

MATEMÁTICA

03

SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

meSalva!

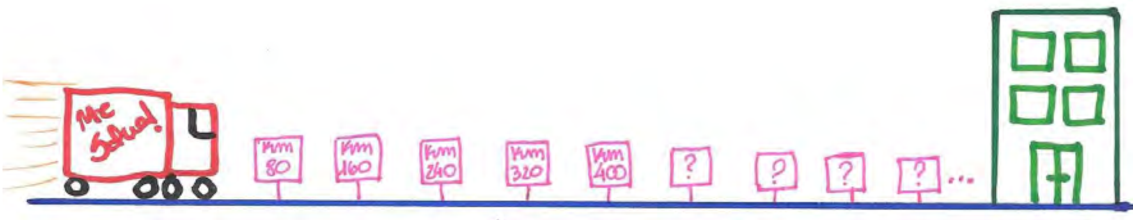
SEQUÊNCIAS E PROGRESSÕES

Quando você estudou MMC, MDC, números primos e conjuntos numéricos, se deparou diversas vezes com números agrupados na forma (2, 4, 6, 8, 10, ...), (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...), (-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3), (2, 3, 5, 7, 11, ...), (2, 3, 3, 5, 5, 7, 11). Esses agrupamentos de números são denominados sequências matemáticas e muitas vezes apresentam algum tipo de regularidade. Por exemplo, (2, 4, 6, 8, 10, ...) pode ser entendida como a sequência infinita dos números pares, assim como (2, 3, 5, 7, 11, ...) é uma sequência infinita de números primos, já (2, 3, 3, 5, 5, 7, 11) é simplesmente uma sequência matemática finita.

Como Sequências Matemáticas aparecem com muita frequência na natureza e no nosso cotidiano, é muito importante que saibamos lidar com elas. Fica bem mais fácil compreendê-las quando conseguimos encontrar regularidades nas sequências e é isso que estudaremos a seguir.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

O caminhão do Me Salva! está a caminho da Universidade e o motorista está cronometrando a viagem. Ele verificou que, ao passar pela placa do Km 80, já estava dirigindo há uma hora; ao passar pela placa de 160 km, ele viu em seu cronômetro que estava dirigindo há duas horas, e isso continuou acontecendo: ao completar 3 horas, passou pela placa de 240 km; na 4ª hora, passou pela placa de 320 km; na 5ª hora passou pela placa de 400 km. Nas quatro horas seguintes, o motorista se descuidou e esqueceu de marcar a quilometragem, mas na décima hora percebeu sua distração e viu que havia acabado de passar pela placa de 800 km. Considerando que o motorista saiu do km 0 da rodovia e que manteve o caminhão na mesma velocidade durante todo o percurso, como é possível descobrir por quais placas de quilometragem ele passou nos horários que esqueceu de cuidar?



Antes de atacarmos a raiz do problema, vamos fazer uma tabelinha relacionando o tempo com a distância percorrida pelo motorista. Vamos colocar um ponto de interrogação nos horários que ele não anotou a quilometragem:

Tempo (h)	Distância (Km)
1	80
2	160
3	240
4	320
5	400
6	?
7	?
8	?
9	?
10	800

Perceba que, tanto na coluna da esquerda quanto na coluna da direita, temos sequências numéricas, ou seja, temos números organizados em sequência crescente, certo? Outra observação que podemos fazer é: temos uma diferença de 80 km entre a primeira e a segunda hora. O mesmo acontece entre a terceira e a segunda, entre a quarta e a terceira e assim por diante. Isso faz sentido: já que sabemos que o motorista manteve a mesma velocidade durante as 10 horas, podemos concluir que ele percorre a mesma distância no mesmo intervalo de tempo. Dessa forma, a cada hora, o motorista percorreu 80 km. Podemos, portanto, completar a nossa tabela, basta que somemos 80 km ao valor anterior. Então, na 6ª hora, teremos que o motorista passou pelo km 400 + 80, ou seja, ele passou pelo km 480. Fazendo isso para as outras horas, obteremos a seguinte tabela:

Distância (Km)	
80	
160	+80
240	+80
320	+80
400	+80
480	+80
560	+80
640	+80
720	+80
800	+80

Essa regularidade da diferença entre as distâncias é bastante comum, mas nem sempre temos como completar uma tabela da forma como fizemos, apenas somando os números anteriores ao fator que descobrimos ser igual a todos. Imagine que, em vez de o motorista ter feito 10 horas de viagem, ele e um colega se revezaram e fizeram 50 horas de viagem, mas esqueceram de anotar os quilômetros pelos quais passaram durante 20 horas. Seria viável preencher uma tabela manualmente? Claro que você pode pensar que é possível, mas dá um trabalhão, né? Então, como sempre, a Matemática está aqui para nos ajudar! Para resolver esse tipo de problema, que tem regularidade linear entre os termos de uma sequência, precisamos estudar sobre as Progressões Aritméticas, mais conhecidas como PAs.

As PAs são caracterizadas por sequências crescentes, decrescentes ou constantes de ordem linear apresentando uma regularidade chamada de razão (formalmente, dizemos a razão é a diferença entre dois termos consecutivos). Veja os exemplos:

- ✓ PA crescente: (2, 4, 6, 8, 10, 12). Perceba que os números estão crescendo a cada 2, certo? Então, se fizermos o segundo termo menos o primeiro, teremos 4 - 2 = 2 e essa regularidade se repete nos outros termos. Portanto, essa PA é crescente e tem razão 2;
- ✓ PA decrescente: (12, 10, 8, 6, 4, 2). Agora os números estão decrescendo a cada 2. Se fizermos o segundo termo menos o primeiro, teremos 10 - 12 = -2, novamente apresentando regularidade nos demais termos. Assim, essa PA é decrescente e tem razão -2;
- ✓ PA constante: (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3). Veja que a sequência não cresce nem decresce, é constante. Se fizermos o segundo termo menos o primeiro, obteremos 3 - 3 = 0. Dessa forma, a PA é constante e tem razão 0;
- ✓ PA infinita: (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...). Já sabemos que a razão dessa PA é 4 - 2 = 2, mas perceba que ela não tem fim, o que é indicado pelas reticências. Portanto, temos uma sequência infinita.

No caso de PA, é possível analisar se a sequência é crescente ou decrescente apenas analisando o sinal da razão. Então, se a **razão** for **positiva**, a PA é **crescente**; se for **negativa**, a PA é **decrescente**.

Toda essa conversa preliminar é importante para resolvermos problemas maiores a partir de equações que visam facilitar a nossa vida. Vamos formalizar as operações que realizamos para descobrir em qual quilômetro o motorista passou nas horas 6, 7, 8 e 9 sem termos que somar 80 a cada termo. Para simplificar, vamos chamar a quilometragem da hora 1 de a1, a da hora 2 de a2 e assim por diante. Reescrevendo os dados da tabela, chegaremos a:

$$\begin{aligned} a_1 &= 80 \\ a_2 &= 160 \\ a_3 &= 240 \\ a_4 &= 320 \\ a_5 &= 400 \\ a_{10} &= 800 \end{aligned}$$

Como sabemos que a razão (representada por r) dessa PA é 80, podemos escrever o segundo termo em função do primeiro, o terceiro em função do segundo e assim por diante. Acompanhe:

$$a_2 = a_1 + r \qquad a_3 = a_2 + r \qquad a_4 = a_3 + r$$
$$a_2 = 80 + 80 \qquad a_3 = 160 + 80 \qquad a_4 = 240 + 80 \qquad \ldots$$
$$a_2 = 160 \qquad a_3 = 240 \qquad a_4 = 320$$

Perceba que você calcula o termo que necessita a partir do anterior somando a razão. Mas, se quiséssemos saber o 8º termo, seria necessário saber o 7º, e nós não temos essa informação. Porém, veja que podemos reescrever o terceiro termo em função do primeiro. Vamos ver isso abaixo:

$$a_3 = a_2 + r \qquad como\ a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = (a_1 + r) + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_3 = 80 + 2.(80)$$
$$a_3 = 80 + 160$$
$$a_3 = 240$$

Esse é exatamente o mesmo valor que tínhamos encontrado anteriormente!

Com essa relação, podemos, portanto, encontrar qualquer termo da sequência sabendo o primeiro termo e a razão. Veja, ainda, que o número de vezes que multiplicamos a razão é sempre um a menos do que o termo que estamos buscando. No caso acima, buscamos o terceiro termo, então multiplicamos a razão por 2. Caso estivéssemos procurando o 6 termo, seria necessário multiplicar a razão por 5 e assim por diante. Já que isso sempre acontecerá, podemos generalizar essa equação na forma:

$$a_n = a_1 + (n-1).r$$

Em que a_n é o enésimo termo (o termo que você quer encontrar ou o que é fornecido), a1 é o primeiro termo, n é o número do termo procurado e r é a razão. Se você ficou com dúvidas, vamos tentar encontrar os termos que faltavam na tabela a partir dessa equação:

$$a_6 = a_1 + (6-1).80 \qquad a_7 = a_1 + (7-1).80$$
$$a_6 = 80 + (5).80 \qquad a_7 = 80 + (6).80$$
$$a_6 = 480 \qquad a_7 = 560$$

$$a_8 = a_1 + (8-1).80 \qquad a_9 = a_1 + (9-1).80$$
$$a_8 = 80 + (7).80 \qquad a_9 = 80 + (8).80$$
$$a_6 = 640 \qquad a_7 = 720$$

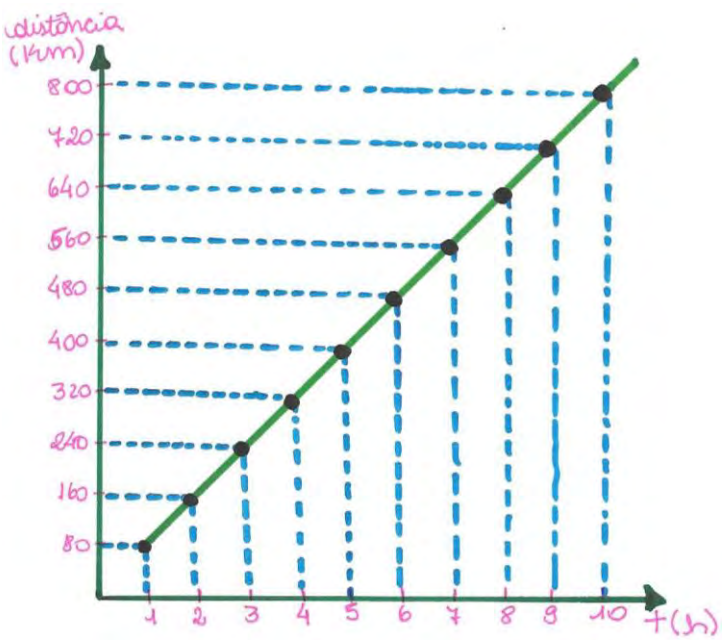
Condiz com o que encontramos apenas somando a razão na segunda tabela, certo? Portanto, a equação geral é muito importante para encontrarmos termos desconhecidos de PAs.

Caso você não saiba o termo a_1, é possível descobrir o termo a_n a partir de qualquer outro termo (a_k) fornecido pelo problema. Veja como fica a equação:

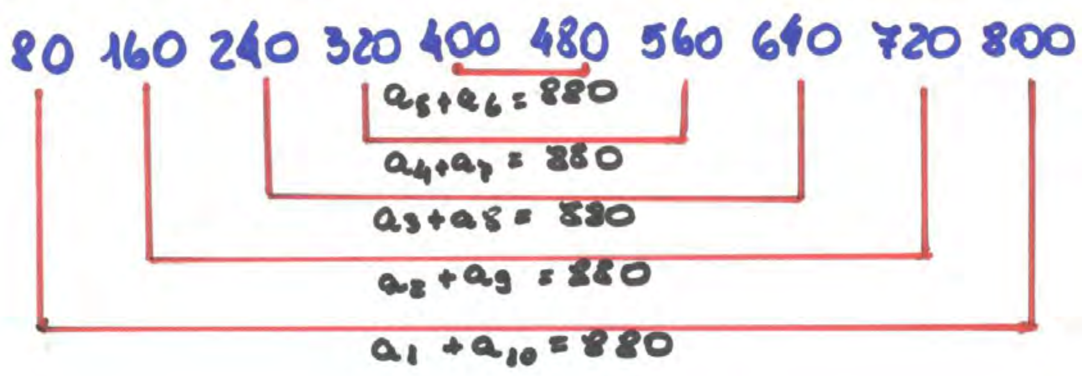
$$a_n = a_k + (n-k).r$$

Note que k é o número do termo que você está utilizando (a_k).

A análise gráfica dos dados que obtivemos corrobora a ideia de linearidade da Progressão Aritmética. Veja que temos uma reta ligando os pontos, caracterizando uma Progressão Aritmética e, portanto, se você lembrar das aulas de Física, um Movimento Retilíneo Uniforme (MRU).



Outra característica das PAs são os termos equidistantes dos extremos, que, se somados, apresentarão o mesmo valor de outros dois termos equidistantes dos extremos. É mais fácil entender isso a partir da imagem abaixo:



Isso é bastante importante para quando estamos interessados em saber o resultado da soma dos termos e nos deparamos com alguns problemas assim. No caso desse exemplo, a soma de todos os termos é equivalente a somar todas as distâncias. Perceba que não é o total de distância que o caminhão percorreu, que seria 800 Km, o valor do último termo, mas a soma das distâncias em cada hora. Nesse caso específico, saber o valor dessa soma não parece fazer muito sentido, mas é muito importante saber como fazer. Então, veja que a soma dos termos pode ser dada por:

$$S_n = (a_1+a_{10})+(a_2+a_9)+(a_3+a_8)+(a_4+a_7)+(a_5+a_6)$$
$$S_{10} = (880)+(880)+(880)+(880)+(880)$$
$$S_{10} = 5(880)$$
$$S_{10} = 4400$$

Perceba que 880 é a soma dos termos equidistantes dos extremos e 5 é a metade do número de termos. Então, podemos generalizar isso na equação da soma:

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$$

Em que Sn é a soma dos termos (ou dos termos determinados pelo problema, como os 5 primeiros, por exemplo). Perceba que aqui temos um número par de termos, mas não há problema se um número sobrar sozinho no caso de temos um número ímpar de termos, ok? Vamos utilizar os dados do nosso problema para demonstrar a utilização da equação somando todos os 10 termos.

$$S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(80 + a_{10}).10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(80 + 800).10}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(80 + 800).10}{2}$$

$$S_{10} = 4400$$

Então, somando todos os quilômetros, teremos 4400 Km. Como já foi dito, essa equação faz mais sentido quando estamos contando objetos. Por exemplo: a produção de cadeiras por hora pode ser descrita como uma PA. Assim, poderíamos somar todos os termos, ou todas as cadeiras, para saber quantas foram produzidas em um determinado intervalo de tempo.

Por fim, existe uma outra equação que permite encontrar termos se soubermos o seu antecessor e o seu sucessor. Basta somar esses dois e dividir por 2. Veja:

$$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$$

Em que k é o número do termo que estamos procurando. Utilizando os valores do nosso exemplo, vamos tentar encontrar o termo a8 a partir da equação acima. Sabemos que o termo anterior a ele, o a7, vale 560, e o sucessor, o a9, vale 720, então:

$$a_8 = \frac{a_{8-1}+a_{8+1}}{2}$$

$$a_8 = \frac{a_7+a_9}{2}$$

$$a_8 = \frac{560+720}{2}$$

$$a_8 = 640$$

Vamos fazer alguns exercícios.

O resultado que encontramos confere com o que calculamos de outras duas formas diferentes, certo? Como cada problema terá uma característica diferente, você terá que saber essas artimanhas para resolvê-los da forma mais simples possível.

A soma dos 10 primeiros números ímpares é:

a) 51

b) 64

c) 80

d) 100

e) 240

Alternativa correta: D

Qual das PAs abaixos não é crescente?

a) (2 , 8 , 14 , 20 , ...)

b) (-20 , -18 , -16 , ...)

c) (-1 , -4 , -7 , ...)

d) (-8 , 0 , 8 , ...)

e) (-6 , -5 , -4 , -3 , ...)

Alternativa correta: C

Qual a razão da PA onde o 11° termo é o 42 e o primeiro é o 2?

a) -2

b) 2

c) 4

d) -4

e) 1

Alternativa correta: C

Qual a soma dos 10 primeiros números pares maiores que 9?

a) 190

b) 200

c) 160

d) 100

e) 0

Alternativa correta: A

A razão da PA onde o vigésimo primeiro termo é o 220 e o primeiro é 20:

a) -5

b) 5

c) 10

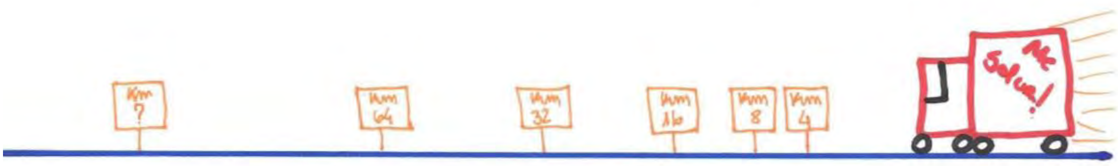
d) 8

e) 0

Alternativa correta: C

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA (PG)

O nosso caminhão chegou com sucesso na Universidade e já está voltando. Dessa vez o motorista cronometrou a distância percorrida a cada 10 minutos durante uma hora sem utilizar o controle de velocidade. Isso significa que a velocidade foi aumentando gradativamente. Por causa disso, você já deve ter percebido, a distância percorrida nos primeiros 10 minutos será menor do que a distância percorrida nos 10 minutos seguintes e assim por diante.



Devido a um leve descuido, o motorista não marcou em qual quilômetro estava ao completar uma hora de viagem. Veja na tabela abaixo os valores de quilômetros que ele verificou a cada 10 minutos ao passar pelas placas.

Tempo (min)	Distância (km)
10	4
20	8
30	16
40	32
50	64
60	?

Interpretando essa tabela, veremos que, ao completar 10 minutos de viagem, ele passou pelo quilômetro 4; aos 20 minutos, passou pelo quilômetro 8; ao completar 30 minutos viajando, passou pelo quilômetro 16 e assim sucessivamente. Provavelmente agora você já consegue identificar duas sequências numéricas nessa tabela, uma em cada coluna. Vamos nos ater à segunda coluna, que é a que não está completa. Você consegue perceber alguma regularidade entre 4, 8, 16, 32 e 64? Veja que 64 é o dobro de 32, que é o dobro de 16, que é o dobro de 8, que é o dobro de 4. Considerando que essa regularidade se mantém, podemos calcular o valor que o motorista esqueceu de anotar, certo? O dobro de 64 é 128. Vamos preencher a tabela com esse valor e com o fator de multiplicação de cada termo.

Distância (km)	
4	x 2
8	x 2
16	x 2
32	x 2
64	x 2
128	

Novamente temos uma sequência regida por um fator que traz uma regularidade aos termos. Antes, tínhamos que esse fator era uma soma, agora temos um fator de multiplicação e é essa a grande diferença entre uma Progressão Aritmética e uma Progressão Geométrica (PG), que é o que temos nesse caso. Novamente foi possível calcular o último termo da sequência facilmente, mas esse problema poderia ser bem mais complicado. Por isso, assim como na PA, na PG temos equações para facilitar a compreensão e a resolução de problemas.

Na PA havia a razão (r), que era o fator somado aos termos (que também poderia ser diminuído, numa PA decrescente), agora temos uma razão (q, de quociente), que é o fator de multiplicação dessa PG. Porém, para saber se a sequência é crescente ou decrescente, a análise não é exclusivamente a partir da razão. Vamos analisar os casos:

- ✓ PG crescente: (3, 9, 27, 81) ou (-2, -1, -0,5, -0,25). No primeiro caso, a razão é 9/3 = 3; no segundo -1/-2 = 0,5, mantendo regularidade entre os termos. Então, termos positivos e q maior que 1, assim como termos negativos e q entre 0 e 1, caracterizam PGs crescentes;
- ✓ PG decrescente: (-3, -9, -27, -81) ou (2, 1, 0,5, 0,25). O primeiro quociente é -9/-3 = 3 e o segundo é 1/2 = 0,5. Portanto, termos negativos e q maior do que 1, assim como termos positivos e q entre 0 e 1, caracterizam PGs decrescentes;
- ✓ PG alternante: (2, -4, 8, -16). A PG alternante é aquela que cresce e decresce a cada termo. Isso acontece quando q é menor do que 0. Veja que -4/2 = -2, assim como 8/-4 = -2;
- ✓ PG constante: (2, 2, 2, 2). Essa é facilmente identificável, certo? Sempre que temos q = 1, há uma PG constante;
- ✓ PG infinita: (3, 9, 27, 81, 243, 729, ...). Assim como na PA, uma PG infinita é identificável a partir das reticências, passando a ideia de que ela continuará multiplicando q infinitamente.

