meSalva!

PARTE III

MATEMÁTICA

PARTE III

MATEMÁTICA

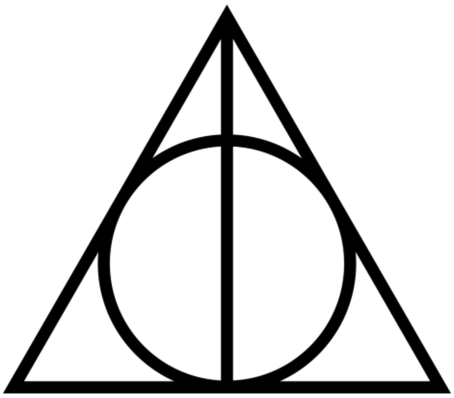
01

GEOMETRIA PLANA III
FIGURAS COMPOSTAS

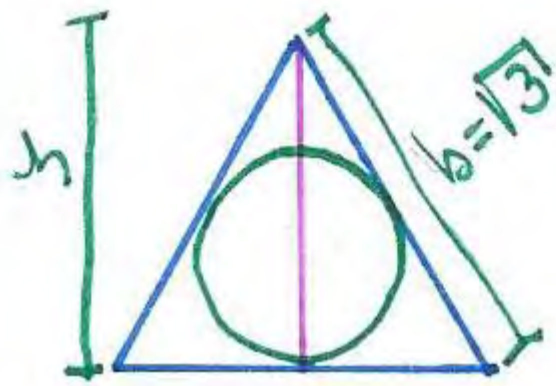
meSalva!

GEOMETRIA PLANA III - FIGURAS COMPOSTAS

Simpatizantes da série Harry Potter provavelmente reconheceram facilmente o símbolo das relíquias da morte ilustrado abaixo. Quem não sabe do que se trata enxergou apenas um círculo dentro de um triângulo cortado por uma reta bem ao centro.



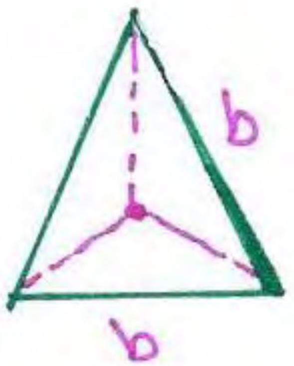
O que talvez seja algo alheio ao conhecimento de ambos os grupos é que existe um ramo da Matemática especializado em resolver problemas envolvendo relações entre formas geométricas, como polígonos regulares e circunferências. Se assumirmos que no símbolo das relíquias da morte temos um círculo inscrito em um triângulo equilátero de lado $\sqrt{3}$, como podemos saber qual é o raio do círculo?



Essa pergunta é facilmente respondida se soubermos relacionar as formas geométricas. Vamos estudar com detalhes essas relações a seguir, iniciando pelos polígonos regulares, que já abordamos na apostila de Geometria Plana I.

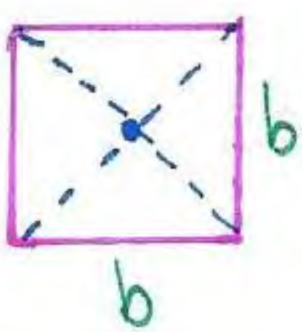
Polígonos regulares: São formas geométricas que possuem lados iguais e ângulos internos e externos iguais. Quando estudamos as áreas das formas geométricas vimos uma dessas formas mais especificamente, o hexágono, e expandimos esse polígono para outros, com vários lados, até chegarmos em um círculo. Vamos estudar quais são os mais usados e como é possível calcular suas áreas. Veja nas figuras abaixo que os nomes dos polígonos indicam o número de lados da forma geométrica.

Triângulo equilátero: Já sabemos que o triângulo equilátero tem todos os lados iguais e todos os ângulos internos e externos iguais e, apesar de não ser comum utilizarmos essa nomenclatura, ele também é um polígono regular. Relembre abaixo a forma e a equação para encontrar a área de triângulos desse tipo:



$$A_{triângulo} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

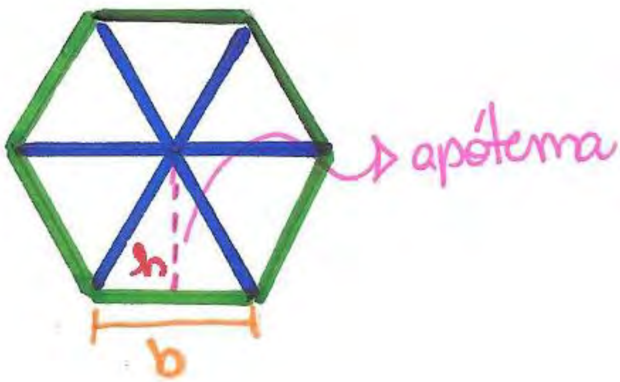
Quadrado: É caracterizado por ter quatro lados idênticos, todos formando ângulos de 90° entre si. A forma já é uma velha conhecida sua e a fórmula da



$$A_{quadrado} = b^2$$

área é bem simples, base x altura. Veja abaixo:

Hexágono: Essa forma geométrica possui 6 lados iguais e ângulos internos e externos idênticos. Perceba que podemos dividir o hexágono em 6 triângulos equiláteros, conforme é feito na figura abaixo. Isso significa que, para calcular a área do hexágono, podemos multiplicar a área do triângulo equilátero por 6, que é o número de triângulos que o compõem, conforme mostra a figura abaixo. Note que a altura do triângulo é chamada de apótema do hexágono e que o lado, que é igual à base (já que temos um triângulo equilátero), é chamado de raio. Perceba que o raio é maior do que o apótema. Veja a equação que fornece a área de um hexágono a partir da área do triângulo equilátero:



$$A_{hexágono} = 6.\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

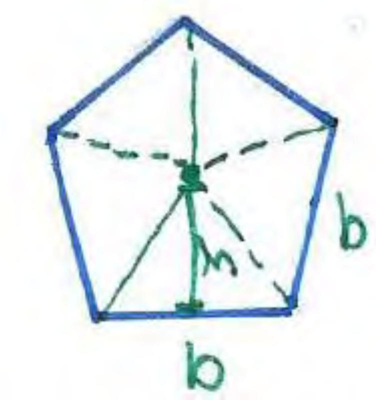
$$A_{hexágono} = 3.\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

Também vimos em Geometria Plana I que podemos encontrar a área de polígonos regulares a partir do perímetro da forma estudada e o apótema:

$$A_{\substack{polígono\\regular}} = n.\left(\frac{P.h}{2}\right)$$

Lembre que *h* é o apótema (em alguns livros ele é também chamado de a), P é o perímetro e n é o número de lados do polígono regular.

Pentágono: Essa forma possui 5 lados iguais (e você já sabe que sempre temos ângulos internos e externos iguais em polígonos regulares). Para calcular a área você utilizará a fórmula anterior, substituindo os valores do perímetro, do apótema e o número de lados.

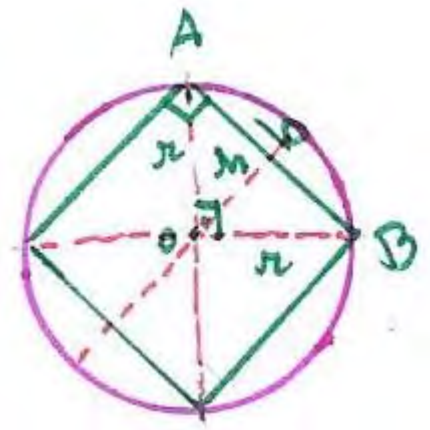


Octógono: Esse provavelmente você conhece dos torneios de artes marciais. O local onde a luta acontece tem o formato de um octógono, ou seja, tem 8 lados iguais. Veja um deles abaixo:

POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Agora que já estudamos os principais polígonos regulares, vamos relacionar suas medidas de apótema, lado e raio. Vamos iniciar analisando polígonos regulares inscritos na circunferência, ou seja, eles estarão dentro da circunferência. Veja as figuras que ilustram essas situações.

QUADRADO INSCRITO NA CIRCUNFERÊNCIA



Do triângulo formado pelos vértices AOB, aplicando Pitágoras, chegaremos a:

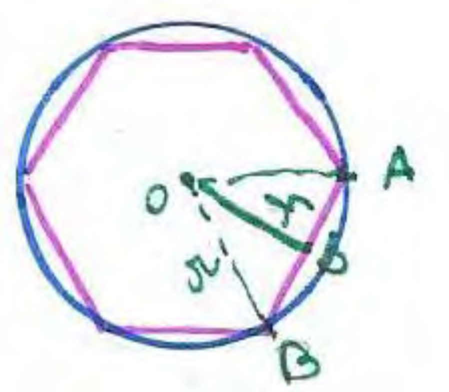
$$b^2 = r^2 + r^2$$
$$b^2 = 2r^2$$
$$b = r\sqrt{2}$$

Outra relação que enxergamos facilmente é que dois apótemas formam um lado (como é um quadrado, lembre-se que todos os lados são iguais). Por isso podemos reescrever da seguinte forma, substituindo o valor do lado por aquele que encontramos há pouco:

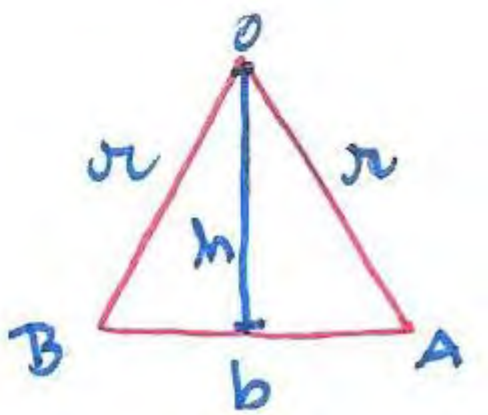
$$b = h + h$$
$$b = 2h$$
$$h = \frac{b}{2} \qquad como \ b = r\sqrt{2}$$
$$h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

E agora sabemos qual é a relação entre o apótema e o raio quando temos um quadrado inscrito.

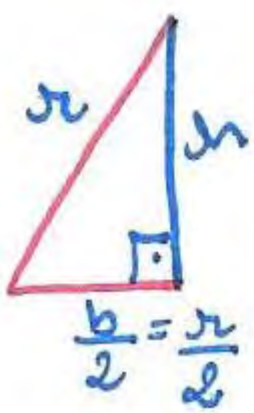
HEXÁGONO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA



Lembre-se que o hexágono é composto por triângulos equiláteros. Além disso, podemos perceber pela figura que o lado desses triângulos é igual ao raio da circunferência. Veja abaixo um desses triângulos separadamente:



Podemos ainda analisar esse triângulo pela metade, fazendo com que ele se torne um triângulo retângulo. Veja:



A partir disso é possível aplicar Pitágoras novamente e obter:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

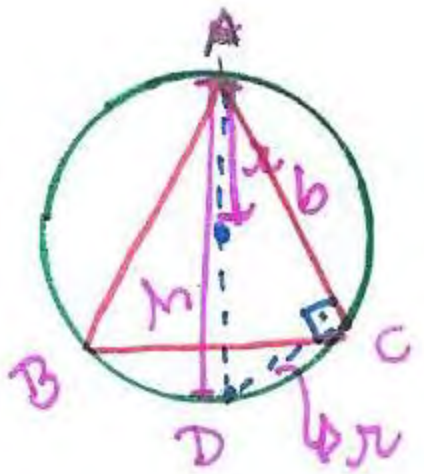
$$r^2 = h^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3r^2}{4}$$

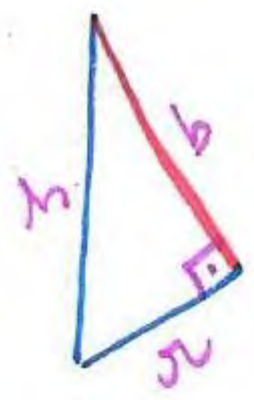
$$h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

E novamente chegaremos a uma relação entre o apótema e o raio.

TRIÂNGULO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA



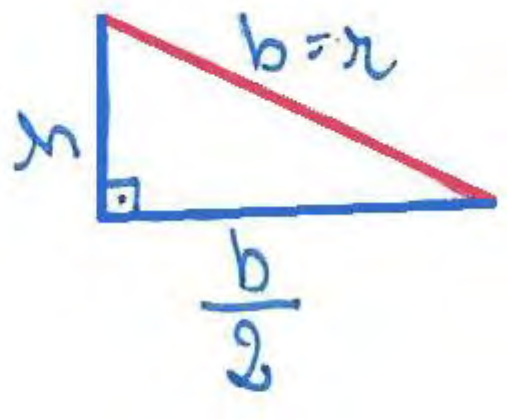
Traçando uma reta entre o ponto C e o ponto D teremos a medida do lado de um hexágono, que já sabemos ser igual ao raio da circunferência. Veja como fica o novo triângulo separadamente, com suas medidas:



Aplicando Pitágoras, chegaremos a uma relação entre o lado do triângulo maior e o raio da circunferência.

$$(2r)^2 = r^2 + b^2$$
$$4r^2 = r^2 + b^2$$
$$4r^2 - r^2 = b^2$$
$$b^2 = 3r^2$$
$$b = r\sqrt{3}$$

Outra relação que podemos fazer é entre o centro da circunferência, o ponto C e metade da base do triângulo maior, que ficará assim:



Aplicando Pitágoras, chegaremos a:

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \qquad como\ b = r\sqrt{3}$$

$$r^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$h = \frac{r}{2}$$

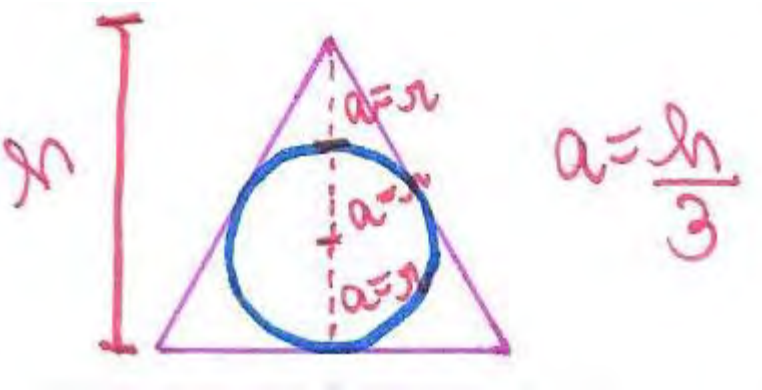
E agora sim teremos que o apótema é a metade do raio.

Perceba que há infinitas relações que você pode fazer utilizando os conceitos geométricos, é só ter um pouco de imaginação para encontrar a forma mais fácil de resolver seu problema!

POLÍGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS À CIRCUNFERÊNCIA

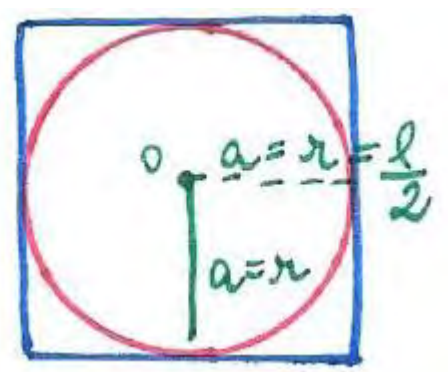
Quando temos essas formas circunscritas à circunferência significa que a circunferência está inserida nelas. A relação entre o raio e o apótema é bem mais simples nesses casos, já que eles coincidem. A partir de agora usaremos uma notação um pouco diferente. Tenha em mente que a altura do triângulo equilátero vale h, então, no caso de polígonos circunscritos à circunferência, chamaremos o apótema de a, já que ele não vai coincidir com a altura, ok? Veja os exemplos:

TRIÂNGULO CIRCUNSCRITO À CIRCUNFERÊNCIA

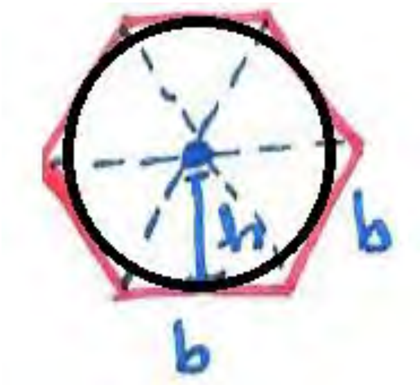


Veja que o raio da circunferência é igual ao apótema. Perceba que, se dividirmos a altura em três partes iguais, teremos 3 raios e, portanto, três apótemas.

QUADRADO CIRCUNSCRITO À CIRCUNFERÊNCIA



Nesse caso, além de o raio da circunferência ser igual ao apótema, veja que eles são iguais à metade do lado do quadrado.

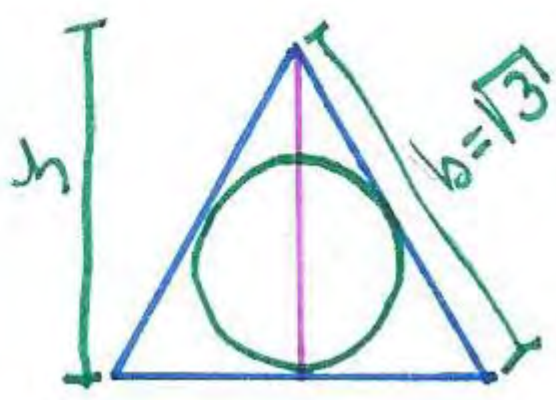


HEXÁGONO CIRCUNSCRITO À CIRCUNFERÊNCIA

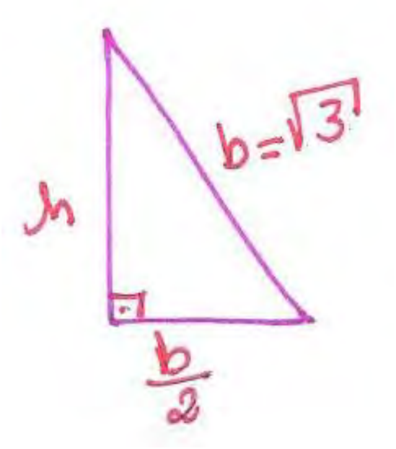
Como já vimos anteriormente, o apótema de um hexágono (h = a), que é igual ao raio da circunferência (r), pode ser calculado a partir da altura dos triângulos equiláteros que formam o hexágono.

$$a = h = \frac{b\sqrt{3}}{2} = r$$

Agora que já estudamos essas situações estamos aptos a resolver o problema proposto anteriormente, sobre o símbolo das relíquias da morte, que é um triângulo circunscrito à circunferência. Relembre a figura:



Como temos um triângulo equilátero, sabemos que todos os seus lados são iguais. Podemos resolver esse problema mais facilmente utilizando Pitágoras, mas para isso é necessário um triângulo retângulo. Assim, vamos dividir a figura bem ao meio. Veja:



$$b^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$b^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = b^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3b^2}{4}$$

$$h = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

Agora sim, aplicando $\sqrt{3}$ Pitágoras, teremos:

Como sabemos que o lado vale chegaremos ao valor da altura.

$$b = \sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\,.\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{3}{2}$$

Sabendo que o apótema, ou o raio, vale h/3, teremos que o raio do círculo será:

$$a = r = \frac{h}{3}$$

$$r = \frac{3/2}{3}$$

$$r = \frac{3}{2} . \frac{3}{1}$$

$$r = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Então, o raio do círculo é 4,5. Foi possível encontrá-lo a partir do lado do triângulo em que o círculo está inserido. Portanto, lembre-se: a chave para a resolução desses problemas está nas relações que você pode fazer entre as figuras, ok?

EXERCÍCIOS

A Diagonal de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio 18cm é:

a) 18 cm

b) 9 cm

c) 27 cm

d) 36 cm

e) 4,5 cm

Alternativa correta: D

Um polígono regular de 4 lados está circunscrito em uma circunferência de raio 25cm. O valor do lado deste polígono, em cm é:

a) 12,5cm

b) 50cm

c) 25cm

d) 75cm

e) 100cm

Alternativa correta: B

Um hexágono está inscrito numa circunferência de diâmetro 68cm. O valor do lado deste hexágono é:

a) 68cm

b) 136cm

c) 34cm

d) 17cm

e) 86cm

Alternativa correta: C

A altura de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência é 27cm. Sendo assim, o raio desta circunferência é, em cm:

a) 18cm

b) 9cm

c) 13,5cm

d) 27cm

e) 10cm

Alternativa correta: A

Um quadrado de lado 48cm está circunscrito, sendo assim o valor do raio desta circunferência interna ao quadrado é:

a) 10cm

b) 4,8cm

c) 50cm

d) 48cm

e) 24cm

Alternativa correta: E

Num triângulo equilátero circunscrito, o raio da circunferência é 5cm. A altura deste triângulo equilátero é:

a) 5cm

b) 10cm

c) 2,5cm

d) 15cm

e) 12,5 cm

Alternativa correta: D

Duas circunferências estão classificadas como tangentes externas. Sabendo que o raio de uma delas é igual a 13cm e que o raio da outra vale 1cm, a distância entre os centros destas circunferências é, em cm:

a) 13 cm

b) 12 cm

c) 14 cm

d) 1 cm

e) 12 cm

Alternativa correta: C

Duas circunferências concêntricas possuem raios r_1 = 2,7cm e r_2 = 1,3cm. A distância entre os centros destas duas circunferências é:

a) 0cm

b) 1,3cm

c) 2,7cm

d) 4cm

e) 1,4cm

Alternativa correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

PARTE III

MATEMÁTICA

02

GEOMETRIA ESPACIAL

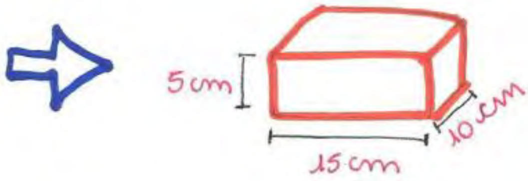
meSalva!

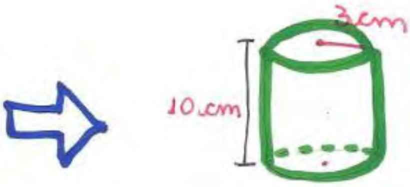
GEOMETRIA ESPACIAL

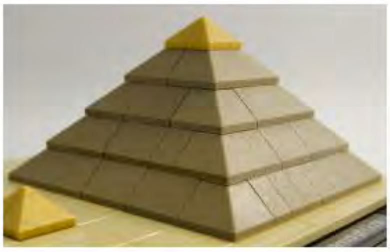
Sua prima está fazendo uma faxina no quarto dela e decidiu que não quer mais expor alguns de seus objetos, mas também não quer jogá-los fora. Por isso, pediu sua ajuda para encontrar uma caixa em que todos eles coubessem. Veja quais são os objetos abaixo:

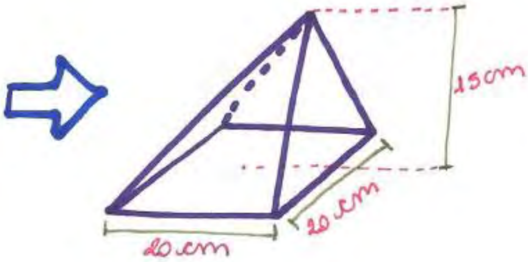
Como você não quer sair pela cidade comprando caixas de diferentes tamanhos e fazendo testes para ver se os objetos cabem, resolve propor a ela que vocês calculem quanto espaço cada um deles ocupa. O grande problema é que você, por enquanto, só estudou problemas envolvendo objetos planos, e que, portanto, possuíam apenas duas dimensões, ou seja, não tinham profundidade, mas largura e altura e dessa forma você conseguia calcular a área deles. Para saber o espaço que os objetos da sua prima ocupam dentro de uma caixa é necessário saber qual é o volume deles, ou seja, deve-se levar em consideração a largura, a altura e a profundidade desses objetos. Para resolver esse problema precisaremos relembrar um pouco os conceitos que estudamos em Geometria Plana e iniciar o estudo da Geometria Espacial, que estuda o espaço que as figuras ocupam e por isso o nome espacial.

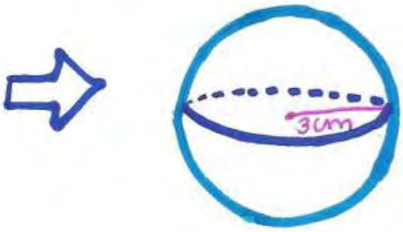
Para resolver esse inconveniente podemos fazer um paralelo entre os objetos que sua prima deseja guardar e algumas formas geométricas em três dimensões (que a partir de agora chamaremos de sólidos) que normalmente estudamos na Geometria Espacial. Veja que podemos realizar aproximações como: o livro é quase um prisma retangular ou um paralelepípedo, a caneca parece com um cilindro, a pirâmide, bem, essa nem precisamos aproximar e você entenderá daqui a pouco o porquê, o chapéu de duende é basicamente um cone e o globo de neve é uma esfera. Essas aproximações são muito frequentes no meio científico. Em geral, são desenvolvidos recursos simplificados (que são chamados de modelos matemáticos) para estudar fenômenos mais complexos e assim facilitar o seu entendimento. Voltando ao nosso problema, observe os objetos de sua prima e as semelhanças com os sólidos abaixo:


5 cm
15 cm
10 cm


3cm
10 cm




15cm
20 cm
20 cm

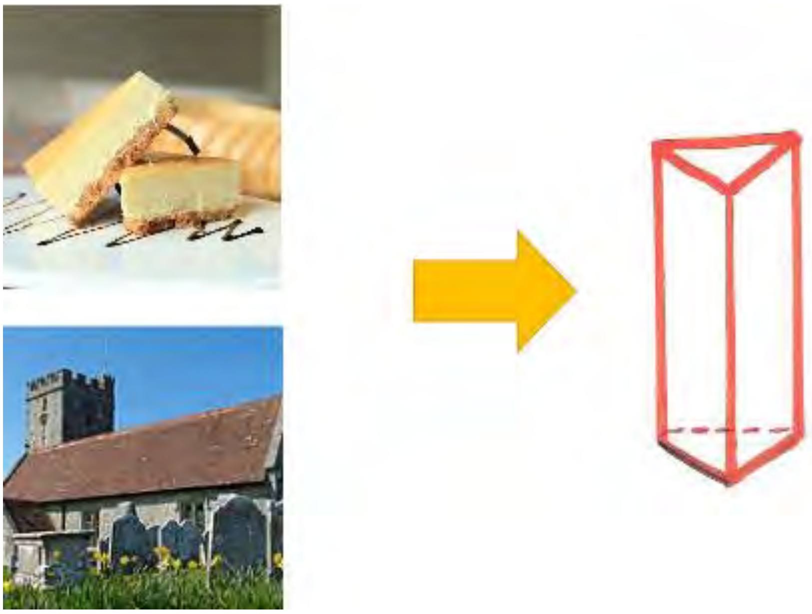

3cm


20 cm
3 cm

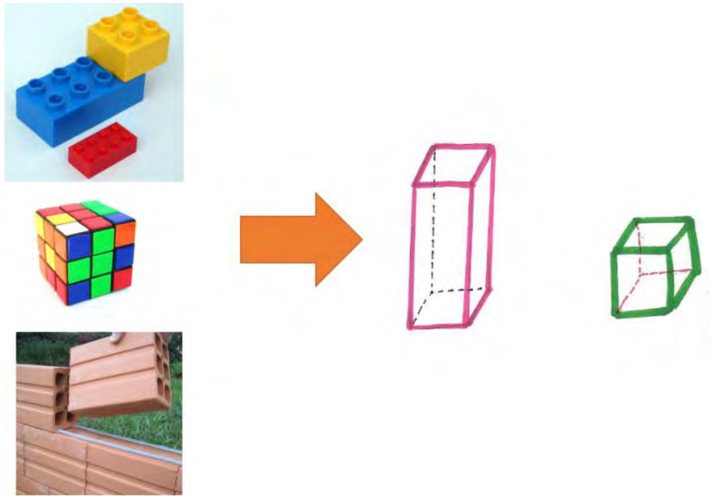
A Geometria Espacial fornece subsídios para que possamos realizar o cálculo do volume de sólidos. Os mais comuns são os prismas, as pirâmides, os cones e as esferas e, muitas vezes, a mistura deles. Vamos estudar cada um a partir de agora para que possamos descobrir o espaço que eles ocupam e para que você possa comprar a caixa do tamanho certo.

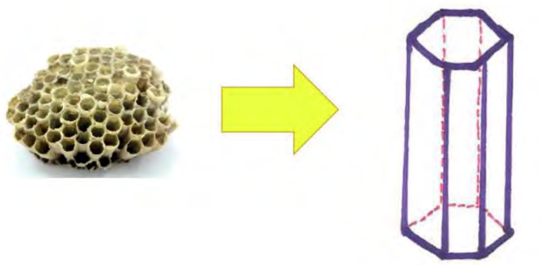
PRISMAS

O telhado de casas, as colméias, os pedaços de torta, o cubo mágico, as peças de montar e os tijolos possuem uma característica em comum, todas são descritas pelo mesmo sólido, com características um pouco diferentes: os prismas. Eles podem ser prismas triangulares, retangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais ou qualquer outro polígono que já estudamos. Isso acontece porque os prismas possuem como bases polígonos regulares (ou irregulares[1]), que são ligados por linhas retas, formando uma lateral retangular (paralelogramo). Ou seja, um prisma triangular possui bases compostas por triângulos, assim como um prisma hexagonal possui bases compostas por hexágonos e assim por diante. Veja os exemplos:

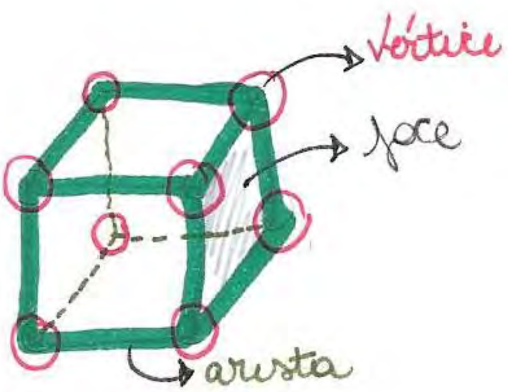


[1] Você poderá se deparar com prismas oblíquos, mas entendendo os primas regulares apresentados nessa apostila você consegue tirar de letra problemas envolvendo outros tipos desses sólidos.



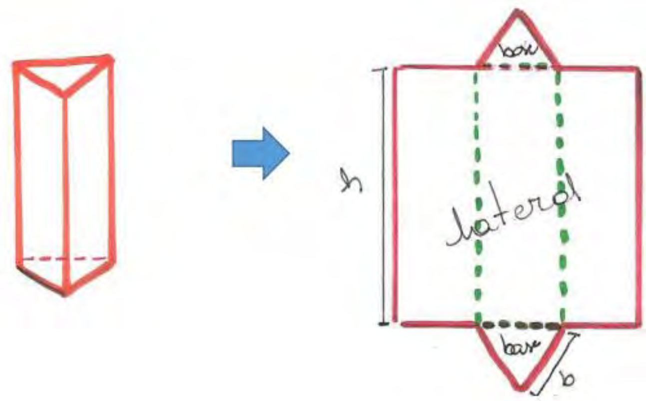


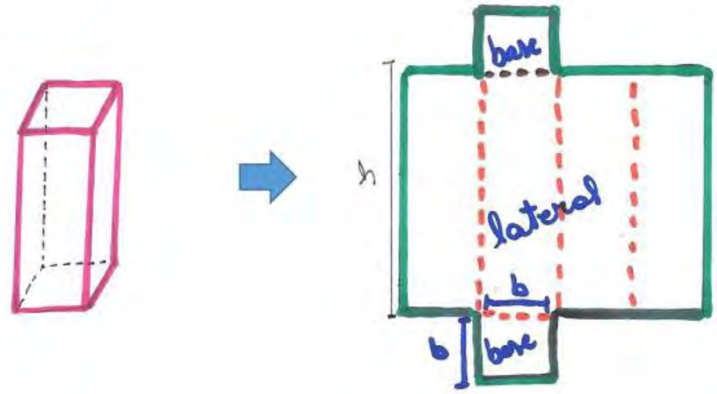
As bases dos prismas são ligadas por linhas retas que denominamos arestas e a junção delas formam vértices (uma "ponta"). Cada lado (ou base) dos sólidos é chamada de face. Essa nomenclatura é aplicada tanto em prismas quanto em outros tipos de sólidos e é importante que você tenha familiaridade com ela. Veja um exemplo:

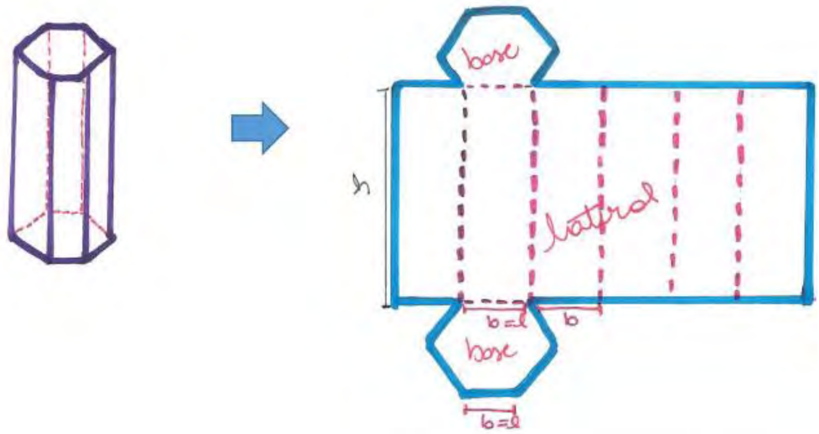


As arestas estão marcadas pela cor verde, os vértices estão circulados e as faces são as partes planas, que formam o sólido.

Antes de aprendermos a calcular o volume desses sólidos, vamos analisar a área dele, que é calculada a partir da área de cada uma das faces dessa figura. Para isso, realizamos um procedimento chamado de planificação. Note que, a área dos sólidos se refere à superfície dele, que planificada (vem de plano, ou seja, duas dimensões) fica mais fácil entender e calcular. Provavelmente você já trabalhou com a planificação de um sólido na infância, afinal, quem nunca recebeu um jogo que necessitasse a montagem de um dado, tendo que recortá-lo, dobrá-lo e colá-lo? Lembra disso? Pois agora você fará o caminho contrário. Você já tem o dado montado, agora precisa desmontá-lo. Veja como ficam alguns prismas planificados:







Perceba que as linhas pontilhadas demonstram as dobras que você desfez. Além disso, note que o número de arestas da base corresponde ao número de faces laterais. Por isso, quando temos um prisma triangular, que tem 3 arestas na base, temos também três laterais. Veja como essa informação procede contando as arestas e faces laterais dos outros prismas.

Depois dessa análise podemos realizar o cálculo da área dessas superfícies. Aqui a premissa é de que a área total é a soma da área das bases (lembre que são duas e por isso multiplicamos por 2) e a área lateral dos sólidos. Assim, a área de um prisma será sempre:

$$A_{Total} = 2.A_{base} + A_{lateral}$$

Perceba que nós já sabemos como calcular a área de triângulos, quadrados, retângulos, hexágonos, etc. Então, basta organizarmos essas informações. Veja:

ÁREA PRISMA TRIANGULAR

Vamos assumir que o triângulo que forma as bases desse prisma é equilátero, mas poderia ser qualquer um, ok? Veja:

$$A_{base} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

A lateral é formada por três retângulos, então faremos a área do retângulo multiplicada por 3:

$$A_{lateral} = (b.h).3$$

Portanto, a área total será a soma dessas duas equações, multiplicando a área da base por 2, como já havia sido explicado, e realizando algumas manipulações matemáticas, chegaremos a:

$$A_{total} = (2.A_{base}) + (A_{lateral})$$

$$A_{total} = \left[2.\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)\right] + (3.b.h)$$

ÁREA PRISMA QUADRADO

Nesses prisma as bases são quadrados e a lateral são quatro retângulos. Relembre as áreas desses polígonos abaixo:

$$A_{base} = b^2$$

$$A_{lateral} = (b.h).4$$

Portanto, a área total desse prisma será:

$$A_{total} = 2.b^2 + 4.b.h$$

ÁREA PRISMA HEXAGONAL

Como temos bases hexagonais, a lateral será formada por seis retângulos. Então as áreas da base e da lateral serão definidas por:

$$A_{base} = \frac{3.b^2.\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{lateral} = b.h.6$$

E a total será, depois de algumas manipulações:

$$A_{total} = 2.\left(\frac{3.b^2.\sqrt{3}}{2}\right) + 6.b.h$$

$$A_{total} = 3.b^2.\sqrt{3} + 6.b.h$$

Abordamos apenas as áreas dos prismas mais comuns, mas sabendo que a área total é a soma de duas vezes a área da base com a área lateral você resolve qualquer problema que envolva outros tipos.

Visto tudo isso, agora podemos nos ater ao volume desses mesmos sólidos que dedicamos um tempo a mais. Lembre que já vimos que o volume leva em consideração as três dimensões: a altura, a largura e a profundidade do sólido, certo? Ótimo! Então, para sabermos qual é o volume de um sólido basta que façamos a área da base multiplicada pela sua altura. Consegue perceber como isso faz sentido? A base é composta por largura e profundidade e a altura, então, ao multiplicá-las consideramos duas dimensões, que compõe a área da base.

Quando multiplicamos essa área com a altura, estamos finalmente considerando as três dimensões, e portanto encontramos o volume do sólido, ou seja, o espaço que ele ocupa! Assim, o volume de um prisma é dado por **V = Ab.h**. Vamos analisar as equações de volume para cada um dos sólidos acima:

VOLUME PRISMA TRIANGULAR

A área da base desse prisma é simplesmente a área de um triângulo equilátero, assim, multiplicando a altura teremos o seguinte a equação:

$$V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.h$$

VOLUME PRISMA QUADRADO

A área do quadrado é a multiplicação dos lados, que são iguais. Quando multiplicação a altura e a área da base chegamos em:

$$V = b^2.h$$

Agora veja que caso a altura tivesse a mesma medida do lado, ou seja, se tivéssemos um cubo, o volume seria:

$$V = b^3$$

VOLUME PRISMA HEXAGONAL

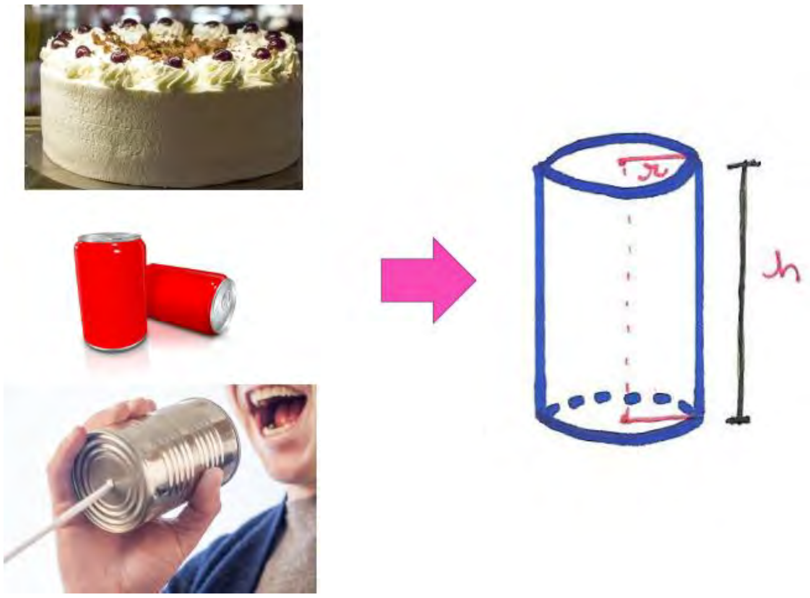
A área da base desse prisma é apenas a área de um hexágono, então, ao multiplicarmos a altura a ela teremos:

$$V = \frac{3.b^2\sqrt{3}}{2}.h$$

Assim como no cálculo da área dos prismas, sabendo a área da forma geométrica da base base dele e sua altura você consegue descobrir qual é o volume dele sem precisar necessariamente de uma fórmula. Basta que você lembre que precisa multiplicar as três dimensões. Isso nem sempre é uma tarefa fácil, como veremos ao longo dessa apostila.

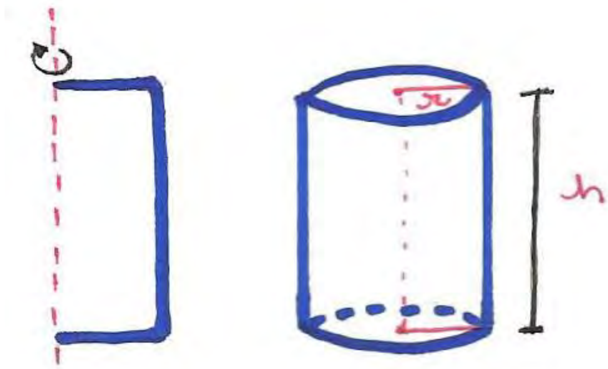
CILINDRO

Perceba que o formato de alguns tipos de bolo, de latas de alumínio, de tanques de combustível pode se parecer bastante, certo? Veja as figuras abaixo.