Vamos montar uma tabela para visualizar melhor essas características das PGs:

PG	q	Termos	Exemplo
Crescente	$q > 1$	Positivos	(3,9,27,81); $q = 3$
Crescente	$0 < q < 1$	Negativos	(-2,-1,-0,5,-0,25); $q = 0,5$
Decrescente	$q > 1$	Negativos	(-3,-9,-27,-81); $q = 3$
Decrescente	$0 < q < 1$	Positivos	(2;1;0,5;0,25); $q = 0,5$
Alternante	$q < 0$	Positivos/Negativos	(2,-4,8,-16); $q = -2$
Constante	$q = 1$	Positivos/Negativos	(2,2,2,2); $q = 1$
Infinita	$q \neq 1$	Positivos/Negativos	(2;1;0,5,0,25...); $q = 0,5$

Agora que essa parte ficou clara, podemos avançar para o cálculo dos termos de uma PG. Lembre que anteriormente nós calculamos o último termo multiplicando o termo anterior por 2, que era o q. Poderíamos ter calculado os termos anteriores da mesma forma, certo? Vamos ver como o cálculo ficaria, chamando o termo que corresponde à distância aos 10 minutos de a1, o termo que corresponde à distância aos 20 minutos de a2 e assim sucessivamente.

$$a_2 = a_1.q \qquad a_3 = a_2.q \qquad a_6 = a_5.q$$
$$a_2 = 4.2 \qquad a_3 = 8.\ 2 \qquad \ldots \qquad a_6 = 64.2$$
$$a_2 = 8 \qquad a_3 = 16 \qquad a_6 = 128$$

Calculamos um termo a partir do seu anterior multiplicando o quociente, mas e se não conhecêssemos todos os termos? Se não soubéssemos o a2, por exemplo, poderíamos substituir a primeira igualdade na equação do a3 e assim encontraríamos esse termo a partir do a1. Veja:

$$a_3 = a_2.q$$
$$a_3 = (a_1.q).q$$
$$a_3 = a_1.q^2$$

Substituindo o valor de a1, que é 4, chegaremos a:

$$a_3 = a_1.q^2$$
$$a_3 = 4.2^2$$
$$a_3 = 4.4$$
$$a_3 = 16$$

Que é exatamente o mesmo valor que encontramos com outras “técnicas”, certo? Veja que o expoente de q é um número menor do que o termo que está sendo procurado. Portanto, podemos generalizar essa equação em:

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Ou ainda, caso não tenhamos o valor de a1, mas de outro termo (ak), podemos reescrevê-la dessa forma:

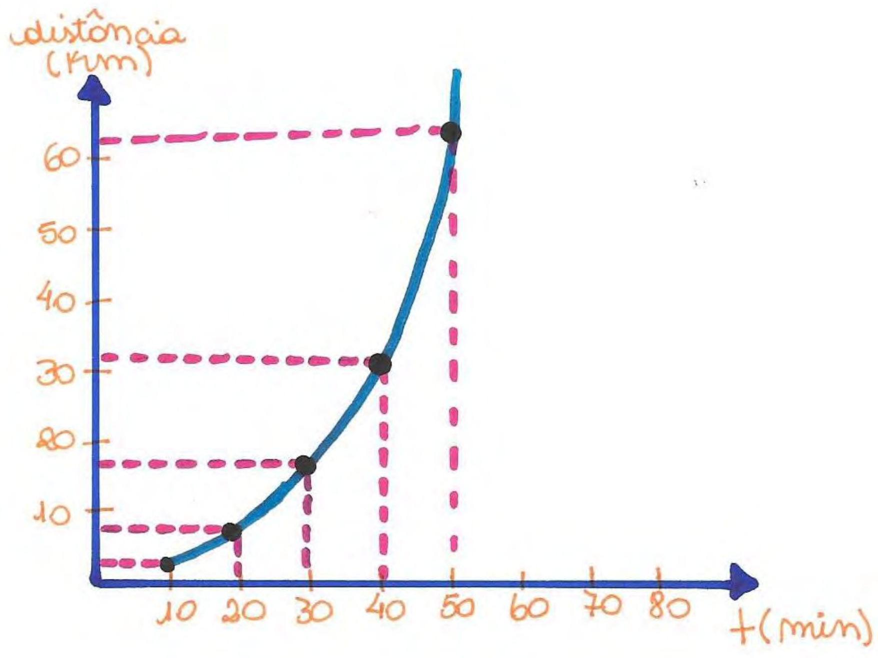
$$a_n = a_k.q^{n-k}$$

Vamos tentar encontrar o mesmo termo, a6, a partir dessas equações:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \qquad a_n = a_k.q^{n-k}$$
$$a_6 = a_1.q^{6-1} \qquad a_6 = a_3.q^{6-3}$$
$$a_6 = 4.q^5 \qquad a_6 = 16.q^3$$
$$a_6 = 4.\ 2^5 \qquad a_6 = 16.2^3$$
$$a_6 = 4.32 \qquad a_6 = 16.8$$
$$a_6 = 128 \qquad a_6 = 128$$

Elas corroboram os resultados que encontramos de outras formas, certo?

Perceba que há um expoente diferente de 1 na equação geral indicando o crescimento (ou decrescimento) da sequência de forma exponencial. Isso fica bastante evidente quando traçamos o gráfico da distância em função do tempo. Veja:



Então, uma PG cresce ou decresce de maneira exponencial, e não linear, como acontece com a PA, ok?

E se quiséssemos saber o somatório de uma PG, como faríamos? É possível realizar a soma de todos os termos de PGs finitas e infinitas (em determinadas condições). No Apêndice você pode verificar a dedução de ambos os casos. Veja qual será o resultado:

- ✓ Soma de PG finita: é exatamente o caso do nosso problema, que possui apenas 6 termos. Veja:

$$S_n = a_1 . \frac{1-q^n}{1-q}$$

Apesar de não fazer muito sentido somarmos todos os termos do nosso problema, vamos substituir os valores para exemplificar a equação.

$$S_n = a_1 . \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$S_6 = 4 . \frac{1-2^6}{1-2}$$
$$S_6 = 4 . \frac{-63}{-1}$$
$$S_6 = 4.63$$
$$S_6 = 252$$

É importante frisar que a soma dos termos não é igual ao último termo da sequência, como já foi comentado na PA.

- ✓ Soma da PG infinita: Você deve estar achando muito esquisita essa ideia de somar termos infinitos, certo? Mas, como foi dito, essa soma só é possível em condições especiais, como quando o quociente está entre -1 e 1 e a PG está decrescendo. Apesar de ser uma sequência “infinita”, em algum momento chegará a zero ou a um valor tão próximo a zero que pode ser considerado como zero, como, por exemplo, em (2, 1, 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625...), com razão q = 0,5. Nesse caso, podemos somar todos os termos utilizando:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Aplicando os valores dessa PG de exemplo, teremos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$
$$S_\infty = \frac{2}{1-0,5}$$
$$S_\infty = \frac{2}{0,5}$$
$$S_\infty = 4$$

Portanto, a soma de todos os termos dessa PG infinita é 4!

Vamos exercitar o que aprendemos!

O sétimo termo da PG (1 , 3 , ...) é:

a) 81
b) 243
c) 729
d) 2187
e) 37

Alternativa correta: C

O quinto termo da PG (-128 , - 64 , ...) é:

a) -8
b) -4
c) -2
d) -1
e) 0

Alternativa correta: A

A razão da PG (- 4 , 16 , -64 , ...) é:

a) -2
b) 2
c) 4
d) -4
e) -8

Alternativa correta: D

A única PG que apresenta comportamento crescente é:

a) (-1 ; -2 ; -4 ; ...)

b) (80 ; 8 ; ...)

c) (-3 ; 27 ; -243 ; ...)

d) (-1 ; 1 ; -1 ; 1 ; ...)

e) (- 256 ; - 128 ; - 64 ; ...)

Alternativa correta: E

A soma dos termos A e C, da sequência abaixo, devem obrigatoriamente ser: (A , 2 , C , 8)

a) 5

b) 1

c) 4

d) 9

e) 8

Alternativa correta: A

 |

APÊNDICE

EQUAÇÃO DA SOMA DE UMA PG

A soma de todos os termos de uma PG finita pode ser realizada somando termo a termo, como abaixo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Mas dependendo do número de termos esse cálculo não é viável. Além de demorar muito tempo, é bastante provável que você vá cometer algum descuido no meio do caminho. Por isso, vamos fazer o passo-a-passo para encontrar essa soma da forma mais simples possível. Lembre que podemos escrever cada termo apenas em função do primeiro termo e da razão:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_1.q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1.q^{n-1} \end{aligned}$$

Vamos substituir esses termos na primeira equação:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$
$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \dots + a_1.q^{n-1} \quad (1)$$

Lembre que se realizarmos a mesma operação em ambos lados de uma equação ela não perde a igualdade, certo? Vamos fazer isso multiplicando a razão antes e depois do sinal de igual. Teremos o seguinte:

$$q.S_n = q.(a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \dots + a_1.q^{n-1})$$
$$q.S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \dots + a_1.q^n$$

Como essa equação é equivalente à (1), podemos subtraí-las e cortar os termos iguais. Acompanhe:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \dots + a_1.q^{n-1} \\ -\quad q.S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \dots + a_1.q^n \\ \hline S_n - q.S_n = a_1 - a_1.q^n \end{array}$$

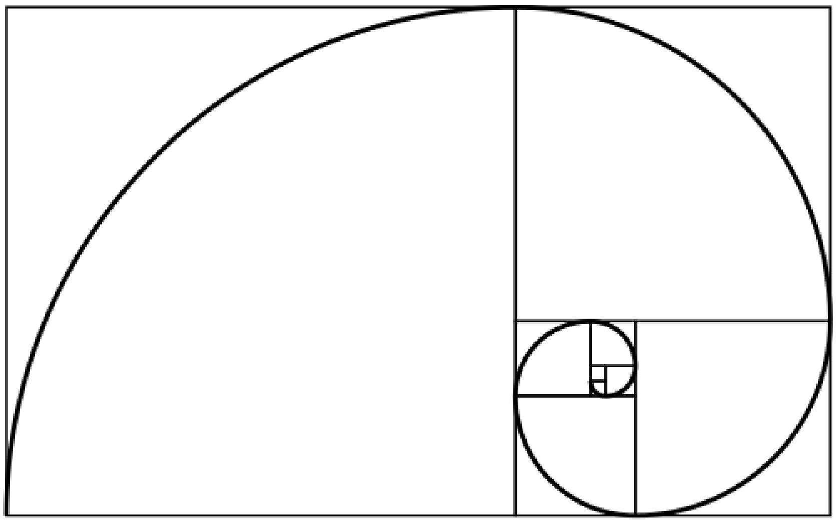
Por fim, podemos colocar Sn e a1 em evidência e reorganizar os termos, então chegaremos a:

$$S_n - q.S_n = a_1 - a_1.q^n$$
$$S_n.(1-q) = a_1.(1-q^n)$$
$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{(1-q)}$$

Eis a equação da soma de uma PG finita!

FIBONACCI

Uma sequência bastante famosa é a sequência de Fibonacci (filho de Bonacci), matemático italiano também conhecido como Leonardo de Pisa. Nessa sequência cada termo é formado pela soma dos dois anteriores, iniciando com zero e um: (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...). Dispondo esses números na forma geométrica, encontraremos um espiral que apresenta uma proporção (1,618). Veja abaixo essa representação:



A proporção existente entre os termos da sequência de Fibonacci é denominada “proporção áurea”. Quanto maiores forem os termos da sequência, a divisão entre eles mais se aproximará de 1,618. Essa proporção é facilmente encontrada na natureza, por exemplo, na cauda de um camaleão, que, quando contraída, é uma das mais perfeitas representações da sequência de Fibonacci, assim como a concha de um caramujo. Veja a semelhanças:

O TRIGO E O XADREZ

Reza a lenda que um rei achou tão maravilhoso o jogo de xadrez que ofereceu um presente ao seu criador, algo que ele poderia escolher. O criador pediu ao rei que lhe desse um grão de trigo para o primeiro quadrado do xadrez, dois para o segundo, quatro para o terceiro, 8 para o quarto e assim por diante. Ou seja, a cada casa do xadrez, o valor anterior deveria ser dobrado. O rei achou uma barbada a recompensa escolhida pelo criador, mas o que ele não estava sabendo era o valor total dessa soma.

Você já deve ter percebido que o pedido representa uma PG de razão 2, certo? Ok! O xadrez possui 64 casas (ou quadradinhos). Então, podemos calcular a soma dessa PG para sabermos quantos grãos de trigo o rei deve dar ao seu súdito. Vamos substituir os valores na equação que deduzimos anteriormente:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{64} = \frac{1.(1-2^{64})}{1-2}$$

$$S_{64} = \frac{1.(1-2^{64})}{1-2}$$

$$S_{64} = 1{,}844^{19}$$

Os matemáticos do rei chegaram ao mesmo resultado e concluíram, que, além de o rei dar todo o trigo que lhe pertencia ao criador do jogo, seria necessário semear trigo por muitos séculos para conseguir pagar essa dívida. Esperto esse cara, hein?

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE II

MATEMÁTICA

04

FUNÇÕES II EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

meSalva!

FUNÇÕES - EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

INTRODUÇÃO A EXPONENCIAIS

Você deve lembrar que encontramos uma forma bastante simples de representar números iguais que são multiplicados repetidamente. Por exemplo: 3.3.3.3.3.3.3 pode ser representado como 37 e lido como "3 elevado ao expoente 7" (ou "3 elevado à 7ª potência"). Então, quando temos um número elevado a algum expoente, podemos dizer que temos uma exponencial. No mundo real é muito comum que fenômenos sejam descritos por exponenciais. O número de bactérias em uma colônia, por exemplo, cresce exponencialmente com o tempo; o decaimento da radioatividade de um elemento químico é descrito como uma exponencial decrescente, entre outros diversos exemplos. Justamente por ser tão comum é que é necessário que estudemos as particularidades das exponenciais, mas antes vamos fazer uma breve revisão das propriedades de potenciação que já aprendemos.

- ✓ Multiplicação de potências: quando temos bases iguais, podemos somar os expoentes mantendo a base. Veja:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{(2+3)} = 35$$

Divisão de potências: quanto temos bases iguais, podemos subtrair os expoentes, mantendo a base. Acompanhe:

$$\frac{3^3}{3^2} = 3^{(3-2)} = 3^l$$

- ✓ Potência de potência: nessa situação basta multiplicar os expoentes. Veja um caso:

$$\left(3^3\right)^2 = 3^{(3\cdot 2)} = 36$$

Mas, se não tivéssemos parênteses, resolveríamos "de cima para baixo", ou seja, primeiro a potência da potência, depois o restante. Acompanhe:

$$3^{3^2} = 39$$

Vamos fazer alguns exercícios:

5^{-4} equivale a:

a) 1/20

b) 1/-20

c) 1/125

d) 1/625

e) -625

Alternativa correta: D

$16^{-0,5} =$

a) 4

b) -4

c) ¼

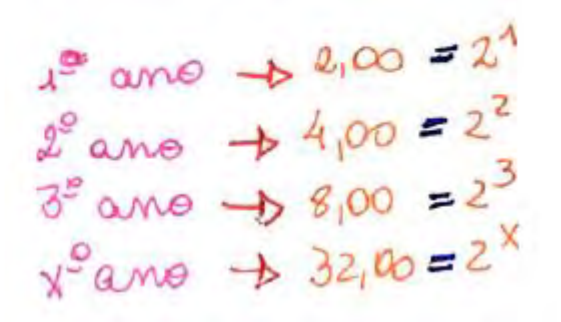
d) 1/-4

e) ½

Alternativa correta: C

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS (REDUÇÃO DE BASE)

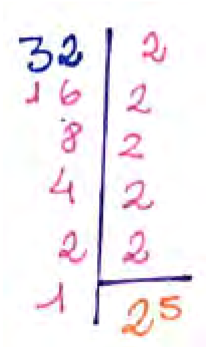
Depois de alguns anos você voltou à sua antiga escola para rever os professores e descobriu que havia ficado com uma pendência na biblioteca. A bibliotecária informou que a multa era de R$ 2,00 no primeiro ano, R$ 4,00 no segundo, R$ 8,00 no terceiro e assim por diante, até chegar em R$ 32,00. Como descobrir há quanto tempo você ficou devendo? Vamos reescrever essas informações matematicamente, utilizando expoentes:



Veja que temos uma variável na última linha, o x, e precisamos encontrá-lo para saber quantos anos você ficou devendo. Assim, podemos montar a seguinte equação:

$$2^x = 32$$

De um lado da igualdade temos base 2 e do outro temos base 32, mas podemos fatorar o 32 para tentarmos reescrevê-lo na base 2. Vamos fazer esse procedimento:



Então, como podemos reescrever 32 como 25, vamos substituir esse valor na primeira equação. Esse procedimento é chamado de redução de base e permite que problemas que envolvem equações exponenciais sejam resolvidos.

$$2^x = 2^5$$

Agora que temos bases iguais, vamos "cortá-las", já que o nosso interesse está no expoente. Depois de cortarmos as bases, podemos igualar os expoentes:

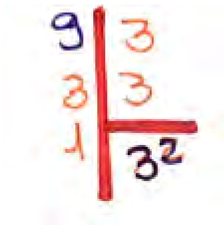
$$x = 5 \ anos$$

Então, você ficou devendo por 5 anos e por isso a multa chegou a R$ 32,00!

Essa equação exponencial foi bastante simples de resolver, mas nem sempre será assim. Podem aparecer expoentes mais complexos e você precisará resolver equações de 1º ou de 2º graus. Como exemplo, encontre o valor de x da equação abaixo:

$$3^{(3x-4)} = 9$$

O primeiro passo é realizar a redução da base do lado direito da igualdade, ou seja, fatorar o número 9.



Agora você pode substituir o número fatorado na equação e cortar as bases, já que serão iguais, certo?

$$3^{(3x-4)} = 9$$
$$3^{(3x-4)} = 3^2$$

Igualando os expoentes, teremos uma equação de primeiro grau para resolver. Lembre que, nesse caso, basta isolar o x para conseguir encontrá-lo.

$$3x - 4 = 2$$
$$3x = 2 + 4$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Então, o valor de x é 2! Equações exponenciais têm uma cara pouco amigável, mas não são tão complexas quanto parecem. Sempre tente aplicar as propriedades de potenciação e realizar a redução de base para iniciar a resolução.

Teste o que você aprendeu até agora:

$7^{x-3} = 7$, o único valor de x que satisfaz a igualdade é:

a) 1

b) -1

c) -4

d) 4

e) 0

Alternativa correta: D

Para que a equação abaixo seja verdadeira, o valor correto de X é: $2^{x+x} = 4$

a) 4

b) -4

c) 2

d) -2

e) 1

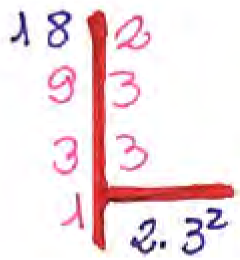
Alternativa correta: E

LOGARITMOS

Na mesma visita que você fez à escola, você soube que seu primo também esqueceu de pagar a multa da biblioteca, que também iniciou em R$ 2,00. Como ele havia retirado mais livros do que você, o crescimento da dívida não foi o mesmo e ele estava devendo R$ 18,00. Quanto tempo ele ficou devendo? Vamos atacar esse problema montando uma equação exponencial como do problema anterior:

$$2^x = 18$$

Lembre que o primeiro passo é aplicar a redução de base, certo? Então vamos fatorar o número 18:



Substituindo o número fatorado na equação teremos:

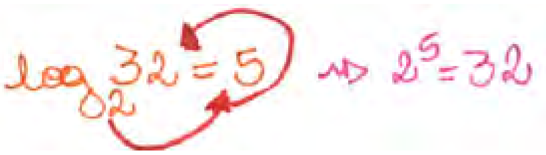
$$2^x = 2.3^2$$

Perceba que agora **não** temos bases iguais, então como faremos esse cálculo? Vamos conhecer uma operação para podermos resolver este tipo de problema, o chamado logaritmo.

Vamos deixar um pouco de lado o nosso problema para iniciarmos o estudo dos logaritmos com um exemplo mais simples. Vimos anteriormente que o resultado de 2x = 32 é 25 = 32, já que x = 5, certo? Quando tratamos de logaritmos, essa expressão pode ser reinterpretada como "5 é logaritmo de 32 na base 2", ou, ainda, pode ser reescrita como:

$$\log_2 32 = 5$$

Que é o mesmo que: 25 = 32. Para você saber como montar o logaritmo, veja o esquema, que alguns gostam de chamar de "orelhinha":



Então, saindo do 2 e indo até o resultado, chegamos ao logaritmando. Veja que o logaritmo é equivalente à exponencial:

$$\log_2 32 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^5 = 32$$

Sabendo disso, vamos conhecer como se chama cada um dos termos do logaritmo:

$$\log_a b = c$$

- ✓ a é a base e deve ser $a \neq 1$e $a > 0$;
- ✓ b é o logaritmando e deve ser $b > 0$;
- ✓ c é o logaritmo;

Assim, podemos dizer que c é o logaritmo de b na base a.

Será bastante comum a utilização de base igual a 10, como:

$$\log_{10} 200 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 200$$

Fique atento, pois, assim como quando temos um expoente 1 podemos omití-lo, quando temos base decimal também podemos omití-la, o que ficaria como log 200 = x, apenas. A frequência na utilização de bases 10 ocorre, em geral, porque os exercícios fornecem esses valores no enunciado, ou, ainda, porque são facilmente encontramos na sua calculadora científica (que vem de fábrica com a possibilidade de resolução de logaritmos de base decimal). Outra base que aparece com alguma regularidade é a e, o número de Euler, que vale 2,71828182846, mas não se preocupe com isso agora.

Apesar de saber tudo isso, ainda não estamos prontos para resolver nosso problema inicial, então vamos estudar um pouco sobre as consequências da definição dos logaritmos.

Consequências da definição de logaritmo

- ✓ $\log_a 1 = 0$, para a > 0 e a ≠ 1.

Exemplo:

$$\log_2 1 = x \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$$

- ✓ $\log_a a = 1$, para a ≠ 1.

Exemplo:

$$\log_2 2 = x \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$$

✓ $\log_a a^n = n$, para a > 0, a ≠ 1 e n ϵ ℜ.

Exemplo:

$$\log_2 2^3 = x \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

✓ $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$, para a > 0, a ≠ 1, b > 0 e c > 0.

Exemplo:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$
$$\log_a c = x \Rightarrow a^x = c$$
$$b = c$$

✓ $a^{\log_a b} = b$, para a > 0, a ≠ 1 e b > 0.

Exemplo:

$$2^{\log_2 3} = 3$$

Esses consequências são bastante úteis para podermos manipular os problemas que envolvem logaritmos sem sair fazendo conta adoidado. Agora vamos estudar outras propriedades que são essenciais na resolução de logaritmos.

Vamos praticar!

O valor de $\log_2 64$ é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

e) 1

Alternativa correta: B

O valor de Y na expressão $\log_3 Y = 3$ é

a) 1

b) 3

c) 9

d) 27

e) 81

f) Alternativa correta: D

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

✓ Logaritmo do produto - quando temos uma multiplicação no logaritmando, podemos abri-la como uma soma de logaritmos mantendo a mesma base. Exemplo:

$$\log_2(5.3) = \log_2 5 + \log_2 5$$

Formalmente: $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$

✓ Logaritmo do quociente - quando temos uma divisão no logaritmando, podemos abri-la como uma subtração de logaritmos. Exemplo:

$$\log_2\left(\frac{5}{3}\right) = \log_2 5 - \log_2 3$$

Formalmente:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

- ✓ Logaritmo de potência - quando temos uma potência no **logaritmando**, passamos esse valor para frente do log. Então, sempre que você se deparar com essa situação, lembre que "o expoente vai para frente". Exemplo:

$$\log_2 3^4 = 4.\log_2 3$$

Formalmente: $\log_a b^n = n.\log_a b$

Note que isso não vale para quando o logaritmo inteiro está elevado a alguma potência, ok? Vale prestar atenção nisso.

Veja todas esses provas para estas propriedades operatórias dos logaritmos nos Apêndices dessa apostila.

MUDANÇA DE BASE

A mudança de base é extremamente útil na resolução de problemas que envolvem logaritmos, pois facilmente podemos transformar a base de um logaritmo desconhecido em outro que convém. Então, veja:

Para mudar $\log_a b$ para base c, devemos fazer:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Lembrando que a > 0 e a ≠ 1, b > 0, c > 0 e c ≠ 1. Veja o exemplo em que temos base 2 e queremos mudar para base 5, assim c = 5:

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

Parece complicado, mas com treino e fazendo vários exercícios você vai lembrar dessas jogadas facilmente.

Resolva o exercício:

(UFRGS) - Dada a expressão S = log 0,001 + log 100, o valor de S é

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

Alternativa correta: C

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS RESOLVIDAS COM LOGARITMOS

Agora que já sabemos tudo isso sobre os logaritmos, podemos resolver o nosso problema original. Vamos relembrá-lo:

$$2^x = 18$$

Lembre que, mesmo realizando a redução de base, não encontramos bases iguais nos dois lados da igualdade. Então, para podermos resolver esse problema, devemos aplicar logaritmos! Veja a equivalência entre a exponencial e o logaritmo:

$$2^x = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 18 = x$$

Perceba que a base desse logaritmo é 2, então, para facilitar nossa vida utilizando a calculadora científica, vamos fazer uma mudança de base para a decimal, ou seja, para base 10. Nesse caso, a = 2, b = 18 e c = 10. Acompanhe abaixo:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_2 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 2}$$

Realizando os cálculos separadamente, teremos que log 18 = 1,25 e que log 2 = 0,30 (a base 10 pode ser omitida, ok?). Então, substituindo esses valores, teremos:

$$\frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 2} = \frac{1,25}{0,30} = 4,16$$

Assim, como x = 4,16, seu primo ficou devendo por pouco mais de 4 anos a multa da biblioteca.

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

No primeiro problema tínhamos a equação exponencial 2x = 32 e podíamos reescrevê-la como $\log_2 32 = 5$ com o objetivo de encontrar o número de anos que você ficou devendo na biblioteca. Seguindo este raciocínio, se soubéssemos quantos anos você ficou devendo, mas não qual era o valor da multa inicial, poderíamos montar a equação x5 = 32 e, para resolvê-la, poderíamos aplicar logaritmos. Veja:

$$\log_x 32 = 5$$

Perceba que agora temos uma incógnita na base, caracterizando uma equação logarítmica. Esse tipo de equação pode conter a incógnita na base, no logaritmando ou em ambos; para resolvê-la é necessário primeiramente analisar as condições de existência, ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$.

Vamos resolver essa equação logarítmica iniciando pela análise das condições de existência. Como a incógnita está na base, vamos analisar se $a > 0$ e $a \neq 1$. Veja

$$\log_x 32 = 5 \quad \rightarrow \quad x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

Agora vamos resolver a equação em si, utilizando o esqueminha das setas:

$$\log_x 32 = 5$$
$$x^5 = 32$$
$$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32}$$
$$x = \sqrt[5]{32}$$
$$x = 2$$

Lembre que depois disso é necessário comparar a resposta com a condição de existência. Nesse caso, x deveria ser maior do que 0 e diferente de 1. Como encontramos x = 2, então essa é a solução dessa equação.

Vamos analisar outra equação logarítmica:

$$\log_{(x-1)} 4 = 2$$

Como novamente a incógnita se encontra na base, faremos a análise da condição de existência a partir de a > 0 e a ≠ 1. Então:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$$

Agora vamos fazer o esqueminha para podermos resolver a equação:

$$\log_{(x-1)} 4 = 2$$
$$(x-1)^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Perceba que temos aqui uma equação de 2º grau, logo, antes de mais nada, vamos analisar seu discriminante. Perceba que os coeficientes dessa função são a = 1, b = -2 e c = -3. Não confunda esses coeficientes com os termos do logaritmo, ok? Seu discriminante será:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$

Portanto, sabemos que essa equação de 2º grau possui duas raízes reais e distintas. Vamos aplicar Bhaskara para encontrá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x'' = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Então uma raiz vale 4 e a outra vale 0, mas lembre que vimos que a condição de existência é x ser maior do que 1 e diferente de 2. Isso significa que a solução para essa equação logarítmica é apenas S = {4}, ok?

Vamos ver agora um exemplo um pouco diferente, com a incógnita no logaritmando:

$$\log_2(x^2+x-6) = \log_2(3x+2)$$

Primeiramente é necessário analisar as condições de existência. Como agora a incógnita está no logaritmando, temos que ver se b > 0 em ambos os lados da igualdade. Veja que temos uma equação de 2º grau no lado esquerdo e, para avaliarmos a condição de existência, é necessário encontrar suas raízes.

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\Delta = 1^2 - 4.(1).(-6) \qquad x = \frac{-(1) \pm \sqrt{25}}{2.(1)}$$

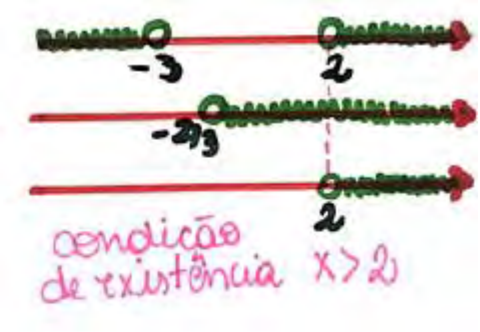
$$\Delta = 1 + 24 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Delta = 25 \qquad x = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x'' = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

O mesmo procedimento deve ser aplicado à equação de 1º grau do lado direito da igualdade.

$$3x + 2 > 0$$
$$3x > -2$$
$$x > \frac{-2}{3}$$

De posse dessas raízes, vamos analisar a condição de existência montando um gráfico. No primeiro caso, temos que as raízes são -3 e 2, então a condição de existência para a equação 1 é ser menor que -3 e maior do que 2 (perceba que o intervalo é aberto, ou seja, não inclui -3 e 2). No segundo caso, a raiz é -2/3, então x deve ser maior do que -2/3 (também intervalo aberto). Vamos colocar essas três condições em um gráfico e analisar o que acontece na união entre elas:



Note que para a condição de existência ser válida para ambas equações é necessário que x seja maior do que 2. Qualquer outra possibilidade, como x ser menor do que -3, não inclui a condição da segunda equação e por isso não é verdadeira. Então, sabendo que x deve ser maior do que 2, podemos finalmente resolver a equação logarítmica. Para facilitar os cálculos, você precisará lembrar da propriedade abaixo

$$\log_a b = \log_a c$$
$$b = c$$

Teremos que:

$$\log_2(x^2+x-6) = \log_2(3x+2)$$
$$x^2+x-6 = 3x+2$$

Manipulando essa equação, chegaremos a uma outra equação de 2º grau:

$$x^2 + x - 6 = 3x + 2$$
$$x^2 + x - 6 - 3x - 2$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Primeiramente, vamos analisar o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-8)$$
$$\Delta = 4 + 32$$
$$\Delta = 36$$

Agora sabemos que essa equação possui duas raízes reais e distintas, então vamos encontrá-las a partir da fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2.(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x'' = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Veja que uma raiz é 4 e a outra é -2, mas a condição de existência diz que x deve ser maior do que 2. Portanto, a solução dessa equação logarítmica é apenas S = {4}.

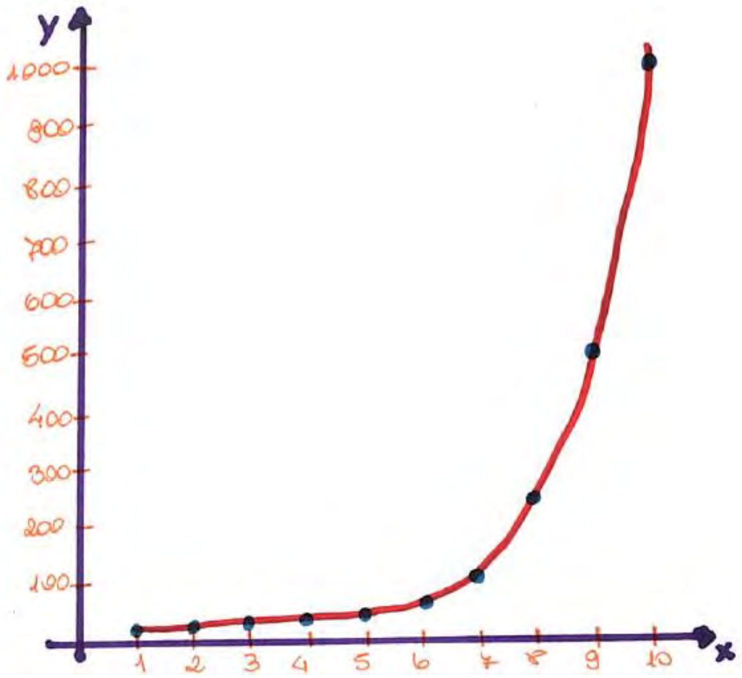
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos relembrar a equação exponencial que descreve o nosso problema inicial da multa da biblioteca, $2^x = 32$. Antes o nosso objetivo era descobrir há quantos anos você devia, já que a multa chegou a R$ 32,00. Mas e se quiséssemos saber quanto seria essa multa em 10, em 12 ou em 15 anos? Seria possível calcular o valor da multa se substituíssemos esses valores no x – você consegue notar? Então, teríamos o valor da multa em função do tempo. Portanto, teríamos uma função exponencial, já que temos uma função baseada em uma equação exponencial, f(x) = 2x. O conceito é o mesmo de quando trabalhamos com funções de 1º e de 2º graus e elas eram descritas por equações de 1º e de 2º graus, mas agora temos a forma geral como f(x) = ax, sendo a > 0 e a ≠ 1. No caso do problema que estamos abordando, a = 2, portanto é maior do que zero e diferente de 1.

Vamos iniciar nosso estudo arbitrando valores para x (anos) e aplicando-os na função para saber qual é o valor de y (multa). Acompanhe a tabela:

x	$f(x) = 2^x$	y
1	$f(1) = 2^1$	2
2	$f(2) = 2^2$	4
3	$f(3) = 2^3$	8
4	$f(4) = 2^4$	16
5	$f(5) = 2^5$	32
6	$f(6) = 2^6$	64
7	$f(7) = 2^7$	128
8	$f(8) = 2^8$	256
9	$f(9) = 2^9$	512
10	$f(10) = 2^{10}$	1024

Perceba que tanto os valores de x quanto os valores de y estão crescendo; isso significa que temos uma função crescente. Veja como ela se comporta em um gráfico traçado a partir dos valores calculados na tabela (analise da esquerda para a direita):



Sempre que você tiver o coeficiente a maior do que zero, terá uma função exponencial crescente.

Perceba que o crescimento de uma função exponencial acontece muito mais rapidamente do que aconteceria se tivéssemos uma função linear, concorda? Dê uma olhada na apostila de Funções I e compare.

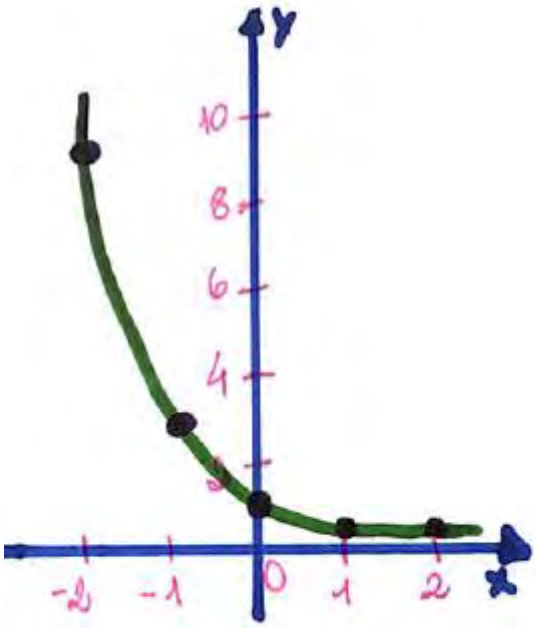
Vamos analisar agora uma função que tenha o valor de a entre zero e 1. Veja:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Para a construção da tabela, vamos arbitrar alguns poucos valores para x:

x	$f(x) = (1/3)^x$	y
-2	$f(-2) = (1/3)^{-2}$	9
-1	$f(-1) = (1/3)^{-1}$	3
0	$f(0) = (1/3)^{0}$	1
1	$f(1) = (1/3)^{1}$	0,33
2	$f(2) = (1/3)^{2}$	0,11

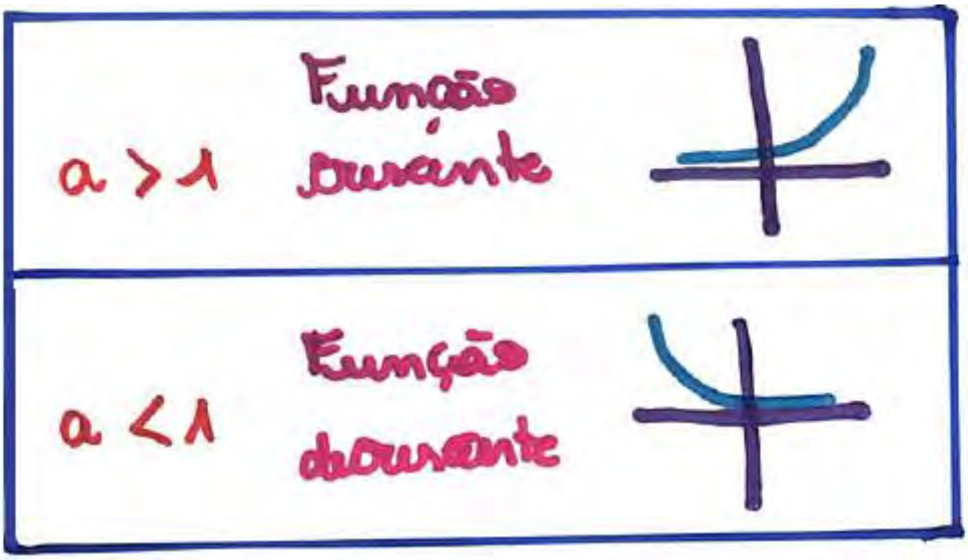
Podemos traçar o gráfico dessa função a partir desses valores:



Veja que temos agora uma função decrescente (sempre analise do lado esquerdo para o direito), que está "caindo". Isso sempre acontecerá quando o coeficiente a estiver entre zero e um.

Note também que, por estarmos trabalhando com uma exponencial, sua função nunca resultará em zero ou em valores negativos para y. Além disso, ela possui função inversa, o que estudaremos em seguida.

Veja o esquema abaixo sobre o comportamento das funções exponenciais de acordo com o coeficiente a:



FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

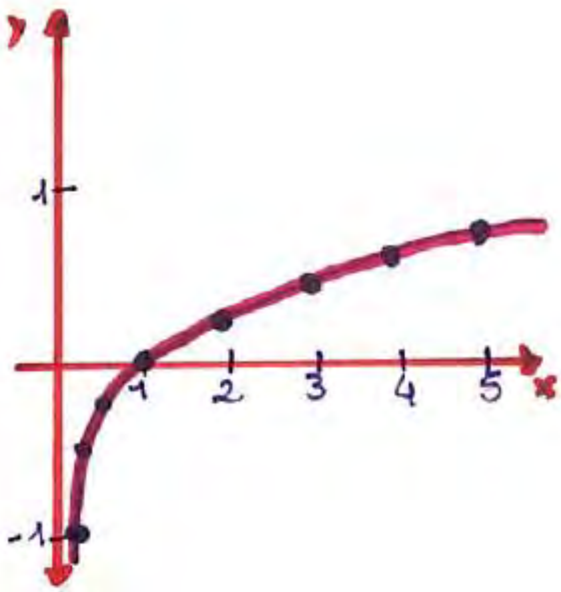
Assim como funções exponenciais são descritas a partir de equações exponenciais, equações logarítmicas nos permitem descrever funções logarítmicas. Lembre que, no caso das equações logarítmicas, as incógnitas podem aparecer tanto na base quanto no logaritmando, mas as funções logarítmicas são descritas por equações que contém a incógnita no logaritmando, descritas por $f(x) = \log_a x \;\; ou \;\; y = \log_a x$, com a > 0 e a ≠ 1 (lembrando que essa é uma das condições de existência). Vamos analisar a função abaixo:

$$f(x) = \log_{10} x$$

Veja que a = 10, então é maior do que zero e diferente de 1. Para podermos construir a tabela e analisarmos o comportamento dessa função, vamos arbitrar os valores de x:

x	$f(x)=\log_{10} x$	y
0,1	$f(0,1)=\log_{10} 0,1$	-1
0,5	$f(0,5)=\log_{10} 0,5$	-0,30
1	$f(1)=\log_{10} 1$	0
2	$f(2)=\log_{10} 2$	0,30
3	$f(3)=\log_{10} 3$	0,47
4	$f(4)=\log_{10} 4$	0,60
5	$f(5)=\log_{10} 5$	0,69

Perceba que enquanto os valores de x crescem, os valores de f(x) – ou de y, como você preferir chamar – também apresentam crescimento. Dessa forma sabemos que a função é crescente. Note também que utilizamos apenas valores maiores do que zero para x porque ele é o logaritmando e, a partir das condições de existência, sabemos que ele não pode ser menor do que zero. Vamos traçar o gráfico a partir dos valores da tabela:



Outra forma de enxergar que a função é crescente é analisando a curva do gráfico da esquerda para a direita. Perceba que ela está subindo, portanto é crescente.

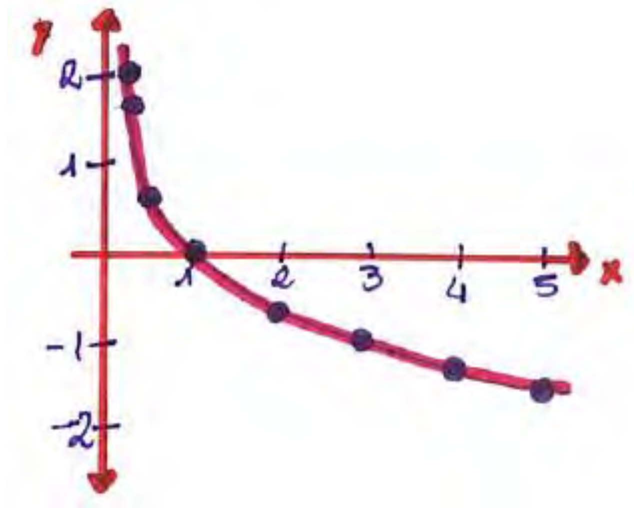
Agora vamos analisar outra função:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Veja que a = 1/3 é igual a 0,33, assim a está entre zero e um – o que está certo, já que o que não pode acontecer é ser 1 ou menor do que zero. Vamos construir a tabela a partir de valores arbitrários para x:

x	$f(x) = (1/3)^x$	y
-2	$f(-2) = (1/3)^{-2}$	9
-1	$f(-1) = (1/3)^{-1}$	3
0	$f(0) = (1/3)^0$	1
1	$f(1) = (1/3)^1$	$0,33$
2	$f(2) = (1/3)^2$	$0,11$

Perceba que enquanto os valores de x crescem, os valores de y decrescem, então essa função é decrescente. Vamos traçar o gráfico a partir dos valores da tabela para termos essa informação visualmente:



Analisando o gráfico da esquerda para a direita, percebemos que a função está “decaindo” ou decrescendo, corroborando o que havíamos dito anteriormente.