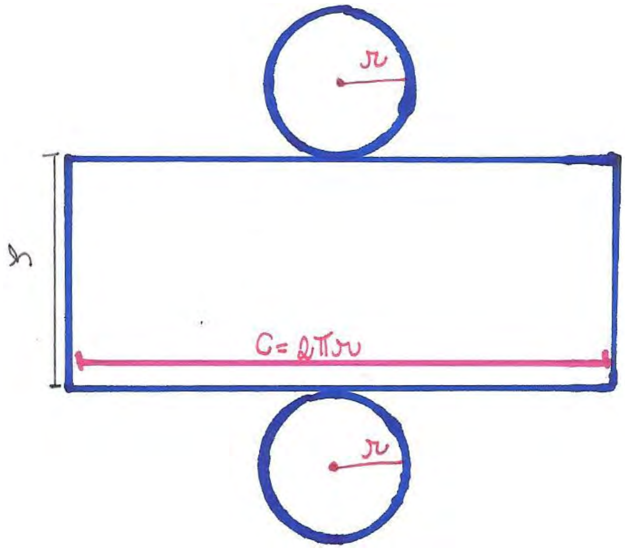


Com as devidas aproximações, esses objetos têm a forma de cilindros, que se parecem muito com os prismas a não ser pela falta de "dobraduras" nas laterais.

Faça um tubo com uma folha de papel, cubra as pontas (bases) com círculos e você terá um cilindro. A forma matemática de apresentar um cilindro é dizendo que ele é um sólido de revolução, mas o que isso quer dizer? Isso significa que se você girar por 360^{o} um retângulo, você obterá um cilindro. Veja a ilustração:



Vamos planificar esse sólido para que possamos calcular sua área. Perceba que as bases serão círculos e a lateral será um grande retângulo, que agora não é dividido (dobrado). Antes, nos prismas, sabíamos que a quantidade de arestas da base nos fornecia o número de retângulos da lateral, agora, como o círculo não possui arestas, veja que o comprimento da lateral tem o mesmo tamanho do perímetro da circunferência. Confira a imagem abaixo:



Agora que temos o sólido planificado podemos realizar o cálculo da área dele. A premissa de que a área total é a soma de duas vezes a área da base com a área lateral continua valendo.

Lembre da área de um círculo para calcular a área da base:

$$A_{base} = \pi r^2$$

Como já vimos, a lateral é composta por um grande retângulo, assim, para saber sua área, basta fazer lado multiplicado pela altura. Como um lado é igual ao perímetro da circunferência, teremos:

$$A_{lateral} = 2\pi r . h$$

E assim, realizando uma pequena manipulação, chegaremos à área total de um cilindro:

$$A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$A_{total} = 2\pi r (r+h)$$

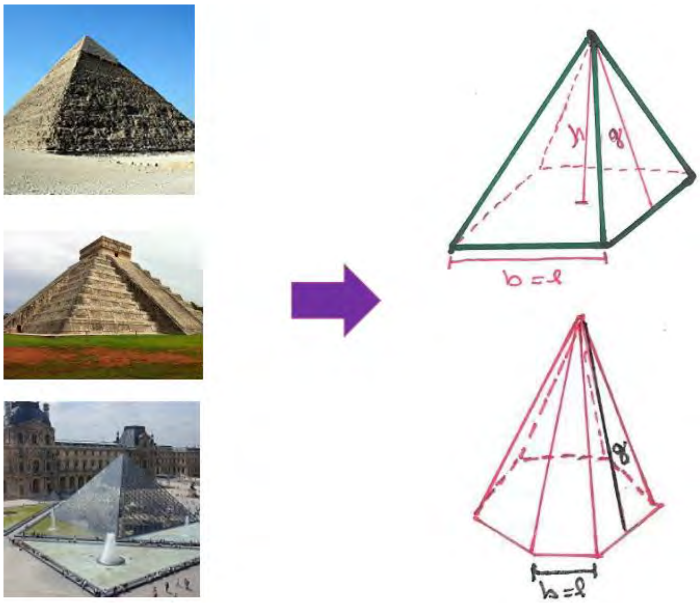
E o volume do cilindro, assim como no caso dos prismas, é calculado multiplicando a área da base pela altura do cilindro. Então, teremos que o volume é:

$$V = A_b . h$$
$$V = \pi . r^2 . h$$

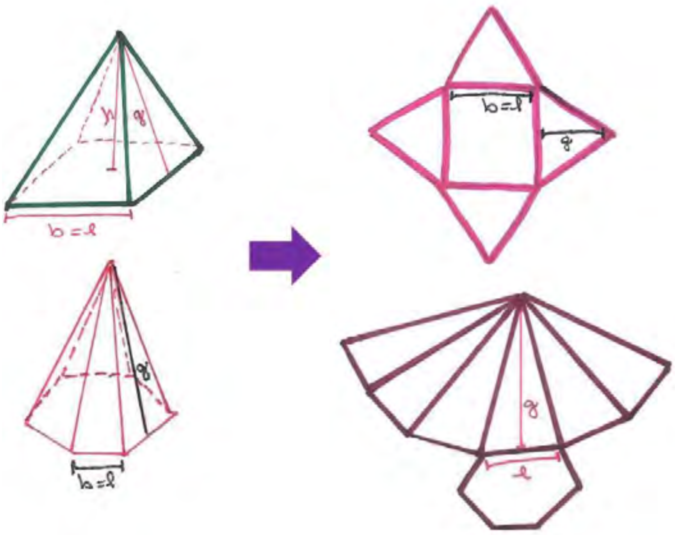
Bem menos complicado do que os milhares de casos possíveis de prismas, né?

PIRÂMIDE

Você conhece esse sólido a partir das construções milenares tanto dos egípcios quanto dos maias, astecas ou outras antigas civilizações, certo? Essas construções fantásticas são parecidas com os prismas com uma grande diferença, no lugar de duas bases, as laterais das pirâmides são interligadas em um único ponto, um vértice e apenas uma base. Isso muda bastante a característica do sólido, que como laterais terá triângulos, no lugar dos retângulos que vimos anteriormente, porém, assim como nos prismas, a base pode ser composta por qualquer polígono regular. Veja as figuras de pirâmides com bases quadrada e hexagonal:



Você pode planificar os sólidos da forma como preferir, vamos fazer isso de duas formas no caso das pirâmides. Veja:



Perceba que novamente temos que o número de arestas da base fornece no número de lados da pirâmide, que são basicamente triângulos. Note ainda que a altura dos triângulos que formam a lateral é chamada de g (geratriz), que podemos encontrar se aplicarmos o Teorema de Pitágoras (se tivermos a informação do quanto vale a base do triângulo e o lado dele). A área dessas pirâmides é dada fazendo a soma da área da base com a área lateral.Vamos analisar essas duas.

PIRÂMIDE COM BASE QUADRADA

A área da base dessa pirâmide você sabe calcular, né? A área lateral, como você pode perceber pelo desenho planificado é 4 vezes a área do triângulo. Assim teremos o seguinte:

$$A_{base} = l^2$$

$$A_{lateral} = \left(\frac{g.l}{2}\right).4$$

$$A_{lateral} = 2gl$$

E a área total será:

$$V = A_b.h$$

$$V = \pi.r^2.h$$

PIRÂMIDE COM BASE HEXAGONAL

Novamente a área dessa base você já sabe calcular, basta lembrar da área do hexágono. E a área da lateral, que são 6 triângulos, basta multiplicar a área de um deles por 6. Veja como fica as áreas da base e da lateral:

$$A_{base} = \frac{3.l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{lateral} = \left(\frac{l.g}{2}\right).6$$

$$A_{lateral} = 3lg$$

Então, a área total será:

$$A_{total} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} + 3lg$$

Agora que já sabemos a área das pirâmides, podemos abordar como é calculado o volume delas, que é descrito por um terço do volume de um prisma. A prova dessa premissa está no Apêndice dessa apostila, caso você queira analisar. Veja como fica o volume do prisma:

$$V_{pirâmide} = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Caso a base da pirâmide seja quadrada, teremos:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base}.h}{3}$$

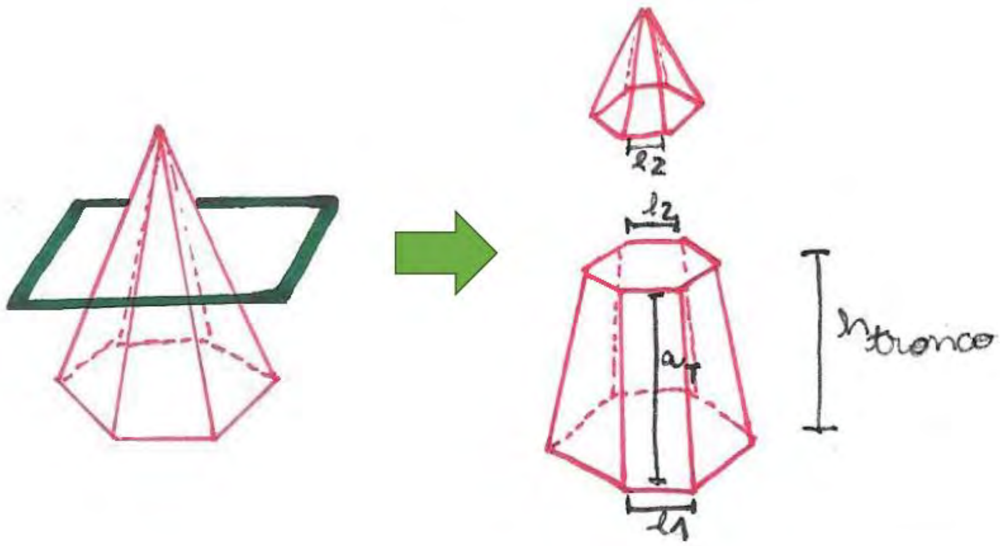
$$V_{pirâmide} = \frac{l^2.h}{3}$$

Se a base for outro polígono, basta substituir a área dele na equação anterior.

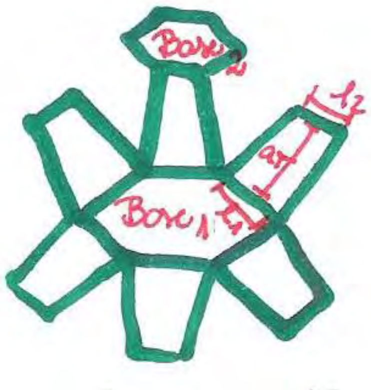
Existe uma relação que diz que “duas pirâmides com a mesma altura e com áreas das bases iguais têm o mesmo volume”, que é chamado de princípio de Cavalieri. Vamos utilizá-lo mais tarde, por enquanto, deixe-o guardada na cabeça.

TRONCO DE PIRÂMIDE

Quando “cortamos” uma pirâmide na horizontal obtemos uma pequena pirâmide, no topo, e na base o que chamamos de tronco de pirâmide. Veja abaixo:



Vamos planificar o tronco para poder calcular sua área. Veja:



Perceba que, diferentemente do prisma, apesar de termos duas bases, elas são de tamanhos diferentes (embora sejam formadas pelo mesmo tipo de polígono).

Note que a lateral do tronco é formada por 6 trapézios cuja área é calculada abaixo.

$$A_{lateral} = \left(\frac{l_1 + l_2}{2} . a\right) . 6$$

Lembre que como uma base é menor do que a outra, as áreas desses dois hexágonos serão diferentes, por isso precisamos calculá-las separadamente. Veja na figura acima que o lado da base menor é l1 e o lado da base maior é l2.

$$A_{base_1} = \frac{3.l_1^2.\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{base_2} = \frac{3.l_2^2.\sqrt{3}}{2}$$

Então, a área total do tronco será:

$$A_{total} = 6.A_{lateral} + A_{base_1} + A_{base_2}$$

$$A_{total} = 6.\left(\frac{l_1+l_2}{2}.a\right) + \left(\frac{3l_1^2\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3l_2^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

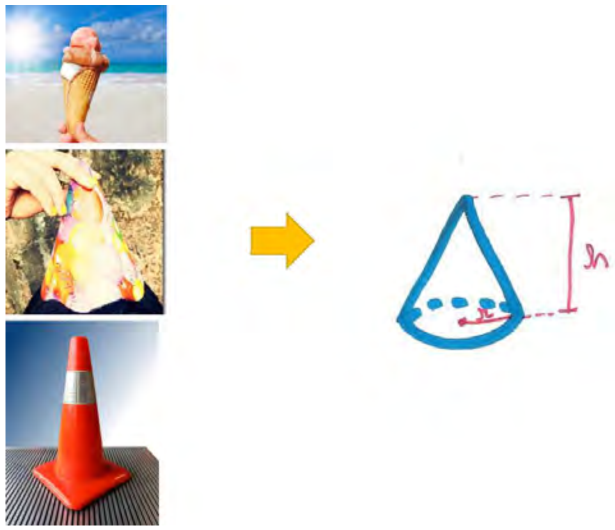
E o volume do tronco é calculado a partir da diferença entre o volume da pirâmide original e o da pirâmide pequena (a que sobrou quando cortamos a maior). Se preferir, veja a dedução no Apêndice. O resultado é:

$$V_{tronco} = \frac{h_{tronco}}{3}.(\sqrt{A_b.A_B} + A_b + A_B)$$

Veja que *b* se refere à base menor e o *B* se refere à base maior.

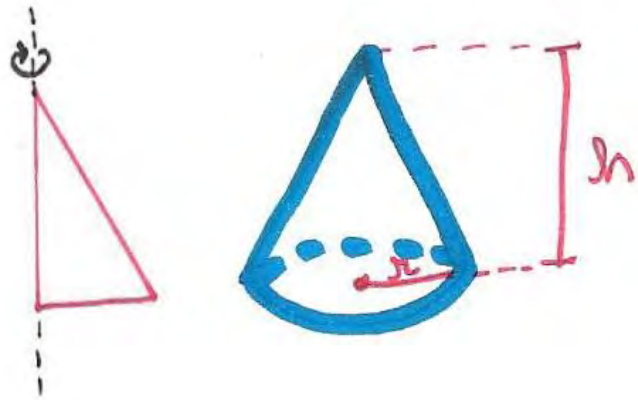
CONE

Você provavelmente consegue notar as semelhanças do formato entre chapeuzinho de festa infantil, cone e trânsito e casquinha de sorvete, certo?

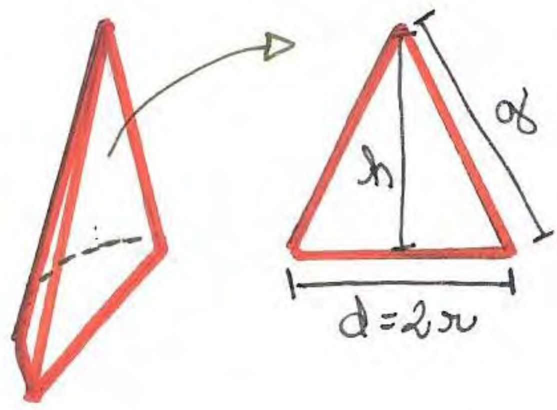


Os três objetos tem alguma semelhança com as pirâmides, com a diferença de que a base não é um polígono regular, mas uma circunferência, que faz com que não haja "dobradura" na lateral do sólido, denominado cone.

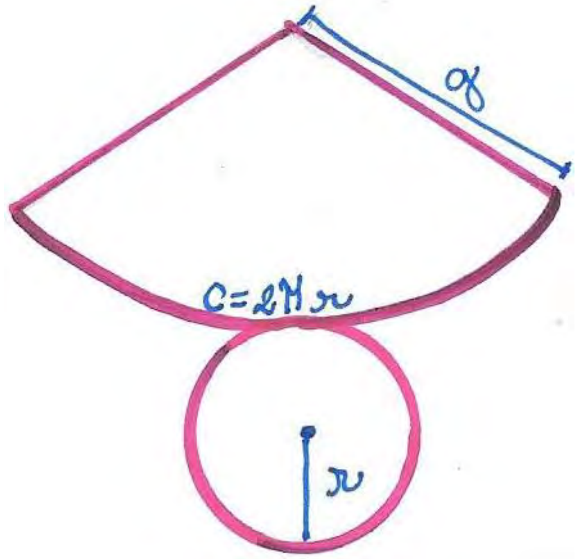
Assim como o cilindro, o cone também é chamado de sólido de revolução, isso porque se girarmos 360^{o} um triângulo retângulo chegaremos a um cone. Veja a ilustração:



Veja que se "cortarmos" o cone na vertical, bem ao centro, teremos que a parte interior descreve um triângulo, que tem a altura do cone e a base que equivale ao diâmetro da circunferência que compõe a base do cone original. Veja a imagem:



Vamos guardar essas informações e vamos iniciar o estudo da área do cone, mas antes, sempre buscando facilidades de compreensão, vamos planificar o sólido. Se você já montou os chapeuzinhos de festa infantil provavelmente não terá dificuldade alguma nessa etapa. A base do cone sabemos facilmente que é uma circunferência, já que giramos o triângulo 360º para formar o sólido e a lateral será algo que em Trigonometria chamamos de arco de circunferência. Acompanhe:

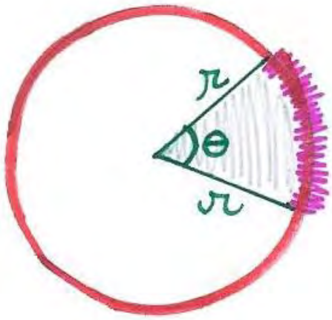


Veja que *g* é a lateral do arco (chamada de geratriz), que veremos ser uma espécie de raio de uma grande circunferência da qual saiu esse arco.

Perceba que o cálculo da área do cone não é trivial, apesar de sabermos a área da circunferência, não discutimos como calcular a área de uma forma geométrica como a da lateral do cone. Por isso, é necessário abordar primeiramente a área do setor circular.

ÁREA DO SETOR CIRCULAR

Já relembramos o que é um arco de circunferência (um pequeno pedaço de uma circunferência), certo? Pois a área do setor circular é a área definida por esse arco. Veja a figura abaixo para entender melhor.



O arco é o que está em vermelho e a área definida por esse arco (que chamada de área do setor circular) é a parte sombreada.

Sabendo que a área da circunferência é Pi.r^2 e que ela equivale a 360^{o}, faremos a seguinte regra de três para encontrar a área do setor:

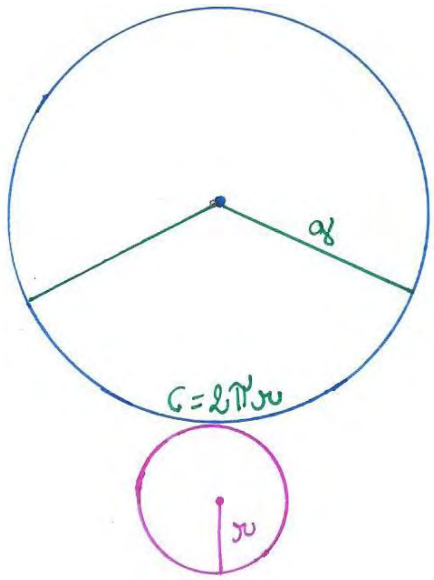
Ângulo (graus)		Área ($cm^2/m^2/km^2$)
360	$\longrightarrow$	πr^2
θ	$\longrightarrow$	A_s

$$360.A_s = \theta \pi r^2$$

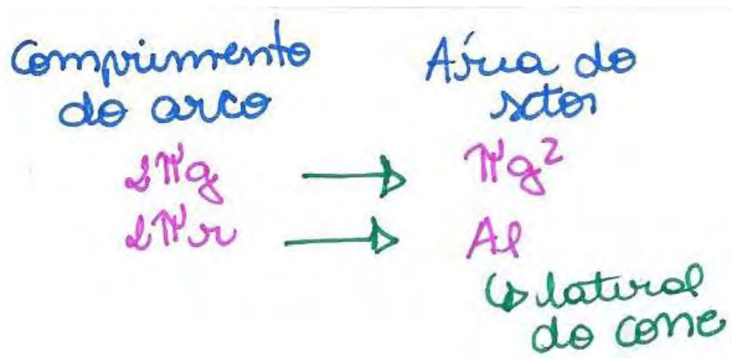
$$A_s = \frac{\theta \pi r^2}{360}$$

$$A_s = \frac{\theta \pi r^2}{360}$$

Sabendo disso, vamos transpor esse conhecimento ao nosso problema. Podemos completar o arco que tínhamos como lateral do cone como uma circunferência, certo? Veja a imagem:



E assim fazer a regra de três, utilizando o g como o raio dessa circunferência:



Então, a área da lateral do cone é dada por:

$$2\pi g A_{lateral} = 2\pi^2 r g^2$$
$$A_{lateral} = \frac{2\pi^2 r g^2}{2\pi g}$$
$$A_{lateral} = \pi r g$$

Sabendo que a área da base é a área da circunferência, teremos que a área total do cone é:

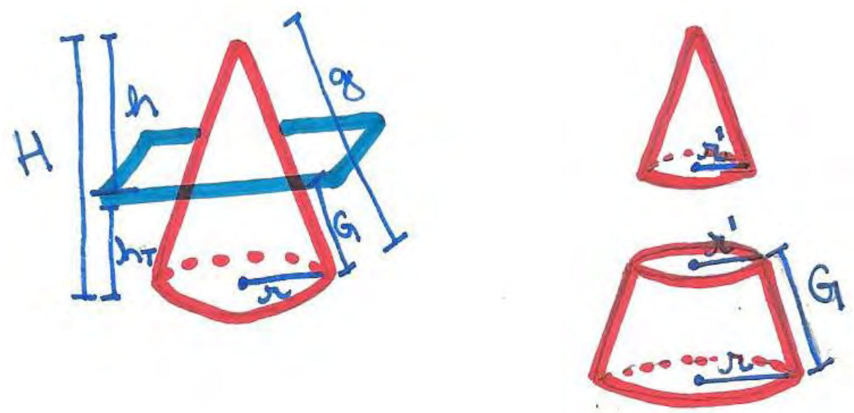
$$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$$
$$A_{total} = \pi r(g+r)$$

Quanto ao volume do cone, devemos retomar o princípio de Cavalieri. Lembre que esse princípio diz basicamente que desde que as alturas e as áreas sejam iguais, não importando a forma da base. Então, o cálculo do volume de um cone é feito como o de uma pirâmide: a partir de um terço do volume do prisma. Veja:

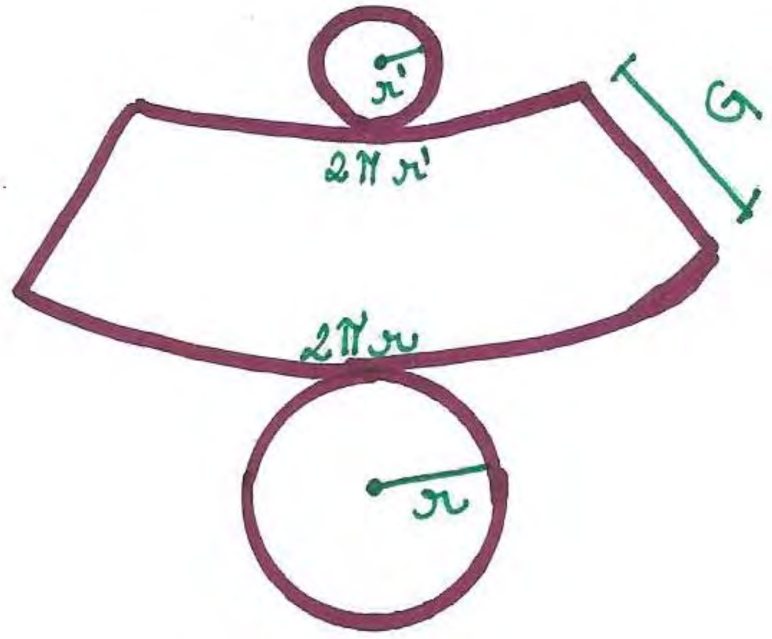
$$V_{cone} = \frac{A_b.h}{3}$$
$$V_{cone} = \frac{\pi r^2.h}{3}$$

TRONCO DE CONE

Se cortarmos o cone na horizontal, assim como na pirâmide, teremos um pequeno cone e um tronco de cone. Veja a figura:



Perceba que temos duas bases circulares, porém de raios diferentes. Ao planificarmos esse sólido teremos o seguinte:



A área das bases você já sabe calcular, basta fazê-lo separadamente, já que terá uma circunferência de raio r e outra de raio r'.

$$A_B = \pi 2^2 \qquad A_b = \pi r'^2$$

Já o cálculo da área lateral é realizado a partir da diferença entre as áreas do cone original e do pequeno, depois de cortado. Veja que chamamos a geratriz do tronco de G e portanto g - G fornece a geratriz do cone menor. Acompanhe o desenvolvimento da fórmula da área lateral:

$$A_{lateral_{original}} = \pi rg \qquad A_{lateral_{pequeno}} = \pi r'(g-G)$$

$$A_{lateral_{tronco}} = A_{lateral_{original}} - A_{lateral_{pequeno}}$$
$$A_{lateral_{tronco}} = \pi rg - \pi r'(g-G)$$
$$A_{lateral_{tronco}} = \pi G.(r+r')$$

Então, a área total do tronco do cone é:

$$A_{total} = A_{lateral_{tronco}} + A_B + A_b$$
$$A_{total} = \pi G(r+r') + \pi 2^2 + \pi r'^2$$

O volume do tronco do cone é encontrado da mesma forma, fazendo a diferença entre o cone original e o menor. Assim, teremos:

$$V_{troco} = V_{original} - V_{pequeno}$$

$$V_{troco} = \frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi r'^2 h}{3}$$

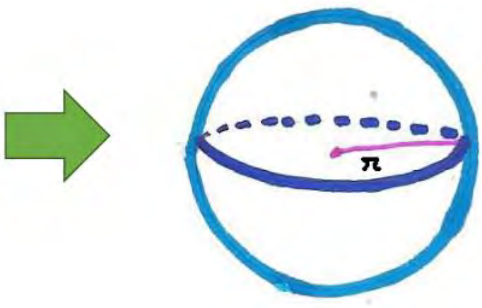
$$V_{troco} = \frac{\pi}{3}(r^2 H - r'^2 h)$$

Sabemos que H - hT = h, então podemos reorganizar a equação acima e obteremos:

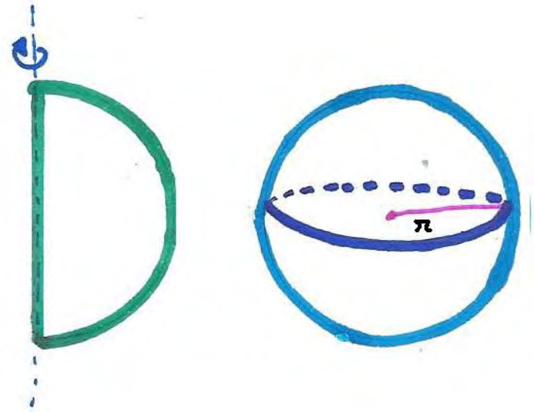
$$V_{troco} = \frac{\pi h_{tronco}}{3}(r^2 + r'.r + r'^2)$$

ESFERA

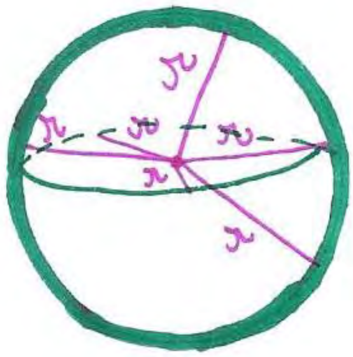
Esse talvez seja o sólido com que você tem maior familiaridade desde a infância, já que ele descreve as bolas de vôlei, basquete, futebol, entre outras. Globos de neve ou globos estudantis também são exemplo bastante fiéis de esferas.



Assim como o cone e o cilindro, a esfera é um sólido de revolução. Se girarmos uma meia circunferência por 360° obteremos uma esfera. Veja:



Perceba que a esfera é um corpo redondo em que a distância do seu centro até o seu limite é sempre o valor do seu raio. Confira na imagem:



A área de uma esfera é calculada utilizando a seguinte equação:

$$A = 4\pi r^2$$

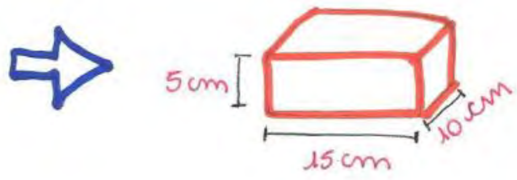
Já o seu volume é calculado a partir do Princípio de Cavalieri e considera o volume do cilindro no cálculo.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Caso você tenha interesse no desenvolvimento dessas duas últimas equações, confira o **Apêndice** dessa apostila.

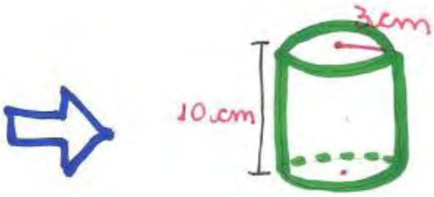
Ótimo! O estudo foi longo, porém necessário para podermos calcular o volume de todos os objetos que sua prima quer guardar. Você, com uma régua, fez medidas desses sólidos, para que conseguisse fazer as melhores aproximações. Então, vamos calcular os volume dos objetos na ordem em que os apresentamos na primeira imagem, lá na apresentação do problema.

- ✓ **Volume do livro – prisma retangular**

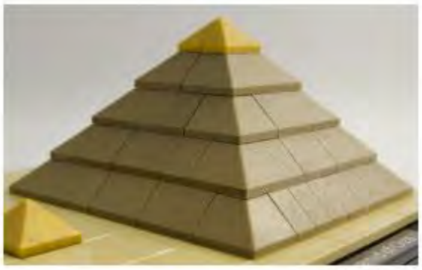
$$V = A_b.h$$
$$V = a.b.h$$
$$V = 15.10.5$$
$$V = 750 \ \ cm^3$$

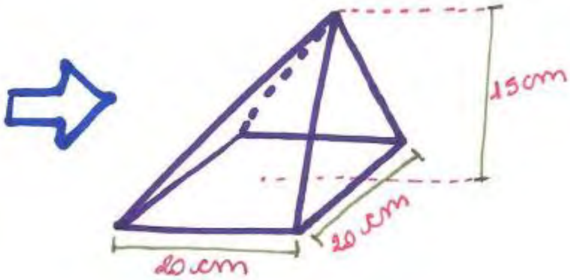
- ✓ **Volume da caneca – cilindro**

$$V = A_b.h$$
$$V = \pi r^2.h$$
$$V = \pi 3^2.10$$
$$V = 282{,}6 \ \ cm^2$$

- ✓ Volume da pirâmide – pirâmide





$$V = \frac{A_b . h}{3}$$

$$V = \frac{b^2 . h}{3}$$

$$V = \frac{20^2 . 15}{3}$$

$$V = 2000 \ cm^3$$

✓ Volume do chapéu de duende - cone

$$V = \frac{A_b.h}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2.h}{3}$$

$$V = \frac{\pi 3^2.20}{3}$$

$$V = 188{,}4 \ cm^3$$

✓ Volume do globo de neve

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi 3^3}{3}$$

$$V = 113{,}04 \ cm^3$$

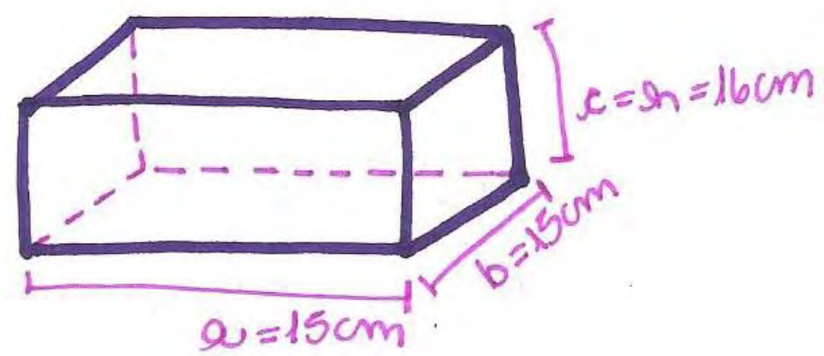
Ótimo! Agora, somando cada um desses volume teremos um volume total de:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$V = \frac{4\pi 3^3}{3}$$

$$V = 113{,}04 \ \ cm^3$$

Portanto, a caixa em que sua prima vai guardar esses objetos deve ser um pouco maior do que isso, já que não levamos em consideração alguns detalhes, como, por exemplo, a alça da caneca. Supondo que a caixa tem 15 cm de largura e de profundidade e 16cm de altura, o volume dela é:

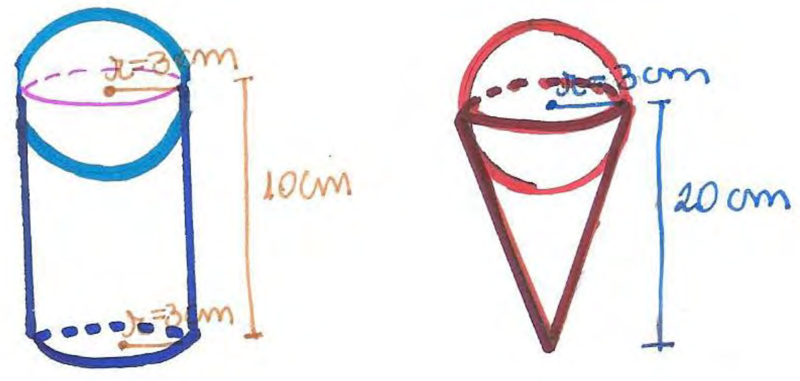


$$V = a.b.c$$

$$V = 15.15.16$$

$$V = 3600 \ \ cm^2$$

Por fim, perceba que podemos fazer “montagens” entre esses objetos, que são chamadas de sólidos compostos. Perceba que o raio do globo de neve é igual ao raio do chapéu e da caneca, então poderíamos colocá-la dentro de um ou de outro. Veja como ficaria:



Perceba que a esfera fica metade para dentro tanto do cilindro quanto do cone, portanto, ao calcularmos o volume desse novo sólido, não devemos considerar essa parte da esfera, só o que está do lado de fora e o cone e o cilindro inteiros. Veja:

$$V_{total} = \frac{V_E}{2} + V_{cilindro}$$

$$V_{total} = \frac{113{,}04}{2} + 282{,}6$$

$$V_{total} = 339{,}12$$

$$V_{total} = \frac{V_E}{2} + V_{cone}$$

$$V_{total} = \frac{113{,}04}{2} + 188{,}4$$

$$V_{total} = 244{,}92$$

Há diversas possibilidades de combinações entre figuras em três dimensões e para resolver problemas que envolvem sólidos compostos você precisa usar a imaginação e fazer o máximo de relações que você conseguir.

EXERCÍCIOS

1. (Fuvest) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui:

a) 33 vértices e 22 arestas

b) 12 vértices e 11 arestas

c) 22 vértices e 11 arestas

d) 11 vértices e 22 arestas

e) 12 vértices e 22 arestas.

Alternativa correta: E

2. (Unirio) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35

b) 34

c) 33

d) 32

e) 31

Alternativa correta: D

3. (Fuvest) A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado, está acoplado um cano cilíndrico com 4cm de diâmetro e 50m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

a) 90 cm

b) 92 cm

c) 94 cm

d) 96 cm

e) 98 cm.

Alternativa correta: C

4. (Fuvest-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é:

a) 16 cm

b) 17 cm

c) 18 cm

d) 19 cm

e) 20 cm

Alternativa correta: D

5. O Volume de um cone que possui área da base 6cm^2 e altura 2 cm é:

a) 8 cm^3

b) 4 cm^3

c) 12 cm^3

d) 3 cm^3

e) 36 cm^3

Alternativa correta: B

6. Uma pirâmide quadrangular possui área da base igual a 60 cm^2. Qual o volume desta pirâmide sabendo que a altura é de 10 cm?

a) 600cm^3

b) 1.200cm^3
c) 300cm^3
d) 200cm^3
e) 100cm^3

Alternativa correta: D

7. Qual a área da superfície de uma esfera de raio 1 cm ?

a) 6,28 cm^2
b) 12,56 cm^2
c) 15,70 cm^2
d) 18,84 cm^2
e) 31,4 cm^2

Alternativa correta: B

8. O volume de uma esfera de raio 1m é:

a) 1 m^3
b) 2,52m^3
c) 3,46 m^3
d) 3,98 m^3
e) 4,18 m^3

Alternativa correta: E

9. (Ufrj - adaptada) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, F, sobre a superfície de uma esfera S de raio r. Sabendo que a face oposta a F é tangente à esfera S no ponto P, o raio r é:

a) 5,5

b) 6

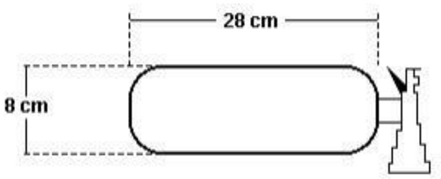
c) 6,5

d) 7

e) 7,5

Alternativa correta: E

10. (Cesgranrio) Os extintores de incêndio vendidos para automóveis têm a forma de uma cápsula cilíndrica com extremidades hemisféricas, conforme indica a figura. Eles são feitos de ferro e contêm cerca de 1 litro de CO_2, sob pressão de 2,8 atmosferas na temperatura de 21°C. A fórmula do volume da esfera é $4\pi R^3/3$.
Considere, para efeito de cálculo, π =3, e que o CO, se comporte como um gás ideal.



O volume de ferro utilizado na confecção da cápsula, em cm^3, é de, aproximadamente:

a) 108

b) 216

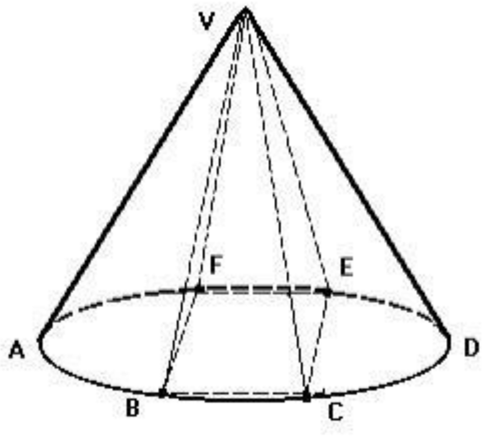
c) 288

d) 312

e) 356

Alternativa correta: B

11.(Ufmg) Observe a figura.



Nessa figura, a base da pirâmide VBCEF é um quadrado inscrito no círculo da base do cone de vértice V. A razão entre o volume do cone e o volume da pirâmide, nesta ordem, é:

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) 2π

e) $2\pi/3$

Alternativa correta: B

(UNICAMP)Considere um cilindro circular reto. Se o raio da base for reduzido pela metade e a altura for duplicada, o volume do cilindro:

a) é reduzido em 50%.

b) aumenta em 50%.

c) permanece o mesmo

d) é reduzido em 25%.

Alternativa correta: A

13. (MACKENZIE – SP)Qual é o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular, sabendo que os lados das bases medem 10 cm e 4 cm e a altura , 4cm?

a) 205 cm^3

b) 206 cm^3

c) 207 cm^3

d) 208 cm^3

e) 209 cm^3

Alternativa correta: D

14. (Ufscar) Se a soma das medidas de todas as arestas de um cubo é 60cm, então o volume desse cubo, em centímetros cúbicos, é:

a) 125.

b) 100.

c) 75.

d) 60.

e) 25

Alternativa correta: A

15. (UFRN) Como parte da decoração de sua sala de trabalho, José colocou sobre uma mesa um aquário de acrílico em forma de paralelepípedo retângulo, com dimensões medindo 20cm x 30cm x 40cm. Com o aquário apoiado sobre a face de dimensões 40cm x 20cm, o nível da água ficou a 25cm de altura. Se o aquário fosse apoiado sobre a face de dimensões 20cm x 30cm, a altura da água, mantendo-se o mesmo volume, seria de, aproximadamente:

a) 16cm.

b) 17cm.

c) 33cm.

d) 35cm.

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

PARTE III

MATEMÁTICA

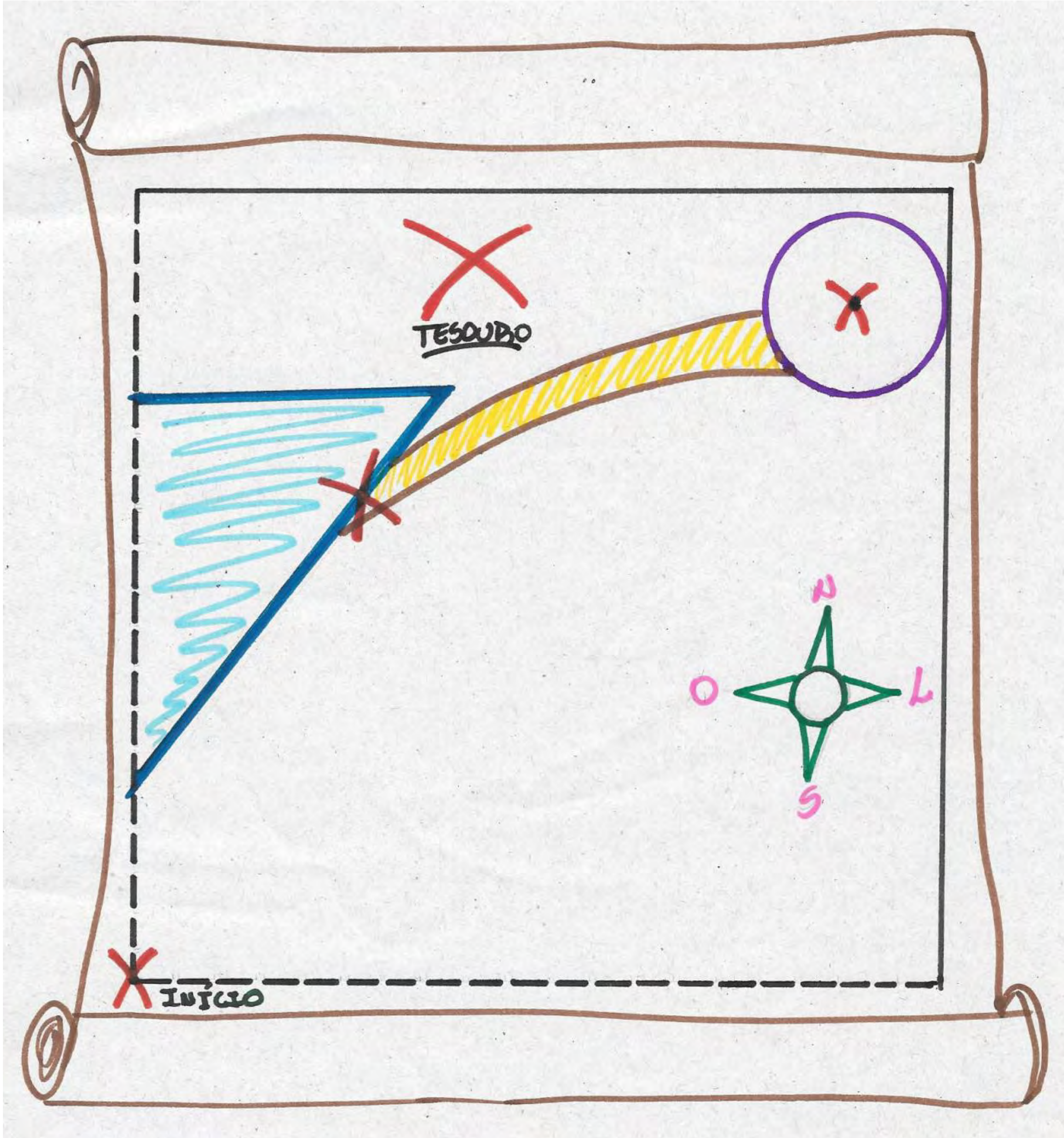
03

GEOMETRIA ANALÍTICA

meSalva!

GEOMETRIA ANALÍTICA

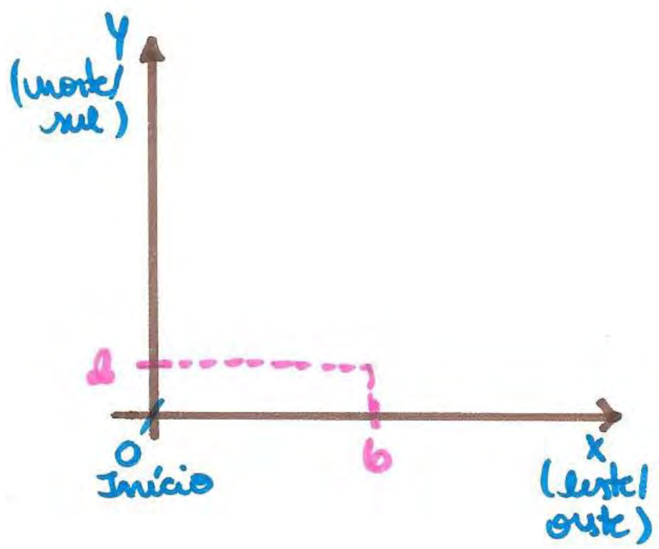
Sua professora de matemática resolveu inovar e criou uma caça ao tesouro para ensinar os conteúdos relacionados à Geometria Analítica. Para isso, ela desenvolveu mapas baseados em áreas de um parque e levou toda a turma para lá. Depois de todos os alunos serem divididos em pequenos grupos, ela entregou um mapa para cada um. O do seu grupo foi o seguinte:



Ao entregar o mapa, a professora indicou para cada grupo qual seria seu ponto de partida, local em que seria encontrada a primeira pista e explicou que cada traço do mapa corresponderia a um passo. Além disso, todas as pistas deveriam ser anotadas no mapa, que em princípio continha apenas anotações essenciais sobre o local.

PISTA 1: Andem 2 passos a norte e 6 a leste para encontrar a próxima pista.

Perceba que os passos indicados pelos traços podem ser entendidos como unidades no plano cartesiano, então note que os passos dados à leste (ou oeste) são correspondentes a unidades do eixo x, assim como passos dados à norte ou sul são correspondentes a unidades do eixo y. Portanto, para encontrar a próxima pista é necessário encontrar o ponto P(6, 2), que indica 6 unidades no eixo x e 2 no eixo y. Veja a imagem abaixo.

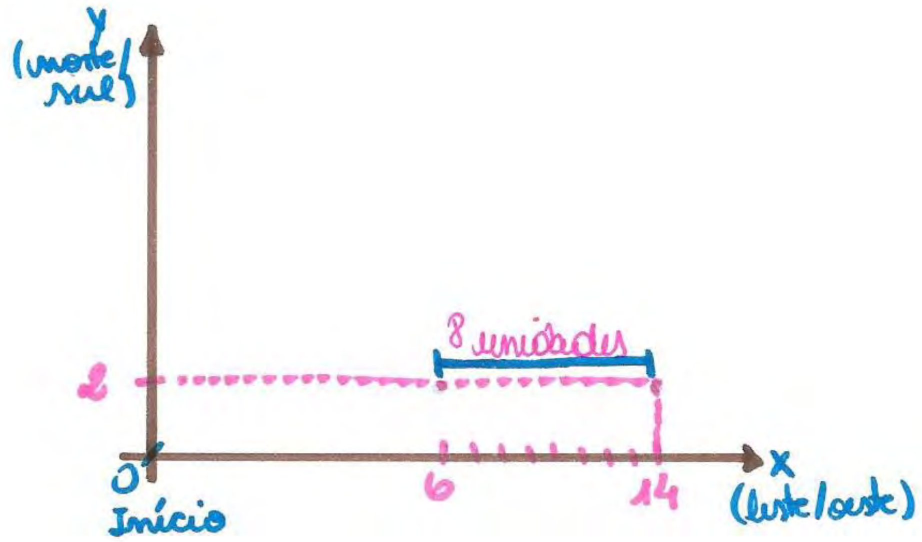


Ao chegar nesse local, vocês encontraram uma pessoa com a seguinte pista:

PISTA 2: Ótimo! Vocês acabaram de relembrar como localizar pontos em um plano cartesiano. Esse conhecimento será muito útil em todas as etapas dessa jornada! Continuem seguindo as instruções!

Para liberar a passagem para a próxima pista vocês precisam responder à seguinte pergunta: Se a próxima pista está 2 passos a norte e 14 passos a leste do ponto inicial, qual é a distância entre o local da 3ª pista e o da 2ª?

Para responder à essa pergunta é necessário entender conceitos sobre a distância entre dois pontos, consegue perceber? Vamos utilizar novamente os conceitos de localização no plano cartesiano para marcar os locais das pistas no mapa. O primeiro ponto é o que já sabemos, $P_1(6, 2)$ e o segundo é o fornecido pela pista, P_2 (14, 2). Lembre que essas unidades são contadas a partir da origem (ou ponto inicial). Veja como fica:



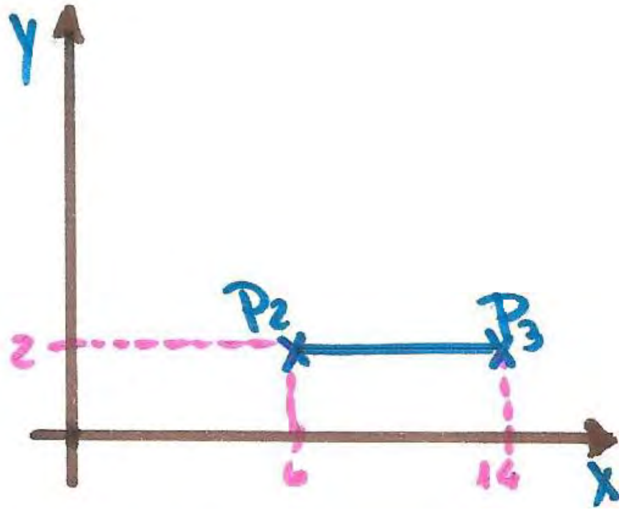
Agora que já se sabe a localização exata de ambos os pontos é possível saber qual é a distância entre eles. Para isso, basta contar quantos passos (ou unidades) há entre um ponto e outro, ou fazer a subtração entre eles: 14 - 6 = 8 passos (unidades). Então, a distância entre os pontos referidos é 8 passos. Como um dos seus colegas teve dúvidas, ele resolveu contar as unidades no mapa e encontrou o mesmo resultado.

Ao saber disso, você e seu grupo disseram a resposta correta e tiveram a passagem liberada para a próxima pista, que estava, como vocês já haviam calculado, 8 passos a leste do lugar em que vocês estavam.

Chegando no local da terceira pista, vocês encontraram o seguinte:

PISTA 3: Parabéns por terem resolvido com êxito o exercício sobre a distância entre dois pontos! Agora vamos nos aprofundar um pouco mais na Geometria Analítica. Notem que vocês percorreram uma linha reta até aqui. Para encontrar a próxima pista é necessário encontrar o ponto médio deste trajeto e andar 7 passos a norte a partir do resultado que vocês encontrarem.

Para resolver o novo enigma seu grupo mais uma vez recorreu ao plano cartesiano. Vocês traçaram uma linha reta entre os pontos que haviam marcado no mapa anteriormente conforme a figura abaixo:



Saber o ponto médio de um segmento de reta exige que seja feita a média entre os pontos inicial (P_1) e final (P_2) desse segmento. Veja:

$$x_M = \frac{x_i - x_f}{2}$$

$$y_M = \frac{y_i - y_f}{2}$$

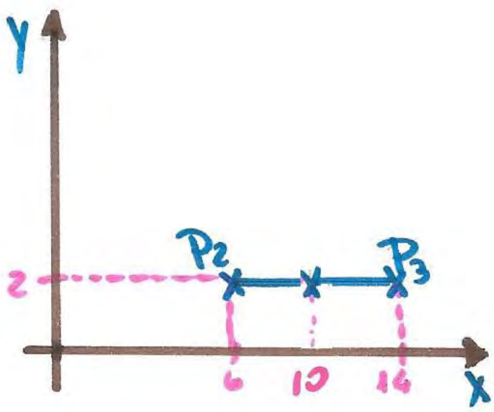
Como sabemos que os pontos são $P_1(6, 2)$ e $P_2(14, 2)$, basta substituirmos os pontos nas equações acima. Vamos estipular que P_1 é o ponto inicial e então x_i é 6 e y_i é 2, portanto, P2 é o ponto final e x_f vale 14 e y_f vale 2. Veja como fica:

$$P_1(6,\ 2)\ e\ P_2(14,\ 2)$$

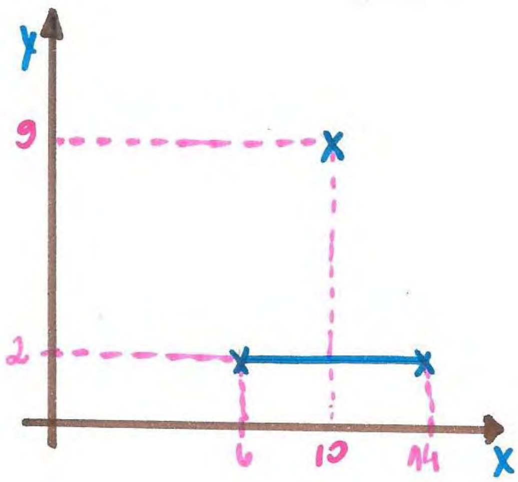
$$x_M = \frac{x_i + x_f}{2} = \frac{6 + 14}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$y_M = \frac{y_i + y_f}{2} = \frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, o ponto médio do segmento de reta percorrido pelo grupo é $P_M(10, 2)$. Veja no plano cartesiano:



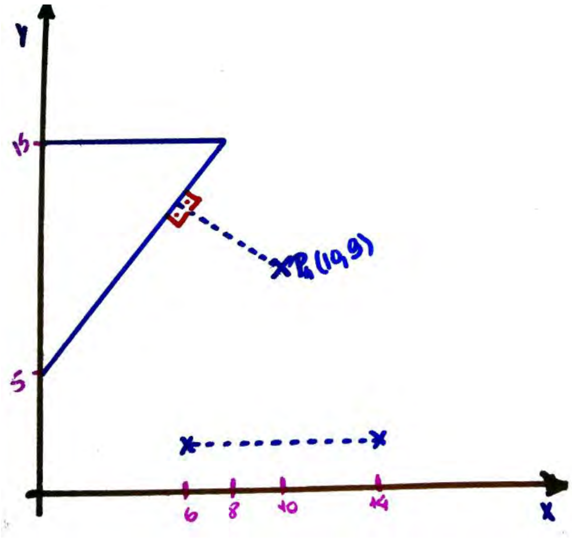
Mas saber o ponto médio do segmento de reta não é o suficiente para encontrar a próxima pista. Lembrem que ao encontrá-lo vocês devem caminhar 7 passos a norte a partir dele. Portanto, a próxima pista, no plano cartesiano, será encontrada no ponto $P_4(10, 9)$. Veja abaixo a localização no mapa:



Ao chegar lá, seu grupo encontrou a nova pista.

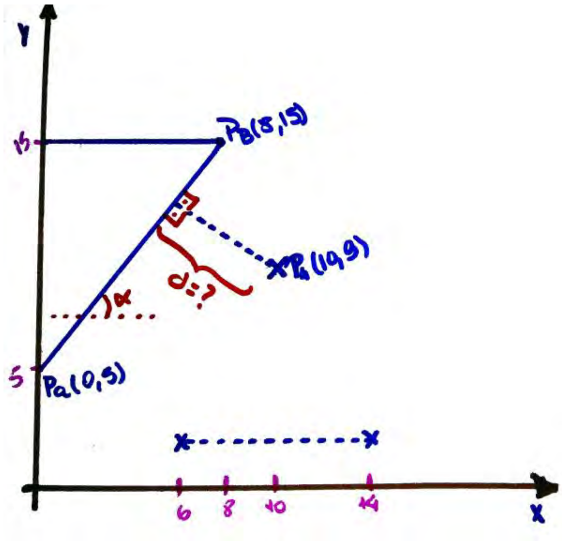
PISTA 4: Muito bem! Agora vocês devem seguir em linha reta até a borda da piscina. É essencial que o caminho seja perpendicular à borda. Ao chegarem lá vocês receberão novas instruções.

A forma mais segura de saber qual caminho seguir é traçando uma linha reta que faça um ângulo de 90º com a borda no próprio mapa. Ao fazer isso, bastou segui-la para ganhar novas instruções. Veja como fica esse caminho, do ponto P(10,9) até a borda da piscina:



PISTA 5: Como vocês seguiram à risca o caminho solicitado chegaram a uma projeção do ponto anterior nesse segmento de reta (borda da piscina). Sabendo os pontos das extremidades da piscina (consulte o mapa), qual foi a distância que vocês percorreram para chegar até aqui?

Agora ficou um pouquinho mais complicado, mas a Geometria Analítica vai te ajudar a resolver esse probleminha. É pedido, basicamente, a distância entre o ponto P(10, 9), que vocês estavam, e a borda da piscina (uma reta), ou seja, a distância entre um ponto e uma reta. Para resolver isso, primeiramente, é necessário saber que a partir de dois pontos de um segmento de reta é possível saber a inclinação dela, chamada de coeficiente angular. Veja a representação da distância percorrida (d) entre o ponto P4 e a borda da piscina e a representação da inclinação (ângulo α) da borda da piscina em relação ao eixo x.



Veja como calcular o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$m = \tan \alpha$$

Sabendo que os pontos fornecidos no mapa são $P_a(0, 5)$ e $P_b(8, 15)$ podemos substituir os valores na equação acima para saber o valor do coeficiente angular.

Fazendo o arco tangente é possível descobrir o ângulo que essa reta faz com o eixo x. No caso, arctan de 1,25 é 51,25° aproximadamente.

Ótimo, sabendo o valor da inclinação dessa reta e um ponto dela é possível saber qual é a equação geral dessa reta. Veja:

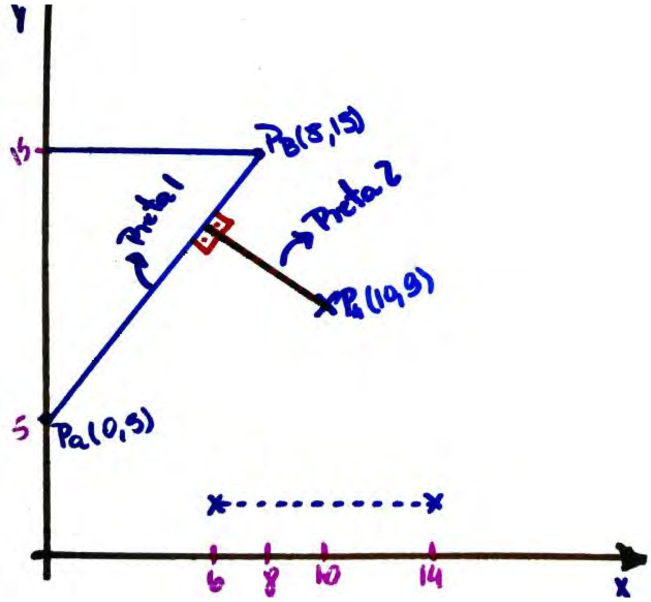
$$y - y_o = m.(x - x_o)$$

Lembrando que m é o coeficiente angular da reta e x_0 e y_0 é um ponto da reta. Como sabemos dois pontos, podemos escolher entre um deles. Vamos ficar com o P(0, 5). Então, substituindo os valores na equação anterior, teremos:

$$P_A(0,\ 5)$$

$$y - y_o = m.(x - x_o)$$
$$y - 5 = 1{,}25.(x - 0)$$
$$y - 5 = 1{,}25x$$
$$y - 1{,}25x - 5 = 0$$

Note que você e seus colegas percorreram um trajeto em linha reta até a borda da piscina. Então, podemos entender esse trajeto como um segmento de reta (Reta 2) que inicia no ponto em que vocês estavam $P_4(10,\ 9)$ e segue perpendicularmente à reta que corresponde a borda da piscina (Reta 1).



Então, uma das formas de saber a distância entre o ponto P4 e a reta é justamente comparando as equações das duas retas. Para isso, como já sabemos a equação de uma delas, é necessário saber a da outra. Lembre que para encontrarmos a equação da primeira reta, nós antes calculamos o coeficiente angular dela a partir de dois pontos. O grande problema é que agora, nesse novo segmento de reta, sabemos apenas um ponto. Felizmente nós temos outra forma de encontrá-lo: quando duas retas são perpendiculares, o coeficiente de uma é o inverso negativo da segunda. Veja:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Então, se chamarmos o coeficiente angular da primeira reta m_1, o da segunda será m_2, e por isso, substituindo o valor de m_1 na equação acima, teremos:

$$m_1 = 1{,}25$$

$$\therefore$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{1{,}25}$$

$$m_2 = -0{,}8$$

Ótimo! Agora podemos saber qual é a equação da segunda reta a partir do ponto P_4 (10, 9):

$$P(10,\ 9)$$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

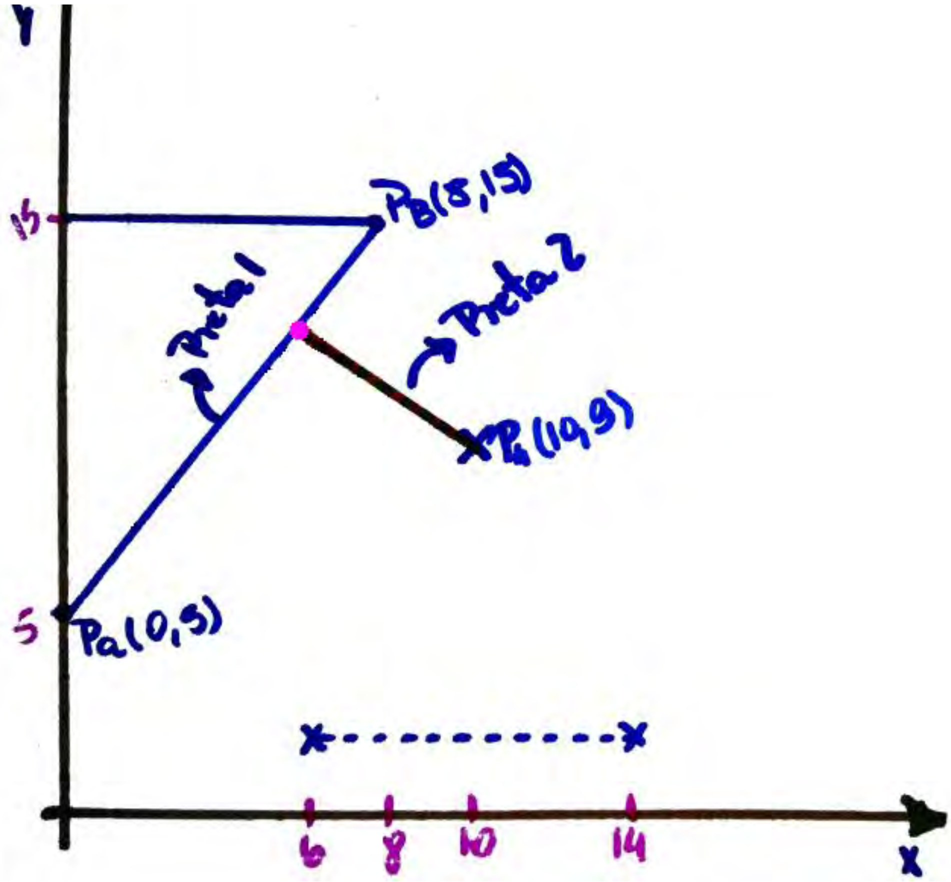
$$y - 9 = -0{,}8(x - 10)$$

$$y - 9 = -0{,}8x + 8$$

$$y - 9 + 0{,}8x - 8 = 0$$

$$y + 0{,}8x - 17 = 0$$

Note que as duas retas se cruzam em um ponto, justamente aquele que é a projeção do ponto P_4 (veja o pontinho rosa na imagem abaixo).



Então, para descobri-lo, basta montar um sistema de duas variáveis e encontrar x e y. Acompanhe:

$$\begin{cases} y - 1{,}25x - 5 = 0 \\ y + 0{,}8x - 17 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y - 1{,}25x - 5 = 0 \\ y + 0{,}8x - 17 = 0 \ (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1{,}25x - 5 = 0 \\ -y - 0{,}8x + 17 = 0 \end{cases}$$

$$-2{,}05x + 12 = 0$$

$$-x = \frac{-12}{2{,}05}$$

$$x = 5{,}85$$

$$y - 1{,}25x - 5 = 0$$

$$y - 1{,}25(5{,}85) - 5$$

$$y = 12{,}31$$

$$\begin{matrix} x = 5{,}85 \simeq 6 \\ y = 12{,}31 \simeq 12 \end{matrix} \dashrightarrow P(6,\ 12)$$

Para facilitar, vamos arredondar para $P_5(6, 12)$.

Mas essa não é a resposta desse enigma! A pergunta era sobre a distância entre o ponto e a reta. Para esse cálculo nós temos uma equação:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Nesse caso, vamos chamar P_4 de P_b e P_5 de P_a (como tudo está ao quadrado, a ordem não importa). Substituindo os pontos na equação acima, teremos o seguinte:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d = \sqrt{(10 - 6)^2 + (9 - 12)^2}$$
$$d = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$d = \sqrt{25}$$
$$d = 5$$

Então, a distância entre o ponto P_4 e a reta da borda da piscina é de 5 passos!

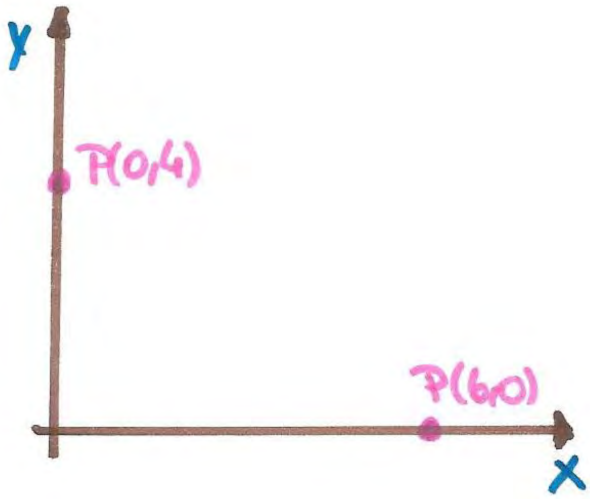
Antes de continuar, apenas por curiosidade, perceba que se tivermos uma equação qualquer que descreve um segmento de reta é possível traçarmos ela sem dificuldades. Para exemplificar isso, vamos analisar a equação $2x + 3y - 12 = 0$. Para traçarmos a reta que corresponde a ela é necessário encontrar apenas dois pontos distintos, para isso, faremos uma vez x =0 e outra vez y = 0. Veja:

$$2x + 3y - 12 = 0$$

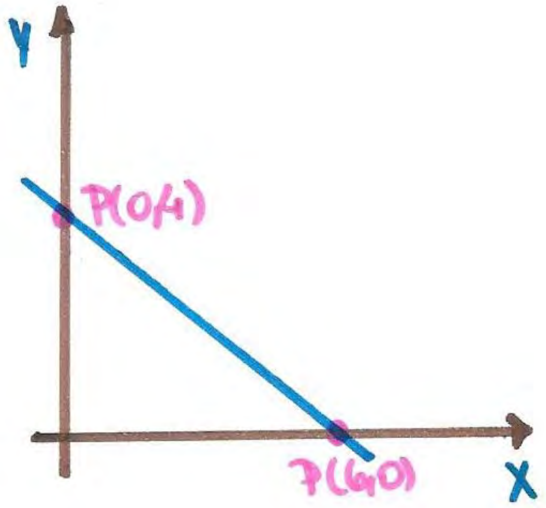
$$x = 0 \dashrightarrow 2(0) + 3y - 12 = 0$$
$$3y - 12 = 0 \qquad P(0,\ 4)$$
$$y = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = 0 \dashrightarrow 2x + 3(0) - 12 = 0$$
$$2x - 12 = 0 \qquad P(6,\ 0)$$
$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Perceba que um dos pontos toca diretamente o eixo x e outro o eixo y. Vamos marcá-los em um plano cartesiano à parte do mapa:



Agora basta ligarmos um ponto ao outro, lembrando que essa reta continua além dos pontos.



Voltando à nossa caça ao tesouro...

PISTA 5 - CONTINUAÇÃO: Parabéns por terem conseguido a resposta certa! Deu um trabalhão, mas valeu a pena! Agora siga pelo caminho indicado pela estradinha de tijolos para encontrar a próxima pista.

Ao seguir a quinta pista, vocês encontraram o seguinte:

PISTA 6: Vocês estão no centro de um quiosque cuja forma é regida pela equação:

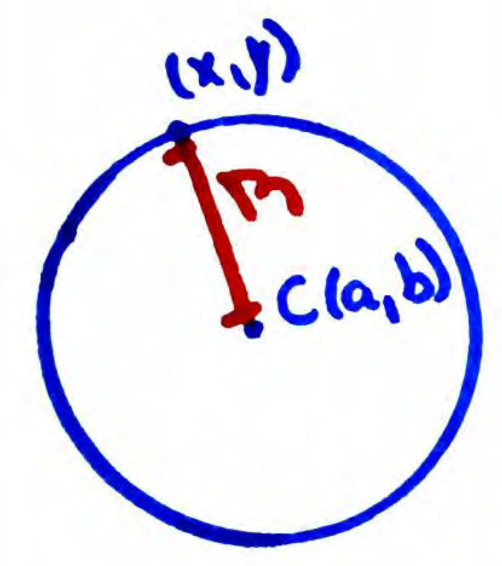
$$x^2 + y^2 - 36x - 34y + 604 = 0$$

Para conseguir a próxima e última pista, diga qual é o ponto central do quiosque e a distância entre este ponto e a borda do quiosque.

A geometria analítica além de se preocupar em compreender o comportamento de pontos e retas, fornece subsídios para o estudo de circunferências, exatamente o formato do quiosque. Uma equação no formato $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 + R^2 = 0$ (equação normal) descreve uma circunferência, cujo R é o valor de seu raio e os coeficientes a e b correspondem aos valores do centro da circunferência. Portanto, reconhecer uma circunferência é muito importante! Outra forma de representar essa equação é a reduzida, em que é possível identificar os coeficientes e consequentemente o ponto central da circunferência mais facilmente. Veja a equação reduzida:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Note que $(x - a)^2 + (y - b)^2$ é a distância entre um ponto (x, y), que está na borda da circunferência, e o centro dela (a, b), e, portanto, essa distância será sempre o raio ao quadrado (R^2) da circunferência. Veja uma representação disso abaixo:



Agora perceba que a equação fornecida pela pista é bastante semelhante à equação normal da circunferência, certo? Vamos colocá-las em coluna para visualizarmos melhor as semelhanças:

$$x^2 + y^2 - 36x - 34y + 604 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Note que, por comparação, é possível encontrar os coeficientes a e b e, sabendo eles, o raio. Acompanhe:

Comparando os termos que envolvem o coeficiente a e o x, teremos:

$$-36x = -2ax$$
$$-36 = -2a$$
$$a = 18$$

Agora comparando os termos que envolvem o coeficiente b e o y:

$$-34y = -2by$$
$$-34 = -2b$$
$$b = 17$$

Então, já sabemos que o centro da circunferência vale C(16,17). Agora podemos encontrar o raio dela, a partir desses valores. Por isso, vamos comparar os termos que envolvem os coeficientes e o raio sem acompanhamento de x ou y:

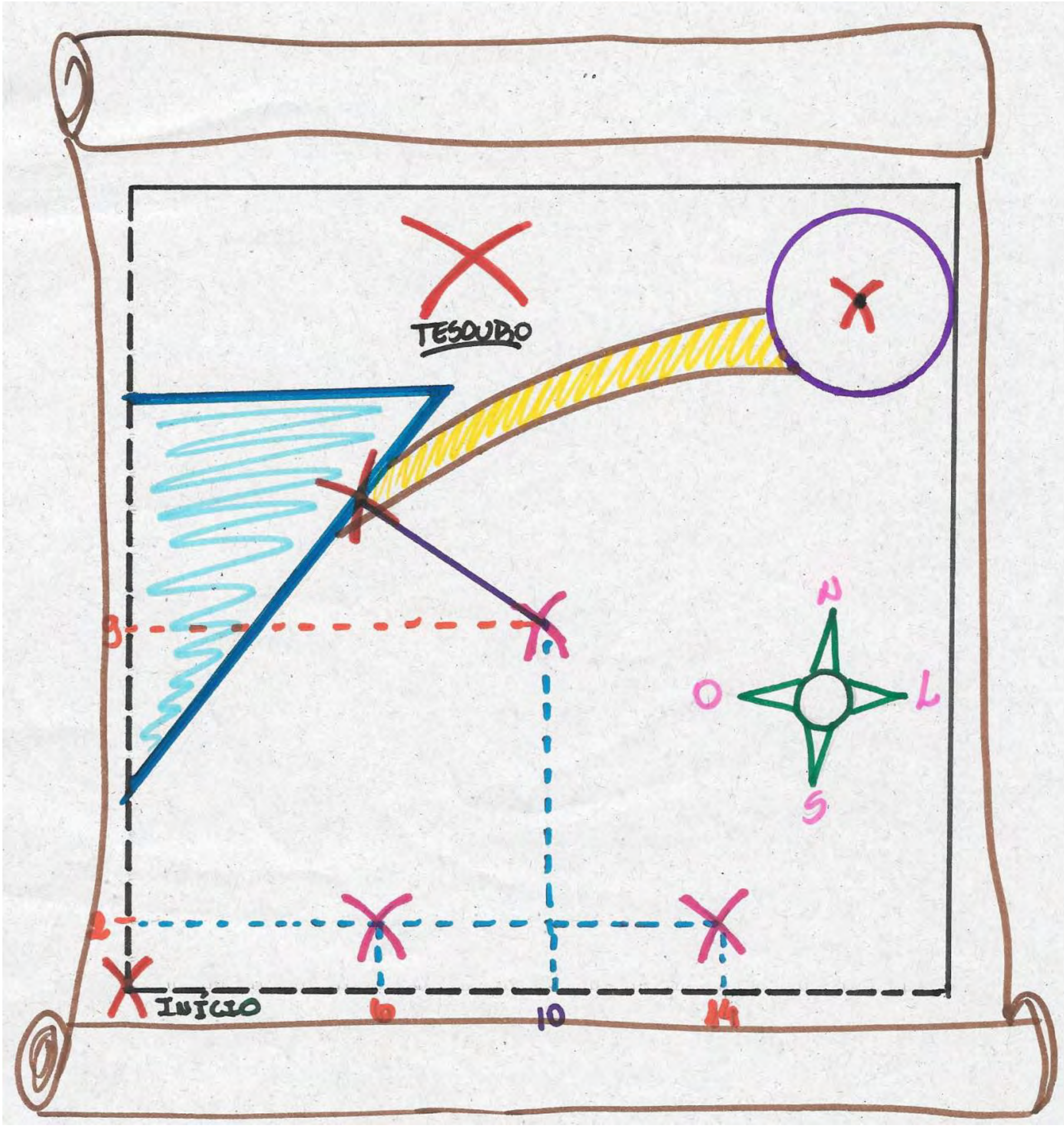
$$a = 18 \qquad b = 17$$

$$a^2 + b^2 - R^2 = 604$$
$$18^2 + 17^2 - R^2 = 604$$
$$324 + 289 - R^2 = 604$$
$$R^2 = 604 - 324 - 289$$
$$R^2 = 9$$
$$R^2 = \sqrt{9}$$
$$R = 3$$

Ótimo! Então o raio da circunferência, ou a distância entre o centro e a borda do quiosque, vale 9!

PISTA 6 - CONTINUAÇÃO: Parabéns! Vocês conseguiram acertar o último enigma! Deem 8 passos a oeste para encontrar o tesouro!

Por fim, o mapa do seu grupo ficou assim:



Ao chegarem no local do tesouro vocês encontraram sua professora que pediu o mapa em que vocês fizeram anotações para analisar posteriormente e juntamente com um chocolatinho cada um, entregou a seguinte mensagem.

TESOURO: Parabéns, querido aluno! Vocês passaram por uma saga matemática fantástica e o conhecimento que desenvolveram até aqui é o seu maior tesouro! Até a próxima aventura!

Confere aí um resuminho que pode te ajudar a resolver os exercícios de Geometria Analítica:

RESUMO
GEOMETRIA ANALÍTICA

Ponto Médio de Segmento de Reta	$x_M = \frac{x_i - x_f}{2}$; $y_M = \frac{y_i - y_f}{2}$
Coeficiente angular da reta	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \tan\alpha$
Equação Geral da reta	$y - y_0 = m(x - x_0)$
Distância entre ponto e reta	$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Equação normal da circunferência	$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 + R^2 = 0$
Equação reduzida da circunferência	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

EXERCÍCIOS

Calcule a distância entre os pontos (7,2) e (-1,8).

a) 8

b) 6

c) 10

d) 12

e) 7

Alternativa correta: C

Dada a reta y = 3x+10, indique quais alternativas são verdadeiras.

I - A reta cruza o eixo y em (10,0)

II - O coeficiente ângular da reta vale 3.

III - A reta cruza o eixo x em (10/3,0)

a) Apenas I

b) Apenas II.

c) II e III.

d) I e II.

e) I, II e III.

Alternativa correta: B

(UFMG) A reta y=3x+a tem apenas um ponto em comum com a parábola y=x2+x+2. Qual o valor de a?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Alternativa correta: A

(ITA) Os pontos (0,0); (b,2b) e (5b,0) são vértices de um retângulo. Qual a coordenada do outro vértice?

a) (-b,-b)

b) (2b,b)

c) (4b,-2b)

d) (3b,-2b)

e) (2b,-2b)

Alternativa correta: C

Considere as seguintes retas e as afirmações a seguir.

$$y = 2x - 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

I - As retas nunca se cruzam.

II - As retas se encontram em um único ponto de abscissa positiva.

III - As retas são perpendiculares.

Quais estão corretas?

a) Apenas I

b) Apenas II

c) Apenas III

d) II e III

e) I, II e III

Alternativa correta: D

Uma circunferência no plano cartesiano apresenta raio 1 e centro em (2,-1). Qual das alternativas abaixo melhor representa sua equação?

a) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

b) $(x-2)^2-(y+1)^2=1$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

d) $x^2+y^2=1$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

Alternativa correta: C

As retas $x = 3$, $y = 2$ e $y = -(3/4)x + (21/2)$ formam um triângulo no primeiro quadrante cuja área aproximada é

a) 18
b) 26
c) 30
d) 36
e) 42

Alternativa correta: B

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

PARTE III

MATEMÁTICA

04

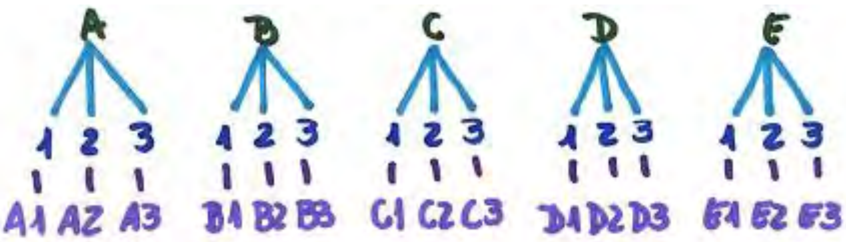
ANÁLISE COMBINATÓRIA

meSalva!

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Depois de muita dedicação e estudo, você conseguiu atingir o objetivo de entrar na universidade e agora precisa ir até lá para finalmente fazer sua matrícula. Como ela fica um pouco longe da sua casa, você precisará tomar dois ônibus: um da sua casa até o terminal central da cidade e outro do terminal até a universidade. Felizmente você tem 5 opções de linhas para o primeiro trajeto e 3 opções para o segundo. Quantas opções você terá para chegar até a universidade?