Podemos dizer, a partir dessas duas funções, que quando temos a > 0 a função é crescente, e quando temos 0 < a < 1 a função é decrescente. Veja o esqueminha abaixo:

Perceba que a função logarítmica nunca toca ou ultrapassa o eixo y. Além disso, se fizermos a inversa dessa função, ou seja, f(x)-1, obteremos ax, a função exponencial. Portanto, a função logarítmica tem como inversa a função exponencial.

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

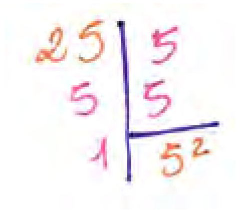
Anteriormente estudamos equações exponenciais e logarítmicas, ou seja, expressões que envolviam igualdade. Mas às vezes não precisamos necessariamente de valores exatos, podemos simplesmente ter um intervalo em que a equação é válida e é aí que entram as inequações exponenciais e logarítmicas, expressões que envolvem desigualdade. No fim das contas, você perceberá que a resolução de inequações não é muito diferente das equações, mas é necessário atentar para alguns detalhes. Vamos analisá-las separadamente.

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Vamos analisar a inequação abaixo. Perceba que ela é caracterizada por haver um sinal de maior ou igual (poderia ser apenas maior, apenas menor ou menor e igual):

$$5^{3x} \geq 25^{x+2}$$

O primeiro passo é realizar a redução de base. Vamos fazer isso do lado direito da inequação. Fatorando 25, teremos:



Agora o procedimento é o mesmo que vimos anteriormente. Basta substituir o valor fatorado na inequação, "cortar" as bases – que agora são iguais – e resolver a inequação.

$$5^{3x} \geq 5^{2(x+2)}$$
$$5^{3x} \geq 5^{2x+4}$$

$$3x \geq 2x + 4$$
$$3x - 2x \geq 4$$
$$x \geq 4$$

Portanto, x deve ser maior ou igual a 4 para satisfazer essa inequação.

Um detalhe bastante importante que você precisa lembrar é que se a desigualdade é invertida "a" estiver entre zero e 1. Caso você não lembre, volte à Apostila de Álgebra I.

INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

A resolução de inequações logarítmicas é bastante parecida com a de equações logarítmicas. Vamos ver isso na prática com a inequação abaixo:

$$\log_2(5x+10) \leq \log_2 45$$

Novamente o primeiro passo é analisar a condição de existência. Como a incógnita está no logaritmando, é necessário analisarmos se b > 0. Perceba que agora o sinal da inequação não está influenciando em nada; o sinal presente é da condição de existência. Então, acompanhe:

$$5x + 10 > 0$$
$$5x > 10$$
$$x > -2$$

Vamos guardar essa informação para mais tarde, ok? Perceba que temos logaritmos de mesma base em ambos os lados da inequação, portanto podemos utilizar a propriedade abaixo (que também é válida para desigualdades):

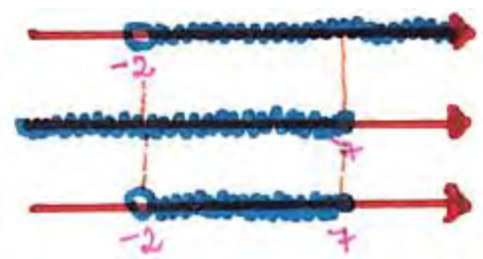
$$\log_a b \leq \log_a c \quad \rightsquigarrow \quad b = c$$

E resolver a inequação:

$$5x + 10 \leq 45$$
$$5x \leq 45 - 10$$
$$5x \leq 35$$
$$x \leq \frac{35}{5}$$
$$x \leq 7$$

Lembre-se: caso a estivesse entre zero e um, seria necessário inverter o sinal da inequação, ok?

Precisamos analisar a resposta a partir da condição de existência e do valor que encontramos para x. Veja os gráficos:



Perceba que o último gráfico é a intersecção entre a condição de existência e os valores possíveis para x. Então, o conjunto solução dessa inequação será:

$$S = \{x \in \mathfrak{R} \mid -2 < x \leq 7\}$$

A grande dica para você conseguir resolver inequações logarítmicas é lembrar das condições de existência. Se conseguir utilizar alguma propriedade, possivelmente sua conta vai reduzir bastante também. Assim, tenha calma! Não se apavore ao ver os símbolos e tudo vai dar certo, ok?

Resolva os exercícios:

(UFRGS)- A solução da equação log₂(4-x)=log₂(x+1)+1 está no intervalo:

a) [-2;-1]

b) (-1;0]

c) (0;1]

d) (1;2]

e) (2;3]

Alternativa correta: C

(UFRJ-2005) O número de bactérias em uma certa cultura dobra a cada hora. A partir da amostra inicial, são necessárias 24 horas para que o número de bactérias atinja uma certa quantidade Q de bactérias. Calcule quantas horas são necessárias para que a quantidade de bactérias nessa cultura atinja a metade de Q.

a) 8

b) 9

c) 11

d) 12

e) 23

Alternativa correta: E

A expressão C (t) = A.2^t nos dá o montante de um capital inicial A, a uma certa taxa anual, após um período t de anos de aplicação. Nessas condições, após quanto tempo um capital de R$ 1500,00 produzirá o montante de R$ 3000,00?

a) 2 anos

b) 1 ano

c) 3 anos

d) 1 ano e 5 meses

Alternativa correta: B

(CESGRANRIO)- O conjunto solução da inequação $9-x^2$ maior que 0 é:

a) $-3>x>3$

b) $-3<x<3$

c) $x=3$

d) $x<3$

e) $x>3$

Alternativa correta: B

APÊNDICES

DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES LOGARÍTMICAS

Veja abaixo as demonstrações das propriedades que vimos nessa apostila de Funções. Para as duas primeiras precisamos lembrar de uma consequência da definição:

$$\log_a a^n = n$$

LOGARITMO DO PRODUTO

Lembre que $a^x.a^y = a^{(x+y)}$.

A partir disso, acompanhe o logaritmo do produto:

$$\log_2(4.8) = \log_2(2^2.2^3) = \log_2 2^{(2+3)}$$.

Lembrando da consequência da definição, somamos os expoentes para ter a resposta: 2 + 3 = 5.

Agora veja a soma de logaritmos:

$$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$$

A partir da consequência da definição, teremos que 2 + 3 = 5.

Portanto, perceba que $\log_2(4.8) = \log_2 4 + \log_2 8$. Assim, podemos generalizar para:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

LOGARITMO DO QUOCIENTE

Lembre que $\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$.

A partir disso, acompanhe o logaritmo do quociente:

$$\log_2\left(\frac{16}{4}\right) = \log_2\left(\frac{2^4}{2^2}\right) = \log_2 2^{(4-2)}$$

Lembrando da consequência da definição, devemos resolver o expoente 4 - 2 = 2.

Agora veja a subtração de logaritmos:

$$\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 2^4 - \log_2 2^2$$

A partir da consequência da definição, teremos que 4 - 2 = 2.

Portanto, veja que $\log_2\left(\frac{16}{4}\right) = \log_2 16 - \log_2 4$.
Assim, generalizamos para:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

✓ **Caso particular:** $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b$

Lembrando de outra consequência da definição: $\log_a 1 = 0$, então:

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = 0 - \log_a b$$

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$$

LOGARITMO DE POTÊNCIA

Veja o logaritmo de potência igualado a x: $\log_a b^n = x$ e outro logaritmo igualado a y: $\log_a b = y$. Resolvendo, teremos que: $a^x = b^n$ e $a^y = b$. Perceba que $b^n = (a^y)^n$, já que $b = a^y$, então $b^n = a^{yn} = ax$. Se $a^{yn} = a^x$, então $y^n = x$, ou $x = y^n$. Lembre que $\log_a b^n = x$ e $\log_a b = y$, assim:

$$\log_a b^n = n.\log_a b$$

MUDANÇA DE BASE

A mudança de base é feita aplicando a seguinte fórmula: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Vamos considerar que:

$$\begin{aligned} \log_a b &= p \\ \log_c b &= q \\ \log_c a &= r \end{aligned}$$

Resolvendo esses logaritmos, chegaremos em $a^p = b$, $c^q = b$ e $c^r = a$. Veja que $b = c^q = a^p$. Como $a = c^r$, se elevarmos ambos lados a *p*, chegaremos a $a^p = (c^r)^p = c^{rp}$. Então, se $c^q = c^{rp}$, então $q = rp$, ou $p = q/r$, que é o mesmo que:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE II

MATEMÁTICA

05

MATEMÁTICA FINANCEIRA

meSalva!

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Essa área da Matemática provavelmente é a que mais você utiliza no dia-a-dia. Como o próprio nome sugere, esse nicho utiliza ferramentas matemáticas pra resolver problemas financeiros, desde o quanto o preço do pão aumentou de um ano para o outro até o impacto da venda de ações na bolsa de valores. Apesar de ser um assunto muito amplo, o cerne é o mesmo: o estudo de juros. Nessa apostila estudaremos como é possível calcular os juros que nos são impostos em diversas situações, como o rendimento de uma poupança ou o valor diferente entre uma compra a vista e uma a prazo. Você verá como é importante o estudo da Matemática Financeira na vida de qualquer indivíduo, mesmo aqueles que não estão interessados em prestar vestibular/ENEM.

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

Ao iniciar o Ensino Médio, seu foco, além do vestibular/ENEM, passou a ser a sua formatura. Por isso, desde os primeiros meses você começou a economizar a mesada no que fosse possível e em alguns meses conseguiu juntar R$ 2500,00. Para não correr o risco de gastar esse valor em outra atividade, você decide abrir uma poupança e o banco oferece uma taxa de juros de 2% ao mês, já que você pretende retirar o valor final só depois de 24 meses. Para fins de organização, você quer saber quanto dinheiro terá na conta ao final desse período, mas como saber isso?

O problema envolve transações financeiras e termos que você provavelmente já ouviu falar como poupança e juros, mas também faz menção a outras de forma indireta, o capital, que é o valor que você já guardou, e o montante, que é o valor passado algum tempo. Esse tema é bastante importante porque é facilmente aplicável na vida real. Hoje você está interessado em organizar sua festa de formatura, mas daqui a alguns anos provavelmente vai estar interessado em comprar um carro ou uma casa e vai ter que analisar o quanto vale a pena guardar todo o dinheiro, aplicar ou ainda fazer um financiamento e tudo isso gira em torno de taxa de juros. Vamos abordar o problema de duas formas, na primeira, aplicando juros simples e na segunda, juros compostos.

JUROS SIMPLES

Como você provavelmente está entendendo tudo sobre porcentagem, vai tratar de problemas de juros com mais naturalidade. Quando falamos em taxa de juros, estamos nos referindo a um fator que fará com que um determinado valor sofra um aumento num determinado período. Fazendo conexão com o problema que estamos estudando, teremos que a taxa de juros (representada por i), como já foi dito no próprio enunciado, é de 2% ao mês, e essa taxa será aplicada ao capital (c), que é o valor inicial que você havia juntado, os R$ 2500,00. Lembre que esse valor sofrerá aumento de 2% ao mês durante 24 meses (o tempo, representado por t). O valor do aumento desse capital é chamado de juros (j) e é dado basicamente pela multiplicação do capital, da taxa de juros e do tempo. É importante que você mantenha sempre as unidades de tempo iguais, como taxa de juros ao mês e tempo em meses também (ou taxa de juros ao ano e tempo em anos) para que não haja inconsistências nessas equações. Além disso, você precisa lembrar que valores em porcentagem como 2% é o mesmo que escrever 2/100, que é o que utilizaremos na equação. Veja:

juros = capital . taxa de juros . tempo

Podemos diminuir o tamanho da equação simplificando como:

$$j = c.i.t$$

Aplicando os valores do problema, teremos:

$$j = c.i.t$$
$$j = 2500.(2/100).24$$
$$j = 1200$$

Mas como é possível? Isso significa que o valor que você tinha, o seu capital, de R$ 2500,00 diminuiu para R$ 1200? Não! Esse é o valor que a taxa de juros fez com que o seu dinheiro rendesse, os juros! Então, o valor que você terá após 24 meses é R$ 2500 mais R$ 1200 que resulta em R$ 3700,00, também chamado de montante. Podemos expressar isso na forma:

montante = capital + juros

Ou, ainda:

$$M = c + j$$

Portanto, para a sua formatura, a partir do capital que você deixou na poupança por 24 meses, à taxa de 2% ao mês, você terá R$ 3700,00. Dá pra fazer uma festinha legal, né?

Agora vamos analisar todo esse problema graficamente. Perceba que a equação de juros simples caracteriza uma função linear (f(x) = a.x), já que os juros dependem do tempo. Veja como podemos reescrever a equação de juros simples:

$$j = c.i.t$$
$$j = 2500.0{,}02.t$$
$$j = 50.t$$

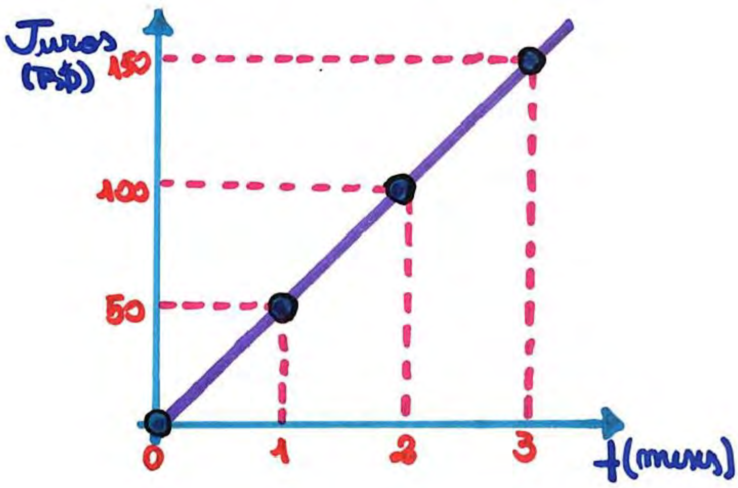
Ainda, é possível reescrever a última parte na forma em que estamos mais familiarizados a tratar funções:

$$j = f(t) = 50.t$$

Para que possamos ver qual é o gráfico dos juros simples em função do tempo, vamos criar uma tabela em que os valores de t são os meses que se passaram e a segunda coluna é o valor dos juros correspondente a esses meses. Para isso, basta substituir o tempo na equação acima. Veja:

t	$j = f(t)$
0	0
1	50
2	100
3	150

Claro que você pode colocar o valor de tempo que achar conveniente. Se quiser, pode fazer para os 24 meses! Agora podemos traçar um gráfico substituindo esses valores de juros pelo tempo:



Veja que o gráfico reitera que juros em função do tempo é uma relação linear, ou seja, temos realmente uma função linear, certo?

Continuando a análise do problema que estamos abordando, vamos construir outro gráfico, agora do montante em função do tempo. Perceba que podemos reescrever a equação do montante substituindo a equação dos juros que vimos anteriormente.

$$M = c + j$$
$$M = c + c.i.t$$
$$M = 2500 + 2500.(0{,}02).t$$
$$M = 2500 + 50.t$$

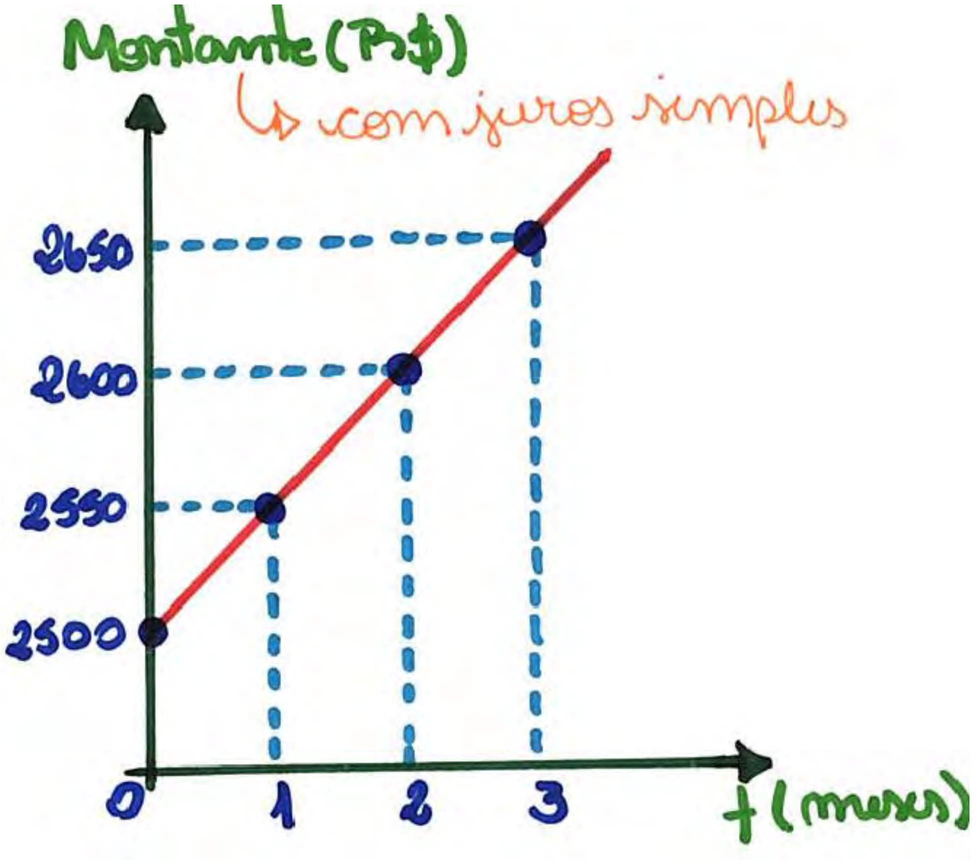
Note que chegamos a uma equação do montante em função do tempo, então também podemos reescrevê-la no formato que estamos acostumados a ver uma função:

$$M = g(t) = 2500 + 50.t$$

Veja que agora temos uma função do tipo f(x) = ax + b (acostume-se a fazer conexões trocando as "letrinhas" e a ordem dos fatores nas equações), que é uma função afim, lembra? Agora vamos montar outra tabela para construirmos o gráfico do montante em função do tempo. Lembre que basta substituir os valores do tempo na equação acima para sabermos o montante. Dê uma olhada:

t	$M = g(t)$
0	2500
1	2550
2	2600
3	2650

A partir dela podemos construir o gráfico do montante em função do tempo. Perceba que, como temos uma função afim, agora o gráfico não começa na origem, já que, mesmo que o tempo seja zero, teremos que o valor do montante é maior do que zero.



JUROS COMPOSTOS

Em geral, os problemas da vida real envolvem juros compostos, mas é importante você ter entendido os juros simples para darmos um passo maior agora. Os juros compostos devem ser entendidos como "juros sobre juros". Isso significa que no lugar de termos apenas um capital, ao final de cada mês (ou ano), teremos um novo capital, que já sofreu um aumento com a taxa de juros e que sofrerá novamente a cada um desses períodos. A forma de calcular pode ser a mesma, apesar de dar um pouco mais de trabalho. Vamos fazer o cálculo do problema anterior aplicando "juros sobre juros". Veja a tabela:

Tempo	Capital	Juros	Montante
1º mês	2500	50	2550
2º mês	2550	51	2601
3º mês	2601	52,02	2653,02
4º mês	2653,02	53,06	2706,08
5º mês	2706,08	54,12	2760,20
⋮	⋮	⋮	⋮
24º mês	3942,24	78,84	4021,09

Perceba que antes precisávamos apenas multiplicar a taxa de juros pelo tempo de aplicação e pelo capital e então tínhamos os juros gerados nesse período todo. No caso dos juros compostos esse processo é feito a cada mês, o que dá um trabalhão e resulta um montante maior do que nos juros simples ao final dos 24 meses! Felizmente esse processo pode ser acelerado a partir de uma equação:

$$M = C(1+i)^t$$

Vamos aplicar os valores fornecidos anteriormente, ou seja, capital de R$ 2500,00, juros compostos de 2% ao mês, por 24 meses, nessa equação:

$$M = 2500(1+0,02)^{24}$$
$$M = 2500(1,6084)$$
$$M = 4021,09$$

Você terá R$ 4021,09 ao final de 24 meses se a taxa de juros aplicada for composta! É o mesmo valor que encontramos realizando o método da tabela aplicando juros simples a cada mês, ou seja, juros sobre juros. Legal, né?