Para podermos solucionar esse problema vamos iniciar o nosso estudo de Análise Combinatória, que busca resolver problemas relacionados a diferentes agrupamentos de elementos. Vamos dividir os trajetos de casa até o terminal em A, B, C, D e E e os trajetos do terminal até a universidade em 1, 2 e 3. Então, se você pegar em casa a linha A, terá as opções 1, 2 e 3 para ir até a universidade. Caso opte pela linha B, também terá as 3 opções para o segundo trajeto. O mesmo acontecerá para as outras linhas, então, podemos montar um diagrama para visualizar melhor suas opções. Veja:



Note que, se contarmos cada uma dessas possibilidades, teremos 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 ou 5.3 = 15. Assim, quando temos etapas (no nosso caso, os trajetos) sucessivas e independentes, aplicamos o ***Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*** para sabermos quais são as possibilidades de agrupamento dos elementos que estamos estudando, isto é, multiplicamos o número de possibilidades da primeira etapa pelo número de possibilidades das outras etapas. Formalmente podemos escrever:

Evento de duas etapas sucessivas e independentes $= \underset{\text{possib. 1ª etapa}}{m} \cdot \underset{\text{possib. 2ª etapa}}{n} =$ nº de possibilidades

Veja um outro exemplo de aplicação direta do PFC: No seu primeiro dia na universidade você conheceu um lugar que frequentará quase diariamente por muito tempo, o restaurante universitário, carinhosamente chamado de RU. Lá você tem 3 tipos de salada, 4 tipos de pratos quentes e 2 tipos de frutas. Quantas possibilidades de montar seu prato você tem?

Para começar, vamos chamar as opções de salada de S_1, S_2 e S_3, as opções de pratos quentes de P_1, P_2, P_3 e P_4 e as opções de frutas de F_1 e F_2. Agora precisamos montar nosso diagrama para podermos visualizar melhor as possibilidades:

Para saber quantas possibilidades de fazer seu prato você tem, você pode contar a última coluna do diagrama ou aplicar o PFC que propõe, basicamente, que as possibilidades sejam multiplicadas. Assim, aplicando o PFC, teremos 3.4.2 = 24 possibilidades de montar seu prato.

Agora que você está dominando o PFC, está calculando todas as possibilidades de agrupamentos que pode. A sua última ideia foi calcular quantos agrupamentos diferentes é possível fazer com as letras da palavra “curso”, algo que também podemos chamar de anagramas diferentes dessa palavra. Para isso vamos fazer um diagrama um pouco diferente. Veja abaixo:

Cada um desses espaços equivale a uma letra. Perceba que, para o primeiro lugar, temos 5 possibilidades de letras. Considerando que obrigatoriamente esse lugar será ocupado por uma letra, o próximo espaço terá apenas quatro possibilidades de letras, assim como o terceiro espaço, que terá três possibilidades e o quarto lugar, que terá duas possibilidades, e por fim sobrará uma letra que ocupará o quinto e último espaço. Vamos escrever o número de opções para cada um desses espaços do diagrama.

$\underline{5} \,.\, \underline{4} \,.\, \underline{3} \,.\, \underline{2} \,.\, \underline{1}$

Então, pelo PFC, para sabermos quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra curso, basta multiplicarmos cada uma das possibilidades do diagrama que construímos acima. Assim: 5.4.3.2.1 = 120 possibilidades.

Esse processo em que iniciamos a multiplicação de um número pelo seu antecessor até chegar no número 1 é denominado **fatorial** de um número e é indicado pelo símbolo “!”. Assim, o fatorial de 5 ou 5 fatorial é indicado por 5!, que é 5.4.3.2.1.

Formalmente podemos escrever que, se temos n elementos distintos (no nosso caso, 5 letras diferentes), o número de agrupamentos ordenados que podemos formar com eles é dado por:

Possibilidades = n.(n-1).(n-2) ... 2.1

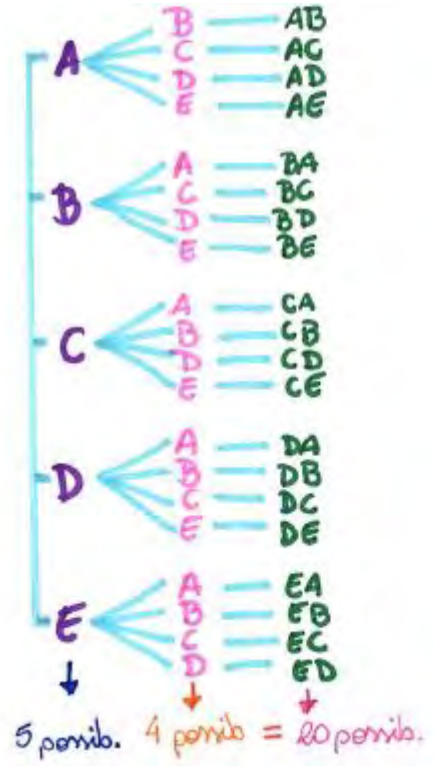
Então, no nosso caso como n = 5, teremos:

Possibilidades = 5.(5 - 1).(5 - 2) ... 2.1

Possibilidades = 5.(4).(3).2.1

Possibilidades = 120

Sua universidade oferece bolsa de estudos de 100% da mensalidade para o primeiro colocado no processo seletivo e 50% para o segundo colocado. Você ficou sabendo que os cinco primeiros colocados foram cinco colegas seus: Angela, Bianca, César, Diana e Eduardo, que também estudaram no Me Salva!, e ficou curioso para saber quantos são os cenários possíveis para os dois primeiros lugares. Para realizar esse cálculo, você montou o diagrama abaixo chamando seus colegas pelas iniciais de seus nomes: A, B, C, D e E.



Pelo PFC, conseguimos facilmente calcular (mesmo sem o diagrama) quantos são os cenários possíveis para a contemplação das bolsas. Aqui é *muito* importante notar que o cenário AB e *diferente* do cenário BA, já que o primeiro indica que A ganhou bolsa integral e B bolsa parcial, e o segundo que B ganhou bolsa integral e A parcial. Assim como BC é diferente de CB, ou CD é diferente de DC, portanto, a ordem nesse caso importa. Então, o cálculo de possibilidades de agrupamentos em que estamos preocupados com a ordem dos elementos é chamado de **arranjo simples**.

Formalmente dizemos que arranjo simples são os agrupamentos *ordenados* de *n* elementos tomados *p* a *p* (considerando *p* sempre menos do que n). Então, no caso que estudamos, o número de elementos n é o número de alunos, 5, tomados *p* a *p*, ou ainda, tomados 2 a 2. Assim, o arranjo é indicado por $A_{n,p}$ ou A_n^p e, no caso do nosso problema, temos $A_{5,2}$ ou A_2^5.

Note que, para a primeira posição (o primeiro lugar), temos *n* opções (5 opções); para a segunda posição, temos n -1 opções; para a terceira posição teríamos n - 2 opções e, para a p-ésima posição, teríamos n - (p - 1) opções. Veja a tabela abaixo para entender melhor como é formada a equação do **Arranjo Simples**:

1ª posição → n possibilidades

2ª posição → $n-1$ possibilidades
↳ já que uma foi escolhida anteriormente

3ª posição → $n-2$ possibilidades
↳ já que duas foram escolhidas anteriormente

p-ésima posição → $n-(p-1)$ possibilidades
↳ já que p-1 já foram escolhidos anteriormente

ou

$n-p+1$ possibilidades

Como o PFC propõe que essas possibilidades sejam multiplicadas para sabermos o número total de arranjos, teremos:

$$A_{n,1} = n$$
$$A_{n,2} = n(n-1)$$
$$A_{n,3} = n(n-1)(n-2)$$
$$A_{n,p} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}_{p \text{ fatores}}$$

Veja que os fatores estão diminuindo um a um, então podemos reescrevê-los em forma de fatorial. Veja o caso do nosso exemplo: temos 5 elementos tomados 2 a 2, então, pelo PFC, temos que o arranjo é $A_{5,2}$.

Podemos multiplicar $\frac{3!}{3!}$ (que resulta em 1), que fica:

$$A_{5,2} = 5.4.\frac{3!}{3!}$$

Abrindo o fatorial do denominador e transformando em outro fatorial, teremos o seguinte:

$$A_{5,2} = \frac{5.4.3.2.1}{3!}$$

$$A_{5,2} = \frac{5!}{3!}$$

Outra forma de escrever esse resultado é:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Note que podemos generalizar a equação acima na forma:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Então, sabendo o número de elementos n e o agrupamento de p a p, é possível calcular o arranjo sem necessidade de construir um diagrama.

Existe um caso particular do Arranjo Simples denominado Permutação Simples. Ele acontece quando o número de elementos n é igual ao agrupamento p que se quer formar, ou seja, n = p. Por isso, teremos o seguinte:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad n = p$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{0!}$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{1}$$

Parece estranho o fatorial de zero ser 1, certo? Veja o motivo disso analisando n! abaixo:

$$n.(n-1)! = n!$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Se substituirmos n = 1, teremos:

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

$$0! = \frac{1!}{1}$$

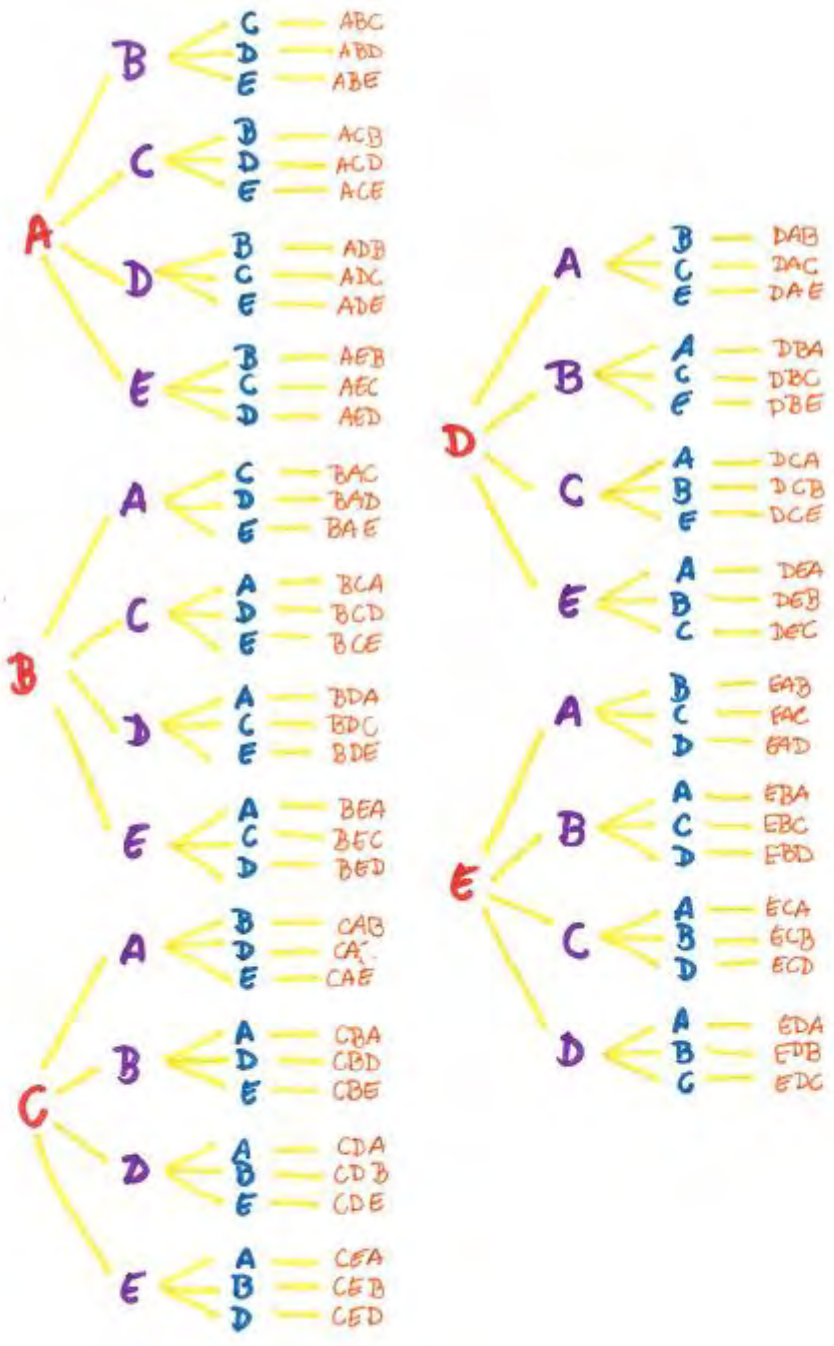
$$0! = 1$$

Aí está a prova de que o fatorial de zero é 1. Legal, né?

Continuando o raciocínio anterior, temos que $A_{n,n}$ é também chamado de P_n. Então, a Permutação Simples é todo o arranjo de n elementos distintos tomados n a n. Portanto, $P_n = n!$.

Agora vamos entender um novo conceito. Os mesmos alunos que ocuparam os primeiros cinco lugares no processo seletivo da universidade foram convidados para uma atividade do Me Salva! em que precisam formar um trio. Quantas são as possibilidades dessa formação?

Nossa análise sempre é iniciada por um diagrama que busca explanar a situação atacada. Veja:



Se utilizássemos apenas o PFC, como fizemos nas vezes anteriores, teríamos que o número de possibilidades é 5.4.3 = 60, mas note que não interessa se o agrupamento é ABC ou CBA, o trio será o mesmo. Um processo de agrupamento desse tipo, em que a ordem não importa, é chamado de **Combinação**. No caso desse exemplo, estamos calculando a combinação de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $C_{5,3}$.

Note que, caso a ordem importasse, o 1º caso, ABC, poderia ter as seguintes configurações:

$\{a, b, c\}$
$\{a, c, b\}$
$\{b, c, a\}$
$\{b, a, c\}$
$\{c, a, b\}$
$\{c, b, a\}$

Note que quando **bagunçamos** os elementos dentro do grupo, na verdade estamos fazendo **permutações**. Nesse caso encontramos 6 arranjos diferentes, como você pode ver ali em cima. O mesmo acontecerá para ADB, BDA ou DAB, por exemplo. Então, o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é 6 vezes o número de combinação de 5 elementos tomados 3 a 3. Muita informação? Então, vamos ver matematicamente.

$$A_{5,3} = 6.C_{5,3}$$

Podemos reescrever o número 6 como $P_3 = 3.2.1 = 6$ ou $P_3 = 3!$ e substituir na equação anterior:

$$A_{5,3} = P_3.C_{5,3}$$

Reorganizando e substituindo, chegaremos a:

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3}$$

$$C_{5,3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(2)!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5.4.3!}{3!(2)}$$

$$C_{5,3} = 10$$

Assim, temos 10 possibilidade de combinação. Generalizando a combinação de *n* elementos *p* a *p*:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Perceba que o Princípio Fundamental da Contagem foi o que nos permitiu deduzir todas essas particularidades da Análise Combinatória. Para que não haja dúvidas e para facilitar seu estudo, veja o esquema abaixo:

ESQUEMA DE ESTUDOS

Princípio Fundamental da Contagem — Possib. $= m \cdot n$

possib. 1ª etapa — possib. 2ª etapa

Arranjo Simples (ordem importa) — $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Permutação Simples (caso particular arranjo) — $A_{n,n} = P_n = n!$

Combinação (ordem não importa) — $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Você pode corroborar os resultados dos exercícios que vai fazer utilizando o site *Seeing Theory*. Confira o link nas Referências.

EXERCÍCIOS

1. (FGV) Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema, começando por três letras escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E seguidas de quatro algarismos escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possíveis é:

a) 78125

b) 7200

c) 15000

d) 6420

e) 50

Alternativa correta: C

2. (Mackenzie) Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8, são em número de:

a) 63

b) 420

c) 5.(62)

d) 5.(43)

e) 380

Alternativa correta: B

3. (UEMG) Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 3 pares de sapatos. O número de maneiras distintas com que a secretária poderá se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 par de sapatos corresponde a:

a) 13

b) 126

c) 72

d) 54

e) -

Alternativa correta: C

4. (UFF-RJ) O produto de 20.18.16.14....6.4.2 é equivalente a:

a) 20!/2

b) 2.20!

c) 20!/210

d) 210.10!

e) 20!/10!

Alternativa correta: D

5. (Puc-RS) Se (n-1)!/(n+1)!-n!=1/81, então n é igual a:

a) 13
b) 11
c) 9
d) 8
e) 6

Alternativa correta: C

6. (UFOP) – Minas Gerais No meio da “invasão tecnológica” que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que a senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição. Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?

a) 132,00
b) 148,00
c) 154,00
d) 168,00
e) 184,00

Alternativa correta: D

7. (OSEC-SP) Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência. Então, o número de posível de formas de optar é:

a) 6.720

b) 336

c) 520

d) 120

e) 56

Alternativa correta: B

8. (Uel) São dados 12 pontos num plano, 3 a 3 não colineares. O número de retas distintas determinadas por esses pontos é

a) 66

b) 78

c) 83

d) 95

e) 131

Alternativa correta: A

9. (UFSCAR) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR parecem juntas nesta ordem.

a) 6

b) 18

c) 24

d) 36

e) 38

Alternativa correta: C

10. FUVEST – Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas dez músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as prováveis seqüências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

a) 10 dias
b) 1 século
c) 10 anos
d) 100 séculos
e) 10 séculos

Alternativa correta: D

11. (Unesp) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 24

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

Seeing Theory. Disponível em: <http://students.brown.edu/seeing-theory/> Acesso em 28.02.2017.

PARTE III

MATEMÁTICA

05

PROBABILIDADE

meSalva!

PROBABILIDADE

EVENTOS ALEATÓRIOS E DETERMINÍSTICOS

Você e seus amigos costumam jogar jogos de tabuleiro e dessa vez você está a poucos passos de ganhar. Para isso você precisa tirar 11 no somatório dos dados que regem o jogo na próxima rodada. Como vocês estão jogando com 2 dados não viciados de 6 faces cada, precisa tirar 6 em um e 5 em outro. Qual é a probabilidade de você ser o campeão conseguindo 11 nos dados?

Para conseguirmos solucionar este problema precisaremos compreender conceitos de probabilidade. Primeiramente note que, por exemplo, o lançamento de um dado comum não viciado, assim como o de uma moeda regular é um fenômeno aleatório, ou seja, não é previsível já que qualquer uma das possibilidades tem as mesmas chances de acontecer. Esses fenômenos são classificados desse jeito porque apesar de sabermos que há chances de o dado cair nas faces 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou de a moeda cair em cara ou em coroa, não temos certeza de qual face cairá antes de realizarmos o lançamento. Outros fenômenos aleatórios são, por exemplo, o resultado de uma roleta (aquela que você joga uma bolinha numa roleta em movimento, dividida em espaços numerados), a escolha de uma carta em um baralho, ou ainda o resultado da Mega Sena.

Existem também alguns fenômenos denominados ***determinísticos***, isso porque seu resultado pode ser determinado antes de acontecer. Por exemplo, sabemos que a água (sob pressão de 1 atm), quando aquecida até 100^{o} C, entra em ebulição. Então, um evento determinístico é um evento certo (que vai acontecer certamente).

No caso do fenômeno aleatório do arremesso do dado existem 6 resultados possíveis para um lançamento: as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. Esse conjunto de possibilidades é chamado de ***espaço amostral*** (simbolizado por S, de space). Já o ato de lançar o dado e registrar os resultados é denominado ***evento***, e normalmente atribui-se uma letra maiúscula a ele (por exemplo, evento A). Vamos entender melhor esses detalhes nos exemplos abaixo:

- ✓ Evento A: Lançamento de um dado e registro dos resultados.

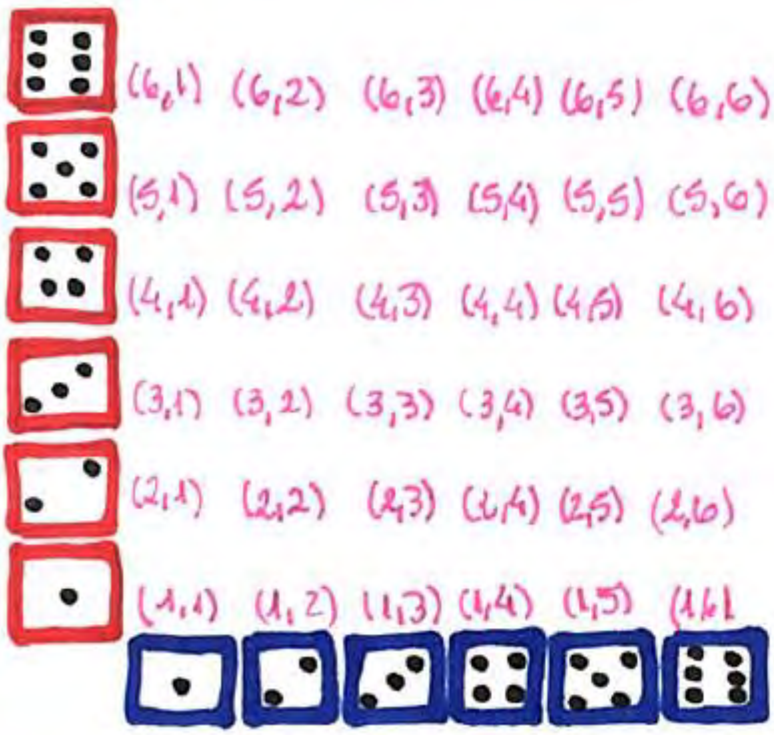
  Considerando que o dado tem 6 faces, temos 6 possibilidades para um lançamento. Então, o espaço amostral será S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

✓ Evento B: Ocorrer número ímpar no lançamento de um dado.

Já sabemos que são 6 possibilidades para o lançamento de um dado, mas como há uma restrição de números ímpares, temos um subconjunto do espaço amostral para os números ímpares dessas possibilidades. Assim, o espaço amostral é S: {1, 2, 3, 4, 5, 6} e o subconjunto do S é {1, 3, 5}, apenas os números ímpares.

UNIÃO E INTERSECÇÃO

Agora que já estudamos isso, podemos começar a calcular a **probabilidade** que você tem de conseguir ganhar o jogo nessa rodada. A probabilidade também pode ser entendida como a **chance** de o evento acontecer frente às diversas possibilidades. No caso que estamos investigando, o evento (que vamos chamar de A por conveniência) é lançar dois dados e obter 5 **e** 6 como resultado. Vamos desenhar dois dados (o azul e o vermelho) e analisar cada uma das possibilidades de faces que podem cair quando o lançamento dos dois é realizado, vamos denominar evento A.



Note que o "e" foi grifado justamente porque ele tem um significado bem importante. Na probabilidade, quando utilizamos o conectivo "e" significa que as duas situações que ele está conectando devem acontecer **simultaneamente**. Ou seja, os dados serão jogados ao mesmo tempo e queremos que em um deles caia 5 **e** no outro 6, somando os dois teremos os 11 que você precisa.

O espaço amostral neste caso será:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

Ou seja, os dados podem cair com qualquer uma das configurações acima. Contando o número de elementos você verá que tem 36 maneiras diferentes de os dados caírem ao serem lançados, mas há apenas duas formas de você conseguir atingir seu objetivo, o dado vermelho cair na face 5 e o dado azul cair na face 6, resultado (5, 6), ou o dado vermelho cair na face 6 e o azul na face 5, resultado (6, 5). Então, você tem 2 chances em 36 possibilidades de conseguir ganhar o jogo com o resultado do somatório dos dados resultando 11. Formalmente, podemos escrever o seguinte:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

Equação que podemos traduzir como a *probabilidade de o evento A ocorrer é dado como o número de eventos favoráveis dividido pelo número de possibilidades*. Informalmente podemos dizer que a probabilidade de um evento ocorrer é o número de chances (ou número de casos presentes no subespaço favorável) dividido pelo número de possibilidades (espaço amostral).

No nosso caso, o número de eventos favoráveis é 2 (já que os dados podem cair no formato (5, 6) ou (6, 5) e o número de possibilidades é 36, que são todas as configurações em que os dados podem cair. Substituindo esses valores, teremos o seguinte:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

$$P(A) = \frac{2}{36}$$

O resultado fracionário já é a probabilidade de o evento ocorrer, então interpretamos que há 2 chances em 36 de você obter o somatório 11 nos dados e conseguir vencer o jogo nesta rodada, mas na maioria das vezes a probabilidade é expressa em percentual, porque fica mais fácil de visualizá-la. Então, podemos reescrever esse resultado da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{2}{36} = 0{,}055$$

$$P(A) = 0{,}055.100$$

$$P(A) = 5{,}5\ \%$$

Portanto, a chance de você conseguir ganhar o jogo nessa rodada é de 5,5%. Bem baixinha, né? Não há nada a fazer senão contar com a sorte!

Outro jogo que você e seus amigos resolveram jogar foi utilizando um baralho. O jogo consiste em um de vocês segurar as cartas de apenas um naipe como num leque e dar uma ordem do tipo “você tem que escolher uma carta menor que 5 e par”. Qual a probabilidade de essa vez você conseguir vencer?

Veja que novamente o “e” está chamando atenção, assim temos novamente uma relação simultânea, que caracteriza uma intersecção entre conjuntos de uma afirmação e de outra. Nesse caso vamos analisar de uma forma um pouco diferente. Veja:

- ✓ **Evento B**: escolher uma carta menor que 5 e par. Como o jogo é realizado com apenas um naipe, temos 13 cartas (incluindo ás, valete, rainha e rei, que equivalem, respectivamente a 1, 11, 12, e 13) possíveis para escolher. Assim, o espaço amostral é S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

  O espaço amostral da primeira afirmação, ser par, são: (2, 4, 6, 8, 10, 12). E da segunda, ser menor do que 5,: (1, 2, 3, 4).

Veja que temos dois conjuntos, e que para que o evento ocorra eles precisam acontecer simultaneamente. Então, para saber a probabilidade de esse evento ocorrer basta realizar a intersecção entre eles e aplicar a fórmula que nos acompanhou até agora. Dá uma olhada:

$$(\underline{2},\underline{4},6,8,10,12) \cap (1,\underline{2},3,\underline{4}) = (2,4)$$

Portanto, temos apenas duas possibilidades para o evento ocorrer, frente a 13 opções de cartas. Aplicando a fórmula chegaremos a:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

$$P(A) = \frac{2}{13}$$

Que em percentual é:

$$P(A) = \frac{2}{13} = 0{,}153$$
$$P(A) = 0{,}153.100$$
$$P(A) = 15{,}3\%$$

Assim, a probabilidade de você escolher de primeira uma carta par e menor do que 5 é de 15,3%. Um pouco mais alta do que no jogo anterior, né? Quem sabe você tem mais sorte dessa vez!

Agora o jogo é escolher uma carta que seja par **ou** que tenha número primo. Veja que agora temos o conectivo "**ou**" no lugar do "e" que estávamos acostumados. Ou seja, pelo menos um dos dois casos deve ocorrer e **não** dois simultaneamente. Portanto, o espaço amostral deste evento será a união do espaço amostral da primeira afirmação com o da segunda. Então, veja:

- ✓ **Evento B**: escolher uma carta par **ou** com número primo. O jogo continua sendo realizado com apenas um naipe, então temos 13 cartas possíveis para escolher, tendo como espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

  As possibilidades de a carta escolhida ser par são: (2, 4, 6, 8, 10, 12), **ou** de ser ímpar: (2, 3, 5, 7, 11, 13). Como temos uma relação de união, basta unirmos os dois conjuntos para chegarmos a um terceiro: (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13), que terá 11 elementos (note que o 2 faz parte dos dois conjuntos e por isso não é necessário repeti-lo). Portanto, temos 11 possibilidades de o evento ocorrer frente a 13 opções de cartas. Substituindo esses valores na equação teremos:

$$P(B) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$
$$P(B) = \frac{11}{13}$$

Ou em percentual:

$$P(B) = \frac{11}{13} = 0{,}846$$
$$P(B) = 0{,}846.100$$
$$P(B) = 84{,}6\%$$

Então, você tem 84,6% chances de escolher uma carta par ou de número primo. Chances altas, certo?

PROBABILIDADE COM COMBINAÇÃO

Trabalhamos com situações bem interessantes até agora, mas a melhor de todas está por vir! Quem nunca sonhou em ganhar o prêmio milionário da Mega Sena? Você deve ter conhecimento de que, assim como o prêmio, são milhões de apostas e muitas vezes o prêmio acumula. Tem gente que faz até várias apostas com números diferentes para tentar a sorte, mas qual é a chance de alguém conseguir ganhar? Para entender o que acontece nesse caso você precisará de todos os conceitos que vimos até aqui e relembrar de Análise Combinatória.

Vamos começar supondo que você vai fazer um jogo escolhendo 6 números dos 60 disponíveis na cartela de apostas. Note que você vai realizar um processo de combinação de 60 elementos tomados 6 a 6. Quantas possibilidades de combinar esses elementos você tem? Relembrando a equação da combinação você sabe que n é o número de elementos (60) e p o número do agrupamento (6). Substituindo esses valores na equação, teremos o seguinte:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(54)!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60.59.58.57.56.55.54!}{6!54!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60.59.58.57.56.55}{6!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1}$$

Você vai precisar manipular essa última fração utilizando a simplificação para que o cálculo fique um pouco mais agradável de ser realizado. Por fim, você vai chegar em:

$$C_{60,\,6} = \frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1}$$

$$C_{60,\,6} = \frac{36045979200}{720}$$

$$C_{60,\,6} = 5006338860$$

Esse número gigantesco é o número de combinações que você pode fazer escolhendo 6 números dos 60 fornecidos na cartela. De todas essas possibilidades, apenas uma será a sorteada, então, existe uma chance em mais de 50 milhões. Formalmente podemos escrever:

$$P(A) = \frac{1}{5006338860}$$

Ou, em percentual:

$$P(A) = \frac{1}{5006338860} = 0{,}00000002$$

$$P(A) = 0{,}00000002.100$$

$$P(A) = 0{,}000002\%$$

Isso significa que uma pessoa tem 0,000002% de chance de ganhar na Mega Sena fazendo apenas uma aposta! Pouquíssimas chances, né? Mesmo assim muitas pessoas passam anos fazendo apostas para tentar realizar o sonho de ser milionário, afinal de contas, uma hora alguém vai ganhar, né? Mesmo que as chances sejam ínfimas.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES E EVENTOS INDEPENDENTES

- Eventos mutuamente excludentes: Qual é a probabilidade de conseguirmos, em **um único** lançamento de uma moeda, obter cara e coroa **simultaneamente**?

  Você consegue notar rapidamente que há 50% de chances de a moeda cair em cara e 50% de a moeda cair em coroa. Isso porque há uma chance entre duas possíveis (1/2 = 0,5 = 50%). E você também consegue notar facilmente que é impossível obter os dois resultados ao mesmo tempo, já que a moeda vai cair em cara ou do lado da coroa, nunca em ambos simultaneamente. Portanto, a probabilidade de obter os dois resultados ao mesmo tempo é zero e um evento deste tipo é chamado de mutuamente excludente.

- **Eventos independentes**: Em um pacote há 3 balas de limão, 3 de morango e 4 de café. Qual é a probabilidade de serem retiradas 3 balas de café **sucessivamente** sabendo que a cada retirada, a bala sorteada é **posta de volta** ao pacote?

  Note que o espaço amostral é composto por 10 elementos (balas de todos os sabores) e como a cada retirada a bala sorteada volta a fazer parte do pacote, o número de elementos do espaço amostral não é alterado. Então, para a primeira escolha temos 4 (são quatro balas de café) chances dentro de 10 possibilidades de conseguir tirar uma bala de café, como a bala retirada volta ao pacote, na segunda escolha também teremos 4 possibilidades em 10, na terceira escolha isso se repete, 4 possibilidades em 10. Perceba, portanto, que a probabilidade de ocorrer o segundo evento (escolha da segunda bala) não depende do primeiro (escolha da primeira bala), assim como probabilidade de ocorrer o terceiro evento não depende do segundo e assim por diante. Eventos desse tipo, em que a probabilidade de um evento ocorrer não depende do outro e em que há reposição de elementos são denominados eventos independentes.

  Resolvendo este problema teremos o seguinte:

$$P = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{64}{1000}$$

$$P = 0{,}064.100$$
$$P = 6{,}4\%$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional é caracterizada por dois eventos, por exemplo, qual é a probabilidade de uma pessoa gostar de doces dado que é homem? Ou ainda, qual é a probabilidade de uma pessoa andar de bicicleta dado que é brasileira? Perceba que são dois eventos na primeira sentença, o evento A, que é gostar de doces e o evento B que é uma condição imposta, ser homem. Na segunda sentença temos que o evento A é andar de bicicleta e que o evento B é ter nacionalidade brasileira, a condição imposta. Para calcular este tipo de probabilidade vamos utilizar uma equação que é quase a mesma coisa que tínhamos anteriormente, com pequenas variações. Ela pode até parecer um monstro de longe, mas você logo vai perceber que é bem simples. Veja abaixo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vamos estudar o caso da segunda sentença: qual é a probabilidade de uma pessoa andar de bicicleta dado que é brasileira? Veja a tabela abaixo que contém as informações necessárias para a resolução deste problema.

Nacionalidade \ Andar de bicicleta	Não	Sim	Total
Uruguaia	120	30	150
Brasileira	100	100	200
Total	220	130	350

Tendo essas informações fica bem mais simples utilizar a fórmula acima. Note que no numerador é solicitada a intersecção entre as pessoas que andam de bicicleta e que são brasileiras. Isso é, o número que consta na coluna do "sim" referente à linha dos brasileiros. Já o denominador pede algo bem mais simples: a probabilidade de ser brasileiro, que é o número total de brasileiros dividido pelo número total de pessoas. Substituindo esses valores separadamente teremos o seguinte:

$$P(A \cap B) = \frac{100}{350} \qquad P(B) = \frac{200}{350}$$

Substituindo esses valores na equação da probabilidade condicional teremos o seguinte:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{100}{350}}{\frac{200}{350}} = \frac{100}{350} \cdot \frac{350}{200}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P(A|B) = 0{,}5.100$$

$$P(A|B) = 50\%$$

E assim chegaremos a 50% de chances de escolher uma pessoa dessa pesquisa que ande de bicicleta, dado que seja brasileira.

Não é tão terrível assim, né? A moral aqui é prestar atenção no evento que vem depois de “dado que...” ou “sendo que”, ou qualquer variação disso, porque é pela probabilidade de ocorrer este evento que a intersecção será dividida. Caso você utilize o outro evento para fazer isso, é muito PROVÁVEL que você chegue à resposta errada.

EXERCÍCIOS

1. Um conjunto de três dados possui média aritmética igual a 5. Sabendo que a mediana destes dados é 5 e que os outros dois dados estão separados por 4 unidades, qual das alternativas apresenta o produto entre esses dados?

a) 95
b) 100
c) 105
d) 110
e) 115

Alternativa correta: C

2. A probabilidade do nascimento de um bebê do sexo feminino é de 50%. Uma senhora possui 3 filhas mulheres e está grávida. Qual a probabilidade do novo bebê também ser mulher?

a) 1/4
b) 1/16
c) 1/2
d) 1/256
e) 1/8

Alternativa correta: C

3. Uma turma tem 20 alunos sendo que apenas um deles é homem. A professora cria grupos de 3 pessoas afim de realizar uma atividade. Escolhendo-se um desses grupos ao acaso, qual a probabilidade de ser o grupo do rapaz?

a) 1/5
b) 1/2048
c) 1/1140
d) 1/5642
e) 1/6568

Alternativa correta: C

4. Dadas as letras de MESALVA, são selecionadas 4 letras e formados anagramas. Qual a probabilidade de se formar um anagrama que contenha a letra A?

a) 50%

b) 60%

c) 70%

d) 80%

e) 90%

Alternativa correta: D

5. Jogando-se 2 dados, qual a probabilidade da soma dos números ser par ou um número primo?

a) 5/6

b) 8/11

c) 30/121

d) 10/11

e) 11/12

Alternativa correta: D

6. Foi realizado um experimento para teste de um novo remédio. Das 100 pessoas selecionadas, sendo 50% homens, foram distribuídos remédios verdadeiros e placebos, de forma igualitária entre os sexos. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa no grupo, qual a probabilidade dela ser mulher e estar usando o placebo?

a) 15%

b) 20%

c) 25%

d) 45%

e) 50%

Alternativa correta: C

7. (ENEM 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) 1/2

b) 5/8

c) 1/4

d) 5/6

e) 5/14

Alternativa correta: A

8. Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é

a) menor que 7%.

b) maior que 7%, mas menor que 10%.

c) maior que 10%, mas menor que 13%.

d) maior que 13%, mas menor que 16%.

e) maior que 16%.

Alternativa correta: B

9. (UFRGS 2013) Para a disputa da Copa do Mundo de 2014 as 32 seleções que se classificarem serão divididas em 8 grupos, os quais serão constituídos de 4 seleções cada um. Nos jogos da primeira fase, cada seleção jogará com

todas as outras seleções do seu grupo. Uma empresa adquiriu um ingresso para cada jogo da primeira fase do mesmo grupo. Ao sortear dois ingressos entre seus funcionários a probabilidade de que esses ingressos envolvam uma mesma seleção é

a) 20%

b) 25%

c) 50%

d) 80%

e) 85%

Alternativa correta: D

10. (FUVEST) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de freqüência da face 1, e que as outras faces saíam com a freqüência esperada em um dado não viciado. Qual a frequência da face 1?

a) 1/3

b) 2/3

c) 1/9

d) 2/9

e) 1/12

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE III

MATEMÁTICA

06

ESTATÍSTICA

meSalva!

ESTATÍSTICA

E aí, galera do Me Salva! Vamos começar a nossa apostila com a seguinte suposição: Você e 5 colegas estão focados em passar no próximo vestibular da UFRGS e, para isso, formaram um grupo de estudos. A primeira coisa que vocês fizeram foi ler o edital do vestibular e, depois disso, analisaram a lista de pontuação dos primeiros e últimos colocados em cada curso no ano anterior. A partir disso, surgiram duas principais dúvidas: o que é **média harmônica** e no que ela influencia? O que o **desvio padrão** significa?

Para podermos responder a essas perguntas, precisaremos entender alguns conceitos de Estatística, que muitas vezes são utilizados no dia-a-dia em frases como "*a média* de pessoas que utiliza o serviço de metrô em São Paulo em dias úteis é de 3,7 milhões", "é recomendado que um adulto beba *em média* 2 L de água por dia", "*a média* do colégio é 7", etc. Consegue perceber o quanto a Estatística nos rodeia o tempo todo quando estamos analisando conjuntos de dados? Pois é isso que estudaremos a partir de agora no fantástico mundo da Estatística!

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Será que o cálculo da média de idade de um grupo de alunos com idades diferentes, porém parecidas, é o mesmo feito quando há um grupo de alunos com idades diferentes, porém uma delas é bem maior (ou bem menor) do que as demais? Como é calculada a nota do trimestre que vai para o boletim considerando que o professor aplicou atividades com pesos diferentes?

Quando realizamos o cálculo da média de um conjunto de dados, estamos preocupados em obter um valor que possa caracterizar da melhor forma possível este conjunto. Chamamos de Medida de Tendência Central (MTC) esse valor que busca representar o tal conjunto. Há diversas situações em que necessitamos de um número para representar um conjunto de dados, mas nem sempre a média "simples" (formalmente, média aritmética) realiza a caracterização de forma confiável. Felizmente temos outras formas de analisar a Medida de Tendência Central de um conjunto de dados, como as médias ponderada, geométrica e harmônica ou ainda a moda e a mediana. Estudaremos com detalhes cada uma dessas MTC a partir de agora. Acompanhe!

MÉDIA ARITMÉTICA

É a mais utilizada para grupos de dados que apresentam pequenas variações entre si. Isso porque para realizar a média aritmética, basta somarmos todos os valores dos elementos do conjunto e dividir pelo número de elementos. Veja o exemplo:

Qual é a média de idade do seu grupo de estudos, no qual você e seus colegas têm 16, 16, 17, 15, 16 e 16 anos?

Perceba que todas as idades são bem próximas, certo? Note ainda que temos 6 elementos neste conjunto (você e 5 amigos). Então para saber a média (aritmética) das idades, vamos somar todas elas e dividir por 6:

$$\bar{x} = \frac{16 + 16 + 17 + 15 + 16 + 16}{6}$$

$$\bar{x} = \frac{96}{6} = 16 \text{ anos}$$

A média de idade do seu grupo de estudos é, portanto, 16 anos.

Formalmente podemos escrever uma equação para a Média Aritmética, que chamaremos de $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Não precisa se assustar com esse símbolo desconhecido. O nome dele é somatório e ele indica que é necessário somar todos os “x” (elementos do conjunto) de 1 (número que está embaixo do símbolo) até n (número que está acima do símbolo). A letra “i” que acompanha o x é um indexador que indica os número inteiros de 1 até n. Veja como fica ao “abrirmos” essa equação:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Que você pode entender simplesmente como:

$$\bar{x} = \frac{\text{somatório de todos os elementos}}{\text{número de elementos}}$$

Agora vamos analisar outro exemplo: durante os estudos do seu grupo, o pai de um de seus colegas foi chamado para ajudar em um problema. Com isso vocês resolveram perguntar a idade dele e calcular a média da idade do "novo" grupo, os 6 amigos e o pai de um deles. Qual será a média de idade do grupo se o pai tem 40 anos?