Podemos analisar graficamente qual é a relação entre montante e tempo quando aplicamos os juros compostos. Vamos reescrever a equação do montante em função do tempo utilizando os dados do problema que estamos analisando, perceba que teremos uma equação exponencial:

$$M = 2500.(1+0,02)^t$$
$$M = 2500.(1,02)^t$$

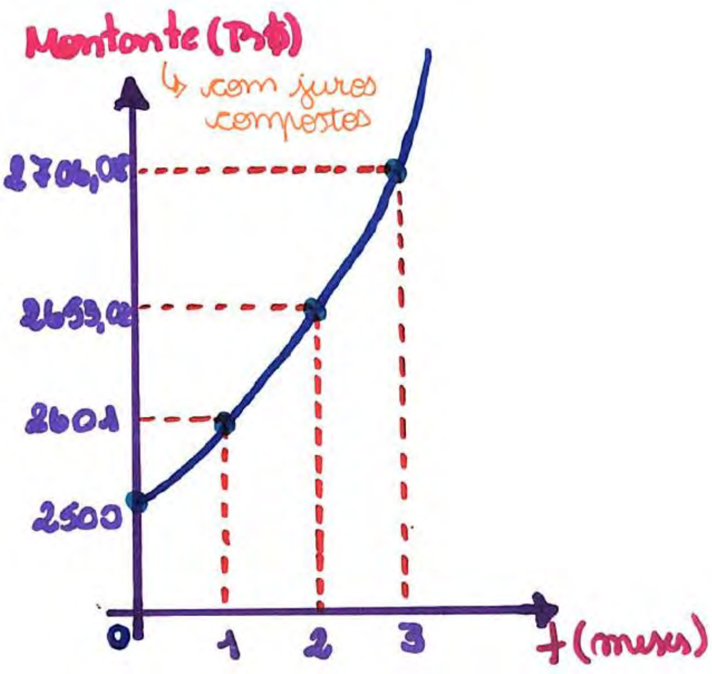
Veja que essa equação caracteriza uma função exponencial do tipo f(x) = a.bx. Podemos reescrevê-la nesse formato:

$$M = h(t) = 2500.(1,02)^t$$

E agora, para traçarmos o gráfico, vamos novamente fazer a tabelinha substituindo os valores do tempo na equação acima:

t	M=h(t)
0	2500
1	2601
2	2653,02
3	2706,08

Substituindo esses valores no gráfico teremos um crescimento exponencial do montante em função do tempo:



Perceba que o crescimento do montante em função do tempo ao aplicarmos juros simples é linear (apesar da função ser afim, ela também pode ser linear, certo?), mas quando aplicamos os juros compostos temos um crescimento exponencial. Portanto, os juros compostos atingem valores maiores do que os simples no mesmo período de tempo. Então, cuidado quando pedir dinheiro emprestado do banco, mas fique contente quando for aplicar em algo com uma boa taxa de juros, já que é essa modalidade que os bancos aplicam na prática.

INFLAÇÃO

Provavelmente você lembra que há 5 anos era possível comprar um refrigerante por um pouco menos de R$ 5,00 e que agora nem em sonho você consegue, né? Isso acontece com vários outros produtos que você consegue lembrar, certo? Esse aumento do preço dos produtos e de serviços acontece devido à inflação que é influenciada por diversos fatores econômicos que não vem ao caso abordarmos e é dada por valores em porcentagem. Por exemplo, no caso do refrigerante, se ele custava R$ 4,50 e sofreu uma inflação de 40%, atualmente ele custa quanto?

Esse cálculo é feito exatamente da mesma forma como os outros problemas que envolvem porcentagem, utilizando regra de três.

$$\begin{array}{ccc} 4{,}50 & \text{—} & 100\% \\ x & \text{—} & 140\% \end{array}$$

Fazendo a multiplicação cruzada, teremos:

$$\begin{aligned} (x)(100) &= (4{,}50)(140) \\ 100x &= 630 \\ x &= \frac{630}{100} \\ x &= 6{,}3 \end{aligned}$$

Ou seja, com uma inflação de 40%, o preço do refrigerante 5 anos depois é de R$ 6,30.

Perceba que tivemos um aumento do preço, mas também é comum termos inflação negativa, também chamada de deflação. Isso acontece quando o preço dos produtos diminui. Por exemplo, você deve lembrar de um período em que o tomate ficou bastante famoso por estar custando R$ 9,00/kg. Atualmente, o preço gira em torno de R$ 6,00, ou até menos. Isso significa que, no caso do tomate, houve uma deflação, ou inflação negativa. Vamos calcular de quanto foi essa deflação:

$$\begin{array}{ccc} 9{,}00 & \text{—} & 100\% \\ 6{,}00 & \text{—} & x \end{array}$$

Fazendo a multiplicação cruzada, chegaremos a:

$$\begin{aligned} (9{,}00)(x) &= (6{,}00)(100) \\ 9x &= 600 \\ x &= \frac{600}{9} \\ x &= 66{,}67 \end{aligned}$$

Esse é o valor da inflação negativa? Não! Lembre que nesses casos precisamos fazer o cálculo de 100 - 66,67 para saber o valor que realmente estamos procurando, no caso, 33,33%. Portanto, no caso do tomate, ele sofreu uma inflação negativa de 33,33%.

Perceba que a inflação que acarreta em aumento (ou diminuição) dos preços de produtos e/ou serviços, pode ser afetado por diversos fatores. Então, para que a economia seja mantida sob controle, é importante que a inflação também esteja estável. A falta de estabilidade pode acarretar em medidas econômicas tomadas pelo governo com a finalidade de evitar uma crise econômica.

EXERCÍCIOS

Augusto fez uma prova de matemática e acertou 16 das 20 questões da prova. Qual a taxa percentual de acertos?

a) 20%

b) 40%

c) 60%

d) 80%

e) 90%

Alternativa correta: D

Bruno é desatento e comprou uma televisão que custava R$800,00 em 5 prestações mensais sem prestar atenção na taxa de juros. Ao fazer as contas, percebeu que ao final do período, havia pago um total de 850 reais, qual foi a taxa de juros simples aplicada?

a) 1,25%

b) 1%

c) 1,75%

d) 2%

e) 1,5%

Alternativa correta: A

Ao fazer um investimento de R$30.000,00 por 8 meses com uma taxa de 12% ao ano em regime de juros compostos, qual é o valor resgatado ao final do período?

a) R$32.485,70

b) R$35.000,00

c) R$31.879,98

d) R$33.987,13

e) R$32.677,00

Alternativa correta: A

Nathan, Rafael e Gabriela investiram cada um, respectivamente R$2.000,00, R$3.000,00 e R$5.000,00 em um negócio que após um ano, foi vendido por R$15.000,00 reais. Quanto Rafael recebeu pela sua parte na venda?

a) R$4.500,00

b) R$7.500,00

c) R$3.000,00

d) R$2.500,00

e) R$5.000,00

Alternativa correta: A

Um trabalhador que ganha R$1.500,00 por semana solicitou um aumento de 20% ao seu patrão. Este aceitou o pedido do homem e disse que iria aumentar seu salário em 5% nessa semana e em mais 15% na outra semana. No final, quanto ficou o salário do trabalhador?

a) R$1.750,00

b) R$1.600,00

c) R$1.520,00

d) R$1.781,25

e) R$1.811,25

Alternativa correta: E

Ao fazer uma aplicação de R$500 por 6 meses com uma taxa de 2% ao mês em regime de juros compostos, qual é o valor resgatado ao final do período?

a) R$515,79

b) R$529,56

c) R$542,99

d) R$550,23

e) R$563,08

Alternativa correta: E

Ao comprar um carro de R$20.000,00 um vendedor inexperiente deu ao cliente 15% de desconto, porém, o vendedor constatou que não poderia ter dado um desconto tão grande e teria que voltar ao valor original do veículo. Quanto por cento o vendedor teve de incluir sobre o valor com desconto para o veículo voltar ao valor inicial?

a) 15%

b) 13,2%

c) 17,6%

d) 19,7%

e) 25,3%

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

PARTE II

MATEMÁTICA

06

TRIGONOMETRIA

meSalva!

TRIGONOMETRIA

Se você costuma viajar de carro ou de ônibus provavelmente já se deparou com a placa abaixo:

Essa placa indica um declive acentuado e é bastante comum que a encontremos em regiões montanhosas. Normalmente, você percebe que está em um local desses quando começa a sentir um cheiro forte de lonas de freio ou de pneu queimado e quando vê que os caminhões pesados estão numa velocidade bem mais reduzida do que os demais veículos, tanto ao descer (direção onde está a placa), quanto ao subir, na direção contrária.

Claro que não é apenas na estrada que nos deparamos com ruas inclinadas. Você, se mora ou se já visitou uma cidade montanhosa, provavelmente já precisou traçar um roteiro que evitasse passar caminhando por um morro terrível, não? Ainda, talvez você já tenha se deparado com algum morro e pensado “essa rampa tem quase 90º”, certo? Veja um exemplo de uma inclinação que nos faria pensar isso na foto abaixo, de uma rua de São Francisco, EUA:

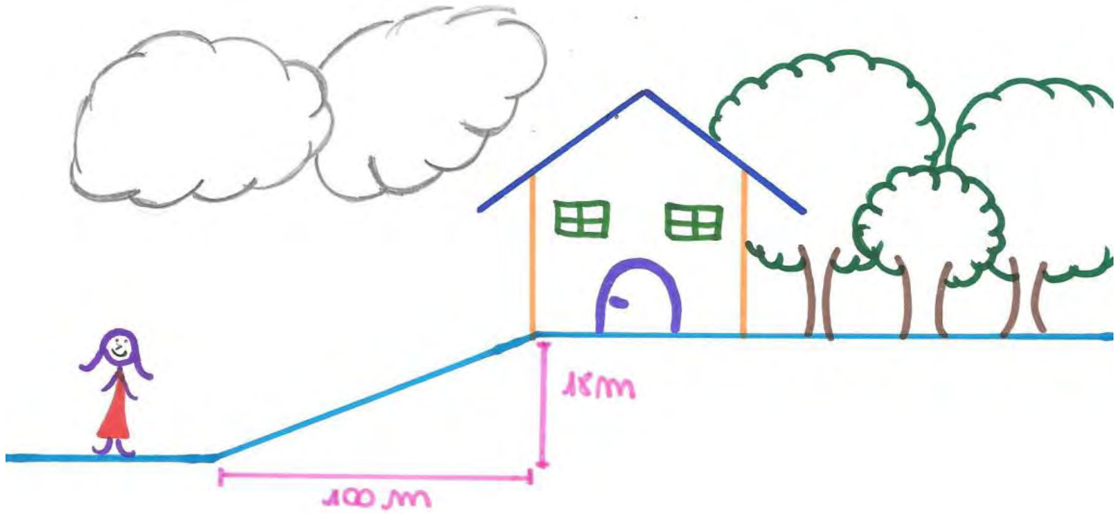
Pois, para a surpresa de todos, saiba que a rua mais inclinada do mundo fica na Nova Zelândia, com 19º de inclinação (Lang, 2007). Portanto, essa da foto tem uma inclinação menor do que 19º, apesar de parecer muito mais! Devido a essa inclinação essa rua nos EUA possui degraus nas laterais para que as pessoas possam transitar por ela com menos dificuldade.

Para garantir a segurança da população, o Departamento Nacional de Infra-estrutura de Transportes (DNIT) propõe que as estradas tenham entre 3 e 5º de inclinação, apenas. Caso a rua/via tenha mais do que isso, alguns veículos não poderão trafegar por ela, como é o caso de uma rua no centro de Porto Alegre (RS), que tem 16º de inclinação e onde é proibida a passagem de caminhões. Outro caso é a Serra do Rio do Rastro (SC) em que, devido à inclinação de 10º, seu asfalto possui ranhuras para facilitar a subida e descida de veículos (Lang, 2007). Veja abaixo uma imagem da Serra:

Perceba que 10^{o} caracteriza uma inclinação bem importante e que se fosse algo em torno de 90^{o} certamente seria inviável tentar transitar por ela, certo? Mas, já que isso é tão importante, como se "descobre" qual é a inclinação de uma rua? Como é medido esse ângulo? É isso que veremos a seguir, mas antes precisaremos abordar alguns conceitos iniciais de trigonometria: seno, cosseno e tangente.

SENO, COSSENO E TANGENTE

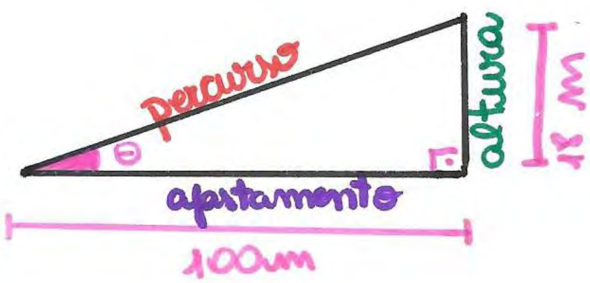
Para iniciar o nosso estudo de seno, cosseno e tangente vamos analisar uma rua inclinada que uma pessoa precisa subir para chegar até em casa. A altura da casa dela é de 18 m em relação ao nível mais baixo da rua e entre o início e o final da rampa há uma distância (afastamento entre a pessoa e a casa no nível mais baixo da rua) de 100 m. Veja a ilustração abaixo:



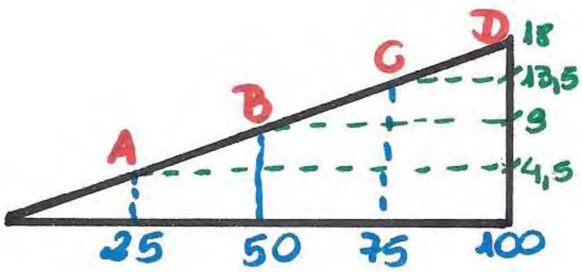
Lembre que sempre que estamos tentando resolver problemas matemáticos é importante encontrar relações, como de proporcionalidade, triângulos semelhantes, etc. Perceba que podemos traçar um triângulo retângulo que tem como hipotenusa a rua inclinada, certo? Observe as linhas pontilhadas da figura:

Como o nosso objetivo é realizar um estudo sobre o ângulo de inclinação da rampa, vamos nomear cada lado do triângulo formado por ela de uma forma bastante intuitiva. O lado que a pessoa precisa caminhar para chegar até a casa será chamado de “percurso”, o lado que indica a distância entre a casa e o nível da rua de “altura” e a base do triângulo será denominada “afastamento”. Veja como fica o desenho:

Numa representação simplificada teremos o seguinte triângulo:



Podemos dividir tanto o valor de afastamento quando o valor de altura em quatro partes, indicando as quatro partes correspondentes a elas no percurso pelas letras A, B, C e D.



A partir de conceitos de proporcionalidade e de semelhança de triângulos podemos calcular um índice que relaciona o afastamento e a altura em cada um dos pontos do percurso, veja:

$$Ponto\ A = \frac{altura}{afastamento} = \frac{4{,}5}{25} = 0{,}18$$
$$Ponto\ B = \frac{altura}{afastamento} = \frac{9}{50} = 0{,}18$$
$$Ponto\ C = \frac{altura}{afastamento} = \frac{13{,}5}{75} = 0{,}18$$
$$Ponto\ D = \frac{altura}{afastamento} = \frac{18}{100} = 0{,}18$$

Perceba que o índice de subida é o mesmo em cada um dos pontos e por isso não depende do tamanho do triângulo (ou da rampa/rua) mas sim da inclinação dele. Perceba também que o valor do índice de subida é diretamente proporcional à inclinação, ou seja, quanto maior o valor do índice, maior é a inclinação e, portanto, maior o ângulo.

Esse índice de subida é associado à tangente (tan) do ângulo de inclinação, ou seja, o valor que encontramos de 0,18 é o valor da tangente do ângulo do triângulo. A representação é:

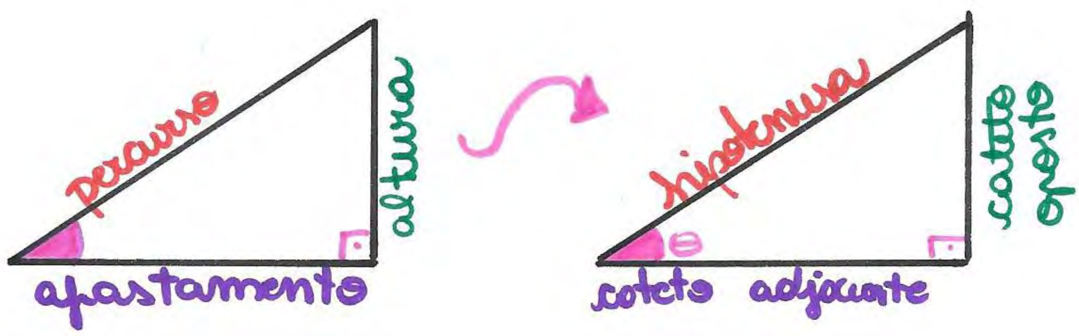
$$\tan\ \theta = \frac{altura}{afastamento} = 0{,}18$$

Mas cuidado! O ângulo não é 0,18. Esse valor é a tangente do ângulo e para descobrirmos qual é normalmente recorremos às tabelas dos livros ou à calculadora, realizando uma operação chamada de arco tangente (arc tan). Veja a representação para o caso 0,18:

$$\arctan\ 0{,}18 = \theta$$
$$\theta = 10{,}2^o$$

Esse valor foi calculado a partir de uma calculadora científica. Caso você não tenha uma agora, utilize seu celular (nas opções normalmente é possível transformar a calculadora convencional em científica) ou o site **Wolfram Alpha** (http://wolframalpha.com/).

Lembre que os lados do triângulo que nomeamos anteriormente podem ser renomeados como:



Então, generalizando, a tangente de um ângulo é calculada como:

$$\tan\ \theta = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adjacente}$$

Caso invertêssemos essa relação chegaríamos a uma outra, denominada cotangente (cotg), que é a inversa da tangente. Veja:

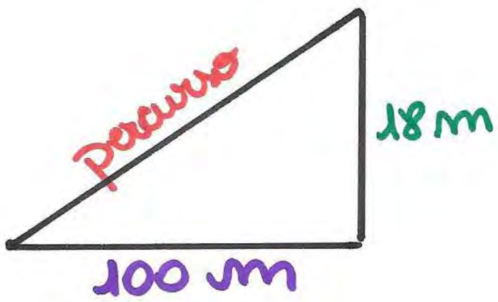
$$\tan^{-1}\ \theta = \frac{1}{\tan\ \theta} = cotangente\ \ (cotg)$$

$$\therefore$$

$$cotg\ \ \theta = \frac{afastamento}{altura} = \frac{cateto\ \ adjacente}{cateto\ \ oposto}$$

Cuidado! Não confunda arco tangente (a função inversa da tangente) com cotangente (apenas a inversa da tangente), ok? Quando fazemos arco tangente é possível encontrarmos o ângulo ao qual aquela tangente está associada. Isso acontecerá com os outros índices também.

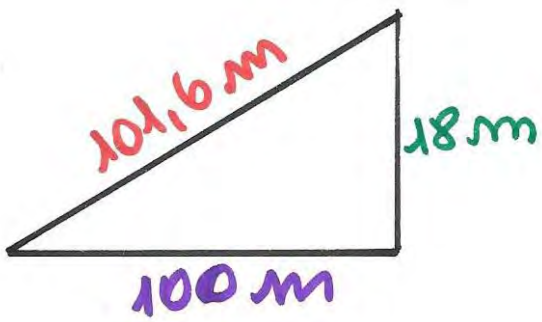
Nós já vimos as relações entre altura e afastamento, mas podemos fazer relações entre esses dois e o percurso. O único problema é que não sabemos o valor do percurso, mas como você já estudou o Teorema de Pitágoras nós podemos descobri-lo, certo? Vamos desenhar de novo a nossa rampa:



Lembre que o Teorema diz que o quadrado da hipotenusa (normalmente denominada a) é igual a soma dos catetos (b e c) ao quadrado. Então, teremos o seguinte:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$percurso^2 = 18^2 + 100^2$$
$$percurso^2 = 324 + 10000$$
$$percurso^2 = 10324$$
$$percurso = \sqrt{10324}$$
$$percurso = 101{,}60 \ m$$

Então, como o percurso vale 101,6 m, podemos completar o triângulo conforme segue:



Agora que temos o triângulo com todos os valores, podemos realizar novas relações, como a entre a altura e o percurso. Nesse caso, o valor encontrado a partir dessa relação será chamado de seno. Veja o valor que obteremos com essa relação:

$$sen\ \theta = \frac{altura}{percurso}$$

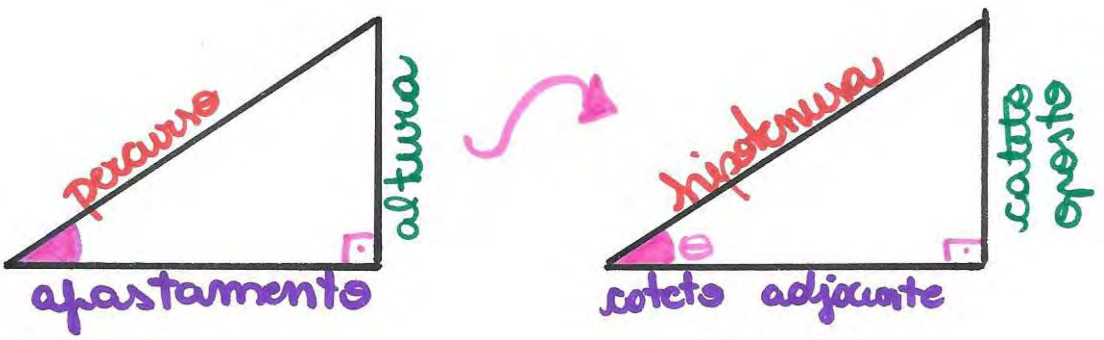
$$sen\ \theta = \frac{18}{101{,}60} = 0{,}177$$

Lembre que este não é o valor do ângulo, mas o valor do seno do ângulo, que já sabemos ser 10,2°. Para calcularmos o ângulo a partir do valor do seno devemos realizar uma operação chamada arco seno (arc sen) na calculadora. Veja:

$$arcsen\ 0{,}177 = \theta$$

$$\theta = 10{,}2^o$$

Que faz todo sentido ser o mesmo resultado de antes, já que estamos estudando o mesmo ângulo, a partir de relações diferentes, ok? Generalizando, teremos que o seno pode ser calculado como:



$$sen\ \theta = \frac{cateto\ \ oposto}{hipotenusa} = \frac{altura}{percurso}$$

Assim como na tangente também podemos fazer a operação inversa do seno, que é chamada de secante (sec). Então, ao invertermos a relação entre a altura e o percurso encontraremos a secante do ângulo:

$$sen^{-1}\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta} = secante\ (sec)$$

$$\therefore$$

$$\sec\ \theta = \frac{percurso}{altura} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ oposto}$$

Por fim, a última relação possível entre os lados do triângulo é a entre o afastamento e o percurso, que chamamos de cosseno (cos). Veja:

$$\cos\ \theta = \frac{afastamento}{percurso}$$

Substituindo os valores que já conhecemos, teremos:

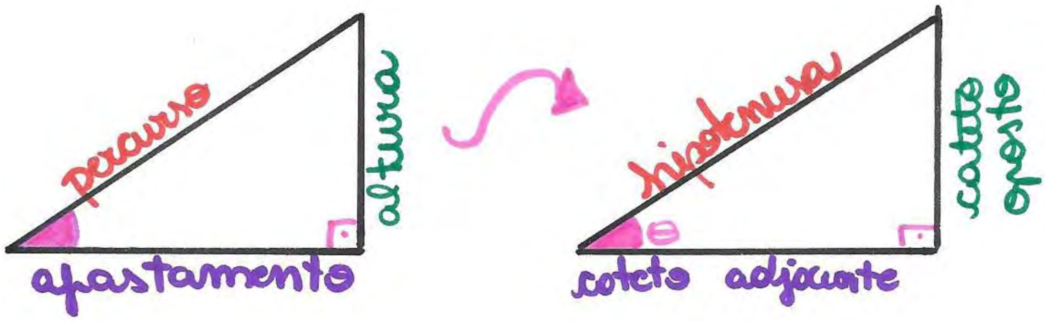
$$\cos\ \theta = \frac{100}{101{,}6} = 0{,}98$$

E como já vimos, realizamos outra operação para encontrar o valor do ângulo, o arco cosseno (arc cos):

$$\text{arccos}\ \ 0{,}98 = \theta$$
$$\theta = 10{,}2^{o}$$

Como esperado, encontramos o mesmo ângulo das outras situações, em que analisamos com os outros lados do triângulo.

Então, generalizando, o cosseno de um ângulo pode ser calculado por:



$$\cos\ \theta = \frac{cateto\ \ adjacente}{hipotenusa} = \frac{afastamento}{percurso}$$

E a operação inversa do cosseno é a cossecante, dada pela inversão da relação que acabamos de analisar:

$$cos^{-1}\ \theta = \frac{1}{cos\ \theta} = cossecante\ (cossec)$$

$$\therefore$$

$$cossec\ \theta = \frac{percurso}{afastamento} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adjacente}$$

Se você não conseguir lembrar das relações que acabamos de ver, lembre-se da seguinte dica: SOH - CAH - TOA. A primeira parte se refere ao seno do ângulo, que é calculado pelo cateto oposto dividido pela hipotenusa (SOH); a segunda é o cosseno do ângulo, calculado dividindo o cateto adjacente pela hipotenusa (CAH); por fim temos a tangente, que é calculada dividindo o cateto oposto pelo cateto adjacente (TOA). Veja a tabela abaixo que agrupa as informações que acabamos de estudar, chamadas de razões trigonométricas:

$$\begin{cases} \text{SOH} \rightsquigarrow sen\ \theta = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \\ \\ \text{CAH} \rightsquigarrow cos\ \theta = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \\ \\ \text{TOA} \rightsquigarrow tan\ \theta = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \end{cases}$$

Sabendo tudo isso você só precisa escolher a relação que lhe for conveniente. Essa escolha vai depender do problema atacado, mas lembre-se que você não precisa ter a informação sobre os três lados, tendo dois é o suficiente (até porque você já sabe como calcular o terceiro, se for o caso).

Além das relações entre os lados do triângulo que permite encontrar os ângulos, é possível relacionar o seno, o cosseno e a tangente entre si. A primeira é a mais importante de todas, e por isso é essencial que você saiba, as demais são interessantes e facilitarão bastante na resolução de problemas. Veja cada uma delas abaixo:

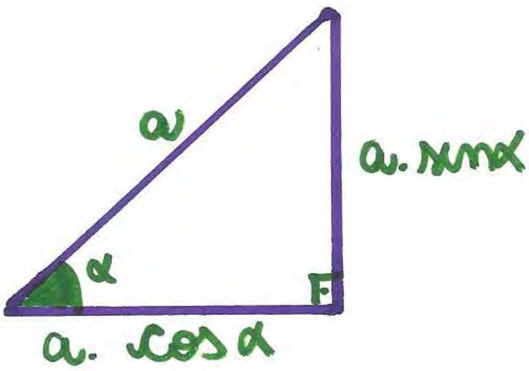
- ✓ 1ª **relação**: relação fundamental da trigonometria

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

- ✓ 2ª **relação:** a tangente pode ser calculada sabendo o seno e o cosseno

$$\tan\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha}$$

- ✓ 3ª **relação:** se a hipotenusa vale a, o cateto adjacente será a multiplicação de a pelo cosseno do ângulo alfa e o cateto oposto será a multiplicação de a pelo seno do ângulo alfa. Veja a figura:



$$a.sen\ \alpha \quad (\text{CO}\ a\ \alpha)$$
$$a.cos\ \alpha \quad (\text{CA}\ a\ \alpha)$$

- ✓ 4ª **relação**: ângulos complementares

Se $\alpha + \beta = 90^o$, então:

$sen\ \alpha = cos\ \beta$ e $tan\ \alpha = \dfrac{1}{tan\ \beta}$

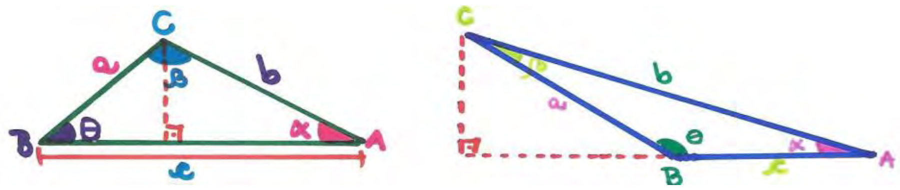
- ✓ 5ª **relação**: ângulo entre 0º e 45º

$$Se \ 0^o < \alpha < 45^o \dashrightarrow sen \ 2\alpha = 2.sen \ \alpha.cos \ \alpha$$

- ✓ **6ª relação**: ângulo entre 0º e 90º

$$Se \ 0^o < \alpha < 90^o \dashrightarrow sen \ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos \ \alpha}{2}}$$

Para finalizar essa parte em que trabalhamos exclusivamente com triângulos, vamos apresentar a Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos. Sabendo elas você consegue resolver qualquer problema de trigonometria. Veja os triângulos abaixo:



Veja cada uma das Leis separadamente.

LEI DOS COSSENOS

Utilizando o valor de dois lados do triângulo e o cosseno de um ângulo é possível calcular o valor do terceiro lado, que deve ser o cateto oposto a esse ângulo. Parece complicado de entender, né? Veja as equações abaixo e compare com as figuras dos triângulos que acabamos de ver.

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2.b.c.cos \ \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2.a.c.cos \ \theta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2.a.b.cos \ \beta \end{aligned}\right\} Lei \ dos \ Cossenos$$

Perceba que foram utilizadas várias relações para construí-la, como o Teorema de Pitágoras e as relações que conhecemos há pouco.

LEI DOS SENOS

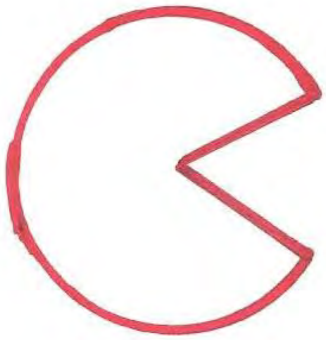
A Lei dos Senos relaciona o tamanho do lado do triângulo com o seno do ângulo correspondente a esse lado. Essa relação é constante para todos os lados e senos dos ângulos. Veja a Lei baseada nas figuras dos triângulos acima:

$$\left.\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} + \frac{c}{sen\ \beta}\right\}\ Lei\ dos\ Senos$$

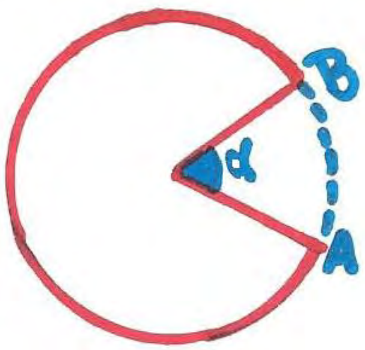
ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Agora que já estamos bem armados no quesito relações entre seno, cosseno e tangente para encontrar ângulos de triângulos, vamos expandir nosso conhecimento. Para isso, vamos analisar várias situações, agora trabalhando com ângulos formados por “pedaços” de círculos, que chamaremos de arcos. Veja a imagem abaixo:

Esse bolo nos auxiliará no estudo da Trigonometria daqui por diante. Perceba que o formato da superfície do bolo é circular. Se olhássemos ele de cima, veríamos o seguinte:



Perceba que o pedaço que já foi cortado, o espaço entre A e B, forma uma figura parecida com um triângulo, mas com um dos lados arredondado, que é chamado de arco. Além disso, note que o tamanho do pedaço é caracterizado por um ângulo formado entre os dois lados do arco, cujas extremidades chamaremos de A e de B. Veja a figura abaixo:

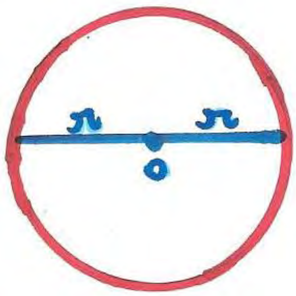


Nós já sabemos que 360° representa uma circunferência, certo? Isso significa, portanto, que cada grau vale 1/360 do comprimento da circunferência, assim chegamos aos 360° da circunferência. Ou seja, com algum cuidado e paciência, poderíamos dividir o bolo em 360 pedaços iguais e cada um deles teria um ângulo de 1°. O que você talvez ainda não saiba é que podemos dividir os graus, assim como dividimos horas. Parece estranho? No início até pode ser, mas é só mais uma das centenas de unidades de medida que você terá que enfrentar na vida. Então, 1° (um grau) pode ser dividido em 60 partes iguais, denominadas minutos (representadas por aspas simples ‘), e cada um desses minutos pode ser dividido em outras 60 partes iguais, denominadas segundos (representadas por aspas duplas “). Veja o esquema:

$$\begin{cases} 1^\circ \text{ (1 grau)} — 60' \text{ (60 minutos)} \\ 1' \text{ (1 minuto)} — 60'' \text{ (60 segundos)} \end{cases}$$

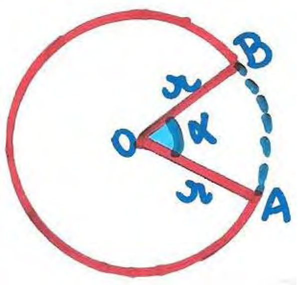
Outra unidade de medida de ângulos são os radianos (expressos por rad). Quando estamos tratando de ângulos em que podemos trabalhar com triângulos é bastante comum que utilizemos graus como unidade de medida, mas quando estamos tratando de arcos de circunferência é bastante comum que utilizamos radianos e é interessante que você se acostume com isso. Como as duas unidades expressam ângulos, podemos relacioná-las para saber como podemos transformar uma em outra. Para isso, vamos relembrar alguns conceitos sobre o comprimento de um círculo (ou circunferência). Veja a figura abaixo de uma circunferência com centro O e raio r:

Lembre que a divisão entre o comprimento da circunferência e duas vezes o seu raio (ou seu diâmetro, caso você prefira pensar assim) é uma constante, chamada π(Pi) e vale 3,1415...

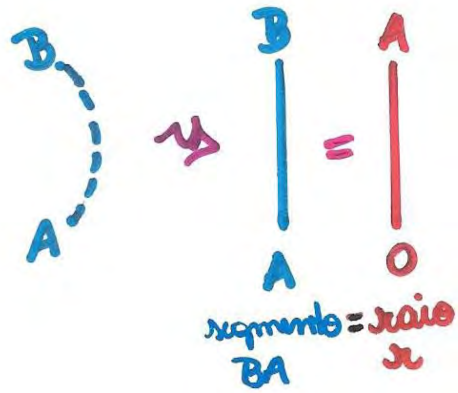


$$\frac{C}{2r} = \pi \quad \Rightarrow \quad C = 2r\pi$$

Agora que relembramos isso, veja a circunferência abaixo de raio r e com arco indicado por AB.



Supondo que é arco AB têm o mesmo comprimento do raio r dessa circunferência, dizemos que um radiano é a medida desse arco e que, portanto, está diretamente associado ao ângulo central do arco. Caso você tenha dificuldade de visualizar isso, imagine AB "esticado" e não arredondado. Veja abaixo:



Como os dois segmentos são iguais, sabemos que esse arco vale r. A partir dessa informação podemos fazer uma regra de três para saber quantos radianos há em uma circunferência completa, já que sabemos que o comprimento de uma circunferência é$2\pi r$. Então, a regra de três será construída da seguinte forma: se um radiano vale r (que é o comprimento de parte da circunferência, um arco), quanto radianos equivalem a uma circunferência completa, cujo comprimento é $2\pi r$?Veja a montagem dela abaixo. Perceba que o comprimento pode ser dado em unidades de medida como cm, m, etc.

Resolvendo essa regra de três ao fazer a multiplicação cruzada, teremos:

$$\begin{array}{ccc} 1 & — & r \\ x & — & 2\pi r \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 2\pi \cancel{r} = \cancel{r} x \\ 2\pi = x \end{array}$$

Então, uma circunferência completa possui 2πradianos (2πrad), que é outra forma de dizer que uma circunferência possui 360°. Portanto, podemos relacionar graus e radianos fazendo outra regra de três. Se 2πvalem 360°, quantos radianos correspondem a 90°?

radianos		graus
2π	—	360°
x	—	90°

$$x.360 = 2\pi.90$$

$$x = \frac{180\pi}{360}$$

$$x = \frac{1\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Então, 90° equivalem a $\pi/2$ rad.

Fazendo o mesmo para outros ângulos, como 180° e 270°:

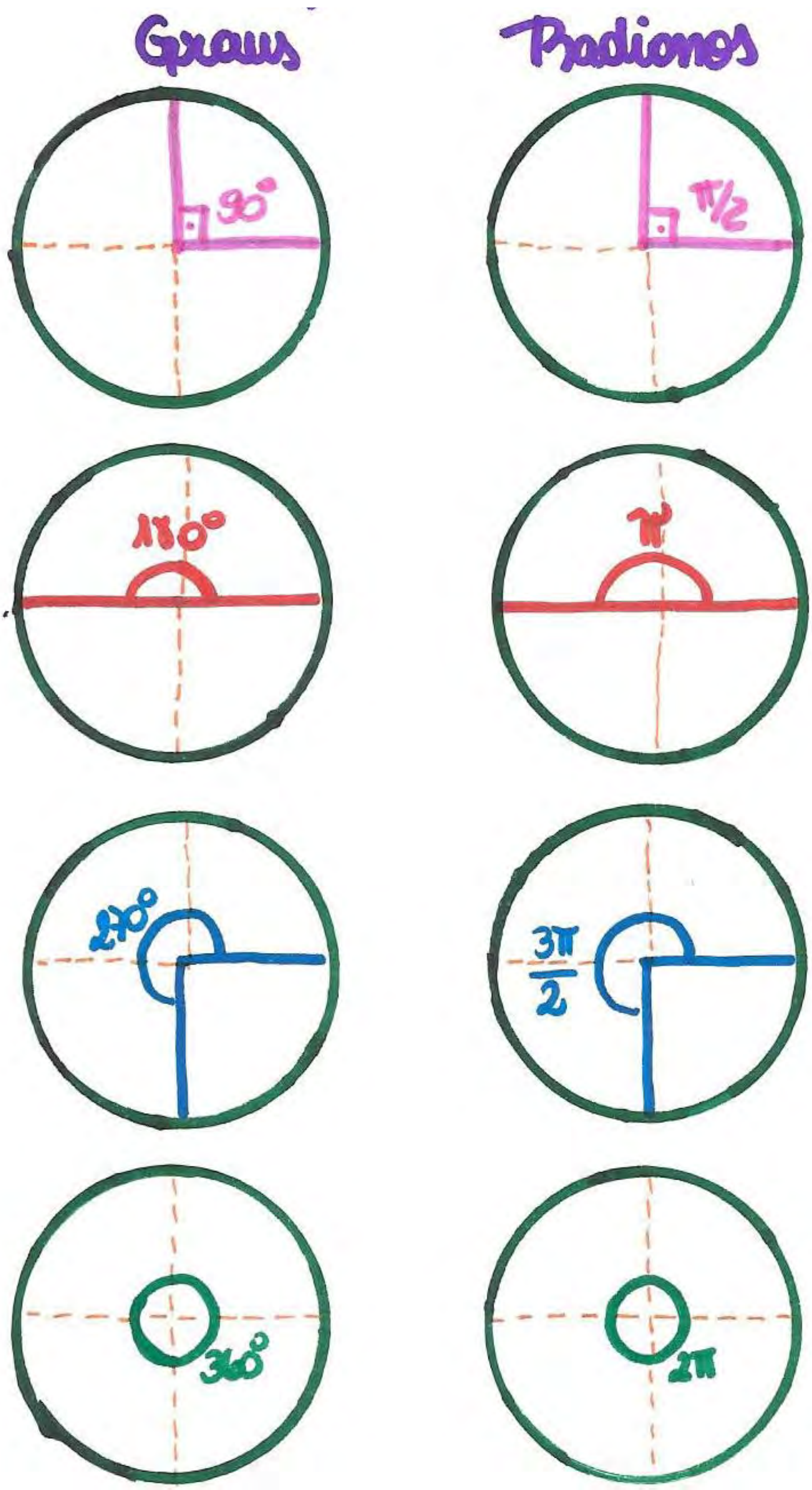
radianos — graus

$$2\pi \text{ --- } 360^\circ$$
$$x \text{ --- } 180^\circ$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot 360 = 2\pi \cdot 180$$
$$x = \frac{360\pi}{360}$$
$$x = \pi$$

radianos — graus

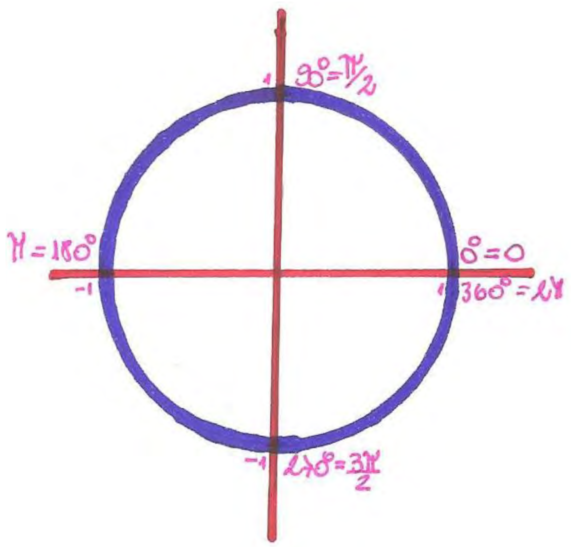
$$2\pi \text{ --- } 360^\circ$$
$$x \text{ --- } 270^\circ$$
$$\Downarrow$$
$$x \cdot 360 = 2\pi \cdot 270$$
$$x = \frac{540\pi}{360}$$
$$x = \frac{3\pi}{2}$$

Podemos traçar esses ângulos em circunferências para visualizarmos melhor o que eles representam, acompanhe:

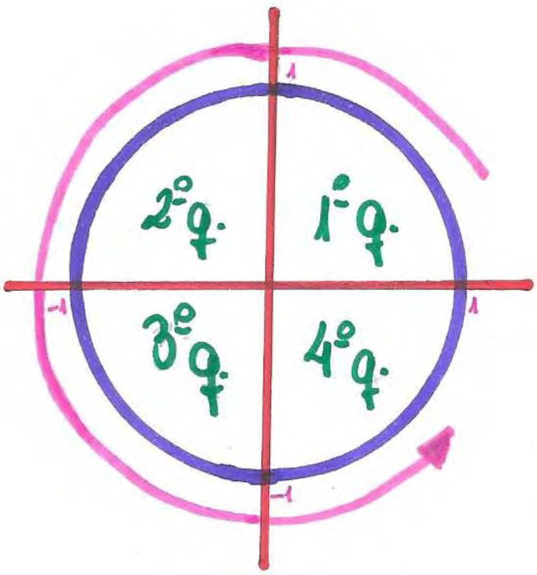

Graus
Radianos
90°
π/2
180°
π
270°
3π/2
360°
2π

Você pode fazer isso para todos os ângulos que vierem à sua cabeça, apenas atente para os ângulos acima de 360^{o} (2π) que começam a repetir. Por exemplo, o ângulo 375^{o} corresponde a um pouco mais do que uma volta completa e tem como semelhante o ângulo de 15^{o}, já que 375 - 360 = 15, ok? Então, às vezes não é necessário fazer contar enormes para encontrar o valor de um ângulo em outra unidade ou a posição dele no que chamamos de círculo trigonométrico.