Note que queremos saber a média das seguintes idades: 16, 16, 17, 15, 16, 16 e 40 anos. Perceba ainda que agora há uma idade bem maior do que as outras, certo? Vamos calcular a média a partir da equação que já estudamos e analisar o resultado. Note que agora temos 7 elementos no conjunto.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7}$$

$$\bar{x} = \frac{16 + 16 + 17 + 15 + 16 + 16 + 40}{7}$$

$$\bar{x} = \frac{136}{7} = 19{,}42 \text{ anos}$$

A média aritmética dessas idades é 19,42, mas lembre que a média é uma MTC e que busca caracterizar o todo (o grupo estudado). Perceba que nem sempre a média é um número igual a algum elemento do conjunto, como nesse caso (anteriormente vimos que a média era também um elemento do grupo). A maioria das idades do grupo está entre 15 e 17, mas a média é pouco mais de 19 anos que acaba não caracterizando o grupo, certo? Note que esse aumento da média aconteceu por causa do alto valor de apenas um dos elementos. Então, em casos como esse, é necessário utilizar outros tipos de MTC para representar o grupo da melhor forma possível, como a moda e a mediana que veremos a seguir.

MODA

Quando você percebe que um determinado tipo de calça está na moda? Quando muita gente está usando, certo? A moda no caso da estatística é bastante semelhante a isso: chamamos de moda aquele valor que mais aparece em um conjunto de dados.

No caso das idades do exemplo anterior, tínhamos que o conjunto de dados era: 16, 16, 17, 15, 16, 16 e 40 anos. Perceba que 4 integrantes do grupo de estudos têm 16 anos, sendo esse o valor que mais aparece nesse conjunto de dados. Nesse caso, a moda é 16. Representamos ela da seguinte forma:

Mo = 16 anos

Mas e se por acaso as idades fossem: 16, 17, 17, 17, 16, 16 e 40 anos, qual seria a moda nesse caso? Note que há 3 integrantes com 16 anos e 3 integrantes com 17 anos, assim esses dois valores são os que mais aparecem nesse conjunto de dados. Portanto, nesse caso temos uma MTC **bimodal** em que a moda são os dois números. Veja a representação:

Mo = 16 e 17 anos

Dependendo do caso, você pode encontrar situações em que a TMC é trimodal (três valores que aparecem igualmente) ou quadrimodal (quatro valores que aparecem igualmente), etc.

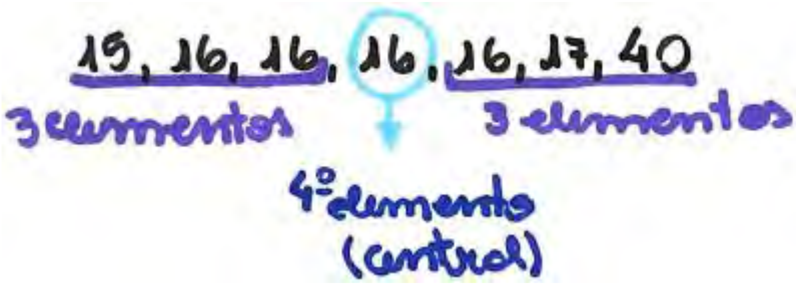
Note que essa forma de representar o todo quando algum (ou alguns) elemento é muito maior (ou menor) do que os demais é mais confiável do que fazer apenas a média aritmética, certo?

Vamos ver outra forma de análise abaixo.

MEDIANA

Sempre que você for analisar a mediana de um conjunto de dados, é essencial que eles estejam em ordem crescente ou decrescente. A partir disso, a mediana é o elemento do centro desse conjunto, caso o número de elementos seja ímpar, ou a média aritmética dos dois elementos centrais caso o número de elementos seja par. Parece estranho, mas é bem simples. Veja o exemplo abaixo em que utilizaremos os mesmos valores dos casos anteriores:

O nosso conjunto de dados é 16, 16, 17, 15, 16, 16 e 40 anos, mas sabemos que primeiramente é necessário colocá-lo em ordem crescente ou decrescente. Então teremos em ordem crescente: 15, 16, 16, 16, 16, 17, 40. Neste caso, temos 7 elementos, então o elemento central é o 4º elemento, que divide o conjunto em dois:

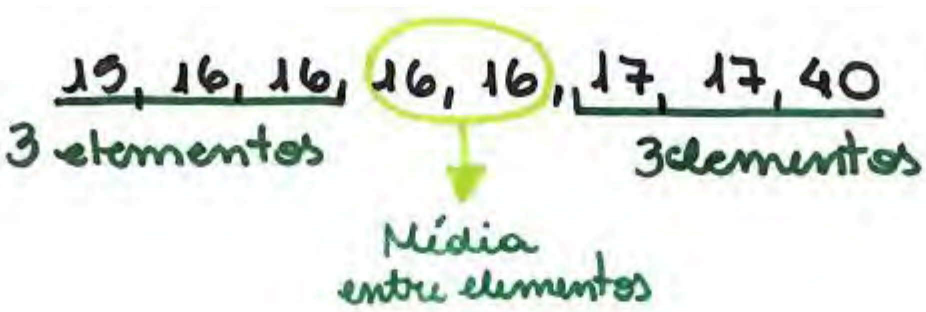


Então a mediana é 17, que podemos representar como:

Me = 17 anos

Mas e se o conjunto tivesse 8 elementos, qual seria a mediana do conjunto se não temos um elemento central?

Vamos incluir o seu primo de 17 anos ao grupo para podermos entender isso: 16, 16, 17, 15, 16, 16, 40 e 17. Lembre que, antes de qualquer coisa, é necessário colocar os elementos em ordem crescente ou decrescente: 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 40. Agora vamos analisar quais são os dois elementos centrais para fazer a média aritmética entre eles:



Casualmente temos dois elementos iguais no centro do conjunto, mas poderia haver qualquer outro número no lugar desses que, se o número de elementos fosse par, seria necessário calcular a média aritmética deles. Veja como fica no nosso caso:

$$\bar{x} = \frac{16 + 16}{2}$$

$$\bar{x} = 16$$

A mediana desse conjunto de dados é 16, e pode ser representada como:

Me = 16 anos

Note que assim como a moda, a mediana consegue caracterizar melhor do que a média aritmética um grupo em que um dos elementos destoa bastante dos demais.

Vamos analisar outras situações em que as MTC que já estudamos são insuficientes para representar um grupo.

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Sua professora de história explicou que a avaliação do trimestre será realizada de acordo com o nível de exigência de cada atividade. Para isso, fez a seguinte tabela:

Avaliação	Peso	Nota
Debate	1	
Trabalho	2	
Seminário	3	
Prova	4	

Você entendeu que ir bem na prova é muito mais importante do que tirar uma boa nota no debate, já que a prova vale muito mais do que o debate (peso 4 contra peso 1). Ao receber as notas das atividades, você preencheu na tabela que a professora forneceu, chegando ao seguinte:

Avaliação	Peso	Nota
Debate	1	10
Trabalho	2	8
Seminário	3	7
Prova	4	6

Como você não se saiu tão bem na prova, está curioso para saber se conseguiu ou não ultrapassar a média do colégio, que é 7. Como descobrir qual é a média entre essas notas considerando que as avaliações têm pesos diferentes?

Somar todas as notas e dividir por 4, nesse caso, é insuficiente, já que a prova, por exemplo, vale quatro vezes mais do que o debate. Então não basta apenas somar os valores, é necessário “ponderar”, ou seja, considerar os pesos envolvidos. Por isso, o tipo de MTC que aprenderemos agora é chamada de **média aritmética ponderada**.

Na Média Aritmética Ponderada, mais conhecida apenas como Média Ponderada, precisamos realizar o somatório das notas (por exemplo) multiplicados pelos respectivos pesos e dividi-los pelo somatório dos pesos. Formalmente é o seguinte:

$$\overline{x_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i . p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Aplicando ao nosso caso:

$$\overline{x}_p = \frac{(nota_1).(peso_1)+(nota_2).(peso_2)+(nota_3).(peso_3)+(nota_4).(peso_4)}{(peso_1)+(peso_2)+(peso_3)+(peso_4)}$$

$$\overline{x}_p = \frac{(10.1)+(8.2)+(7.3)+(6.4)}{1+2+3+4}$$

$$\overline{x}_p = \frac{10+16+14+24}{1+2+3+4}$$

$$\overline{x}_p = \frac{71}{10} = 7{,}1$$

A média que você atingiu com suas notas foi de 7,10. Ufa! Felizmente você conseguiu atingir a média! Caso os pesos não fossem diferentes e você tivesse feito o cálculo utilizando simplesmente a média aritmética teria chegado a 7,75, valor bem diferente do que encontramos anteriormente, certo?

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica é utilizada basicamente quando há variações percentuais em sequência, ou alguma outra Progressão Geométrica. Vamos ver um exemplo para entendermos melhor.

A loja da sua mãe teve aumento de 20% nas vendas em um mês, 12% no mês seguinte e 7% no terceiro mês. Qual foi a média percentual de aumento das vendas da loja nesses três meses?

Para calcular a média nesse caso, você precisa, primeiramente, transformar os valores percentuais para valores amigáveis de se trabalhar. Lembre que expressamos aumento como valores acima de 1 e desconto como valores abaixo de 1. Então, no primeiro mês houve um aumento de 1,20, no segundo mês de 1,12 e no terceiro mês de 1,07:

$$\left.\begin{array}{l} 20\% \to 1{,}20 \\ 12\% \to 1{,}12 \\ 7\% \to 1{,}07 \end{array}\right\} \text{3 elementos}$$

Para calcular a média geométrica desses valores, basta multiplicá-los e extrair a raiz correspondente ao número de elementos. Veja:

$$\overline{x_G} = \sqrt[n]{x_1 \ . \ x_2 \ . \ x_3}$$

Substituindo os valores decimais que encontramos anteriormente, chegaremos à média:

$$\overline{x_G} = \sqrt[3]{(1{,}20).(1{,}12).(1{,}07)}$$
$$\overline{x_G} = 1{,}128 \ \ ou \ \ 12{,}8\%$$

Então, a média percentual de aumento das vendas da loja nesses três meses foi de 12,8%

MÉDIA HARMÔNICA

Finalmente chegamos à tão famosa entre os vestibulandos, a média harmônica! Quando uma comissão de concurso propõe a avaliação a partir da média harmônica, significa que é interessante que você tenha um desempenho “harmônico” entre todas os quesitos avaliados, ou seja, que as notas que você tiver em cada quesito sejam bem parecidas, o que teoricamente indica que você sabe “um pouquinho (ou muito) de tudo”. Então, principalmente nessa média, quando você destoa muito suas notas, por exemplo, indo bem em matemática, física e química, mas indo mal em biologia, a média tende a diminuir muito. Vamos a um exemplo para entender por que isso acontece:

Você tem as seguintes notas em algumas matérias: 8, 7, 8, 7, 9, 8. Para saber a média harmônica dessas notas, precisamos aplicar a seguinte equação:

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Lembre que o símbolo que está no denominador denota um somatório, certo? Então, ao abrirmos essa equação, teremos:

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Em que os valores de x são os elementos do conjunto estudado e o n é o número de elementos do conjunto. Substituindo esses valores na equação, teremos:

$$\overline{x_h} = \frac{6}{\frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8}}$$

$$\overline{x_h} = \frac{6}{0{,}771} = 7{,}77$$

No caso das notas acima, a média harmônica é 7, 77. Note que as notas que você tinha eram bastante parecidas ("harmônicas"), certo? Agora vamos ver se no lugar dessas notas, você tivesse o seguinte: 2, 7, 8, 7, 9, 8:

Aplicando os novos valores na equação, teremos:

$$\overline{x_h} = \frac{6}{\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8}}$$

$$\overline{x_h} = \frac{6}{1{,}146} = 5{,}23$$

Note que diferença de 6 pontos entre a primeira nota dos dois grupos implica numa diferença 2,5 pontos na média harmônica. Caso estivéssemos trabalhando com média aritmética, a diferença seria de apenas 1 ponto. Faça o teste! Você precisa chegar em 7,83 no primeiro caso e em 6, 83 no segundo caso.

Entende agora por que no vestibular a comissão utiliza a média harmônica? A ideia é que você saiba um pouco de tudo. Mas no caso da UFRGS, além de a média ser harmônica, ela também é ponderada, porque dependendo do curso desejado, umas provas têm pesos maiores do que outras. Osso duro de roer, né? Mas o Me Salva! te ajuda!

MEDIDAS DE DISPERSÃO

Vamos analisar as médias de idade de dois grupos de pessoas:

- ✓ Grupo 1: 65, 70, 63, 72 anos
- ✓ Grupo 2: 39, 100, 46, 85 anos

Calculando a média aritmética de cada um deles teremos:

$$\overline{x}_1 = \frac{65 + 70 + 63 + 72}{4} \qquad \overline{x}_2 = \frac{39 + 85 + 100 + 46}{4}$$

$$\overline{x}_1 = \frac{270}{4} \qquad \overline{x}_2 = \frac{270}{4}$$

$$\overline{x}_1 = 67{,}5 \ anos \qquad \overline{x}_2 = 67{,}5 \ anos$$

Note que os dois grupos têm a mesma média de idade, mas analisando os grupos separadamente, percebemos que o segundo grupo apresenta dois valores bem mais baixos do que os outros dois e todos eles estão bem espalhados, muito distantes da média. Já no primeiro grupo, as idades são bastante próximas e giram em torno da média. Nesses casos, analisar apenas a média não é suficiente para entendermos o conjunto de dados, por isso são necessários parâmetros que chamamos de medidas de dispersão, a variância e os desvios médio e padrão, que mostrarão o quão espalhados estão os dados do conjunto.

DESVIO MÉDIO

Vamos calcular a diferença entre cada idade e a média para os dois grupos:

Grupo 1	Grupo 2
$65 - 67{,}5 = -2{,}5$	$39 - 67{,}5 = -28{,}5$
$70 - 67{,}5 = 2{,}5$	$100 - 67{,}5 = 32{,}5$
$63 - 67{,}5 = -4{,}5$	$85 - 67{,}5 = 17{,}5$
$72 - 67{,}5 = 4{,}5$	$46 - 67{,}5 = -21{,}5$

Note que se somarmos essas diferenças chegaremos a zero (-2,5 + 2,5 - 4,5 + 4,5 = 0 e - 28,5 + 32,5 + 17,5 - 21,5), então, para podermos calcular a média das diferenças, vamos utilizar valores em módulo, veja:

Grupo 1

$$\overline{x_{D_m}} = \frac{|-2{,}5| + |2{,}5| + |4{,}5| + |-4{,}5|}{4}$$

$$\overline{x_{D_m}} = 3{,}5$$

Grupo 2

$$\overline{x_{D_m}} = \frac{|-28{,}5| + |17{,}5| + |32{,}5| + |-21{,}5|}{4}$$

$$\overline{x_{D_m}} = 25$$

Os valores que encontramos acima são chamados de Desvios da Média (DM). Perceba que o Desvio da Média do Grupo 1 é muito menor do que o Desvio da Média do Grupo 2, indicando alta dispersão dos dados no segundo caso. Vamos nos aprofundar na análise das medidas de dispersão nos próximos parâmetros.

VARIÂNCIA

Outra medida de dispersão importante é o da variância, representada pela letra grega *sigma* ao quadrado (σ^2). Vamos utilizar os mesmos dados do exemplo anterior elevando os desvios médios de cada um dos elementos ao quadrado para aprendermos a calculá-la. Perceba que ao elevarmos ao quadrado, teremos como resultado apenas valores positivos, contornando o problema que tivemos anteriormente ao realizar a soma dos termos que resultava em zero. Veja:

Para o Grupo 1:

$$\sigma^2_{G_1} = \frac{(-2,5)^2+(2,5)^2+(4,5)^2+(-4,5)^2}{4}$$

$$\sigma^2_{G_1} = \frac{53}{4} = 13,25$$

Para o Grupo 2:

$$\sigma^2_{G_2} = \frac{(-28,5)^2+(17,5)^2+(32,5)^2+(-21,5)^2}{4}$$

$$\sigma^2_{G_2} = \frac{2637}{4} = 659,25$$

Perceba que a diferença entre os grupos fica mais evidente ao realizarmos o cálculo da variância de cada um.

Formalmente a variância é o seguinte:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

O grande problema que enfrentamos ao analisar dados utilizando a variância é que o número que encontramos como resultado não tem a mesma unidade de medida dos valores das variáveis que estamos trabalhando (no nosso caso, idade em anos). Então, para manter a unidade de medida, utilizamos outra medida de dispersão, o Desvio Padrão.

DESVIO PADRÃO

O Desvio Padrão, simbolizado por sigma, é a raiz quadrada da variância. Veja:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Então, formalmente ele é descrito como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Substituindo os valores das variâncias que encontramos anteriormente, chegaremos ao seguinte:

Para o Grupo 1:

$$\sigma^2_{G_1} = 13{,}25$$
$$\sigma_{G_1} = \sqrt{\sigma^2_{G_1}}$$
$$\sigma_{G_1} = \sqrt{13{,}25}$$
$$\sigma_{G_1} = 3{,}64 \ \ anos$$

Para o Grupo 2:

$$\sigma^2_{G_2} = 659{,}25$$
$$\sigma_{G_2} = \sqrt{\sigma^2_{G_2}}$$
$$\sigma_{G_2} = \sqrt{1659{,}25}$$
$$\sigma_{G_2} = 25{,}67 \ \ anos$$

Então, o Desvio Padrão do Grupo 1 é de 3,64 anos, já o Desvio Padrão do Grupo 2 é de 25, 67 anos e ambos têm a mesma média, de 67, 5 anos. Nos gráficos abaixo você consegue ter uma noção real da dispersão dos dados de cada um dos conjuntos. As retas verticais em cada ponto têm o comprimento de um desvio padrão.

Gráfico do Grupo 1:

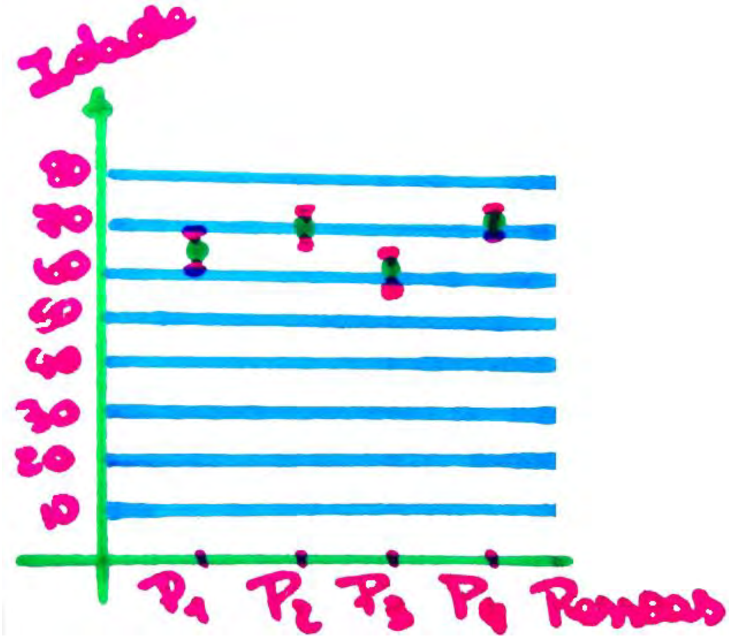
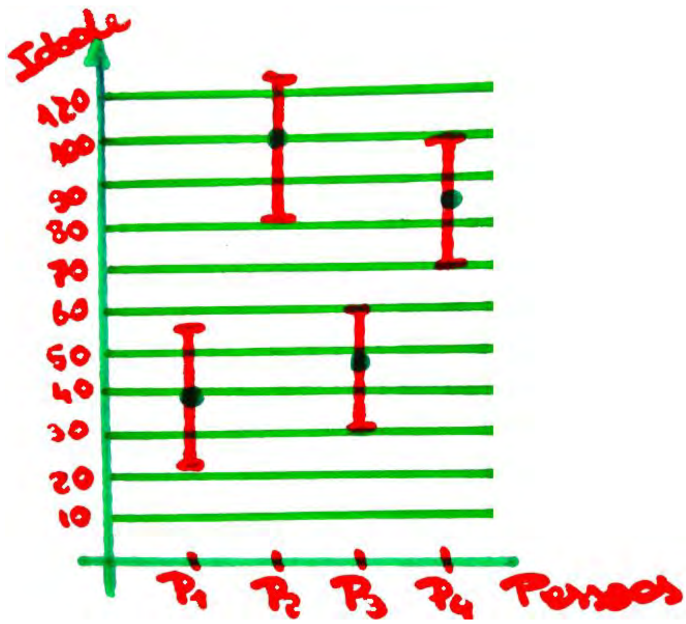


Gráfico do Grupo 2:



Além disso, note que quanto mais próximo a zero é o Desvio Padrão, mais regular é a distribuição dos valores em torno da média.

Agora que você já está craque em Estatística e entendeu como calcular as mais diferentes médias e medidas de dispersão, é só estudar para passar no vestibular/ENEM! E não se esqueça de estudar de tudo um pouco, já que é média harmônica, ok?

EXERCÍCIOS

1. Foram medidos os pesos de alguns alunos de uma turma do colégio. Calcule a média, moda e mediana desses dados. Separe sua resposta por ponto e vírgula (exemplo: 3,4;87;98).

A={66, 70, 72, 72, 84, 90} [kg]

a) 72,8;72;72

b) 75,66;72;72

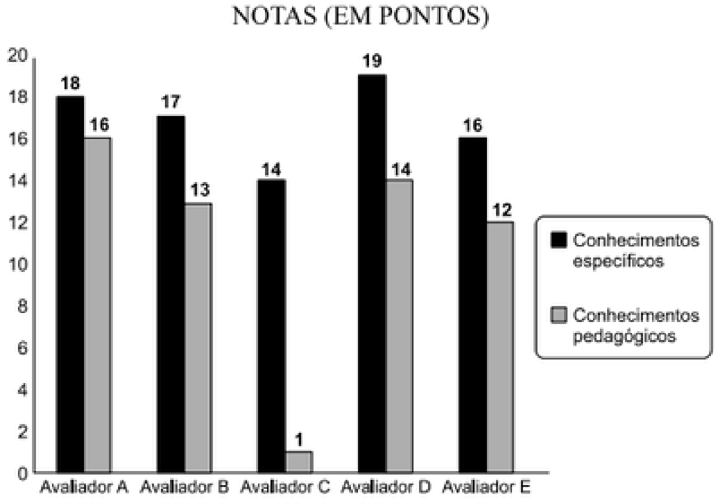
c) 72,8;70;72

d) 75,66;70;70

e) 75,66;72;68

Alternativa correta: B

2. (ENEM 2013) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é de

a) 1,25 ponto maior

b) 2,00 pontos menor.

c) 0,25 ponto maior.

d) 1,00 ponto maior.

e) 1,00 ponto menor.

Alternativa correta: D

3. (ENEM) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de sua propriedade. Os talhões têm a mesma área de 30.000 m2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10.000 m2).

A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)2 é de

a) 20,25

b) 4,50

c) 0,71

d) 0,50

e) 0,25

Alternativa correta: E

4. (Unicamp-SP) Para votar, cinco eleitores demoraram, respectivamente, 3min 38s, 3min 18s, 2min 46s, 2min 57s e 3min 26s. Qual foi a média do tempo de votação (em minutos e segundos) desses eleitores?

Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-estatistica.htm

5. Em uma classe de 50 alunos, as notas obtidas formaram a seguinte distribuição:

NOTAS	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº DE ALUNOS	1	3	6	10	13	8	5	3	1

Determine:

a) a nota média;

b) a nota mediana;

c) a nota modal.

Fonte: http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=388

6. Uma empresa de comunicação conta com duas categorias de funcionários: Telemarketing e diretoria. Os funcionários da primeira categoria recebem R$ 950,00 mensalmente, enquanto os da segunda recebem R$ 9500,00. Sabendo que essa empresa possui 63 funcionários no setor de telemarketing e 5 diretores, o salário médio pago a eles é de, aproximadamente:

a) R$ 5985,00

b) R$ 4750,00

c) R$ 1580,00

d) R$ 950,00

e) R$ 9500

Fonte: http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-media-ponderada.htm

7. Um carro vai de uma cidade A até a cidade B com velocidade de 60km/h e da cidade B até a cidade C com velocidade de 40 km/h. Qual é a velocidade média desse carro?

Fonte: http://matematicaseriada.blogspot.com.br/2015/10/media-harmonica-mh.html

8. Demonstre, através de cálculos, a posição da mediana nos dados informados:

a) 25, 74, 65, 12, 33, 3, 76, 40, 56

b) 45, 12, 100, 05, 34, 2, 09, 19, 29, 1

Fonte: http://www.matematiques.com.br/download.php?tabela=documentos&id=439

9. Uma dona de casa pesou 10 potes de manteiga e verificou que a média dos pesos dos potes era de 500 g, com variação entre cada pesagem, indicando um desvio padrão de 25 g. Ela repetiu a experiência com pacotes de arroz e verificou que a média dos pesos dos pacotes de arroz era de 5000 g com variação de peso entre os pacotes representados pelo desvio padrão de 100 g.

Manteiga	Arroz
média = 500	média = 5000

desvio padrão = 25 desvio padrão = 100

Qual dos produtos apresentou maior variação em seus pesos? Justifique a sua resposta.

Fonte: http://www.matematiques.com.br/download.php?tabela=documentos&id=439

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE III

MATEMÁTICA

07

MATRIZES E DETERMINANTES

MATRIZES E DETERMINANTES

Você provavelmente utiliza diversas redes sociais e comunicadores instantâneos como o WhatsApp. Você pode ter notado que nesse aplicativo, há algum tempo, aparece um aviso quando você inicia uma conversa: “Mensagens que você envia para esta conversa e chamadas agora são protegidas com criptografia de ponta a ponta. O que significa que elas não podem ser lidas ou ouvidas pelo WhatsApp ou por terceiros”. Quando a empresa implementou este serviço, ficamos sabendo que ele nos daria mais segurança, mas como isso funciona? Basicamente, quer dizer que quando você escreve e envia uma mensagem, ela é trancada com um cadeado e transformada numa espécie de código, o qual apenas o receptor dessa mensagem tem a chave para abri-la e poder decodificá-la, podendo então realizar a leitura. O processo de transformar a mensagem em código para que seja posteriormente decifrada é chamada de criptografia. Quando uma mensagem é criptografada, ninguém além do remetente e do destinatário, nem mesmo o WhatsApp, podem saber o seu conteúdo. Esse método é usado no mundo inteiro para os mais diversos objetivos. No tempo da 2ª Guerra Mundial, nazistas utilizavam criptografia para enviar mensagens garantindo que seu conteúdo, caso roubado, não fosse descoberto. Claro que naquela época as coisas não eram tão simples e rápidas como acontece no WhatsApp, mas funcionava!

Um dos métodos de criptografia utiliza matrizes para codificar e decodificar mensagens. Sabendo disso, um amigo seu resolveu enviar mensagens codificadas a todos os colegas. A que você recebeu continha o seguinte:

40 23 69 18 40 67 45 118 31 67

Acompanhada das instruções:

Para decodificar essa mensagem, utilize a chave $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e considere que as letras de A a Z assumem os valores de 1 a 26, conforme abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Note que é impossível simplesmente substituir letras nos números contidos na mensagem. É preciso utilizar a tal chave, que é o que chamamos de matriz. Para que você possa decodificar essa mensagem é necessário estudar como essas matrizes funcionam. Vamos lá?

MATRIZES

Veja as tabelas abaixo construídas em editores de planilhas no computador:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Filial 1					Filial 2		
2		Violão	Bateria	Flauta			Violão	Bateria	Flauta
3	Manhã	21	17	15		Manhã	23	14	17
4	Tarde	18	13	9		Tarde	17	16	8
5	Noite	11	9	3		Noite	18	10	5
6									
7									

Nesses editores, as filas verticais, conhecidas como colunas, são identificadas por letras maiúsculas e as filas horizontais, que conhecemos por linhas, são identificadas por números a partir de 1. A organização de dados numéricos em tabelas como essas é chamada de matriz. Vamos reescrevê-las entre parênteses ou colchetes focando apenas nos números contidos nelas e mantendo a ordem em que os dados se encontram nas tabelas. Veja:

$$\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 23 & 14 & 17 \\ 17 & 16 & 8 \\ 18 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

O que fizemos acima foi a construção de uma matriz. Normalmente denominamos matrizes com letras maiúsculas, então a primeira pode ser a matriz A e a segunda a matriz B. Note que essas matrizes têm 3 linhas e 3 colunas, portanto, podemos dizer que as matrizes são de “ordem” (basicamente significa “tamanho”) 3 x 3. Caso tivéssemos uma matriz com 2 linhas e com 3 colunas, diríamos que a ordem dessa matriz é 2 x 3. Assim, sempre que mencionamos o tamanho de uma matriz, a informação sobre o número de linhas vem antes do número de colunas. Veja exemplos de matrizes de outras ordens:

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 16 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}_{1 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{1\times 3}$$

Outra informação importante é que cada um dos elementos (números das matrizes) tem um "nome" e às vezes, principalmente quando as matrizes são muito grandes, é necessário saber como identificá-los. Vamos utilizar como exemplo a matriz A que vimos há pouco. Cada elemento é chamado de "a" e recebe um número subscrito para identificar sua posição na matriz. O primeiro número se refere à linha e o segundo à coluna. Então, no caso da nossa matriz A, o elemento 18 encontra-se na posição a_{21} (lê-se a dois um), ou seja, na segunda linha e na primeira coluna. O elemento 15 está na posição a_{13} (a um três), ou seja, na primeira linha e na terceira coluna. Veja como fica a representação das posições em uma matriz 3x3 a partir do nosso exemplo:

$$\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Agora que sabemos como nomear as posições, podemos generalizar para matrizes maiores. Veja como fica uma matriz com m linhas e n colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Também podemos abreviar da seguinte forma:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\text{ou}$$

$$A = (a_{ij})$$

$$i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$$

$$j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

Sabendo tudo isso, podemos representar qualquer matriz, ok? Vamos continuar aprofundando nosso estudo.

CLASSIFICAÇÃO

Você já notou que existem infinitas possibilidades para se montar uma matriz. As configurações mais comuns são as seguintes:

- ✓ **Quadrada**: essa modalidade de matriz é caracterizada por ter o mesmo número de linhas e de colunas, ou seja, m = n. Por isso, a notação formal para a ordem desse tipo de matriz é n x n, que

 |

podemos chamar de matriz quadrada de ordem n. Veja exemplos:

Ordem 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{m=n=2}$$

Ordem 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{m=n=3}$$

Ordem 4

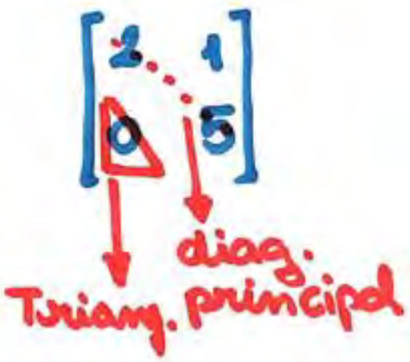
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & -4 \\ -9 & -1 & -7 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{m=n=4}$$

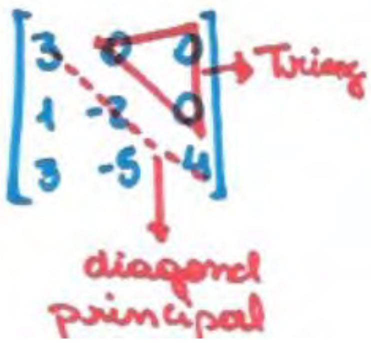
✓ **Identidade**: é também uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais iguais a zero. Por diagonal principal entendemos a diagonal composta pelos elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{mm}, ou seja, os elementos em que i (número da linha) e j (número da coluna) são iguais. Veja os exemplos:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times 3}$$

- ✓ **Triangular**: é novamente uma matriz quadrada, mas nesse caso os elementos acima OU abaixo da diagonal principal são nulos. Veja abaixo:





OPERAÇÕES COM MATRIZES

Assim como realizamos operações com números, podemos realizar operações com matrizes. Vamos ver exemplos de como isso funciona:

- ✓ **Adição e Subtração**: Para realizar essas operações é necessário realizar a adição ou a subtração elemento a elemento. Vamos utilizar as matrizes A e B que vimos lá no início da apostila como exemplo:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix}} + \underset{B}{\begin{bmatrix} 23 & 14 & 17 \\ 17 & 16 & 8 \\ 18 & 10 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 21+23 & 17+14 & 15+17 \\ 18+17 & 13+16 & 9+8 \\ 11+18 & 9+10 & 3+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 44 & 31 & 32 \\ 35 & 29 & 17 \\ 29 & 19 & 8 \end{bmatrix} = A + B$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix}} - \underset{B}{\begin{bmatrix} 23 & 14 & 17 \\ 17 & 16 & 8 \\ 18 & 10 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 21-23 & 17-14 & 15-17 \\ 18-17 & 13-16 & 9-8 \\ 11-18 & 9-10 & 3-5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -2 \end{bmatrix} = A - B$$

Note que tanto na adição quanto na subtração você obterá uma nova matriz como resultado da operação realizada.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES

Suponha que as matrizes A, B e C têm a mesma ordem (ou seja, mesmo tamanho vertical e horizontal):

- Propriedade associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- Propriedade comutativa

$$A + B = B + A$$

- Elemento neutro

$$A + 0 = A$$

0 representa a matriz nula de mesma ordem.

- Elemento oposto

$$A + (- A) = 0$$

✓ **Multiplicação**: Podemos realizar a multiplicação de matrizes de duas formas, multiplicando uma matriz por um número real ou multiplicando a matriz por outra matriz. Para esse último procedimento a ordem das matrizes envolvidas é essencial. Veremos exemplos a seguir.

- **Por número real**: a multiplicação de um número real por uma matriz é realizada multiplicando elemento a elemento por esse número. Veja:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.(2) & 3.(-4) & 3.(1) \\ 3.(1) & 3.(0) & 3.(5) \\ 3.(1) & 3.(1) & 3.(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 15 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.(2) & \frac{1}{2}.(-4) & \frac{1}{2}.(1) \\ \frac{1}{2}.(1) & \frac{1}{2}.(0) & \frac{1}{2}.(5) \\ \frac{1}{2}.(-1) & \frac{1}{2}.(1) & \frac{1}{2}.(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Note que não temos a operação de "divisão de matrizes por número real" justamente porque, ao realizarmos a multiplicação por um número fracionário, estamos realizando uma divisão.

- **Por matriz**: para realizar essa operação (C x D) é necessário que o número de colunas da matriz C seja igual ao número de linhas da matriz D. Além disso, a matriz resultante dessa multiplicação será definida pelo número de linhas de C e de colunas de D. Parece difícil, mas genericamente isso pode ser escrito da seguinte forma:

$$C_{m\times n} \cdot D_{n\times p} = E_{m\times p}$$

Vamos ver um exemplo para entender melhor:

$$C = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \quad D = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$$

2 x 1 (nova matriz)

Ok! A primeira parte está certa! Agora precisamos realizar a multiplicação. Para isso você vai somar as multiplicações dos elementos da primeira linha da matriz C com os elementos da coluna da matriz D. O valor dessa soma será o primeiro elemento da matriz CxD. Em seguida, você vai somar as multiplicações dos elementos da segunda linha da matriz C com os elementos da coluna da matriz D. Esse valor será o segundo elemento da matriz CxD, que já vimos ser de ordem 2 x 1. Parece difícil de novo, né? Mas acompanhe o exemplo:

$$C \times D = \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} (2.3)+(-4.5)+(1.6) \\ (-1.3)+(1.5)+(2.6) \end{bmatrix}$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} 6-20+6 \\ -3+5+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Para não errar a multiplicação de matrizes é interessante tomar alguns cuidados. O primeiro é avaliar se a multiplicação é possível analisando o número de linhas e de colunas de cada matriz. O segundo é que, a partir da análise anterior, você tem como saber a ordem da matriz que resultará dessa multiplicação, então, desenhe uma matriz "fantasma", em que você apenas preencherá os valores, como foi o primeiro passo da multiplicação acima. Assim fica mais fácil de acertar a posição do elemento que você está calculando!

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- **1ª propriedade: associativa**

  Sejam as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{pxr}, temos (A.B).C = A.(B.C).

- **2ª propriedade: distributiva à esquerda**

  Sejam as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{nxp}, temos A.(B+C) = A.B + A.C

- **3ª propriedade: distributiva à direita**

  Sejam as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{nxp}, temos (A+B).C = A.C + B.C

- **4ª propriedade: elemento neutro**

  Sejam as matrizes A_{mxn} e as matrizes identidade I_m e I_n, temos $I_m.A = A$ e $A.I_n = A$.

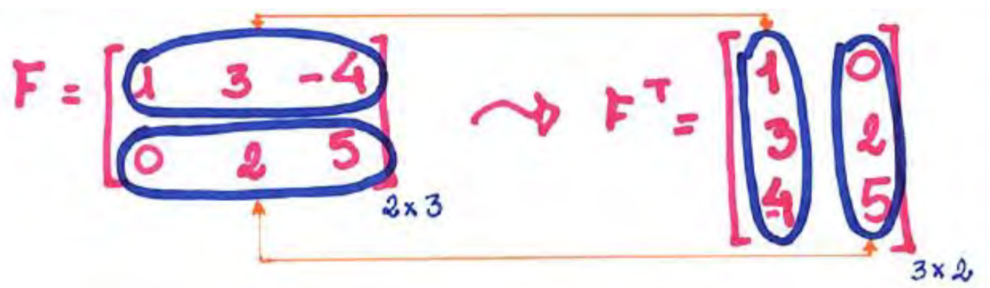
- **5ª propriedade**

  Sejam as matrizes A_{mxn} e B_{nxp} e o número k pertence aos Reais, temos $(k.A).B = A.(k.B) = k.(A.B)$

- **6ª propriedade**

  Sejam as matrizes A_{mxn} e B_{nxp}, temos $(A.B)^t = B^t.A^t$.

✓ **Transposta**: às vezes temos a necessidade de manipular a matriz sem trocar necessariamente sua essência e para isso utilizamos esse artifício. Uma matriz transposta é obtida quando transformamos as linhas de uma matriz original em colunas de uma nova matriz, agora chamada de transposta.



MATRIZ INVERSA

Quando estudamos Aritmética, vimos que uma das operações possíveis de se realizar com números reais era a inversão. Para isso, invertíamos o numerador e o denominador. Então, caso nosso objetivo fosse inverter o número 2/3, bastava escrever 3/2 e teríamos o número inverso. No caso das matrizes também é possível realizar uma operação para obter a matriz inversa. Basta que a matriz em questão (A, por exemplo) seja quadrada e que exista uma outra matriz quadrada (B) que, quando multiplicada pela primeira, resulte em uma matriz identidade (I).

Caso essa igualdade seja verdadeira, a matriz B é a inversa da matriz A. Matematicamente, é necessário o seguinte:

$$A.B = I_n$$

Queremos obter a inversa da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para encontrá-la, precisamos arbitrar uma matriz B de mesma ordem. Vamos supor que B é composta por 4 variáveis:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Lembrando que a matriz identidade de ordem 2 é essa:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora podemos multiplicar A e B e igualar a matriz que obteremos à identidade. Assim, conseguiremos encontrar os valores que compõem B, que é a matriz inversa. Acompanhe:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times2}} \cdot \overset{B}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times2}} = \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}}$$

Relembre a regra de multiplicação de matrizes. Faremos as operações da primeira linha de A com as colunas B e depois da segunda linha de A com as colunas de B.

 |

$$\begin{bmatrix} (1).(a)+(3).(c) & (1).(b)+(3).(d) \\ (1).(a)+(2).(c) & (1).(b)+(2).(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos igualar os elementos da matriz A.B com os da matriz identidade formando dois sistemas. Veja:

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \; 1 \qquad \begin{cases} b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \; 2$$

Agora você terá que lembrar como é feita a resolução desses sistemas. Um dos métodos é o da adição. Vamos resolver esses dois sistemas separadamente, iniciando pelo primeiro. Multiplicando a segunda linha por -1 conseguiremos encontrar o valor de c.

$$1 \; \begin{cases} a+3c=1 \\ a+2c=0 \; (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a}+3c=1 \\ \cancel{-a}-2c=0 \end{cases}$$

$$1c=1$$

$$c=1$$

Agora é possível substituir esse valor na primeira linha e encontrar o valor de a.

$$a + 3c = 1$$
$$a + 3(1) = 1$$
$$a + 3 = 1$$
$$a = 1 - 3$$
$$\boxed{a = -2}$$

Voltando ao sistema 2, vamos novamente multiplicar a segunda linha por -1 e encontraremos o valor de d.

$$② \begin{cases} b + 3d = 0 \\ b + 2d = 1 \; (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{b} + 3d = 0 \\ -\cancel{b} - 2d = -1 \end{cases}$$
$$1d = -1$$
$$d = -1$$

Substituindo esse valor na primeira linha, obteremos o valor de b.

$$b + 3d = 0$$
$$b + 3(-1) = 0$$
$$b - 3 = 0$$
$$\boxed{b = 3}$$

Ótimo! Agora que já temos todos esses valores, basta substituí-los na matriz B. Acompanhe:

$$A^{-1} = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

E então essa é a matriz inversa de A. Mas para termos certeza de que a A.B = I, vamos terminar essa conta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 3-3 \\ -2+2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então tá certo! A igualdade procede, B é realmente a inversa de A!

DETERMINANTES

Toda matriz quadrada pode ser associada a um número, que chamamos de determinante. Quando a matriz é de ordem 1, ou seja, tem apenas uma linha e uma coluna e consequentemente apenas um elemento, o determinante é o próprio elemento. Quando temos ordens 2 e 3, utilizamos outro artifício para identificar o determinante das matrizes: diferença entre a multiplicação dos elementos da diagonal principal e a diagonal secundária. Vamos ver exemplos:

✓ **Matriz quadrada de ordem 1**: o determinante é o próprio elemento da matriz.

$$M = [2]_{1\times1} \qquad \det(M) = 2$$

✓ **Matriz quadrada de ordem 2**: o determinante é calculado a partir da multiplicação os elementos da diagonal principal menos a multiplicação dos elementos da diagonal secundária. Veja:

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

$$\det(N) = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

Vamos entender melhor a partir de um exemplo. Veja a matriz de ordem 2 abaixo:

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Trace as diagonais para que você não confunda as linhas e as colunas. Pode parecer irrelevante agora, mas em matrizes maiores esse procedimento é essencial.

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

diag. sec.

diag. princ.

Agora aplique a equação dos determinantes que vimos anteriormente. Note que não é necessário gravar mais uma equação se você entender que precisa fazer a diferença entre as diagonais, ok? Veja como fica o cálculo:

$$\det(N) = [(-3)(5)] - [(9)(-2)]$$
$$\det(N) = [(-3)(5)] - [(9)(-2)]$$
$$\det(N) = (-15) - (-18)$$
$$\det(N) = -15 + 18$$
$$\det(N) = 3$$

Então, o valor associado a essa matriz é 3, ou seja, o determinante dessa matriz é 3!

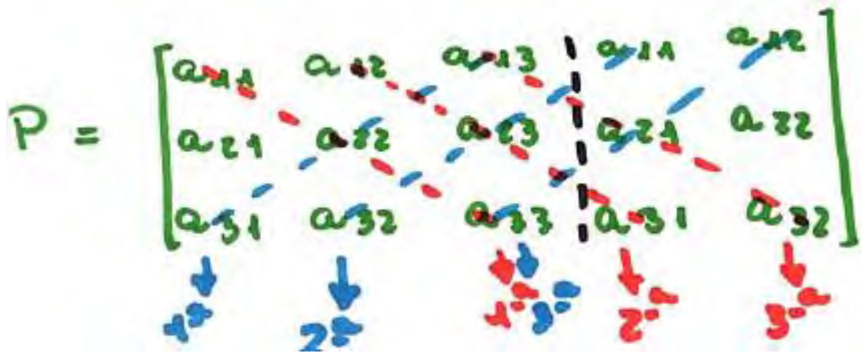
- ✓ **Matriz quadrada de ordem 3**: para calcular o determinante dessas matrizes precisaremos aprender um artifício matemático chamado de Regra de Sarrus. Vamos entendê-la a partir de um exemplo. Veja a matriz genérica abaixo:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Agora vamos repetir as duas primeiras colunas dessa matriz à direita dela (faremos uma linha pontilhada para delimitar a matriz original). Veja:

$$P=\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

Em seguida, traçaremos três diagonais à direita (envolvendo os elementos a_{11}, a_{12} e a_{13}) e três à esquerda (envolvendo os elementos a_{13}, a_{11} e a_{12}). Acompanhe:



O próximo passo é calcular o determinante. É necessário multiplicar os elementos de cada diagonal e depois somar esses valores. Mas tome cuidado, não vá somar as diagonais à direita com as da esquerda! Lembra de quando calculamos o determinante de uma matriz quadrada, que fizemos a diferença entre as diagonais principal e secundária? Aqui é a mesma coisa! Vamos calcular os elementos em vermelho e deles subtrair os elementos em azul. Como é muita informação, é interessante utilizar parênteses/colchetes/chaves para ajudar a não se perder em sinais, ok? A formulinha para esse cálculo é essa:

$$\det(P)=\Big\{\Big[\underbrace{(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33})}_{1^{a}\text{ diag.}}+\underbrace{(a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31})}_{2^{a}\text{ diag.}}+\underbrace{(a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})}_{3^{a}\text{ diag.}}\Big]-\Big[\underbrace{(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})}_{1^{a}\text{ diag.}}+\underbrace{(a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})}_{2^{a}\text{ diag.}}+\underbrace{(a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})}_{3^{a}\text{ diag.}}\Big]\Big\}$$

Tá, mas precisa decorar essa fórmula gigantesca? Claro que não! Basta que você trace as diagonais e lembre de multiplicar os

 |

elementos e somar as diagonais. Vamos fazer um exemplo para entender melhor tudo isso. Veja a matriz de ordem 3 abaixo:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora vamos repetir as duas primeiras colunas ao final da matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Traçando as diagonais à direita e à esquerda, chegaremos a:

$$Q = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Feito tudo isso, podemos iniciar os cálculos. Lembre que é a soma das diagonais à direita menos a soma das diagonais à esquerda. Não esqueça que os elementos de cada diagonal são multiplicados. Veja o que teremos:

$$\det(Q) = \{[(0)(-1)(5) + (1)(0)(2) + (2)(4)(3)] - [(2)(-1)(2) + (0)(0)(3) + (1)(4)(5)]\}$$

$$\det(Q) = [0 + 0 + 24] - [-4 + 0 + 20]$$

$$\det(Q) = 24 - 16 = 8$$

Então, o determinante de Q é 8.

Perceba que o cálculo dos determinantes é bem simples, mas é necessário ter muita atenção para não confundir os elementos das diagonais e principalmente os sinais.

✓ **Matriz quadrada de ordem maior que 3**: para calcular esse tipo de determinante é necessário utilizar um artifício matemático chamado de Teorema de Laplace. Para isso, precisamos seguir alguns passos:

1. Escolha uma linha ou coluna da matriz que você está estudando;
2. Multiplique cada elemento da linha (ou coluna) pelo seu respectivo cofator;
3. Pelo Teorema de Laplace, o determinante da matriz será a soma dos produtos os elementos da linha (ou coluna) pelos cofatores.

Tá, tudo isso parece bem estranho, né? A melhor forma de entender é fazendo um exemplo utilizando ordens menores, porque ele funciona para todos os casos de matrizes quadradas. Vamos utilizar um exemplo de uma matriz de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora vamos escolher, arbitrariamente, uma linha ou coluna. Nesse caso, optei pela segunda linha da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Em seguida, precisamos multiplicar cada elemento da linha que escolhemos pelo seu cofator. Mas o que é isso? O cofator é calculado a partir da equação abaixo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Parece difícil, né? Mas não é. É só trabalhoso e exige bastante atenção. Vamos fazer esse cálculo para cada um dos elementos da linha que escolhemos, iniciando pelo elemento a_{21}, que é o número 2.

- Cofator do elemento a_{21}:

$$a_{21} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21}$$

D_{21} é o determinante da matriz excluindo a coluna e a linha que contém a_{21}. Fica assim:

$$D_{21} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 15 - 12 = 3$$

Calculando o determinante dessa matriz, chegaremos a 1. Substituindo todos os valores na equação acima, teremos o seguinte:

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot D_{21}$$

$$A_{21} = (-1).(3)$$

$$A_{21} = -3$$

Esse é o valor do cofator do elemento a21. Multiplicando esse elemento pelo seu cofator, teremos: 2.(-3) = -6

Vamos guardar essa informação e calcular o cofator do segundo elemento da linha que escolhemos.

- Cofator do elemento a_{22}:

$$a_{22} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$$

D_{22} é o determinante da matriz excluindo a coluna e a linha que contém a_{22}. Fica assim:

$$D_{22} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{22} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 6 = 3$$

Calculando o determinante dessa matriz, chegaremos a 3. Substituindo todos os valores na equação, conforme fizemos anteriormente, teremos:

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot D_{22}$$
$$A_{22} = (+1) \cdot (3)$$
$$A_{22} = 3$$

Então, 3 é cofator do elemento a_{22}. Multiplicando esse elemento pelo seu cofator, teremos: 1.3 = 3. Por fim, vamos realizar o mesmo procedimento para o terceiro elemento da linha escolhida.

- Cofator do elemento a_{23}:

$$a_{23} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23}$$

D_{23} é o determinante da matriz excluindo a coluna e a linha que contém a_{23}. Fica assim:

$$D_{23} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{23} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Calculando o determinante dessa matriz, chegaremos a 1. Substituindo todos os valores na equação, teremos:

$$A_{23} = (-1)^5 . D_{23}$$
$$A_{23} = (-1)(1) = -1$$

Portanto, -1 é o cofator do elemento a_{23}. Multiplicando esse elemento pelo seu cofator, teremos: 1.(-1) = -1.

Certo, mas o teorema diz que o determinante da matriz original é o somatório das multiplicações dos elementos pelos cofatores. Assim, o valor do determinante da matriz será:

$$\det(A) = -6 + 3 - 1 = -4$$

Bem trabalhoso encontrar esse determinante, né? Por isso, caso você queira encontrar determinantes de ordem 3, é melhor utilizar o método anterior, né? Deixe o que acabamos de ver para quando for realmente necessário, como em matrizes de ordem 4 ou maiores, porque é bem fácil se perder nos sinais.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Você viu que alguns determinantes podem dar um certo trabalho para calcular, né? Mas nem sempre é necessário fazer tooodos os passos que nós vimos para saber qual é o determinante de uma matriz. Vamos estudar as propriedades dos determinantes para facilitar o entendimento e poupar tempo (esses dois fatores são essenciais numa prova):

✓ 1ª propriedade

O determinantes de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua matriz transposta.
Exemplo:

$$S = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow S^T = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(S) = [(-4)(2)] - [(1)(7)] \rightarrow det(S^T) = [(-4)(2)] - [(7)(1)]$$

$$det(S) = -8 - 7 = -15 \qquad det(S^T) = -8 - 7 = -15$$

✓ 2^a propriedade

Caso haja, numa matriz quadrada, uma coluna ou uma linha de zeros, o determinante será zero.

Exemplo:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(R) = (0)(2) - (1)(0)$$

$$det(R) = 0 - 0 = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$det(T) = (0)(-10) - (3)(0)$$

$$det(T) = 0 - 0 = 0$$

✓ 3^a propriedade

Se trocarmos a posição de duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada de ordem 2 ou maior, o determinante da nova matriz será o oposto da matriz original.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = [(2)(3)] - [(1)(-4)] \qquad \det(B) = [(1)(-4) - (2)(3)]$$

$$\det(A) = 6 + 4 = \underbrace{10} \qquad \det(B) = -4 - 6 = \underbrace{-10}$$

opostos

✓ **4ª propriedade**

Se duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada de ordem 2 ou maior forem iguais, o determinante é zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1)(2) - (1)(2)$$

$$\det(A) = 2 - 2 = 0$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (3)(4) - (4)(3)$$

$$\det(B) = 12 - 12 = 0$$

- 5ª propriedade

Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada por um número real, seu determinante também ficará multiplicado por esse número.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1^a \text{ linha} \times 2} B = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (2)(1) - (3)(8) = 22 \qquad \underbrace{\det(B) = (4)(1) - (3)(16) = 44}_{\det(B) \text{ é } 2 \cdot \det(A)}$$

- 6ª propriedade

Se os elementos correspondentes de duas linhas ou de duas colunas de uma matriz de ordem 2 ou maior forem proporcionais, o determinante é zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \det(A) = (1)(6) - (2)(3) = 0$$

$\times 2$

- 7ª propriedade:

No caso de uma matriz triangular, o determinante dessa matriz será igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad det(A) = (6)(4) - (0)(1) = 24$$

diag. princ. $\rightarrow 6 \times 4 = 24$

✓ 8ª propriedade:

Multiplicando todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz de ordem 2 (ou maior) por um número e adicionando o resultado obtido aos elementos correspondentes de outra linha ou coluna, obteremos uma segunda matriz, tal que os determinantes das duas matrizes serão iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad det(A) = (1)(7) - (-3)(5) = 22$$

→ Multiplicando a 1ª coluna por 2, somando o resultado à 2ª coluna e substituindo esse resultado na própria 2ª coluna, teremos a matriz B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = (1)(17) - (-1)(5) = 22$$

$$det(A) = det(B)$$

✓ 9ª propriedade:

Se duas matrizes quadradas têm a mesma ordem, o determinante do produto dessas matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada uma delas. Essa propriedade é chamada de Teorema de Binet.

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad A.B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad det(A.B)=-4+6=2$$

$$det(A.B)=det(A).det(B) \qquad det(A)=6-5=1$$

$$2=2 \qquad det(B)=0+2=2$$

$$det(A).det(B)=2$$

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Agora que já sabemos tudo sobre matrizes, somos capazes de resolver o problema inicial que foi apresentado lá no início da apostila sobre a mensagem criptografada. Só para lembrar, seu amigo te enviou o seguinte:

40 23 69 18 40 67 45 118 31 67

Para decodificar essa mensagem, utilize a chave $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ e considere que as letras de A a Z assumem os valores de 1 a 26, conforme abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Vamos entender como é o processo de criptografia para podermos entender como faremos para decodificar a mensagem.

No caso de mensagem criptografada com matrizes, considerando que cada letra corresponde a um número, podemos seguir os passos abaixo:

1. Substituir as letras das palavras da mensagem por números que correspondem à elas (seguindo a tabela de letras e número de a a z e de 1 a 26);
2. Transformar esses números em uma matriz;
3. Criar uma matriz que servirá como chave para decifrar a mensagem;
4. Multiplicar a matriz-chave pela matriz da mensagem (note que isso só será possível se o número de colunas da matriz-chave for igual ao número de linhas da matriz da mensagem) para obter uma nova matriz, agora criptografada. Por exemplo, se chamamos a matriz-chave de A e a matriz-mensagem de M, a nova matriz pode ser chamada de C. Assim, a operação que fizemos foi C = A.M.

Note que, no nosso caso, nós sabemos o C (que é a mensagem criptografada) e a chave, que chamamos de A. Então, nosso objetivo é chegar ao M, que é a mensagem decodificada. Portanto, para decifrar a mensagem, basta fazer o inverso, ou seja, multiplicar a matriz criptografada pelo inverso da chave. Assim, a operação para decodificar uma mensagem é $M = A^{-1}.C$.

Ok! Então, vamos lá! Primeiramente, vamos transformar aqueles números em uma matriz. Como sabemos que a matriz-chave é 2x2, precisamos tomar cuidado com o tamanho da matriz que vamos criar. É necessário que ela tenha duas linhas para conseguirmos realizar a multiplicação. Então, vamos transformar os números em uma matriz com duas linhas. Veja:

40 23 69 18 40 67 45 118 31 67

$$C = \begin{bmatrix} 40 & 23 & 69 & 18 & 40 \\ 67 & 45 & 118 & 31 & 67 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é inverter a matriz-chave (A), já que nosso objetivo é decodificar a mensagem. Lembra como fazer isso? Vamos supor uma outra matriz de mesma ordem e igualar o produto delas a uma matriz identidade, ou seja, A.B = I. Acompanhe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = I$$

Fazendo a multiplicação, teremos:

$$\begin{bmatrix} 3a + 1c & 3b + 1d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Criando sistemas para poder encontrar o valor das variáveis:

$$① \begin{cases} 3a + 1c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 3b + 1d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas separadamente:

$$① \begin{cases} 3a + 1c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + 1c = 1 \; (-2) \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} -6a - \cancel{2c} &= -2 \\ 5a + \cancel{2c} &= 0 \\ \hline -1a &= -2 \\ \boxed{a = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a + 1c &= 1 \\ 3(2) + 1c &= 1 \\ 6 + 1c &= 1 \\ \boxed{c = -5} \end{aligned}$$

$$② \begin{cases} 3b + 1d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3b + 1d = 0 \quad (-2) \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} -6b - \cancel{2d} = 0 \\ 5b + \cancel{2d} = 1 \\ \hline -1b = 1 \\ \boxed{b = -1} \end{array}$$

$$3b + 1d = 0$$
$$3(-1) + 1d = 0$$
$$-3 + d = 0$$
$$\boxed{d = 3}$$

Beleza! Agora que sabemos os valores das variáveis, é só substituir em B, que é a matriz inversa de A:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Ótimo! Podemos finalmente resolver nosso problema. Bora substituir na equação M = A^{-1}.C:

$$M = A^{-1} . C$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}_{2x2} . \begin{bmatrix} 40 & 23 & 69 & 18 & 40 \\ 67 & 45 & 118 & 31 & 67 \end{bmatrix}_{2x5}$$

Fazendo essa multiplicação, teremos:

$$M = \begin{bmatrix} 80-67 & 46-45 & 138-118 & 36-31 & 80-67 \\ -200+201 & -115+135 & -345+354 & -90+93 & -200+201 \end{bmatrix}$$

Beleza! Agora podemos reorganizar todos esses dados lado a lado para, então, substituir as letras que correspondem a cada número:

$$M = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 20 & 5 & 13 \\ 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Olha que legal! Na mensagem tão misteriosa que seu amigo enviou estava escrito apenas matemática! Pode parecer pouca coisa, mas você viu o trabalho que teve para conseguir decifrá-la? Imagina se fosse uma mensagem maior, quantos cálculos você teria que fazer? Ainda bem que os computadores estão aqui para facilitar nossa vida, né? Eles estão cada vez mais rápidos e conseguem calcular facilmente esse tipo de criptografia.

EXERCÍCIOS

1. Qual a ordem das matrizes abaixo, respectivamente?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) 2x3 ; 3x3 ; 1x1

b) 2x2 ; 2x3 ; 2x1

c) 3x3 ; 3x1 ; 2x3

d) 3x3 ; 2x2 ; 1x1

e) 2x2 ; 2x3 ; 1x2

Alternativa correta: E

2. Determine a, b, c, d:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a) a=3 ; b=2 ; c=-1 ; d=6

b) a=-4 ; b=11 ; c=1 ; d=5

c) a=2 ; b=3 ; c=9 ; d=-6

d) a=4 ; b=1 ; c=11 ; d=4

e) a=5 ; b=5 ; c=1 ; d=-1

Alternativa correta: D

3. Qual é o determinante da matriz abaixo?

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

a) 19

b) 20

c) 21

d) 22

e) 23

Alternativa correta: E

4. Sobre matrizes transpostas, selecione a alternativa correta:

a) se uma matriz A é multiplicada por sua transposta, tem-se como resultado uma matriz identidade

b) uma matriz A subtraída pela sua transposta resulta em uma matriz nula

c) uma matriz transposta é apenas uma matriz na qual os elementos de uma n-ésima linha são trocados por uma nésimo coluna, como se a matriz se refletisse em relação à diagonal principal

d) matriz transposta é o mesmo que uma matriz inversa

e) a matriz transposta de uma matriz identidade resulta em uma matriz nula

Alternativa correta: C

5. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) 3

b) 8

c) 11

d) 17

e) 30

Alternativa correta: C

6. Sobre determinantes é correto afirmar que:

a) o determinante só pode ser calculado para matrizes 2x2 ou 3x3

b) sistemas lineares com determinantes nulos são sistemas possíveis determinados

c) o determinante de uma matriz pode ser calculado independente do número de linhas e colunas

d) um sistema linear com determinante não nulo é um sistema possível determinado

e) todo sistema linear com determinante nulo é impossível de ser resolvido.

Alternativa correta: D

7. Calcule o(s) valor(es) possível(eis) para que o determinante da matriz A seja nulo

$$A = \begin{pmatrix} x & (x-2) \\ x & 3 \end{pmatrix}$$

a) x = 0

b) x= 1 e x = 3

c) x = 1

d) x = 2 e x = 5

e) x = 0 e x = 5

Alternativa correta: E

8. (PUC – RS) O elemento c22 da matriz C = AB, onde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) 0

b) 6

c) 2

d) 11

e) 22

Alternativa correta: D

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE III

MATEMÁTICA

08

SISTEMAS LINEARES

SISTEMAS LINEARES

Na apostila de Álgebra II nós aprendemos a identificar e manipular equações de 2º grau completas e incompletas, racionais e irracionais e, por fim, a resolver sistemas 2x2 por adição e por substituição. Portanto, você já tem uma base sobre o assunto que será tratado nesta apostila de Sistemas Lineares. Para nos aprofundarmos nesse assunto, vamos, inicialmente, relembrar o que são sistemas lineares e o que já foi estudado sobre eles. Caso você ache necessário, leia novamente a última seção da apostila de Álgebra II.

SISTEMAS LINEARES 2 X 2

Sistemas **lineares** são compostos por equações **lineares**, assim como sistemas **não-lineares** são compostos por sistemas **não-lineares**. Tá, mas o que isso quer dizer? Que, primeiramente, você precisa identificar se a equação que está no sistema é ou não linear. Lembre que uma equação de segundo grau, por exemplo, é **não-linear**, já que o grau dela é 2 ($ax^2 + bx + c = 0$), ou seja, há incógnitas se multiplicando. Em uma equação linear não há termos em que as incógnitas se multiplicam. Por exemplo, não teremos termos xy, x^2, xyz, y^3 etc. Uma equação linear é sempre do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b,$$

em que os "*a's*" são os coeficientes (números reais), os "*x's*" são incógnitas (x, y, z, w, u, v, ...) e o b é o termo independente (número real) que não é acompanhado de incógnita.

Veja abaixo exemplos de equações lineares e não-lineares:

EQUAÇÕES LINEARES	EQUAÇÕES NÃO-LINEARES
$3x - 2y = 7$	$-2x^2 + 3y = 1$
$-x + y - z = 0$	$xy - 10z = -2$
$2x + y + z = 7$	$2x^3 + xz = 4$

Note que os elementos da primeira coluna não apresentam multiplicação de incógnitas, caracterizando equações lineares, enquanto que na segunda coluna há multiplicação de incógnitas, caracterizando equações não-lineares. A partir disso, você é capaz de analisar se um sistema é linear.

Vamos voltar ao problema que tínhamos na apostila de Álgebra II sobre as medidas de uma mesa que você deveria construir. Lá nós montamos o seguinte sistema, a partir de informações que você coletou:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Note que as duas equações do sistema são lineares, ou seja, há apenas uma incógnita para cada termo (com exceção do termo independente que não tem incógnita mesmo). Para resolvermos esse sistema, nós utilizamos dois métodos, o de adição e o de substituição. Vamos relembrar cada um deles:

ADIÇÃO

Nesse caso, a ideia é excluir uma das variáveis para conseguir encontrar a outra. Então, se multiplicarmos a primeira equação por -3 será possível anular o primeiro termo das duas equações. Acompanhe:

$$\begin{cases} x + y = 9 \ (-3) \\ 3x + 4y = 31 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Somando as duas equações, chegaremos a:

$$
\begin{array}{r}
-3x - 3y = -27 \\
3x + 4y = 31 \\
\hline
0 + 1y = 4
\end{array}
$$

Então, concluímos que y = 4. Para sabermos o valor de x basta substituir o valor de y em uma das das equações originais.

$$
\begin{aligned}
x + y &= 9 \\
x + 4 &= 9 \\
x &= 9 - 4 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Quando resolvemos este problema na outra apostila, nós definimos que x seria o lado maior da mesa e y, o lado menor. Por isso, a mesa terá lados 5 e 4, respectivamente, e a solução do sistema é formalmente dada por S = (5, 4).

SUBSTITUIÇÃO

Esse método é baseado em substituir o valor de uma variável, dada por uma equação, na outra. Por exemplo, se isolarmos o x da primeira equação, chegaremos a um valor, composto pela variável y que, se substituído na segunda equação, fornecerá o valor de y. Veja o exemplo com o mesmo sistema anterior:

$$x + y = 9 \quad \rightsquigarrow \quad x = 9 - y$$

Substituindo o valor de x na segunda equação e resolvendo:

$$
\begin{aligned}
3x + 4y &= 31 \\
3(9 - y) + 4y &= 31 \\
27 - 3y + 4y &= 31 \\
27 + y &= 31 \\
y = 31 - 27 &= 4
\end{aligned}
$$

Chegaremos ao mesmo valor encontrado anteriormente para y, o lado menor, que vale 4. E o valor de x é facilmente encontrado se, a partir da equação em que o isolamos, substituirmos o valor de y:

$$x = 9 - y$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

Que também é o mesmo valor de x que encontramos anteriormente. E nem poderia ser diferente, né? São métodos diferentes, mas a resposta deve ser a mesma nos dois.

Agora que relembramos a resolução de sistemas 2 x 2, podemos dar um passo a mais no nosso aprendizado e entender as diversas outras formas de resolver sistemas com ordens maiores. Vamos lá!

SISTEMAS 3 X 3 (OU MAIOR) POR SUBSTITUIÇÃO E ADIÇÃO

Anteriormente, o nosso problema envolvia apenas duas variáveis, que eram os lados de uma mesa. Mas sistemas lineares podem ser de ordens maiores, com mais equações, mais incógnitas e etc. Aqui vamos aprender como é possível resolver sistemas de ordem 3, mas com as técnicas que serão abordadas você pode resolver sistemas de outras ordens, é só ter disposição! Vamos ao novo problema:

Um estudante de Matemática foi a uma papelaria e comprou **x** lápis, **y** borrachas e **z** canetas. Ele resolveu fazer uma brincadeira com seus colegas e pediu que, a partir de um sistema que ele montou, os estudantes calculassem quantas unidades de cada item ele comprou. O sistema que ele criou foi o seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Os colegas aceitaram o desafio. Um deles preferiu resolver o sistema por adição e o outro, por substituição. Os procedimentos que eles seguiram são basicamente os que utilizamos na resolução do nosso sistema 2x2 e estão explicados abaixo:

ADIÇÃO

Apesar dessa resolução ser por adição, o primeiro procedimento é de substituição. Isso porque é necessário criar um novo sistema, com apenas duas equações, para resolver este problema. Então, primeiramente, isola-se uma das variáveis. O estudante optou por isolar o z da primeira equação, chegando a:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 & \rightarrow z = 8 - 2x - y \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Em seguida substitui-se o “valor” do z acima nas duas outras equações do sistema. Na segunda:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 & \rightarrow z = 8 - 2x - y \\ x + y + 4z = 15 & \rightarrow x + y + 4(8 - 2x - y) = 15 \\ 3y + 2z = 9 & x + y + 32 - 8x - 4y = 15 \\ & \boxed{-7x - 3y = -17} \end{cases}$$

E na terceira

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \rightarrow z = 8 - 2x - y \\ x + y + 4z = 15 \rightarrow x + y + 4(8 - 2x - y) = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$x + y + 32 - 8x - 4y = 15$$

$$\boxed{-7x - 3y = -17}$$

$$\downarrow$$

$$3y + 2(8 - 2x - y) = 9$$

$$3y + 16 - 4x - 2y = 9$$

$$\boxed{y - 4x = -7}$$

Veja que chegamos a duas novas equações que contêm apenas duas incógnitas, x e y. Podemos montar um novo sistema com essas equações e encontrar os valores delas:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

Agora sim, resolvendo o sistema por adição, podemos multiplicar a segunda equação por 3 para poder obter um resultado que possibilite anular uma das variáveis, nesse caso, o y, e assim conseguimos encontrar o x. Acompanhe:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -7x - \cancel{3y} = -17 \\ -12x + \cancel{3y} = -21 \\ \hline 19x = 38 \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{38}{19} = 2}$$

Agora basta substituir o valor de x em uma das equações acima para encontrar o valor de y. O estudante optou por substituir na segunda equação:

$$y - 4x = -7$$
$$y - 4(2) = -7$$
$$y - 8 = -7$$
$$y = -7 + 8$$
$$\boxed{y = 1}$$

Sabendo os valores de x e y, basta substituir esses valores em uma das equações do sistema original para encontrar o z. Fazendo esse procedimento na terceira equação do sistema original:

$$3y + 2z = 9$$
$$3(1) + 2z = 9$$
$$3 + 2z = 9$$
$$2z = 9 - 3$$
$$\boxed{z = \frac{6}{2} = 3}$$

Pronto! O estudante que resolveu o sistema por adição encontrou x = 2, y = 1 e z = 3, então, o colega dele, que propôs o desafio, comprou 2 lápis, 1 borracha e 3 canetas.

SUBSTITUIÇÃO

Faremos o mesmo procedimento inicial do método anterior, isolando uma variável do sistema e substituindo-a nas outras equações:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$2x + y + z = 8 \rightarrow z = 8 - 2x - y$$

$$x + y + 4z = 15 \rightarrow x + y + 4(8 - 2x - y) = 15$$
$$x + y + 32 - 8x - 4y = 15$$
$$\boxed{-7x - 3y = -17}$$

$$3y + 2z = 9 \downarrow$$
$$3y + 2(8 - 2x - y) = 9$$
$$3y + 16 - 4x - 2y = 9$$
$$\boxed{y - 4x = -7}$$

Assim como antes, com essas equações, formamos um novo sistema igual ao do método anterior:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

Até agora tudo como antes, né? A diferença começa aqui: esse estudante optou por resolver o sistema por substituição, então isolou uma das variáveis, no caso o y da segunda equação, nesse novo sistema e substituiu o "valor" dele na primeira equação, possibilitando encontrar o valor de x. Ficou assim:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$y = -7 + 4x$$

Sabendo o valor de x, basta substituí-lo na primeira equação desse segundo sistema para encontrar o y:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases} \quad \Downarrow \quad y = -7 + 4x$$

$$-7x - 3y = -17 \rightarrow -7x - 3(-7 + 4x) = -17$$
$$-7x + 21 - 12x = -17$$
$$-19x = -17 - 21$$
$$-19x = -38$$
$$\boxed{x = 2}$$

$$-7x - 3y = -17$$
$$-7(2) - 3y = -17$$
$$-14 - 3y = -17$$
$$-3y = -3$$
$$\boxed{y = 1}$$

E agora, com o valor de y é possível encontrar o valor de z substituindo o que já sabemos na terceira equação do sistema original:

$$3y + 2z = 9$$
$$3(1) + 2z = 9$$
$$3 + 2z = 9$$
$$\boxed{z = 3}$$

Finalmente o estudante chegou ao resultado de que x = 2, y = 1 e z = 3, ou seja, o seu colega comprou 2 lápis, 1 borracha e 3 canetas. Exatamente o mesmo resultado que o outro estudante encontrou pelo método da adição.

Você viu que resolver sistemas 3 x 3 por adição e por substituição exige bastante atenção para realizar as manipulações matemáticas com as incógnitas, certo? Mas existem métodos que facilitam um pouco a resolução de sistemas lineares utilizando matrizes, o escalonamento e a Regra de Cramer. Vamos abordá-los a seguir.

ESCALONAMENTO

Quando um sistema tem a mesma solução do outro, podemos dizer que eles são sistemas equivalentes, por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = -4 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 4y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 2x + \cancel{y} = 1 \\ -x - \cancel{y} = -4 \\ \hline \boxed{x = -3} \end{array}$$

$$\therefore$$

$$-x - y = -4$$
$$-(-3) - y = -4$$
$$-y = -4 - 3$$
$$\boxed{y = 7}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \quad (4) \\ -4x - 4y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 8x + \cancel{4y} = 4 \\ -4x - \cancel{4y} = -16 \\ \hline 4x = -12 \end{array}$$

$$x = -\frac{12}{4}$$
$$\boxed{x = -3}$$

$$\therefore \quad 2x + y = 1$$
$$2(-3) + y = 1$$
$$y = 1 + 6$$
$$\boxed{y = 7}$$

Note que a segunda equação do segundo sistema é 4 vezes a segunda equação do primeiro sistema. Outra observação importante é que a ordem das equações do sistema não importa, teríamos chegado ao mesmo resultado se o sistema estivesse montado da seguinte forma:

$$\begin{cases} -x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - 4y = -16 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

O método do escalonamento pretende facilitar a resolução de sistemas transformando um sistema mais complexo num mais fácil de ser resolvido, fazendo com que o número de incógnitas vá aumentando de baixo para cima nas equações. Difícil de entender? Veja o exemplo abaixo de sistemas não escalonados e de sistemas escalonados:

NÃO ESCALONADOS

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y - 2z = 8 \\ y + 5z = 37 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{3 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 8 \\ 3y - 2z = 6 \\ -2y - 3z = 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{3 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \end{matrix}$$

ESCALONADOS

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2y + z = 7 \\ 4z = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{3 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \\ \text{1 incóg.} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y - z + t - m = 11 \\ 3z - 2t + m = -13 \\ t - 5m = 23 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{4 incs.} \\ \text{3 incs.} \\ \text{2 incs.} \end{matrix}$$

Mas antes de aplicar o método do escalonamento no sistema linear, precisamos entender como o transformamos em uma matriz.

MATRIZ DE UM SISTEMA LINEAR

Para saber qual é a forma matricial de um sistema linear é necessário relembrar que o sistema é formado por coeficientes, por incógnitas e por termos independentes. Vamos tomar como exemplo o sistema 3 x 3 que utilizamos para descobrir o número de itens que um estudante comprou na papelaria. O sistema era:

$$S = \begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Podemos construir uma matriz com os coeficientes das incógnitas, colocando todos os coeficientes do x na primeira coluna, do y na segunda e do z na terceira. Perceba que não temos x na terceira equação e, portanto, seu coeficiente é zero (0x). Ela ficaria assim:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Coeficientes}$$

Podemos também construir matrizes coluna com as incógnitas e com os termos independentes separadamente:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Incógnitas}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Termos Indep.}$$

Note que se fizermos AX = B chegaremos ao mesmo sistema que transformamos em matriz.

Para aplicar o método do escalonamento, utilizaremos uma matriz com os coeficientes e com os termos independentes que chamamos de matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz Completa}$$

ESCALONAMENTO

Agora que já sabemos como transformar um sistema linear em uma matriz podemos aplicar o método do escalonamento. Lembre que esse método pretende chegar a um sistema equivalente ao original em que o número de incógnitas vá aumentando uma a uma de baixo para cima. No caso do sistema que estamos analisando, temos o seguinte:

$$\begin{cases} 2x+y+z=8 & \text{3 incs.} \\ x+y+4z=15 & \text{3 incs.} \\ 3y+2z=9 & \text{2 incs.} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Veja que na última linha temos duas incógnitas e na segunda e na terceira linhas temos 3 incógnitas, o nosso objetivo é chegar em algo assim:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & \text{3 incs.} \\ b_2y+c_2z=d_2 & \text{2 incs.} \\ c_3z=d_3 & \text{1 inc.} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Sistema Escalonado

Um sistema em que na terceira equação temos uma incógnita; na segunda, duas; e na terceira, 3 incógnitas. Para isso, vamos aplicar operações matemáticas nas linhas da matriz completa do sistema linear. Então, vamos comparar as matrizes para saber qual será o primeiro passo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Veja que o último termo na primeira coluna já é zero, então não precisamos nos preocupar com ele.

Vamos chamar cada linha de L_1, L_2 e L_3, de cima para baixo:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Agora precisamos zerar os outros valores, como o segundo termo dessa mesma coluna, o 1. Para isso, note que se multiplicarmos a primeira linha por 1/2 e subtrairmos a linha 2 desse resultado, conseguiremos zerar o primeiro termo da segunda linha, ou seja, $L_2 - L_1.(1/2)$. Acompanhe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 : L_2 - \left(\frac{1}{2}\right) L_1$$

zerar

$$[1 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 15] - \frac{1}{2}[2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 8]$$

$$[1 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 15] - [1 \;\; 1/2 \;\; 1/2 \;\; 4]$$

$$L_2 : [0 \;\; 1/2 \;\; 7/2 \;\; 11]$$

Agora a nossa matriz está assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é zerar o terceiro elemento da segunda coluna, o 3. Veja que, para isso, podemos subtrair a segunda linha vezes seis da terceira linha, ou seja, $L_3 = L_3 - 6.L_2$. Veja abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 : L_3 - 6.L_2$$

zerar

$$[0 \quad 3 \quad 2 \quad 9] - 6.[0 \quad 1/2 \quad 7/2 \quad 11]$$

$$[0 \quad 3 \quad 2 \quad 9] - [0 \quad 3 \quad 21 \quad 66]$$

$$L_3 : [0 \quad 0 \quad -19 \quad -57]$$

Ótimo! Atingimos nosso objetivo! Conseguimos zerar os dois últimos termos da primeira coluna e o último da segunda e, por isso, o nosso sistema ficou com uma incógnita na terceira linha, duas na segunda e três na primeira.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1y + 1z = 8 \\ \dfrac{1y}{2} + \dfrac{7z}{2} = 11 \\ -19z = -57 \end{cases}$$

Escalonado

3 incógnitas
2 incógnitas
1 incógnita

Agora fica mais fácil de resolver o sistema, né? Perceba que o “z” está quase “pronto” na terceira equação. Basta isolá-lo para encontrar seu valor:

$$-19z = -57$$

$$z = \frac{57}{19}$$

$$\boxed{z = 3}$$

Tendo o valor de z, podemos substituir seu valor na segunda equação e encontrar o valor de y:

$$\frac{y}{2} + \frac{7z}{2} = 11$$
$$y + 7z = 11 \cdot 2$$
$$y + 7(3) = 22$$
$$y = 22 - 21$$
$$\boxed{y = 1}$$

Agora, para encontrar o x, basta substituir os valores das incógnitas anteriores na primeira equação:

$$2x + y + z = 8$$
$$2x + 1 + 3 = 8$$
$$2x = 8 - 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$\boxed{x = 2}$$

Pronto! Chegamos ao mesmo resultado dos métodos anteriores, ou seja, o estudante comprou 2 lápis (x), 1 borracha (y) e 3 canetas (z).

REGRA DE CRAMER

Além da adição, da substituição e do escalonamento há um quarto método interessante de ser estudado, a Regra de Cramer. Para aplicar essa regra é necessário relembrar mais conceitos sobre matrizes, como o cálculo do determinante de uma matriz. A grande peculiaridade da regra de Cramer é que ela pode ser aplicada apenas em sistemas em que o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Para encontrar a solução de um sistema utilizando este método, é necessário calcular, primeiramente, o determinante da matriz de coeficientes e, em seguida, calcular o determinantes de outra matriz que terá todas as suas colunas (uma de cada vez) substituídas pela matriz de termos independentes. Então, para encontrar o valor de x é necessário substituir a coluna correspondente a essa incógnita na matriz de coeficientes pela matriz de termos independentes e assim sucessivamente. Veja as equações que permitem a resolução de um sistema a partir desse método:

$$x = \frac{Dx}{D} \quad y = \frac{Dy}{D} \quad z = \frac{Dz}{D} \quad \dots \quad n = \frac{Dn}{D}$$

Vamos relembrar a matriz de coeficientes e a matriz de termos independentes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Em que D é o determinante da matriz de coeficientes, Dx é o determinante da matriz com a primeira coluna substituída pela matriz de termos independentes, Dy é o determinante da matriz com a segunda coluna substituída pela matriz de termos independentes, Dz é o determinante da matriz com a coluna de z substituída pela matriz de termos independentes e Dn é o determinante da matriz com a coluna de n substituída pela matriz de termos independentes.