Esse círculo é bastante parecido com o que vimos anteriormente, com a diferença crucial de ter um raio bem definido, que vale 1 (nesse caso, chamamos de raio unitário). O círculo trigonométrico também será nosso aliado no estudo da trigonometria. Nós podemos reescrever os ângulos que encontramos anteriormente no formato de círculo trigonométrico.



Perceba que o círculo está dividido em quatro partes, que denominamos quadrantes. Os quadrantes recebem nomes de acordo com a ordem crescente dos ângulos, ou seja, no sentido anti-horário. Veja:

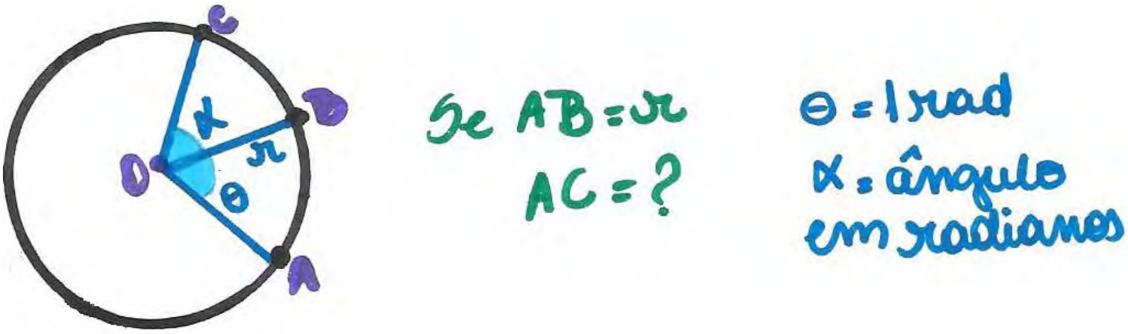


Os ângulos demonstrados explicitamente no círculo são bem comuns, mas existem outros ângulos denominados "notáveis". Sabendo eles é possível calcular qualquer outro ângulo (a partir de somas e de subtrações) e é por isso que nos livros eles vêm sempre numa tabela informando seus senos, cossenos e tangentes.

Ângulos Notáveis

Ângulos (α)	$\pi/6$ ou $30°$	$\pi/4$ ou $45°$	$\pi/3$ ou $60°$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Agora que já sabemos manipular radianos e identificá-los no círculo trigonométrico, podemos também calcular o valor de um arco. Antes arbitramos que o comprimento do arco valia o mesmo que o raio daquela circunferência, e por isso correspondia a um radiano, então o comprimento do arco e o ângulo estão interligados. Mas como saber o comprimento do arco quando ele não é exatamente o valor do raio? Basta fazermos uma regrinha de três novamente! A regra é montada da seguinte forma: lembrando que um radiano corresponde a um arco de comprimento igual ao raio, qual será o comprimento de um arco para um determinado ângulo α? Veja a figura para entender melhor:



A partir das informações que ela nos fornece, montamos a regra de três:

Fazendo a multiplicação cruzada teremos:

$$1.x = r.\alpha$$
$$x = r.\alpha$$

E assim encontramos uma equação em que, sabendo o raio e o ângulo que corresponde ao arco, conseguimos calcular o valor do comprimento do arco. Mas fique atento à unidade! Deduzimos essa equação a partir de ângulos dados em radianos, então, caso a unidade apresentada seja graus, você precisa realizar a conversão para radianos.

A partir dessas relações e com algumas outras informações (como o raio do bolo, por exemplo) você é capaz de calcular o arco e o ângulo da fatia de bolo que já foi cortada. Outra coisa que você pode fazer é somar ou subtrair os arcos (ou fatias de bolo). Imagine que você tem uma fatia de bolo de 75^o e você quer saber quanto valem o seno, o cosseno e a tangente do arco caracterizado por esse ângulo. Perceba que você pode cortar essa fatia, fazendo uma de 30^o e a outra de 45^o e portanto teremos os mesmos 75^o. Como 30^o e 45^o são ângulo notáveis, você sabe quanto das relações trigonométricas valem para cada um deles, mas atenção, não basta somar os senos de 30^o e de 45^o para obter o valor do seno de 75^o, é necessário aplicar algumas outras relações para podermos encontrar esse valor. Sempre que somamos ou subtraímos arcos precisamos utilizar equações que fornecerão os valores corretos de seno, cosseno e tangente. Veja quais são:

	Soma	Diferença
Seno	$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\,cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$	$sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$
Cosseno	$cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$	$cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$
Tangente	$tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\,\alpha + tan\,\beta}{1 - tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$ com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha \cdot tan\,\beta}$ com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Então, no caso da nossa fatia de bolo de 75^o aplicaremos:

$$\alpha + \beta = 30^o + 45^o = 75^o$$

No caso do seno:

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha.cos\ \beta + sen\ \beta.cos\ \alpha$$

$$sen\ (30^o + 45^o) = sen\ 30^o.cos\ 45^o + sen\ 45^o.cos\ 30^o$$

$$sen\ (30^o + 45^o) = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ (30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}\ \sqrt{3}}{4}$$

$$sen\ (30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$sen\ (30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$sen\ (30^o + 45^o) = sen\ (75^o) = 0{,}9659$$

No caso do cosseno:

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha.cos\ \beta - sen\ \alpha.sen\ \beta$$

$$cos\ (30^o + 45^o) = cos\ 30^o.cos\ 45^o - sen\ 30^o.sen\ 45^o$$

$$cos\ (30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\ (30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$cos\ (30^o + 45^o) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$cos\ (30^o + 45^o) = cos\ (75^o)\ 0{,}2588$$

No caso da tangente: Perceba que podemos realizar o cálculo já que o ângulo estudado é diferente de 90^o e de seus múltiplos. Então, aplicando a equação que vimos há pouco:

$$tan\ (\alpha + \beta) = \frac{tan\ \alpha + tan\ \beta}{1 - tan\ \alpha.tan\ \beta}$$

$$tan\ (30^o+45^o) = \frac{tan\ 30^o + tan\ 45^o}{1 - tan\ 30^o.tan\ 45^o}$$

$$tan\ (30^o+45^o) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.1}$$

$$tan\ (30^o+45^o) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$tan\ (30^o+45^o) = tan\ (75^o) = 3{,}73$$

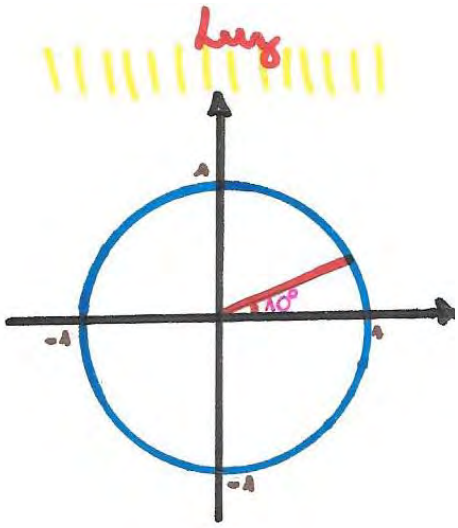
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Os índices indicados por seno, cosseno e tangente também podem ser descritos como funções quando associados a uma equação trigonométrica. Ao contrário do que normalmente é feito, vamos abordar antes as funções para então entendermos como resolver equações trigonométricas da forma mais simples possível.

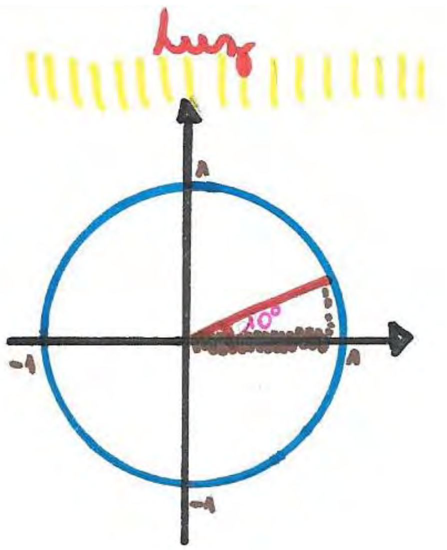
Funções trigonométricas descrevem movimentos periódicos, por exemplo, o movimento harmônico simples de um pêndulo ou de um sistema massa-mola que você deve ter estudado na disciplina de Física. Vamos estudar as funções a partir da projeção delas nos eixos x e y utilizando o círculo trigonométrico.

FUNÇÃO COSSENO

Vamos analisar a função cosseno mais simples, $f(\theta) = \cos\theta$, a partir do círculo trigonométrico. Lembre que sempre que estudamos uma função, arbitramos valores para θ. No caso de funções trigonométricas, para não precisarmos sempre calcular o arco da função, vamos utilizar o conceito de projeção. Para isso, vamos imaginar que o círculo trigonométrico está sendo sob uma lâmpada, que, dependendo de onde estiver localizada, fará uma determinada sombra. No caso do cosseno, a iluminação será de cima para baixo. Veja a figura que ilustra essa situação para um ângulo de 10^{o}:



Perceba que se a luz está incidindo verticalmente sobre o ângulo, teremos uma projeção (ou sombra) desse ângulo no eixo horizontal. Acompanhe:

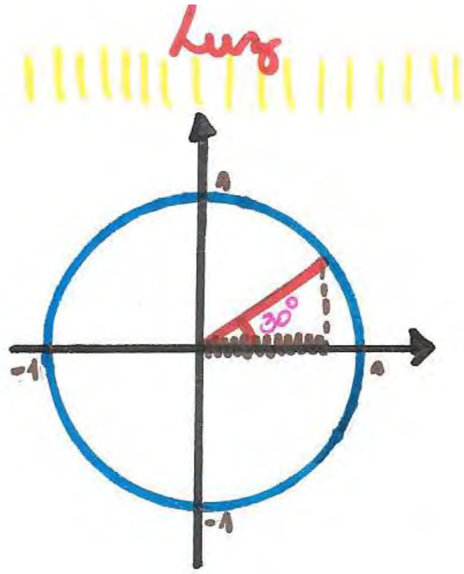


Essa projeção nos fornece o valor do cosseno do ângulo, no caso, de 10°, que é 0,98.

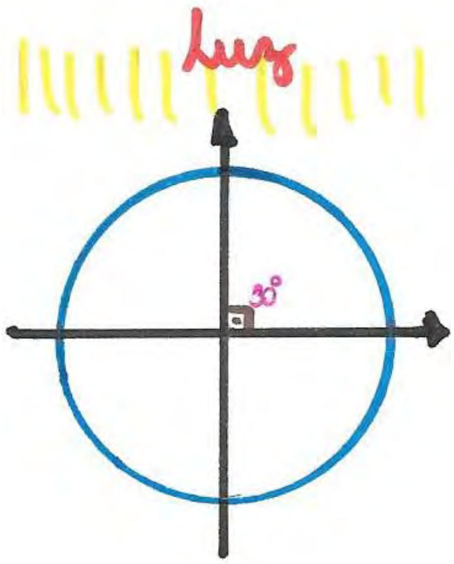
Uma forma interessante de lembrar que a projeção do cosseno é no eixo x é pensando que cosseno se parece com "com-sono" e quando se está com sono, se deita (o eixo x está na horizontal, ou seja, "deitado").

Vamos aplicar o conceito de projeção para outros valores de θ,como 30°, 90° e 180°. Acompanhe abaixo.

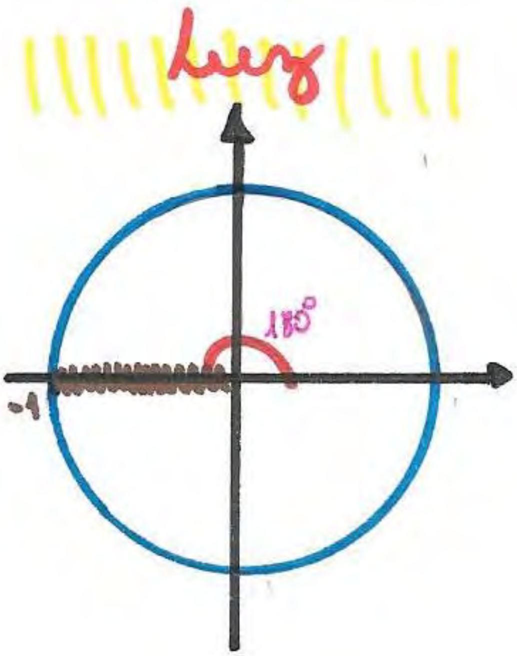
Projeção de 30°:



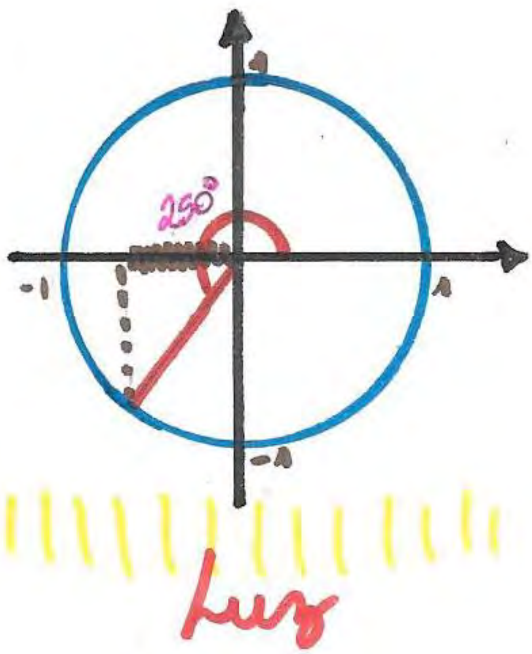
Projeção de 90°:



Projeção de 180°:



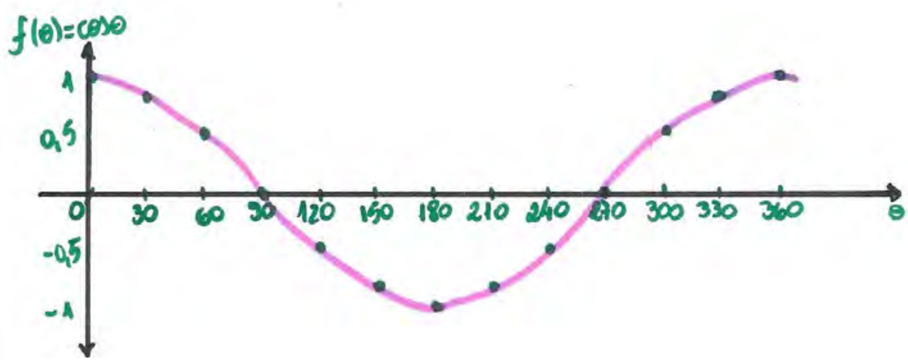
Note que o ângulo de 90° está exatamente em cima do eixo vertical, bem no sentido da luz que incide sobre ele. Por isso, o valor do cosseno de 90° é zero. Perceba também que o valor do cosseno foi diminuindo ao longo dos ângulos 0 a 90°, chegando no zero e ficando abaixo de zero depois de 90°, até chegar no -1 em 180°. Lembre que você pode arbitrar qualquer ângulo e analisar qual é a projeção dele no eixo horizontal, mas atente para mudar o sentido da luz quando estiver estudando ângulos nos 3° e 4° quadrantes. Veja, por exemplo, o caso do ângulo 250°:



Agora que já entendemos como a função cosseno funciona, podemos traçar seu gráfico. Para isso, lembre que sempre construímos uma tabela com os valores para os quais queremos saber o valor da função. Então, veja a tabela que construímos para ângulos a cada 30°:

θ	f(θ)=cos(θ)	
0°	f(0°)=cos 0°	1
30°	f(30°)=cos30°	0,86
60°	f(60°)=cos60°	0,5
90°	f(90°)=cos90°	0
120°	f(120°)=cos120°	-0,5
150°	f(150°)=cos150°	-0,86
180°	f(180°)=cos180°	-1
210°	f(210°)=cos210°	-0,86
240°	f(240°)=cos240°	-0,5
270°	f(270°)=cos270°	0
300°	f(300°)=cos300°	0,5
330°	f(330°)=cos330°	0,86
360°	f(360°)=cos360°	1

E a partir dela podemos traçar finalmente o nosso gráfico:

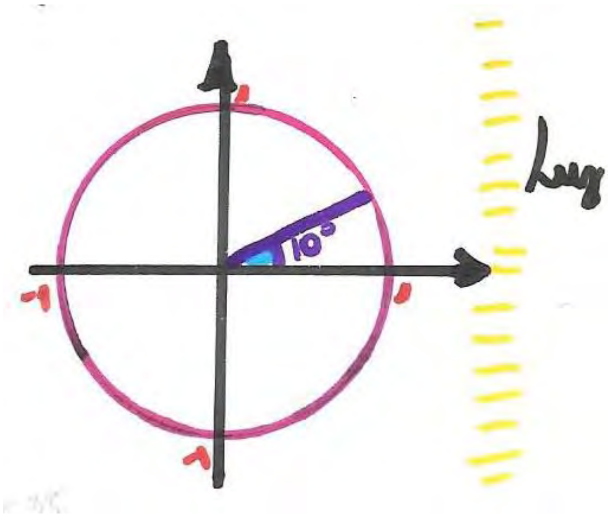


Perceba que caso expandíssemos nossa tabela para valores maiores de 360° o gráfico voltaria a decrescer até chegar em -1 e em seguida voltaria a crescer, até chegar em 1 (caso você duvide, faça o teste). É por isso que a chamamos de função periódica, porque se repete a cada período de 360^o (ou 2π). Note ainda que o cosseno de um ângulo nunca será maior que 1 ou menor que -1.

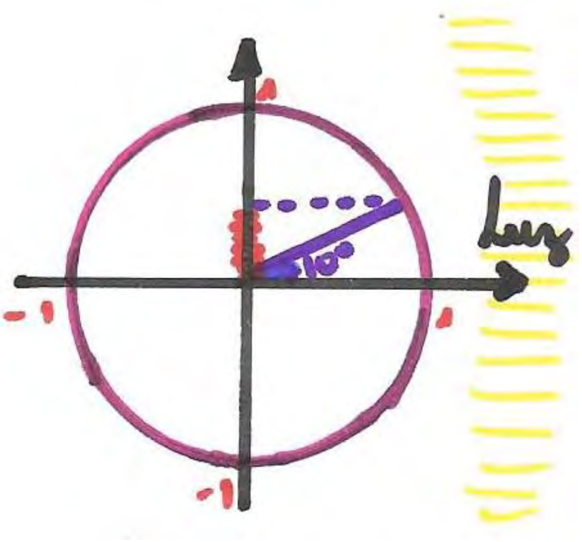
A função que analisamos aqui foi a função cosseno "pura", sem multiplicadores que aumentam a amplitude da função ou somas que promovem diferenças de fase. Você provavelmente vai se deparar com funções trigonométricas descritas por outras equações, mas a essência é a mesma.

FUNÇÃO SENO

vamos realizar o mesmo procedimento para analisar a função seno, $f(\theta) = \text{sen}\,\theta$. No caso anterior, iluminamos o círculo trigonométrico de cima para baixo. Nesse caso, a iluminação se dará lateralmente, da direita para a esquerda no caso dos quadrantes 1 e 4 e da esquerda para a direita no caso dos quadrantes 2 e 3. Veja para o caso de 10^o:

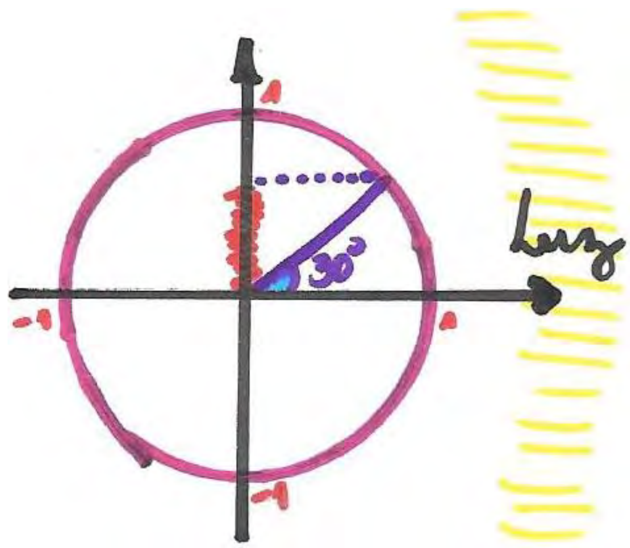


Então, dessa vez, a projeção (ou sombra) será no eixo vertical e então o valor que ela atinge indica o seno do ângulo que faz a sombra. Veja:

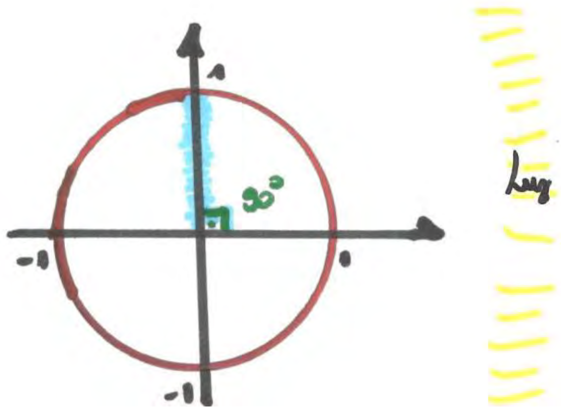


Vamos aplicar o mesmo procedimento para os mesmos ângulos que analisamos anteriormente, 30°, 90°, 180° e 250°. Acompanhe abaixo.

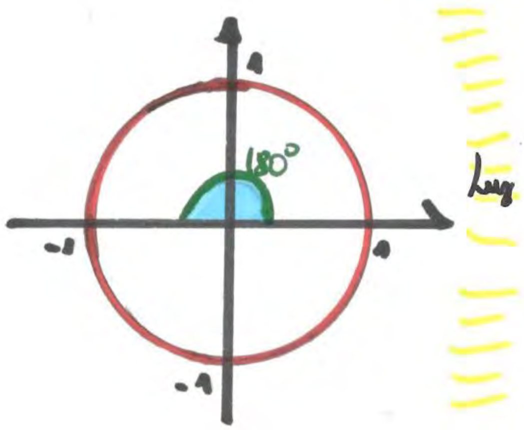
Para 30°:



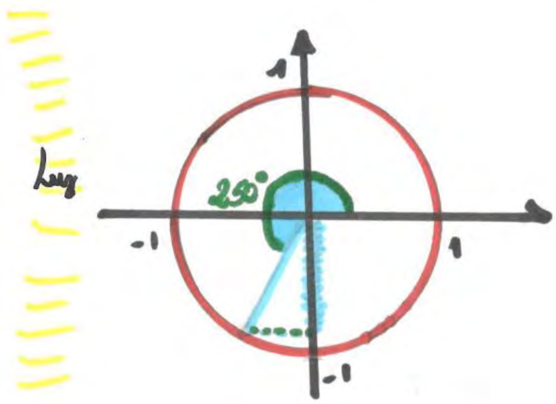
Para 90°:



Para 180°:



Para 250°:

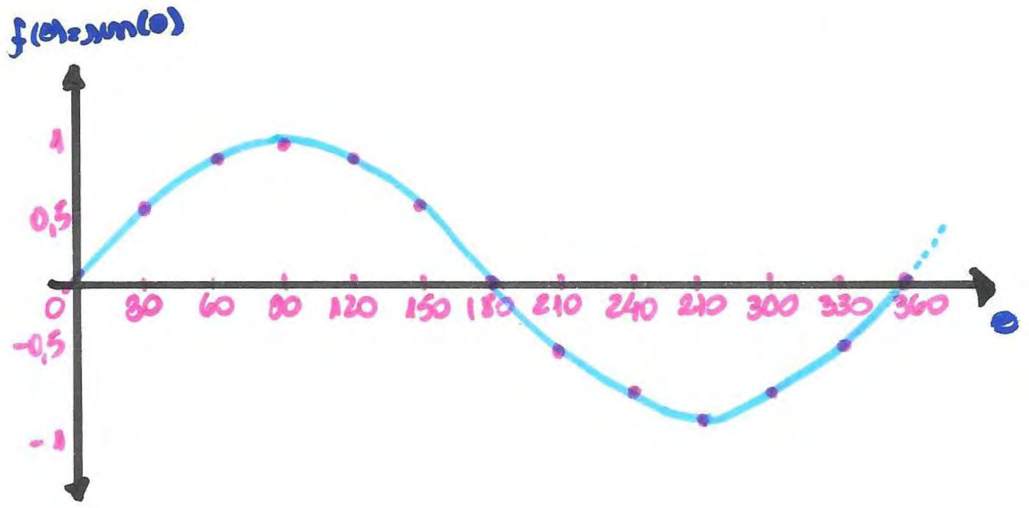


Perceba que o valor do seno cresce a partir de 0° chegando ao valor máximo, 1, em 90°. A partir de 90° há decréscimo no valor do seno, chegando a zero em 180°, já que esse ângulo está exatamente sobre o eixo horizontal, mesmo sentido da luz que permite a projeção no eixo vertical. Em 250° a luz é mudada de lado, para que seja possível observar a projeção desse ângulo no eixo vertical. Perceba que antes, como a projeção era no eixo x, tínhamos que o valor do cosseno de 90° era zero. Com a projeção no eixo y, o valor do seno de 90° é 1.

Agora, sabendo que o seno é o projeção do ângulo no eixo vertical, podemos construir uma tabela para analisar a função seno. Acompanhe o valor da função a cada 30°:

θ	$f(\theta) = \text{sen}(\theta)$	
0°	$f(0°) = \text{sen}\,0°$	0
30°	$f(30°) = \text{sen}\,30°$	0,5
60°	$f(60°) = \text{sen}\,60°$	0,86
90°	$f(90°) = \text{sen}\,90°$	1
120°	$f(120°) = \text{sen}\,120°$	0,86
150°	$f(150°) = \text{sen}\,150°$	0,5
180°	$f(180°) = \text{sen}\,180°$	0
210°	$f(210°) = \text{sen}\,210°$	-0,5
240°	$f(240°) = \text{sen}\,240°$	-0,86
270°	$f(270°) = \text{sen}\,270°$	-1
300°	$f(300°) = \text{sen}\,300°$	-0,86
330°	$f(330°) = \text{sen}\,330°$	-0,5
360°	$f(360°) = \text{sen}\,360°$	0

De posse desses valores, podemos construir o gráfico da função seno:



Perceba que assim como a função cosseno, a função seno é periódica e então, se expandíssemos nossa tabela para valores maiores do que 360^o ela voltaria a se repetir. Por isso, sabemos que o período dessa função é também de 360^o (ou 2π). Note ainda que o valor do seno nunca será maior do que 1 ou menor do que -1.

Assim como na função anterior, você poderá se deparar com funções com multiplicadores que aumentam ou diminuem a amplitude da função ou ainda com somas ou subtrações que mudam a fase (deslocamento) dela.

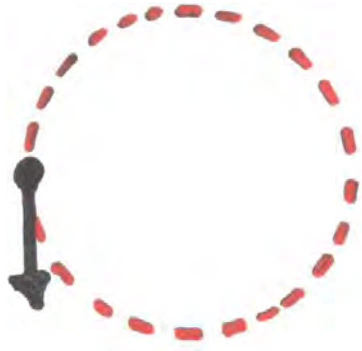
FUNÇÃO TANGENTE

O estudo dessa função ($f(\theta) = tg\theta$) não é feito baseado em “luzes”. Primeiramente, vamos lembrar uma expressão utilizada quando alguém, por exemplo, não quer falar sobre determinado assunto e acaba mudando o rumo da conversa. Nesses casos é bastante comum que seja comentado que essa pessoa “saiu pela tangente”, já ouviu isso? Essa expressão é utilizada baseada exatamente no conceito de tangente. Vamos imaginar que você está girando em torno de sua cabeça uma corda com uma bolinha na ponta. O movimento que você está fazendo se parece com o que um peão faz ao tentar laçar uma vaca. Veja a figura:

Se olharmos de cima, o movimento que a bolinha está fazendo é circular, como o do desenho abaixo:

Agora imagine que você cansou de girar essa corda e ela acabou escapando da sua mão. O que vai acontecer com bolinha e a corda? Provavelmente você já passou por alguma situação parecida e sabe que em vez de a bolinha continuar girando, ela vai sair pela tangente. Ou seja, a partir do momento que você soltar a corda, a bolinha vai sair retilineamente da trajetória em que estava. Veja a figura abaixo:

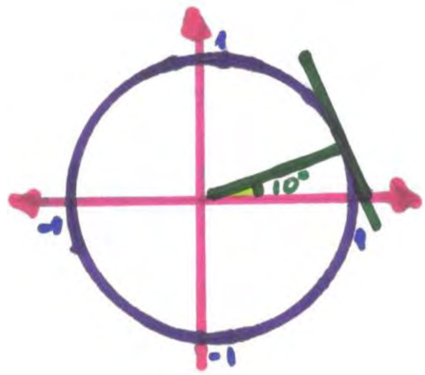
Caso você tivesse soltado em outro ponto, a saída pela tangente seria:



Ou ainda:

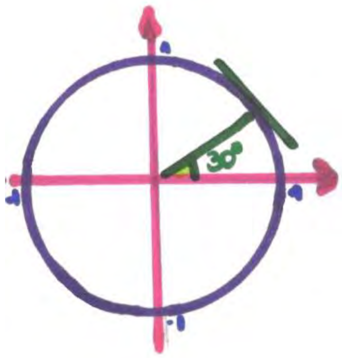
Tudo vai depender do ponto em que você soltar, mas o movimento será o mesmo.

Agora vamos ver como isso aconteceria no círculo trigonométrico para o ângulo de 10^o:

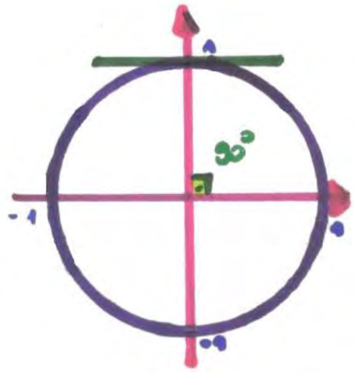


Vamos analisar como seria para os outros ângulos anteriormente analisados: 30^o, 90^o, 180^o e 260^o, veja as imagens abaixo.

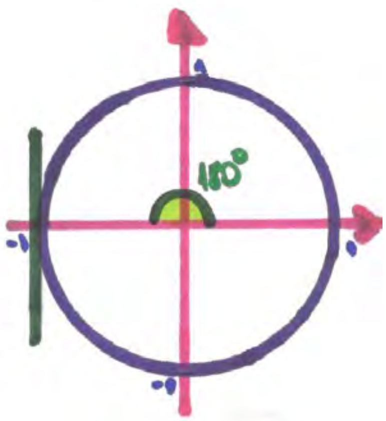
Para 30^o:



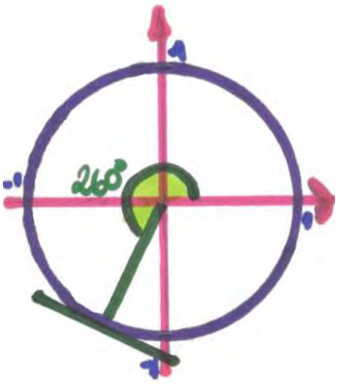
Para 90°:



Para 180°:



Para 250°:



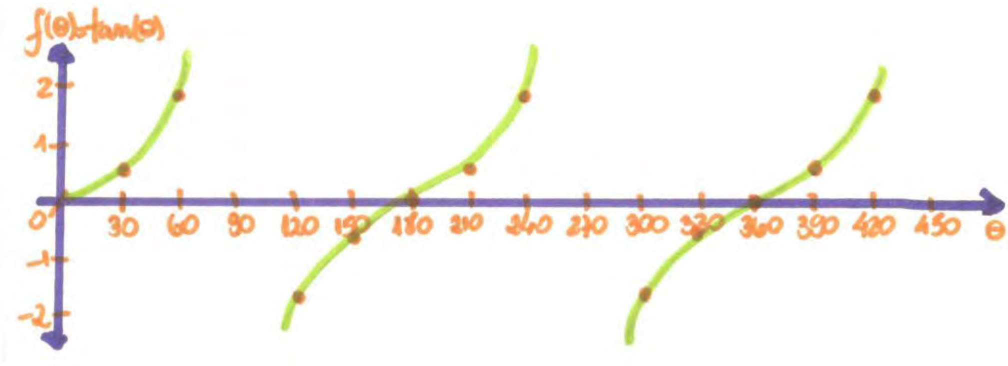
O valor da tangente é dado pela inclinação da reta tangente ao ângulo. Lembre que a tangente pode ser calculada fazendo:

$$tan\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta}$$

Então, lembre que o cossenos, que está no denominador da equação, não pode ser zero. Isso significa que ângulos como 90°, 270°, 450° e assim por diante, não possuirão tangente, já que seus cossenos valem zero. Por causa disso, o gráfico da função tangente acaba sendo bem interessante. Vamos fazer uma tabela com os ângulos a cada 30° para podermos analisar melhor essa função:

θ	$f(\theta) = \tan\theta$	
$0°$	$f(0°) = \tan 0°$	0
$30°$	$f(30°) = \tan 30°$	$0,57$
$60°$	$f(60°) = \tan 60°$	$1,73$
$90°$	$f(90°) = \tan 90°$	$\nexists$
$120°$	$f(120°) = \tan 120°$	$-1,73$
$150°$	$f(150°) = \tan 150°$	$-0,57$
$180°$	$f(180°) = \tan 180°$	0
$210°$	$f(210°) = \tan 210°$	$0,57$
$240°$	$f(240°) = \tan 240°$	$1,73$
$270°$	$f(270°) = \tan 270°$	$\nexists$
$300°$	$f(300°) = \tan 300°$	$-1,73$
$330°$	$f(330°) = \tan 330°$	$-0,57$
$360°$	$f(360°) = \tan 360°$	0
$390°$	$f(390°) = \tan 390°$	$0,57$
$420°$	$f(420°) = \tan 420°$	$1,73$
$450°$	$f(450°) = \tan 450°$	$\nexists$

Veja que expandimos a tabela, indo até o ângulo de $450°$, para que você perceba a diferença entre a função tangente e as anteriores. Veja como fica esse gráfico:



Perceba que é uma função descontínua, já que, por exemplo, para os ângulos de 90º, 270º e 450º (e outros, somando 180º), não há tangente. Além disso, veja que cada "pedaço" da função tende ao mais ou ao menos infinito. Isso fica mais claro se você calcular a tangente de 89º, de 89,9º, de 89,99º, de 89,999º e assim por diante. Você verá que quanto maior o valor, maior será a tangente, desde que não chegue a 90º. O mesmo vale para as outras situações, ok?

EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Sabendo as projeções das funções seno e cosseno, como calcular a tangente e localizar ângulos no círculo trigonométrico estamos prontos para iniciar o estudo das equações trigonométricas. Esse assunto está sendo abordado por último não porque é difícil, mas porque agora temos toda a bagagem necessária para resolver qualquer tipo de equação trigonométrica!

Primeiramente, é importante que você saiba identificar uma dessas equações. Veja o exemplos abaixo:

$$a)\ 2.\cos x = 1 \quad \text{e} \quad b)\ x^2 + x - \text{sen } 45^o = 3$$

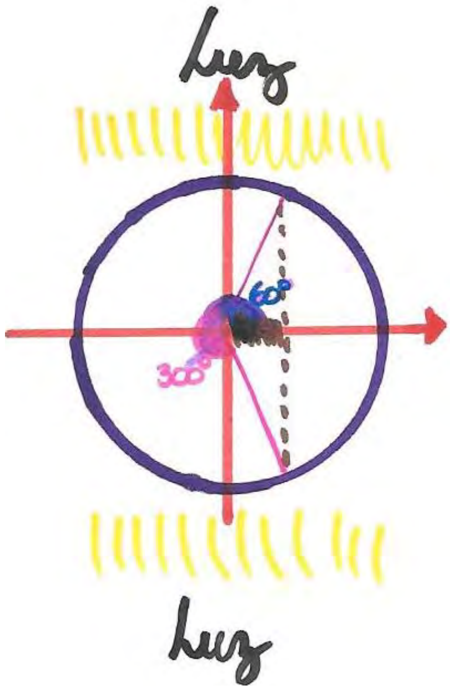
Perceba que a diferença entre as equações está no lugar que a variável ocupa. Na equação a a variável x se encontra "dentro" do cosseno e é isso que caracteriza uma equação trigonométrica. Já a equação b é apenas mais uma equação de segundo grau, que envolve o cálculo do seno de 45º, nada de diferente do que você já fez centenas de vezes. Então, sempre que você se deparar com equações que envolvem seno, cosseno ou tangente, atente para o lugar da variável.

Agora que já sabemos que a primeira equação é trigonométrica, vamos ver sua resolução. Equações trigonométricas dessa forma são mais fáceis de resolver a partir da análise do círculo trigonométrico. O primeiro passo é isolar o cosseno com sua variável:

$$2.\cos\ x = 1$$

$$\cos\ x = \frac{1}{2}$$

Perceba que ½ é o valor da projeção, então temos que fazer o caminho contrário ao anterior. Vamos partir da projeção para encontrar os ângulos correspondentes a ela:



Lembre que a luz que provoca essa projeção incide sobre o círculo de cima para baixo, no caso dos quadrantes 1 e 2, ou de baixo para cima, no caso dos quadrantes 3 e 4. Por isso, consultando a tabela da função cosseno, temos, de 0^o a 360^o, ou de 0 a 2πrad, dois ângulos cujo cosseno é 0,5 (ou 1/2): $\pi/3(60^o)$ e $5\pi/3(300^o)$.

Note que o problema não restringiu que os ângulos estivessem entre 0 e 2πrad. Por isso, todos os ângulos semelhantes a $\pi/3$e a $5\pi/3$ têm como cosseno o valor de ½ e isso deve ser dito na resposta. A diferença entre esses ângulos é de:

$$300^o - 60^o = 240^o \ ou \ \frac{4\pi}{3}$$

Então, esses ângulos somados a2πrad (360^o) quantas vezes você puder imaginar, fornecerá um ângulo cujo cosseno é ½. Para expressar essa informação, nós utilizamos "+ 2πk" ao final da resposta, em que k é sempre um número inteiro e positivo. Veja como fica o conjunto solução da equação acima:

$$S = \left\{x \ \epsilon \ \Re \mid x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \ ou \ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right\}$$

Perceba que se arbitrarmos k = 1 e aplicarmos em $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, obteremos:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi(1)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{3}$$

Calculando o cosseno de $7\pi/3$obteremos exatamente os 0,5 que esperávamos. O mesmo deve acontecer arbitrando qualquer outro número inteiro positivo.

Lembre que para resolver equações trigonométricas você pode utilizar todas as relações trigonométricas que já estudamos. São muitas informações interligadas, então, antes de sair tentando resolver equações que parecem mirabolantes, tente fazer essas relações.

EXERCÍCIOS

(UFRGS) Se o ponteiro menos de um relógio percorre um arco de pi/12 rad, o ponteiro maior percorre um arco de:

a) (pi/6)rad

b) (pi/4)rad

c) (pi/3)rad

d) (pi/2)rad

e) pi rad

Alternativa correta: E

(PUC-PR) Um relógio foi acertado exatamente às 6h. Que horas o relógio está marcando após o ponteiro menor (das horas) ter percorrido em ângulo de 72^{o}?

a) 8h e 12min

b) 7h e 28min

c) 6h e 50 min

d) 8h e 24 min

e) 8h e 36 min

Alternativa correta: D

Sabendo que sen 30° = ½, podemos afirmar que sen 150° é igual a:

a) 1/2

b) -1/2

c) √3/2

d) -√3/2

e) √2/2

Alternativa correta: A

(UFRGS) Considere as afirmações a seguir:

I. tan 92° = –tan 88°

II. tan 178° = tan 88°

III. tan 268° = tan 88°

IV. tan 272° = –tan 88°

Quais estão corretas?

a) I, III

b) III, IV

c) I, II, IV

d) I, III, IV

e) II, III, IV

Alternativa correta: C

(Faap-SP) sabe-se que senx = -3/5 e x é um arco do 4º quadrante. Então é verdade que:

a) tg x=-3/4

b) tg x=1/2

c) tg x= -4/5

d) tg x=3/4

e) tg x=4/5

Alternativa correta: A

Considere o triângulo XOZ, retângulo em X, onde a medida do cateto XO é 1 m. Acoplado a este triângulo construímos outro triângulo OZW, retângulo em Z, de tal modo que o seu cateto OZ é a hipotenusa do triângulo XOZ. Observe que a hipotenusa do triângulo OZW é exterior ao triângulo XOZ. Se nestes triângulos os ângulos ZÔX e ZÔW são congruentes com medida y, então a medida, em metro, da hipotenusa OW é

a) 1/cos2(y)

b) 1/cos(y)

c) $\cos(2y)$

d) $tg(y)+1$

e) $1/(\cos(y)+1)$

Alternativa correta: A

Sabendo que sen(34°) = 0,56 e cos(34°) = 0,83, o cosseno de 68° é aproximadamente:

a) 0,37

b) 0,47

c) 0,22

d) 0,65

e) 0,3

Alternativa correta: A

(Cesgranrio) Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira eleva-se verticalmente de:

a) 6.31/2m

b) 12m

c) 13,6m

d) 9.31/2m

e) 18m

Alternativa correta: E

(ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa o farol L e mede o ângulo LÂC = 30°. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo LBC = 75°. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

a) $2\sqrt{2}$

b) √3

c) 2√3

d) 3√2

e) 4√2

Alternativa correta: A

(Fuvest) O menor valor de 1/ (3-cos x), com x real, é:

a) 1/6

b) 1/4

c) 1/2

d) 1

e) 3

Alternativa correta: B

(ITA) Determine os valores de a, 0<a<pi e a diferente de pi/2, para os quais a função f: R->R dada por f(x) = 4x2- 4x-tg^2 assume seu valor mínimo igual a -4.

Num campo de ténis, a distância entre a rede central e a linha de fundo é de 23,77m. A altura da rede é 1,07m. Qual é o ângulo entre o chão e o topo a rede, na linha lateral, a partir da linha de fundo? (arctan 0,045= 2,58^o)

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. São Paulo: FTD, 2000. 670 p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

meSalva!