Vamos construir essas matrizes e calcular os determinantes para encontrar cada uma das incógnitas, mas primeiro vamos calcular o determinante da matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Para calcular o determinante vamos copiar à direita as duas primeiras colunas.

$$\left[\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

Calculando o determinante, teremos que D é:

$$D = [(4+0+3) - (0+24+2)]$$
$$D = 7 - 26 = -19$$

Ótimo! Agora vamos calcular o determinante associado a cada incógnita, começando pelo x:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$Dx = \left[\begin{matrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 8 & 1 \\ 15 & 1 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$$Dx = [(16+36+45) - (9+96+30)]$$
$$Dx = 97 - 135 = -38$$

Então, x vale:

$$\frac{Dx}{D} = \frac{-38}{-19} = \boxed{2 = x}$$

Para calcular o determinante associado ao y, devemos substituir a matriz de termos independentes na linha y da matriz original:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Duplicando as colunas e calculando o determinante:

$$D_y = \left[\begin{matrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 2 & 8 \\ 1 & 15 \\ 0 & 9 \end{matrix}$$

$$D_y = [(60+0+9)-(0+72+16)]$$
$$D_y = 69-88 = -19$$

Então, segundo a Regra de Cramer, y vale:

$$D_y = \frac{-19}{-19} = \boxed{1 = y}$$

Por fim, vamos calcular o determinante associado ao z:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Duplicando as colunas e resolvendo o determinante, teremos:

$$D_z = \left[\begin{matrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 9 \end{matrix}\right] \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

$$D_z = [(18+0+24) - (0+90+9)]$$
$$D_z = 42 - 99 = -57$$

Calculando o z:

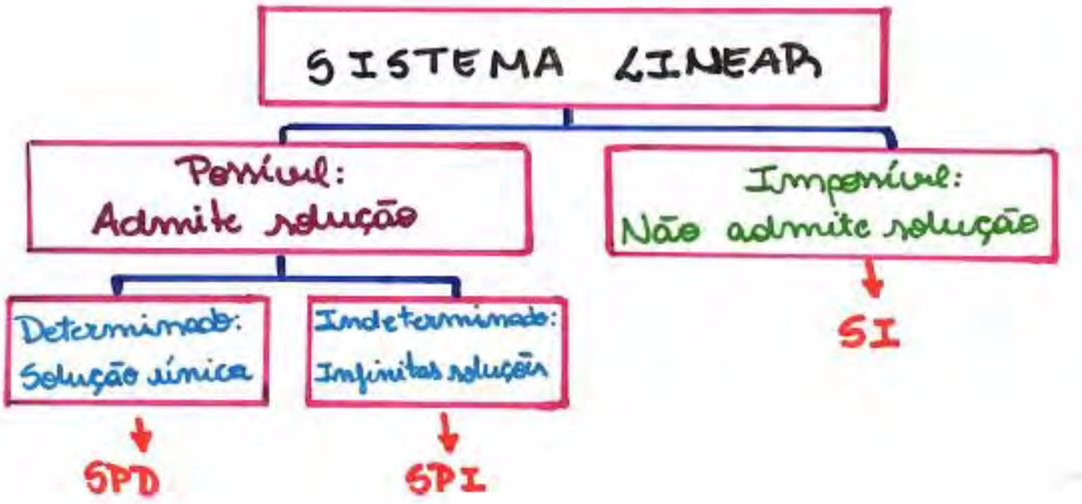
$$D_z = \frac{-57}{-19} = \boxed{3 = z}$$

Então, encontramos x = 2, y = 1 e z = 3, ou seja, o mesmo resultado dos outros 3 métodos anteriores.

Agora que você tem todo esse arsenal de métodos, basta escolher o mais adequado para o sistema que você precisa resolver.

TIPOS DE SOLUÇÃO (DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA)

Você acabou de aprender como resolver sistemas de diversas formas diferentes, mas será que todos eles são resolvíveis? Antes de você sair quebrando a cabeça e utilizar 300 métodos diferentes para encontrar a solução de um sistema, é importante que você saiba analisá-lo para saber se realmente vale a pena tentar resolvê-lo e também saber avaliar se a resposta que você encontrou é coerente. Veja o diagrama abaixo:



Então, o sistema pode ser possível de ser resolvido e ele pode ter apenas uma solução ou várias soluções, ou pode ser impossível de ser resolvido. Vamos analisar graficamente sistemas de cada um desses três tipos.

- ✓ Sistema Possível e Determinado (SPD): o sistema tem solução e ela é única.

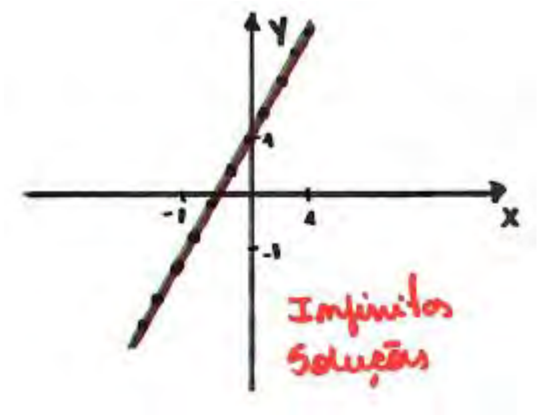
  Em um sistema linear desse tipo, as retas que descrevem cada uma das equações se cruzam em um ponto. Veja o exemplo abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$$

- ✓ **Sistema Possível e Indeterminado (SPI): o sistema tem infinitas soluções.**

As retas que descrevem as equações desse tipo de sistema são coincidentes, ou seja, se encontram em todos os pontos e, por isso, têm infinitas soluções. Veja o exemplo do sistema abaixo e o gráfico correspondente às retas das equações:

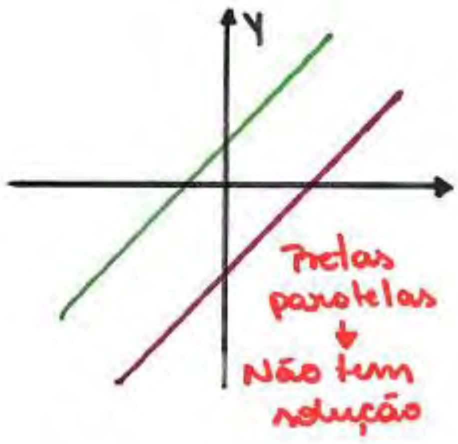
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$



- ✓ **Sistema Impossível (SI): o sistema não tem solução.**

Nesse caso, as retas que correspondem às equações são paralelas, ou seja, nunca se encontrarão e, portanto, o sistema não tem solução.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = -1 \end{cases}$$



Sabendo de tudo isso, antes de começar a resolver um sistema, analise as equações. Depois você pode escolher seu método preferido para, no caso de haver solução, encontrá-la. Bons estudos!

EXERCÍCIOS

1. Num aquário há 8 peixes, entre pequenos e grandes. Se os pequenos fossem mais um, seria o dobro dos grandes. Quantos são os pequenos? E os grandes?

   Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm

2. Descubra quais são os dois números em que o dobro do maior somado com o triplo do menor dá 16, e o maior deles somado com quíntuplo do menor dá 1.

   http://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm

3. Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?

Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm#questao-1

4. Utilizando a Regra de Cramer, determine o valor da incógnita y no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+3y+3z=18 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 5x+4y+2z=27 \end{cases}$$

Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm

5. (Fuvest–SP) Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;

Carlos e Andreia pesam 123 kg;

Andreia e Bidu pesam 66 kg.

Determine o peso de cada uma deles:

Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm

6. (Vunesp – SP) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada

sócio pagou metade desse valor, determine o número de sócios e não sócios que compareceram ao show.

Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm

7. Se o sistema de equações a seguir,

$$\begin{cases} x+y+4z &= 2 \\ x+2y+7z &= 3 \\ 3x+y+az &= b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que:

a) $a=6$ e $b\neq 4$.

b) $a\neq 6$ e $b\neq 4$.

c) $a\neq 6$ e $b=4$.

d) $a=6$ e $b=4$.

e) a é arbitrário e $b\neq 4$.

Fonte: http://www.exerciciosresolvidos.net/matematica/equacoes/sistemas-lineares/tag

8. Sendo m e n $\in \mathbb{R}$, considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-3y+z &= 1 \\ -2y+z &= m \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x-y &= 0 \\ x+2y-z &= 0 \\ 2x-ny+3z &= 0 \end{cases}$$

Se ambos permitem infinitas soluções reais qual é o valor de m e n?

Fonte:
http://www.exerciciosresolvidos.net/matematica/equacoes/sistemas-lineares/tag

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PARTE III

MATEMÁTICA

09

NÚMEROS COMPLEXOS

meSalva!

NÚMEROS COMPLEXOS

Na apostila de Álgebra II estudamos como seria possível encontrar o comprimentos dos lados de uma mesa a partir de uma “charada” que dizia que um lado era 3 metros menor do que o outro e que a mesa deveria ter 10 m². Para descobrir esses lados, montamos uma equação e descobrimos ser de segundo grau, e a resolvemos utilizando a fórmula de Bhaskara. Vamos relembrar:

- ✓ Equação de 2º Grau:

$$(x)(x-3) = 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

- ✓ Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$, com $\Delta = b^2-4.a.c$

Antes de sair calculando adoidado as raízes da equação, convinha ser feita uma análise do discriminante. Dependendo do valor dele, teríamos tipos diferentes de raízes. Veja:

- ✓ Se $\Delta > 0$: A equação tem duas raízes reais e distintas.
- ✓ Se $\Delta = 0$: A equação tem apenas uma raiz real.
- ✓ Se $\Delta < 0$: A equação não possui raízes reais.

Realizando o cálculo do discriminante referente ao problema acima, encontramos o seguinte (caso você não lembre dos detalhes até aqui, vale a pena revisar a apostila de Álgebra II):

$$\Delta = b^2-4.a.c$$

$$\Delta = (-3)^2-4.(1).(-10)$$

$$\Delta = 9 + 40$$

$$\Delta = 49$$

Nesse caso teremos duas raízes reais e distintas e, para encontrá-las, basta finalizar o cálculo substituindo o valor encontrado acima na raiz quadrada da fórmula de Bhaskara, chegando em:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$x' = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Encontramos duas raízes reais, como esperávamos, apesar de apenas uma delas ser solução do problema inicial (o comprimento da mesa não pode ser negativo).

Até aqui fizemos apenas uma revisão, certo?

Vimos, nessa revisão, que caso o discriminante fosse zero, teríamos apenas uma raiz real, mas caso fosse negativo, não teríamos raízes reais. Mas o que significa não ter raízes reais? Vamos tentar entender isso a partir da equação de segundo grau abaixo:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Ao calcularmos o discriminante dessa equação, chegaremos a:

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(5)$$

$$\Delta = 16 - 20$$

$$\Delta = -4$$

Chegamos a um discriminante negativo, logo, a equação que estamos estudando agora não possui raízes reais. Vamos substituir o valor do discriminante na fórmula de Bhaskara para tentar encontrar raízes não reais:

$$x = \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Aqui encontramos um problema. Sabemos que não existe raiz quadrada de número negativo, então, o que fazer?

Note que podemos reescrever -4 como a multiplicação de 4 por -1, certo? Vamos substituir o -4 de dentro da raiz por 4.(-1):

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4(-1)}}{2}$$

Veja que podemos tirar a raiz quadrada de 4, deixando o -1 na raiz:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{(-1)}}{2}$$

Para conseguirmos resolver essa raiz negativa, precisaremos utilizar um novo artifício matemático. Vamos substituir -1 por uma unidade imaginária (representada por i) ao quadrado, ou seja, i^2:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{i^2}}{2}$$

Como i está elevado ao quadrado dentro de uma raiz quadrada, podemos cortar a potência com a raiz e obteremos o seguinte:

$$x = \frac{4 \pm 2\cancel{\sqrt{i^2}}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

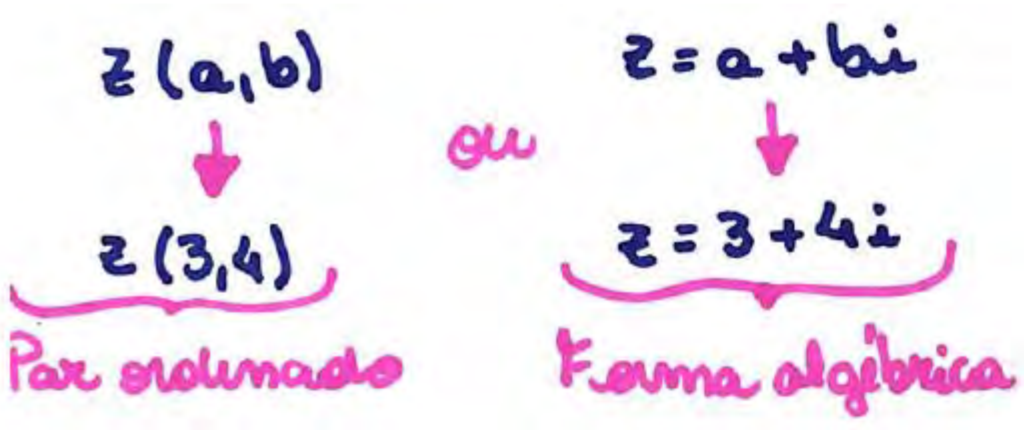
E agora? Como encontramos as raízes? Como tiramos aquele "i" dali? A verdade é que não tiramos. Um número que contém esse "i" é um número que faz parte do conjunto dos Números Complexos. Por isso, nesse caso, teremos duas raízes complexas (lembre que chamamos o i de unidade imaginária) como solução dessa equação. Para encontrar essas raízes precisaremos estudar como resolver as operações básicas com números complexos, assim como fizemos com os números naturais, inteiros, reais etc.

Curiosidade: Segundo registros históricos, a unidade imaginária **i** surgiu a partir da fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver equações de terceiro grau em meados de 1545. Isso porque alguns termos dessa fórmula, às vezes, recaíam em raízes quadradas de números negativos. Outro matemático que enfrentou problemas desse tipo e que recorreu ao que hoje conhecemos por números complexos foi Rafael Bombelli, na mesma época que os outros dois matemáticos acima. As ideias desses estudiosos soavam esquisitas perante a "sociedade matemática" da época deles. Esses números só foram realmente utilizados no século XVIII, porque Carl Friedrich Gauss (que é considerado o príncipe dos matemáticos) começou a utilizá-los em suas representações matemáticas. Além disso, Gauss sugeriu que esses números fossem chamados de "números laterais", porque eles existem, assim sendo, não são "imaginários". Ele usou um argumento geométrico para causar uma "rotação" de 90^{o} entre números num plano (plano complexo), onde o -1 representava uma rotação de 180^{o}.

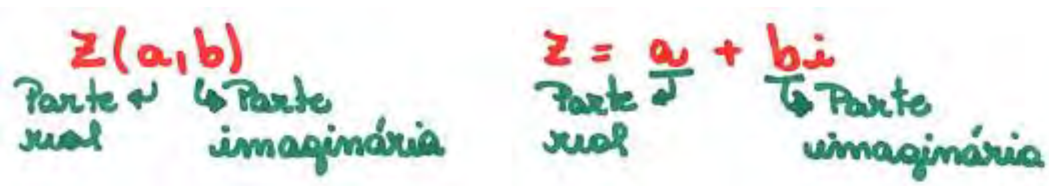
REPRESENTAÇÃO CARTESIANA E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

O conjunto de números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais e podem ser representados em pares ordenados, por forma algébrica ou trigonométrica. Vamos ver as duas primeiras agora e guardar a terceira para mais tarde.

Um número complexo “z” pode ser escrito como:



Note que as partes imaginárias em ambos os casos são representadas pelo “b”.



Veja outros exemplos:

$z_1 = (2,3)$ ou $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = (-1,6)$ ou $z_2 = -1 + 6i$

$z_3 = (0,-4)$ ou $z_3 = 0 - 4i$

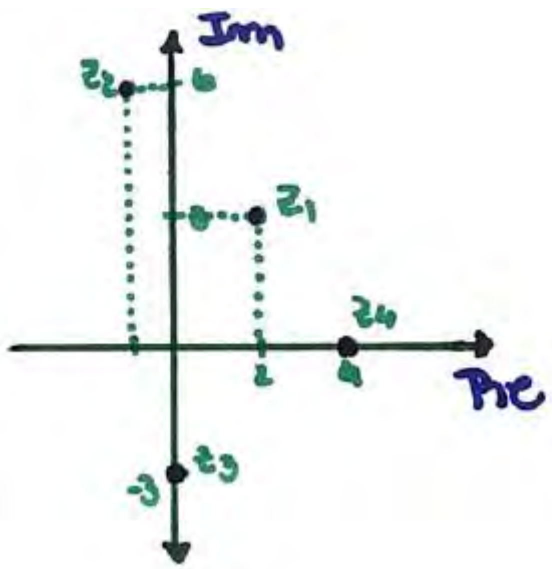
$\underbrace{z_3 = -4i}_{\text{puro}}$

Perceba que o último exemplo, z_3, não possui parte real (já que a = 0), então, ele é chamado de imaginário puro. Assim como se tivéssemos b = 0, o número não seria complexo, apenas real. Veja o exemplo abaixo:

$z_4 = (4,0)$ ou $z_4 = 4 - 0i$

$\underbrace{z_4 = 4}_{\text{número real}}$

No caso da forma algébrica, isso fica bem evidente, já que há o "i" para identificar. No caso dos pares ordenados, o b é a parte imaginária, porque agora, para representar um número complexo geometricamente, utilizamos o eixo horizontal como eixo real, e o eixo vertical como eixo imaginário. Vamos representar geometricamente os números dos exemplos acima no plano de Argand-Gauss:



Agora que já sabemos como representar os números complexos, podemos passar para a próxima etapa: as operações com complexos!

ADIÇÃO

Para realizar esta operação com números complexos é necessário somar as partes reais e imaginárias separadamente. Veja os exemplos:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 + 6i)$$
$$z_1 + z_2 = 2 + \underline{3i} - 1 + \underline{6i}$$
$$z_1 + z_2 = 1 + 9i$$

$$z_3 + z_4 = (2+4i) + (4-i)$$
$$z_3 + z_4 = 2 + 4i + 4 - i$$
$$z_3 + z_4 = 6 + 3i$$

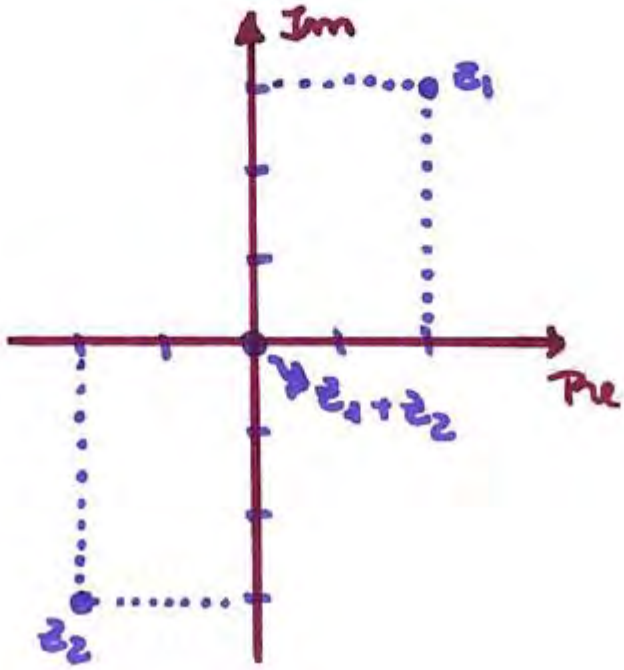
Generalizando a adição de números complexos, teremos o seguinte:

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di)$$
$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$

Uma propriedade da adição diz que existe um número complexo oposto (z_2) para cada número complexo (z_1), de forma que a soma deles é zero. Veja:

$$z_1 = 2 + 3i \xleftrightarrow{\text{OPOSTO}} z_2 = -2 - 3i$$
$$z_1 + z_2 = 2 + 3i - 2 - 3i$$
$$z_1 + z_2 = 0 + 0i$$

Um número complexo $z_1 = a + bi$ tem como oposto o número complexo $z_2 = -a - bi$. Veja um exemplo e a representação geométrica dele:



Note que os números complexos opostos são simétricos entre si em relação à origem.

SUBTRAÇÃO

Para realizar esta operação, é necessário subtrair as partes reais e imaginárias separadamente, como fizemos na adição. Acompanhe os exemplos:

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (-1 + 6i)$$

$$z_1 - z_2 = 2 + \underline{3i} + 1 - \underline{6i}$$

$$z_1 - z_2 = 3 - 3i$$

$$z_3 - z_4 = (2+4i) - (4-i)$$
$$z_3 - z_4 = 2 + 4i - 4 + i$$
$$z_3 - z_4 = -2 + 5i$$

Generalizando a subtração, temos o seguinte:

$$z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di)$$
$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números complexos é um pouco mais parecida com o que já fazemos: a famosa distributiva. Depois disso, basta aplicar o que vimos acima sobre a adição de números complexos. Veja os exemplos (dica: não esqueça que i^2 vale -1):

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i) \cdot (-1+6i)$$
$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 12i - 3i + 18i^2 \quad i^2 \to -1$$
$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 9i + 18(-1)$$
$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 9i - 18$$
$$z_1 \cdot z_2 = -20 + 9i$$

$$z_3 . z_4 = (2+4i).(4-i)$$
$$z_3 . z_4 = 8 - 2i + 16i - 4i^2 \to -1$$
$$z_3 . z_4 = 8 + 14i - 4(-1)$$
$$z_3 . z_4 = 8 + 14i + 4$$
$$z_3 . z_4 = 12 + 14i$$

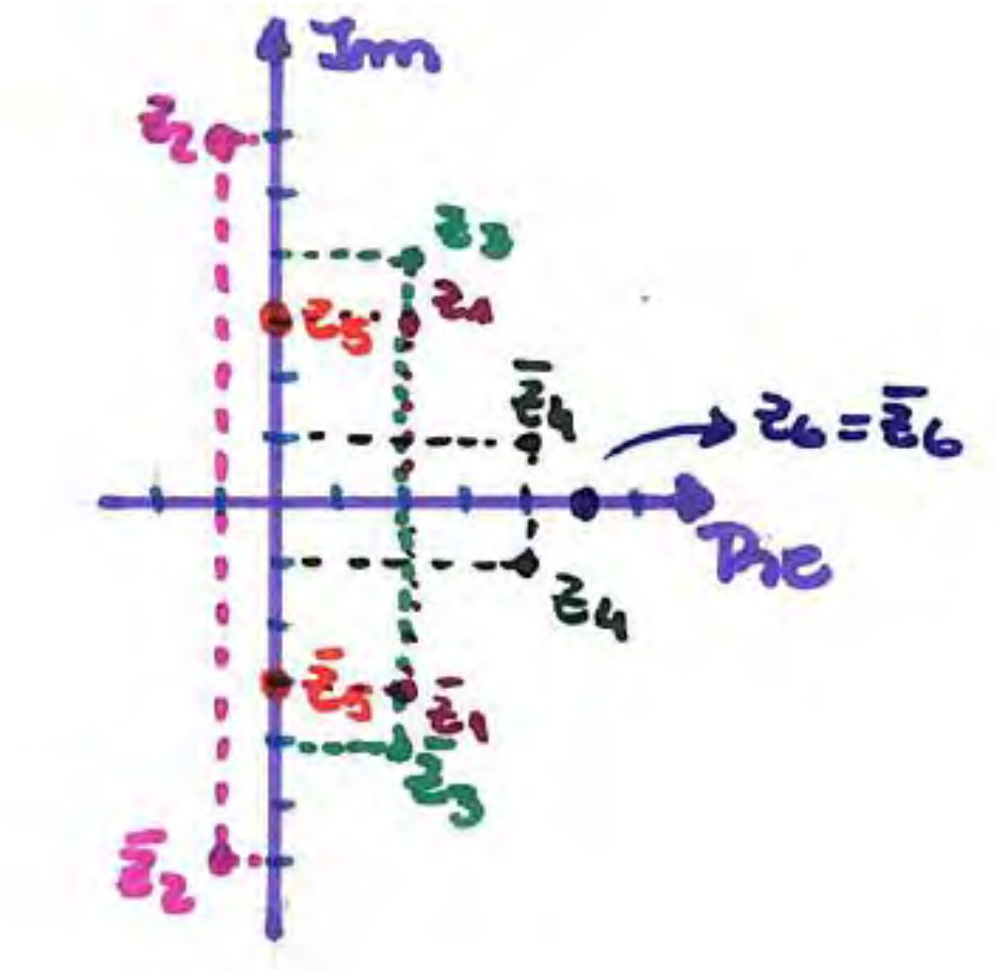
Generalizando a multiplicação de números complexos, teremos:

$$z_1 . z_2 = (a+bi).(c+di)$$
$$z_1 . z_2 = ac + adi + cdi + bdi^2 \to -1$$
$$z_1 . z_2 = ac + adi + cdi - bd$$
$$z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Anteriormente vimos que números complexos opostos são simétricos entre si em relação à origem. Já quando dois números complexos são simétricos entre si em relação apenas ao eixo dos Reais, diz-se que um é o conjugado do outro. Veja os exemplos abaixo:

$$z_1 = 2 + 3i \rightarrow \bar{z}_1 = 2 - 3i$$
$$z_2 = -1 + 6i \rightarrow \bar{z}_2 = -1 - 6i$$
$$z_3 = 2 + 4i \rightarrow \bar{z}_3 = 2 - 4i$$
$$z_4 = 4 - i \rightarrow \bar{z}_4 = 4 + i$$
$$z_5 = 3i \rightarrow \bar{z}_5 = -3i$$
$$z_6 = 5 \rightarrow \bar{z}_6 = 5$$

Perceba que apenas o sinal da parte imaginária muda, por isso, no caso de z_6, o conjugado é igual ao número complexo. Vamos ver a representação dos números complexos com seus conjugados geometricamente:



Uma característica interessante dessa modalidade é que, se multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado, o resultado dessa operação é um número real e não-negativo. Veja os exemplos abaixo:

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (2+3i)(2-3i)$$
$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4-6i+6i-9i^2 \quad i^2 \rightarrow -1$$
$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4-9(-1)$$
$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4+9$$
$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 13$$

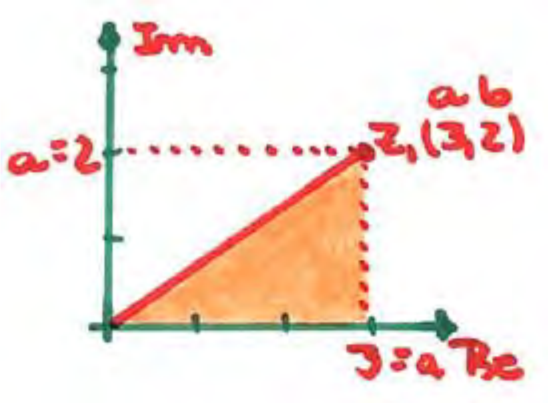
$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (-1+6i)(-1-6i)$$
$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1+6i-6i-36i^2 \quad i^2 \rightarrow -1$$
$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1-36(-1)$$
$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1+36$$
$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 37$$

Generalizando a multiplicação entre um número complexo e o seu conjugado:

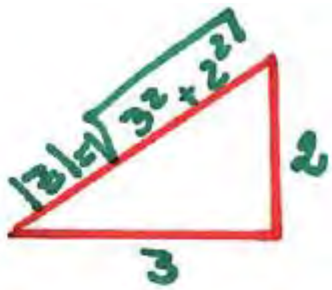
$$z \cdot \bar{z} = (a+bi) \cdot (a-bi)$$
$$z \cdot \bar{z} = a^2 - abi + abi + b^2 i^2 \quad i^2 \rightarrow -1$$
$$z \cdot \bar{z} = \underbrace{a^2+b^2}_{\text{nº não negativo}}$$

Perceba que cada um dos números e seus conjugados, que marcamos no plano de Argand-Gauss, tem uma distância em linha reta até a origem. Essa distância pode ser calculada a partir do Teorema de Pitágoras e é chamada de módulo do número complexo. Veja os exemplos:

$$z_1 = 2 + 3i$$



Note que a distância entre o lugar em que marcamos o número complexo z_1 e o eixo Real temos um triângulo (entre o eixo Imaginário também, mas precisávamos escolher um deles). Lembre que o Teorema de Pitágoras diz que a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos catetos ao quadrado (para revisar, basta dar uma olhada na apostila de Geometria Plana I). Por isso, podemos escrever que essa distância entre a origem e o z_1 vale EQ. 38, porque os catetos valem 2 e 3, certo? Você consegue visualizar isso melhor a partir da figura abaixo:



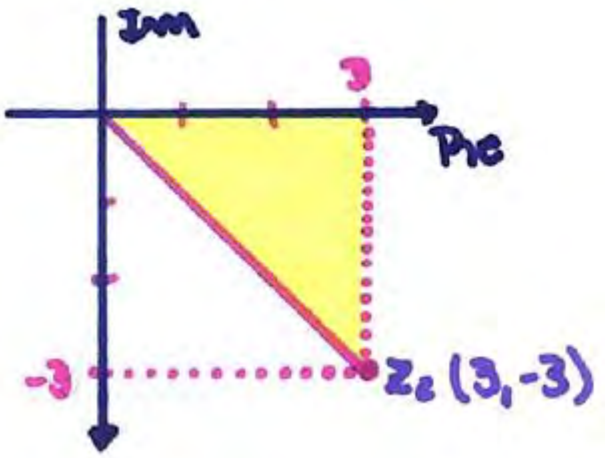
E, como foi dito acima, esse valor $\sqrt{3^2+2^2}$ é denominado módulo, que é representado por $|z_1|$. Então, o módulo do número complexo z_1 é:

$$|z_1| = \sqrt{3^2+2^2}$$
$$|z_1| = \sqrt{9+4}$$
$$|z_1| = \sqrt{13}$$

Vamos calcular um outro módulo, o de z_2:

$$z_2 = 3 - 3i$$

A representação geométrica desse número complexo é:



Veja que conseguimos traçar um triângulo e aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar o módulo desse número:

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$
$$|z_2| = \sqrt{9+9}$$
$$|z_2| = \sqrt{18}$$

Perceba que podemos fatorar o número que está dentro da raiz para obter um resultado mais simpático:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

Substituindo o valor que obtivemos acima na equação anterior, teremos o seguinte:

$$|z_2| = \sqrt{2 \cdot 3^2}$$
$$|z_2| = 3\sqrt{2}$$

Taí, esse é o número de z_2, ou, simplesmente, $|z_2|$.

Generalizando, o módulo de um número complexo é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vamos ver algumas as propriedades de módulos de números complexos:

- $|z| \geq 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z|^n = |z^n|$, para todo n se $z \neq 0$ ou $n > 0$ se $z = 0$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$

DIVISÃO

Para realizar a divisão entre dois números complexos, é necessário multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Parece grego? Então olha o que isso significa matematicamente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$$

Apesar de parecer um bicho de sete cabeças, basta que você aplique os conhecimentos aprendidos até aqui para conseguir resolver uma divisão dessas. Veja o exemplo:

$$z_1 = 1 + 4i \quad z_2 = 3 - 5i \quad \bar{z}_2 = 3 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+4i)}{(3-5i)} \cdot \frac{(3+5i)}{(3+5i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 5i + 12i + 20i^2}{9 + 15i - 15i - 25i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 17i - 20}{9 + 25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-17 + 17i}{34}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + 1i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Agora que já sabemos tudo isso, vamos recapitular a equação de segundo grau que tentamos resolver anteriormente, aquela em que chegamos ao resultado abaixo:

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

Para encontrarmos as raízes da equação, basta terminarmos essa divisão (não esqueça do sinal de mais/menos):

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i \\ x'' = \dfrac{4-2i}{2} = 2-i \end{cases}$$

Então, as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ são 2 + i e 2 - 1, duas raízes imaginárias.

POTENCIAÇÃO

Agora vamos nos ater à potenciação, envolvendo apenas a unidade imaginária. Até então a utilizamos como $i^2 = -1$ e como $i^1 = i$, mas e se tivéssemos i^{11}, que valor essa unidade assumiria? Para resolver isso, utilizamos as mesmas propriedades de potenciação de números reais. Vamos analisar as potências de 0 a 3 da unidade imaginária:

$$i^0 = 1$$
$$i^1 = i$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 . i = (-1) . i = -i$$

Assim como fizemos para calcular i^3, vamos utilizar as potências anteriores para resolver potências acima de 3. Acompanhe:

$$i^4 = i^3 . i = -i . i = -(i^2) = -(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 . i = 1 . i = i$$
$$i^6 = i^5 . i = i . i = -1$$
$$i^7 = i^6 . i = -1 . i = -i$$
$$i^8 = i^7 . i = -i . i = -i^2 = -(-1) = 1$$
$$i^9 = i^8 . i = 1 . i = i$$
$$i^{10} = i^9 . i = i . i = i^2 = -1$$
$$i^{11} = i^{10} . i = -1 . i = -i$$

Pronto! Encontramos o valor de i^{11}. Mas e se eu quisesse saber o resultado de i^{32}, eu teria que fazer todo esse procedimento até chegar no i^{32}? Não! Note que há um padrão. Perceba que os quatro primeiros resultados são 1, i, -1, -i e depois, a partir de i4, eles começam a se repetir de 4 em 4. Por isso, existe um método para facilitar o cálculo das potências de i. Ele consiste em dividir o expoente de i por 4, e considerar como a potência de i o resto dessa divisão. Veja os exemplos:

$$i^{11} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline -8 & 2 \\ 3 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{11} = i^3 = -i$$

$$i^{32} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 32 & 4 \\ \hline -32 & 8 \\ 0 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{32} = i^0 = 1$$

$$i^{45} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 45 & 4 \\ \hline -4 & 11 \\ 05 & \\ -4 & \\ 1 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{45} = i^1 = i$$

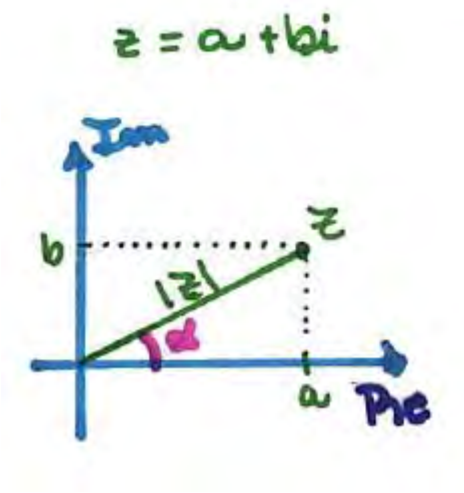
$$i^{98} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 98 & 4 \\ \hline -8 & 24 \\ 18 & \\ -16 & \\ 2 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{98} = i^2 = -1$$

Assim fica bem mais fácil realizar a potenciação, não é?

FORMA TRIGONOMÉTRICA E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Nós já aprendemos várias coisinhas sobre os números complexos, mas sempre podemos aumentar o nosso conhecimento, certo? Por isso, vamos voltar um pouquinho e aprofundar o nosso conhecimento sobre o módulo de um número complexo. O que mais podemos tirar dele? Lembre que o módulo é a distância do número complexo (o ponto dele) até a origem. Agora perceba que essa distância é uma linha que faz um ângulo com o eixo real. Veja o exemplo:



Esse ângulo αé também chamado de argumento de z_1, ou, ainda, de fase, e é um número entre 0 e 2π que satisfaz as seguintes condições:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z_1|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$$

Essas equações permitem que calculemos o ângulo, mas se isolarmos a e b e substituirmos os valores na forma algébrica (z = a + bi), teremos a forma trigonométrica (também chamada de forma polar) dos números complexos. Acompanhe o passo a passo.

Isolando a e b:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z|.\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|} \rightarrow b = |z|.\operatorname{sen}\alpha$$

Substituindo na forma algébrica:

$$z = a + bi$$

$$z = |z|.\cos\alpha + |z|.\operatorname{sen}\alpha.i$$

Podemos colocar |z| em evidência. Reorganizando os termos, teremos:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Eis a forma trigonométrica do número complexo! Então, se temos a informação sobre o ângulo que o módulo do número complexo faz com o eixo real, podemos encontrar qual é esse número. Agora que temos uma nova forma de representar números complexos, vamos aprender algumas operações envolvendo elas.

MULTIPLICAÇÃO

Vamos tomar como exemplo dois números complexos na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1| . (\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)$$
$$z_2 = |z_2| . (\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$

A multiplicação é realizada separadamente: os módulos se mutiplicam e aplica-se a distributiva na parte trigonométrica:

$$z_1 . z_2 = |z_1| . (\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1) . |z_2| (\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$

Reorganizando essa multiplicação teremos o seguinte:

$$z_1 . z_2 = |z_1||z_2| . (\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1 . \text{sen}\,\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_1 . \cos\alpha_2 + i^2\,\text{sen}\,\alpha_1\alpha_2)$$
$$z_1 . z_2 = |z_1||z_2| . [\underbrace{(\cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1 . \text{sen}\,\alpha_2)}_{\cos(\alpha_1+\alpha_2)} + i\,\underbrace{(\text{sen}\,\alpha_1 . \cos\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_2 \cos\alpha_1)}_{\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2)}]$$

Agora precisamos relembrar de algumas relações trigonométricas sobre soma de ângulos. Veja:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \cos\alpha_1 . \cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1 . \text{sen}\,\alpha_2$$
$$\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2) = \text{sen}\,\alpha_1 . \cos\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_2 . \cos\alpha_1$$

Então, a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é realizada fazendo:

$$z_1 . z_2 = |z_1| . |z_2| [(\cos(\alpha_1 + \alpha_2)) + i(\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2))]$$

Vamos ver um exemplo multiplicando os números:

$$z_1 = 5(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) \qquad z_2 = 2(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$$

Aplicando na fórmula da multiplicação, teremos o seguinte:

$$z_1 . z_2 = |z_1||z_2| . \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$z_1 . z_2 = (5.2) . \cos(30° + 15°) + i \operatorname{sen}(30° + 15°)$$
$$z_1 . z_2 = 10 . (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$$

POTENCIAÇÃO

Discutimos, na apostila de Aritmética I, que a potenciação é basicamente uma sequência de multiplicações. Então, para calcular a potenciação de um número complexo, podemos estender a fórmula da multiplicação para várias multiplicações (que chamaremos de n), veja:

$$z_1 . z_2 . z_3 . \ldots z_n = |z_1||z_2||z_3| \ldots |z_n| . (\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n))$$

Se $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n$, a multiplicação fica assim:

$$z . z . z \ldots z = |z||z||z| \ldots |z| . (\cos(\alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha)) + i \operatorname{sen}(\alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha))$$

E então podemos reescrevê-la dessa forma:

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)] \rightarrow 1^a \text{ equação de Moivre}$$

Essa fórmula para calcular a potenciação de números complexos é também chamada de **1ª equação De Moivre**.

Vamos calcular a quinta potência do número complexo abaixo utilizando a equação que acabamos de aprender:

$$z = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Substituindo na 1ª equação De Moivre, chegaremos ao resultado:

$$z^5 = 3^5 \cdot \left[\cos\left(\frac{5 \cdot \pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5 \cdot \pi}{4}\right)\right]$$

$$z^5 = 243 \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

DIVISÃO

A divisão de números complexos na forma trigonométrica é bastante parecida com a da forma algébrica, com a diferença de que o módulo do denominador não acompanha o conjugado na multiplicação do numerador e do denominador. Vamos ver isso de pertinho com os números complexos abaixo:

$$z_1 = |z_1| . (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$$
$$z_2 = |z_2| . (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)$$

Fazendo a divisão teremos o seguinte:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)}{|z_2| (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)} . \frac{(\cos \alpha_2 - i \operatorname{sen} \alpha_2)}{(\cos \alpha_2 - i \operatorname{sen} \alpha_2)}$$

Note que não reescrevemos o $|z_2|$ na segunda fração.

Aplicando a distributiva nos termos trigonométricos chegaremos a:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} . \frac{\cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 - i \cos \alpha_1 . \operatorname{sen} \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_1 . \cos \alpha_2 - i^2 \operatorname{sen} \alpha_1 . \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2 - (i \operatorname{sen} \alpha_2)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} . \frac{\cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 - i \cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_1 . \cos \alpha_2 + (\operatorname{sen} \alpha_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha_2)}{\cos^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_2}$$

Lembrando de mais uma relação trigonométrica, teremos o seguinte:

$$\cos^2 \alpha_2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_2 = 1$$

Como o denominador será zero:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2 + i\,(\operatorname{sen}\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1)$$

Utilizando outras relações trigonométricas, chegaremos finalmente à fórmula para divisão de números complexos na forma trigonométrica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Vejamos um exemplo com os números complexos abaixo:

$$z_1 = 20\,(\cos 120° + i\operatorname{sen} 120°)$$
$$z_2 = 4\,(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°)$$

Aplicando a fórmula que acabamos de deduzir, chegaremos a:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{20}{4} \cdot [\cos(120 - 30) + i\operatorname{sen}(120 - 30)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 5 \cdot (\cos 90° + \operatorname{sen} 90°)$$

RADICIAÇÃO

Para entender como calcular a raiz de um número complexo, vamos fazer uma generalização e calcular a raiz enésima (n) do número complexo abaixo:

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \rightarrow \sqrt[n]{|z| \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} \quad n \geq 2$$

Podemos dizer que calcular essa raiz consiste em determinar o número complexo w, em que wn = z (já que o nosso objetivo é fazer $\sqrt[n]{z}$), então $w^n = z$ é:

$$w^n = |z| \cdot (\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Podemos supor que w é:

$$w = |w| \cdot \cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta$$

E, portanto, substituindo isso em $w^n = z$, teremos o seguinte:

$$(|w| \cdot \cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)^n = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Sabemos, pela 1ª Lei de Moivre (dá uma olhadinha nela de novo), que:

$$(|w|.\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)^n = |w|^n.[\cos(n\beta) + i\,\text{sen}(n\beta)]$$

Então, substituindo esse resultado na igualdade anterior chegaremos a:

$$|w|^n.(\cos(n\beta) + i\,\text{sen}(n\beta)) = |z|.(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Agora vamos ter que resgatar alguns conhecimentos: i) números complexos iguais têm módulos iguais; ii) números complexos iguais têm argumentos (ângulos) iguais. Isso implica em:

i) $|w|^n = |z|$, então $|w| = \sqrt[n]{|z|}$

ii) $n\beta = \alpha + 2k\pi$, então $\beta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Assim, teremos que:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

→ 2ª equação de Moivre

Em que n assume valores acima ou iguais a 2 e k pertence aos inteiros, ou seja, w_k é a k-ésima raiz n-ésima.

Vamos ver um exemplo para entender como encontrar as raízes cúbicas do número complexo abaixo:

$$z = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Aplicando a 2ª equação de Moivre, teremos o seguinte:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot \cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{8}\cdot\left[\cos\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_3 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Como temos n = 3 (raiz cúbica), teremos k = 0, 1 e 2 (três raízes, portanto). Substituindo esses valores de k na equação acima, teremos:

✓ Para k = 0:

$$w_0 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 0.\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 0.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_0 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$w_0 = 2(0 + i.1)$$
$$w_0 = 2i$$

✓ Para k = 1:

$$w_1 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 1.\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 1.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$w_1 = 2.\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$
$$w_1 = -\sqrt{3} - i$$

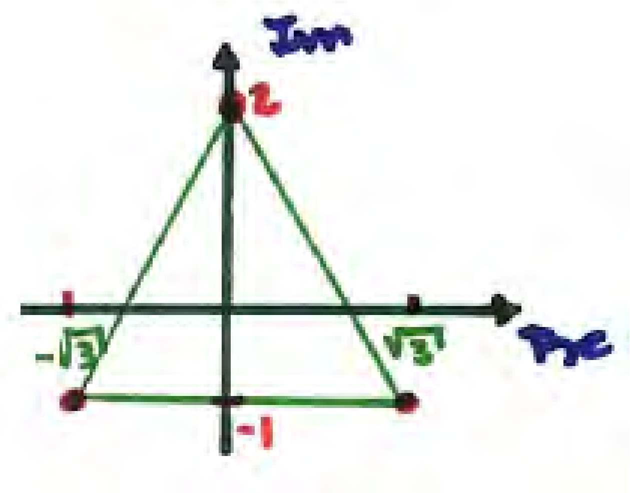
✓ Para k = 2:

$$w_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$w_2 = 2.\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$
$$w_2 = \sqrt{3} - i$$

Então, as raízes cúbicas desse número são:

$$2i \; ; \; -\sqrt{3}-i \; ; \; \sqrt{3}-i$$

Vamos ver a representação geométrica desses pontos no plano de Argand-Gauss:



Perceba que se ligarmos esses pontos, teremos um triângulo equilátero. Assim, as raízes desse número complexo são os vértices desse triângulo, isso acontece porque para qualquer n > 2, teremos um polígono fechado com n vértices.

EXERCÍCIOS

1. Dado o número complexo z=3+4i, qual das alternativas melhor descreve o módulo e argumento de z?

a) $|z|=25 \;,\; \theta=\arctan(\frac{3}{4})$

b) $|z|=7 \quad , \quad \theta = \arctan(\frac{4}{3})$

c) $|z|=5 \quad , \quad \theta = \arctan(\frac{3}{4})$

d) $|z|=5 \quad , \quad \theta = \arctan(\frac{4}{3})$

e) $|z|=25 \quad , \quad \theta = \arctan(\frac{4}{3})$

Alternativa correta: D

2. Quais das afirmações sobre números complexos estão corretas?

I - A soma de um número complexo com seu conjugado é um número complexo.

II - Um número imaginário multiplicado pelo seu conjugado é um número imaginário.

III - A soma de dois números imaginários é necessariamente um número imaginário.

a) Apenas I

b) Apenas II

c) Apenas III

d) I e II

e) II e III

Alternativa correta: A

3. Quanto vale o módulo de

$i^2 + i^{-1} + i^4 - i$

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

Alternativa correta: E

4. (FUVEST) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro n >1 para o qual zn é um número real?

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

Alternativa correta: C

5. (UNITAU) O módulo de z=1/(i36) é:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 1/36
e) 36

Alternativa correta: B

6. (Cesgranrio) O lugar geométrico das imagens dos complexos z, tais que z_2 é real, é:

a) um par de retas paralelas.
b) um par de retas concorrentes.

c) uma reta.

d) uma circunferência.

e) uma parábola.

Alternativa correta: B

7. (UNESP) Se z = (2 + i).(1 + i).i, então o conjugado de z, será dado por

a) -3-i

b) 1 - 3i

c) 3 - i

d) - 3 + i

e) 3 + i

Alternativa correta: A

8. Marque a alternativa que contém a parte real e imaginária, respectivamente, do número complexo z dado pela expressão abaixo:

$$z = \frac{32 - 256i}{96}$$

a) $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{3}$

b) $\frac{32}{96}$ e $\frac{256}{96}$

c) $\frac{8}{3}$ e $-\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{8}{3}$

e) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{8}{5}$

Alternativa correta: D

9. Marque a alternativa que contém a soma dos números reais a e b, que são incógnitas na equação abaixo:

$$a + bi - 1 + 6i = \frac{12 + 21i}{3}$$

a) 5
b) 1
c) 6
d) 4
e) 0

Alternativa correta: C

10. Qual o argumento do número complexo z, dado pela expressão abaixo?

$$z = \frac{3 + \sqrt{27}\,i}{i \cdot \left(\sqrt{3} + i\right)}$$

a) $\frac{-\pi}{3}$
b) $\frac{-\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\dfrac{-\pi}{4}$

e) $\dfrac{\pi}{2}$

Alternativa correta: A

11. A soma dos complexos $z_1=1-3i$ e $z_2=4(\cos(30^o)+i\text{sen}(30^o))$ vale:

a) $(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})-i$

b) $(1-2\sqrt{3})-i$

c) $(1+2\sqrt{3})-i$

d) $(\dfrac{3}{2}) - i(3-2\sqrt{3})$

e) $(1+2\sqrt{3}) + i\dfrac{5}{2}$

Alternativa correta: C

Determine a soma das partes imaginárias dos números complexos abaixo:

$$z = (1 + 9i)\cdot\frac{1}{3}$$

$$w = \left(\frac{3}{5}i+5\right)\cdot 5$$

$$x = 6i$$

a) 12
b) 5
c) 16
d) 1
e) 10

Alternativa correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PARTE III

MATEMÁTICA

10

FUNÇÕES III
POLINÔMIOS E GRÁFICOS

FUNÇÕES III - POLINÔMIOS

FUNÇÕES E TRANSLAÇÕES DE GRÁFICOS

As funções são velhas conhecidas nossas, né? Já trabalhamos com funções de primeiro grau, de segundo grau, exponencial e logarítmica nas apostilas de Funções I e II. Nesta apostila vamos aprofundar nossos conhecimentos sobre as funções, abordando funções de graus maiores do que 2, funções modulares e funções racionais.

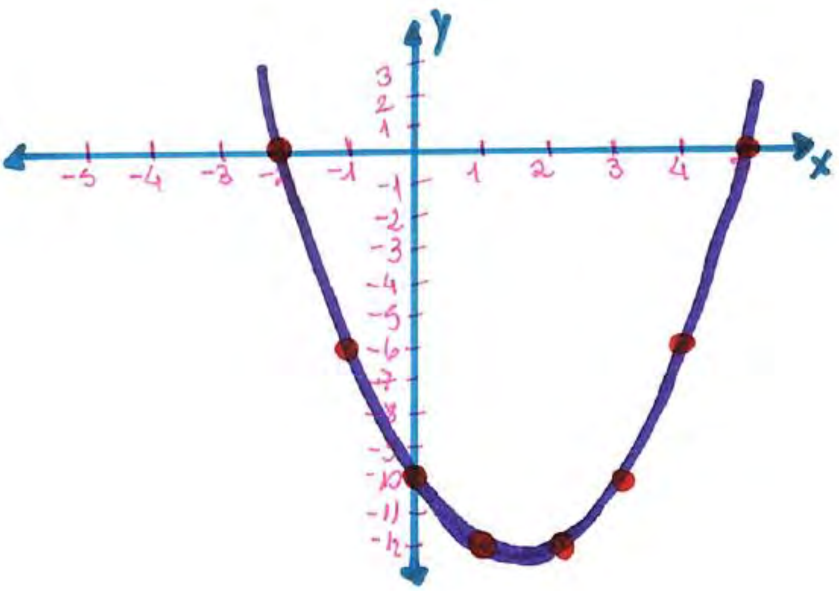
Para iniciar o nosso estudo, vamos relembrar um pouquinho sobre como traçamos gráficos de funções de segundo grau? Vamos dar uma olhada num exemplo da apostila de Álgebra II, uma equação do segundo grau que utilizamos para descobrir o lado da mesa que seu avô havia solicitado que você fizesse, que posteriormente utilizamos como exemplo de uma função de segundo grau na apostila de Funções I:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

Para traçarmos esse gráfico dessa função, devemos arbitrar valores para x e, a partir disso, obteremos os valores de y. Veja a tabela que construímos para organizar esses valores:

x	$f(x) = x^2 - 3x - 10$	$f(x) = y$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 10$	$f(-2) = 0$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 10$	$f(-1) = -6$
0	$f(0) = 0^2 - 3(0) - 10$	$f(0) = -10$
1	$f(1) = 1^2 - 3(1) - 10$	$f(1) = -12$
2	$f(2) = 2^2 - 3(2) - 10$	$f(2) = -12$
3	$f(3) = 3^2 - 3(3) - 10$	$f(3) = -10$
4	$f(4) = 4^2 - 3(4) - 10$	$f(4) = -6$
5	$f(5) = 5^2 - 3(5) - 10$	$f(5) = 0$

De posse desses pares ordenados, podemos traçar o gráfico da função:

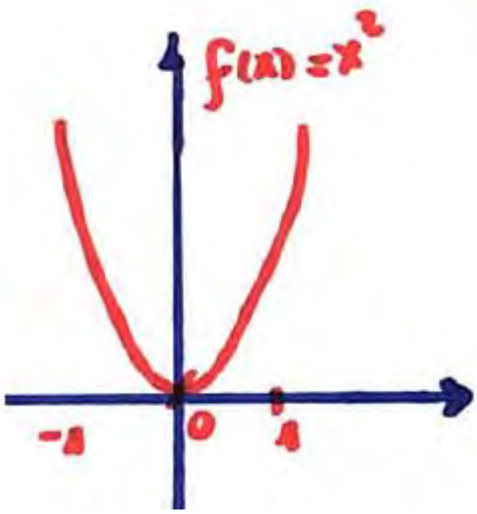


Lembre-se que os locais onde o gráfico toca o eixo x são chamados de raízes da função e o local onde ele corta o eixo y é chamado de termo independente.

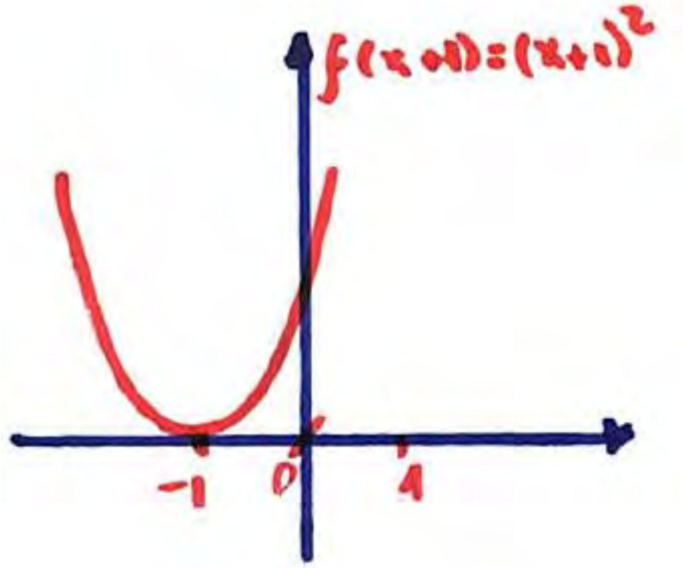
Note também que, nesse caso, temos apenas duas raízes, já que essa é uma função de segunda ordem.

Depois dessa breve revisão, podemos aprofundar nosso conhecimento sobre gráficos abordando suas translações. Esse assunto é bastante útil principalmente quando se conhece a função "original", pois uma translação ocorre quando uma constante é somada ou subtraída dessa função já conhecida. Por exemplo: se conhecemos a função $f(x) = x^2$, como será o comportamento dos gráficos das funções em que somamos uma constante (positiva e negativa) no argumento da função e quando apenas somamos uma constante na função? Vamos analisar um exemplo utilizando o valor da constante como 1 e -1:

O comportamento da função $f(x) = x^2$ é (em caso de dúvida, faça a tabela e confirme):

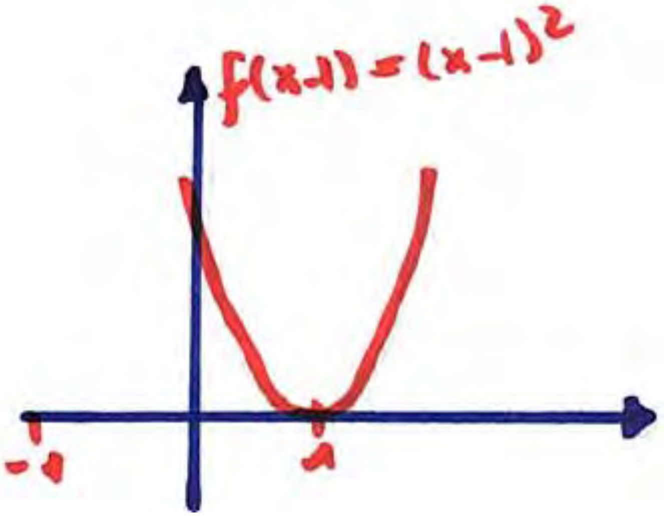


Somando a constante positiva no argumento da função, teremos $f(x+c) = (x+c)^2$, ou seja, $f(x+1) = (x+1)^2$ e o gráfico será:



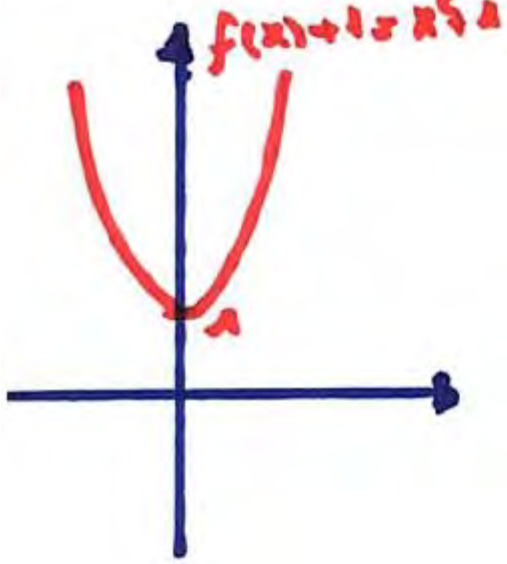
Perceba que ele foi deslocado para a esquerda em uma unidade (isso porque arbitramos que a constante é 1; se fosse 2, ele seria deslocado duas unidades e assim por diante).

Somando a constante negativa no argumento da função, teremos f(x-c) = $(x-c)^2$, ou seja, f(x-1) = $(x-1)^2$ e o gráfico será:



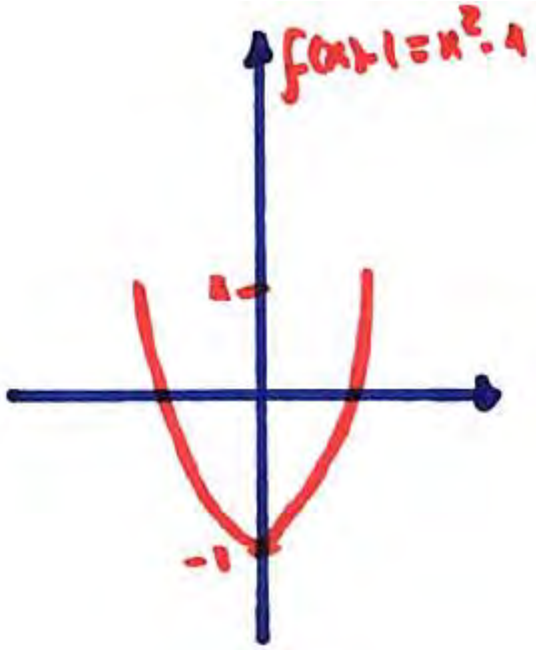
Note que ele foi deslocado para a direita em uma unidade

Mas, se somarmos a constante positiva à função, f(x)+c = x^2+c , ou seja, f(x)+1 = x^2+1, dá uma olhada no que acontece com o gráfico:

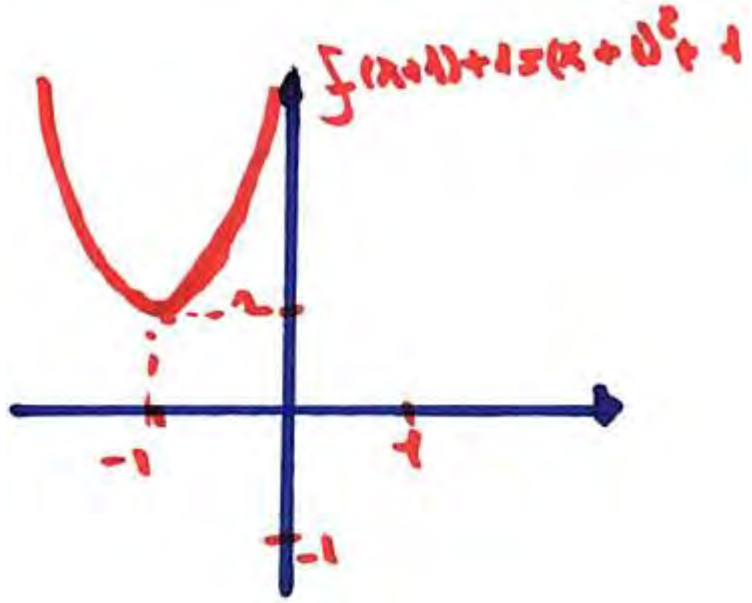


Note que o gráfico sofreu um deslocamento na vertical e foi movido uma unidade para cima.

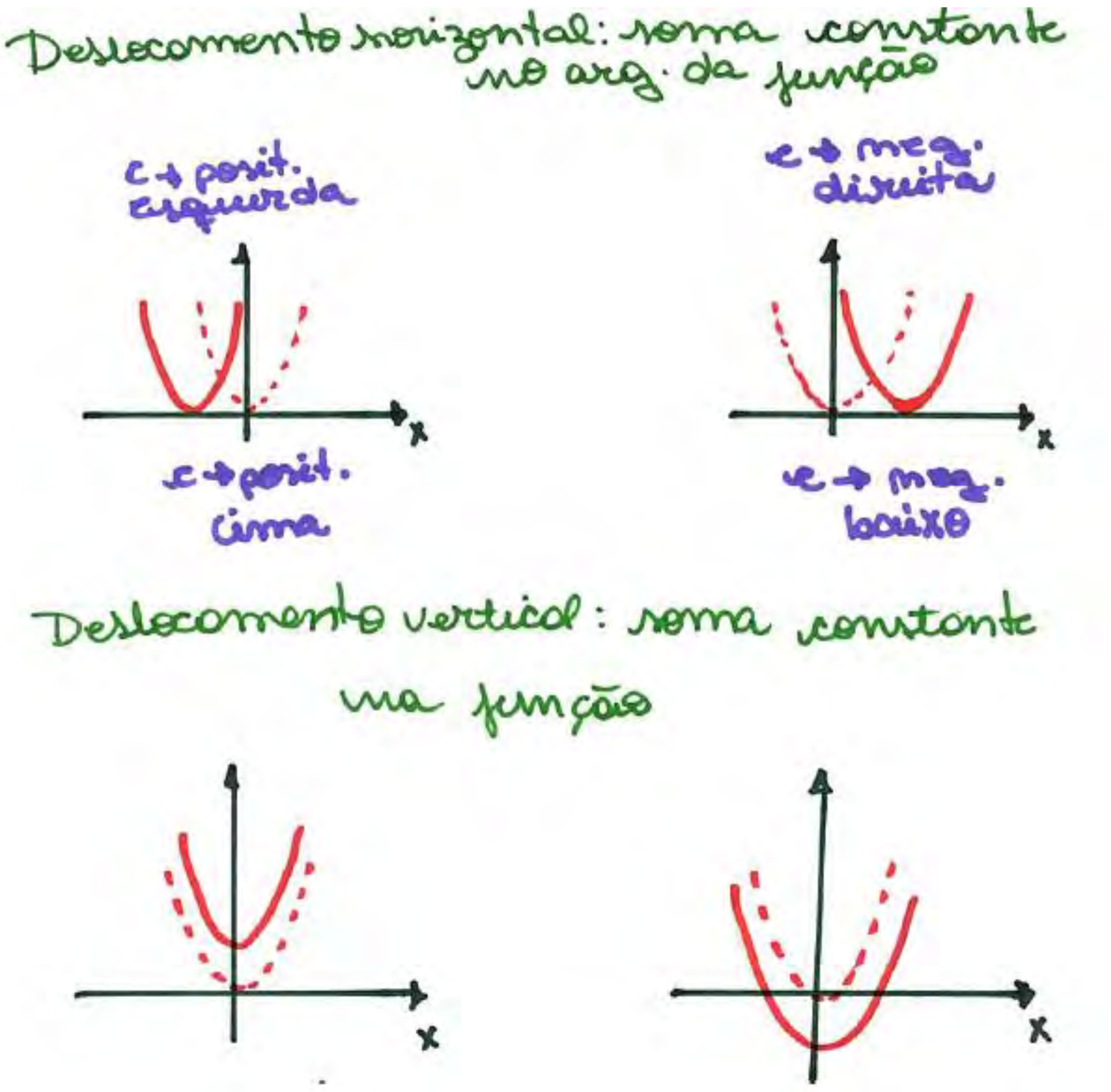
E se somamos a constante negativa à função, $f(x)-c = x^2-c$, ou seja, $f(x)-1 = x^2-1$, o gráfico será, então, deslocado para baixo:



E, por fim, se somarmos a constante na função e no seu argumento? Haverá deslocamento na vertical e na horizontal! Observe o exemplo com a constante positiva:



Então, pra não esquecer: quando há soma no argumento da função, há deslocamento horizontal; quando há soma na função, há deslocamento vertical. Confira o esqueminha abaixo:



Nada tão complicado, né? Caso você não lembre dessas dicas, basta montar a tabela e traçar o gráfico, ok?

POLINÔMIOS

Você pode até não saber, mas já tem bastante familiaridade com um tipo de polinômio. As equações de primeiro e de segundo graus que estudamos até agora são polinômios de grau um e de grau dois, respectivamente. A grande diferença é que a classe dos polinômios engloba não somente as equações de 1º e 2º graus, mas de graus muito maiores também e é nesse tipo de equação que vamos focar agora. A tabela abaixo diferencia polinômios e não polinômios.

São polinômios	X	Não são polinômios
$x^4 - 2x^3 - x + 7$ ↳ grau 4		$x^7 + x^{1/5} + 10$ ↳ expoente fracionário
$-3x + 1$ ↳ binômio de grau 1		$8x^{-4} - 2x - 17$ ↳ expoente negativo
$28x^8$ ↳ monômio de grau 8		

Um polinômio que possui apenas dois termos também é chamado de binômio; se possui apenas um termo é chamado de monômio. Perceba que equações que possuem expoentes fracionários ou negativos não são polinômios.

Podemos generalizar os polinômios pela equação abaixo:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$

Em que:

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

é chamado de polinômio complexo da variável complexa;

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}, a_m$ são os coeficientes;

$a_m x^m,\ a_{m-1} x^{m-1},\ a_{m-2} x^{m-2},\ a_1 x,\ a_0$ são os termos;

a_0 é o termo independente da variável x.

Vamos identificar esses itens a partir do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 - x + 7$, que também pode ser escrito dessa forma (mostrando todos os termos): $p(x) = 1x^4 - 2x^3 + 0x^2 - 1x + 7$

$1x^4 - 2x^3 + 0x^2 - 1x + 7$ é o polinômio complexo da variável complexa;

Os coeficientes são os números que acompanham a variável x, portanto: $a_4 = 1;\ a_3 = -2;\ a_2 = 0;\ a_1 = -1;\ a_0 = 7$;

Os termos são cada "pedacinho" do polinômio: $1x^4;\ -2x^3;\ 0x^2;\ -1x;\ 7$

E o termo independente da variável x é 7.

Outra informação que podemos tirar de um polinômio logo de cara, só olhando pra ele, é o seu grau (definido formalmente por gr(p) = n) e o valor do coeficiente dominante. O grau nós estudamos em outro momento que é o valor do maior expoente da variável x. O coeficiente dominante é o valor que acompanha essa variável de maior expoente. Por exemplo:

$$5x^{10} - 2x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 1$$

grau 10

coef. dominante = 5

$$-1x^6 + 2x^4 + 10x - 7$$

grau 6

coef. dom. = -1

Lembre-se que o grau do polinômio indica o número de raízes que ele tem, ok? Encontrávamos 2 raízes no caso das equações de segundo grau, já que o grau daquele polinômio é 2. Agora vamos encontrar mais raízes, já que trabalharemos com polinômios de graus maiores.

Caso você se depare com uma situação que solicita o valor numérico do polinômio para x igual a um número alfa ($x = \alpha \rightarrow p(\alpha)$), basta substituir esse número no lugar de x do polinômio. Veja um exemplo:

$$p(x) = x^4 + 6x^2 - 7x \quad \text{para } x = 3$$
$$p(3) = 3^4 + 6(3)^2 - 7(3)$$
$$p(3) = 114$$

Então o valor numérico deste polinômio para x = 3 é 114. Caso esse valor fosse zero, significaria que encontramos uma das raízes do polinômio (lembre-se que as raízes também são chamadas de zeros). Veja outro exemplo:

$$p(x) = x^2 - 2x - 3$$

para $x = 3$; $x = 2$; $x = 1$; $x = 0$; $x = 4$.

$$p(4) = 4^2 - 2(4) - 3 = 5$$
$$p(3) = 3^2 - 2(3) - 3 = 0$$
$$p(2) = 2^2 - 2(2) - 3 = -3$$
$$p(1) = 1^2 - 2(1) - 3 = -4$$
$$p(0) = 0^2 - 2(0) - 3 = -3$$

Calculamos os valores numéricos do polinômio para x = 4, x = 3, x = 2, x = 1 e x = 0 e encontramos p(3) = 0, portanto 3 é uma das raízes do polinômio. Se tivéssemos continuado o teste, veríamos que p(-1) = 0 e, assim, também é uma raiz desse polinômio. Claro que existem métodos mais ágeis de encontrar as raízes de um polinômio. Imagine que você está trabalhando com um polinômio de grau 10 e precisa encontrar as raízes. Você ficaria testando números por um bom tempo, certo? E seria bem fácil errar as continhas e se perder de vez, né? Vamos estudar alguns métodos mais eficazes, mas antes precisamos aprender a realizar operações com polinômios.

ADIÇÃO

A adição de polinômios é bastante simples e intuitiva. Basta que você some os coeficientes dos termos semelhantes, isto é, somar os coeficientes dos termos que possuem expoentes iguais. Veja o exemplo:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 8$$
$$q(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 9x^2 + x - 1$$

$$p(x) + q(x) = x^6 + (1-2)x^5 + (2+3)x^4 - 7x^3 + (-9-1)x^2 + x + (8-1)$$
$$p(x) + q(x) = x^6 - x^5 + 5x^4 - 7x^3 - 10x^2 + x + 7$$

SUBTRAÇÃO

Na subtração o procedimento é o mesmo, só que você vai subtrair os coeficientes dos termos semelhantes. Só tome cuidado com os sinais! Acompanhe o exemplo abaixo:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - x^2 + 8$$

$$q(x) = 2x^6 - 3x^5 + x^4 - 9x^2 + x - 1$$

$$p(x) - q(x) = -2x^6 + (1-(-3))x^5 + (2-1)x^4 - 7x^3 + (-1-(-9))x^2 - x + (-8-(-1))$$

$$p(x) - q(x) = -2x^6 + 4x^5 + x^4 - 7x^3 + 8x^2 - x + 9$$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação pode ocorrer de duas formas: podemos multiplicar um polinômio por um número ou podemos multiplicar um polinômio por outro polinômio. Vamos analisar cada caso separadamente.

Multiplicação por número: multiplica-se cada um dos coeficientes pelo número em questão. Exemplo:

$$p(x) = 5x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 6x - 30 \qquad m = 7$$

$$7.p(x) = (7.5)x^7 - (7.3)x^5 + (7.4)x^2 - (7.6)x - (7.30)$$

$$7.p(x) = 35x^7 - 21x^5 + 28x^2 - 42x - 210$$

Multiplicação por polinômio: multiplica-se cada termo de um polinômio por cada termo de outro polinômio, ou seja, aplica-se a nossa tão conhecida distributiva. Exemplo:

$$p(x) = 2x^2 + 3x \qquad q(x) = x^2 - 7x$$

$$p(x) \cdot q(x) = (2x^2 + 3x)(x^2 - 7x)$$

$$p(x) \cdot q(x) = 2x^4 - 14x^3 + 3x^3 - 21x^2$$

$$p(x) \cdot q(x) = 2x^4 - 11x^3 - 21x^2$$

DIVISÃO

A divisão de polinômios exige um pouco mais de dedicação e de atenção do que as outras operações que fizemos. Aprenderemos duas formas de fazê-la: uma que é chamada de método da chave (também conhecida como teorema do resto) e outra que é chamada de dispositivo de Briot-Ruffini. Este último é bastante útil não só na divisão de polinômios, mas para possibilitar o cálculo de raízes de polinômios de ordens maiores do que 2.

MÉTODO DA CHAVE

Quando você estava nas séries iniciais da escola, aprendendo as operações básicas, aprendeu a realizar a divisão de números reais utilizando o método da chave e talvez a utilize até hoje. Nós chegamos a relembrar esse procedimento na apostila de Aritmética I porque ele pode ser rapidamente utilizado em provas ou situações em que você não pode dispor de uma calculadora. O método da chave para polinômios é bastante parecido com o que já conhecemos. Na verdade, a nomenclatura é igual: o polinômio a ser dividido é o dividendo; o que está dividindo é o divisor; o quociente é o valor dessa divisão e o que sobra é o resto. Vamos relembrar isso no próprio diagrama:

dividendo $\quad\quad\quad\quad$ divisor

$$\begin{array}{r|l} p(x) & h(x) \\ \hline & q(x) \\ r(x) & \end{array}$$

resto $\quad\quad\quad\quad$ quociente

Em que h(x) deve ser diferente de zero e o grau de r(x) deve ser menor do que o grau de p(x) ou igual a zero. Veja que p(x) pode ser reescrito como $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$. Vamos fazer um exemplo utilizando esse método. Vamos dividir o polinômio p(x) pelo polinômio h(x):

$$p(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 7$$
$$h(x) = x^2 - x + 2$$

Vamos montar a divisão utilizando a chave e escrevendo todos os termos dos polinômios (alguns estão ocultos porque valem zero). É essencial que eles estejam em ordem decrescente para evitar possíveis confusões.

$$x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 \ \underline{|\, x^2 - x + 2}$$

Vamos dividir o primeiro termo de p(x) pelo primeiro termo de h(x):

$$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$$

Esse é o primeiro termo do quociente q(x). Vamos escrevê-lo em seu lugar:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} & x^3 \end{array}$$

Vamos multiplicar o quociente q(x) pelo polinômio do divisor h(x) e vamos escrever esse resultado com o sinal trocado embaixo do dividendo p(x):

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^4 - 2x^3 & x^3 \end{array}$$

Fazendo a subtração chegaremos a:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^4 - 2x^3 & x^3 \\ \cline{1-1} 0 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \end{array}$$

Veja que o grau do polinômio do resto r(x) ainda é maior do que o grau do polinômio do divisor h(x), portanto a divisão deve continuar. Vamos repetir os procedimentos anteriores até que o grau de r(x) seja menor do que o de h(x) ou zero. Dividindo o primeiro termo de cada polinômio teremos o seguinte:

$$\frac{-3x^4}{x^2} = -3x^{4-2} = -3x$$

Colocando esse valor no quociente e realizando a multiplicação pelo divisor teremos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 4x^4 + 2x^3 & x^3 - 3x^2 \\ \cline{1-1}
0 \quad -3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\qquad 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 &
\end{array}
$$

Que resulta em:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
-x^5 + 4x^4 + 2x^3 & x^3 - 3x^2 \\ \cline{1-1}
0 \quad -3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\qquad 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 \; - 5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 &
\end{array}
$$

Novamente o grau de r(x) é maior do que o de h(x), então, continuando a conta, vamos fazer a divisão entre o primeiro termo de cada um deles:

$$\frac{-5x^3}{x^2} = -5x^{3-2} = -5x$$

Colocando esse valor no quociente, multiplicando por h(x) e escrevendo esse resultado no r(x), obteremos:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\
\cline{2-2}
\underline{-x^5 + x^4 + 2x^3} & x^3 - 3x^2 - 5x \\
0 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\quad \underline{3x^4 - 3x^3 + 6x^2} & \\
\quad 0 - 5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 & \\
\qquad \underline{5x^3 - 5x^2 + 10x} & \\
\qquad 0 + 4x^2 + 10x - 7 &
\end{array}
$$

Como o grau de r(x) continua maior que o de h(x), continuamos o procedimento. Acompanhe a divisão dos primeiros termos:

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4x^{2-2} = 4$$

Aplicando na equação como fizemos anteriormente:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 - 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & x^2 - x + 2 \\
\hline
-x^5 + x^4 + 2x^3 & x^3 - 3x^2 - 5x + 4 \\
\quad 0 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 0x - 7 & \\
\quad\quad 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 & \\
\quad\quad\quad 0 - 5x^3 + 9x^2 + 0x - 7 & \\
\quad\quad\quad\quad 5x^3 - 5x^2 + 10x & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 + 4x^2 + 10x - 7 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -4x^2 + 4x - 8 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 + 14x - 15 &
\end{array}
$$

Finalmente o grau de r(x) é menor do que o de h(x), portanto a nossa divisão terminou e temos como resultado o seguinte:

$$\underbrace{x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 7}_{p(x)} = \underbrace{(x^2 - x + 2)}_{h(x)} \cdot \underbrace{(x^3 - 3x^2 - 5x + 4)}_{q(x)} + \underbrace{14x - 15}_{r(x)}$$

Perceba que o método da chave não é difícil, ele é apenas trabalhoso. Basta que você preste muita atenção no que está fazendo e treine algumas vezes para lembrar cada um dos passos quando for necessário, ok?

Antes de passarmos para o próximo procedimento, vamos dar uma olhada num caso particular do método da chave.

Um caso particular do método da chave consiste na divisão de um polinômio por outro do tipo x - a. Ou seja, se quiséssemos dividir o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 5$ pelo polinômio h(X) = x - 3. Acompanhe:

Dividindo o primeiro termo do p(x) pelo primeiro termo do h(x):

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

Substituindo na equação de divisão:

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & x-3 \\ \hline -x^3 + 3x^2 & x^2 \\ \hline 0 + x^2 - 3x - 5 & \end{array}$$

Como o resto tem grau maior que o divisor, vamos continuar a divisão fazendo:

$$\frac{x^2}{x} = x^{2-1} = x$$

Substituindo e resolvendo, chegaremos a

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & x-3 \\ \hline -x^3 + 3x^2 & x^2 - x \\ \hline 0 + x^2 - 3x - 5 & \\ \quad -x^2 + 3x & \\ \hline \quad 0 + 0 - 5 & \end{array}$$

Note que obtivemos como resto o número 5. Vamos guardar essa informação e analisar outro caso. A raiz do divisor dessa divisão é 3, consegue perceber? Isso porque basta isolarmos o x para sabermos a raiz de uma equação de primeiro grau. Portanto:

$$x-3 \rightarrow x-3=0$$
$$x=3$$
$$\text{é}$$
$$\text{raiz}$$

Vamos encontrar o valor numérico do polinômio p(x) para x = 3:

$$x = 3$$
$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 5$$
$$p(3) = 3^3 - 2(3)^2 - 3(3) - 5$$
$$p(3) = 27 - 18 - 9 - 5$$
$$p(3) = -5$$

Veja que o resto obtido na divisão por x - 3 é igual ao valor numérico do polinômio p(x) quando substituímos x por 3, que é a raiz do divisor. Podemos escrever isso da seguinte forma: r = p(3).

Generalizando, podemos dizer que o resto r da divisão de um polinômio p(x) por um binômio do tipo x - a, com a pertencendo aos Complexos, é igual a p(a), ou seja, r = p(a).

A partir disso, caímos no chamado Teorema de D'Alembert, que é uma consequência do Método da Chave, que diz que um polinômio p(x) só é divisível por x - a se a é raiz de p(x), ou seja, p(a) = 0.

BRIOT-RUFFINI

O dispositivo de Briot-Ruffini é bastante interessante quando se deseja dividir um polinômio por um binômio do tipo x - a. Vamos fazer um exemplo para entender como ele funciona. Queremos dividir o polinômio p(x) pelo binômio h(x):

$$p(x) = x^3 + 6x^2 - 5x + 2$$
$$h(x) = x + 1$$

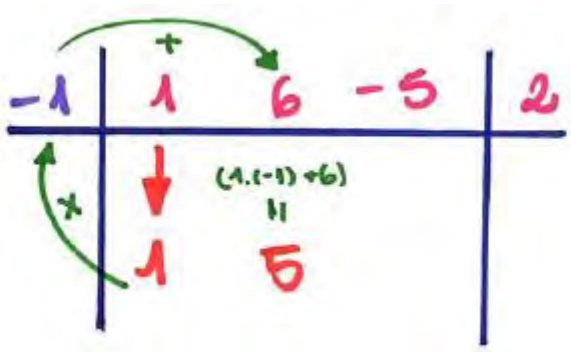
Antes de iniciarmos, é necessário saber qual é a raiz do binômio h(x). Acompanhe abaixo:

$$x + 1 \longrightarrow x + 1 = 0$$
$$x = -1 \rightarrow \text{raiz}$$

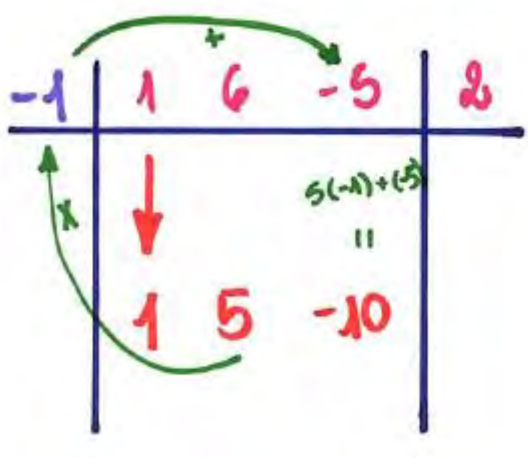
Beleza! Agora vamos separar essa raiz e os coeficientes do polinômio p(x) nessa ordem: 1 (a raiz), 1, 6, -5, 2 (os coeficientes). Vamos escrever esses números em um diagrama que algumas pessoas chamam de chiqueirinho.

Perceba que a raiz e o termo independente ficaram separados. Isso TEM que acontecer, ok? Não é meramente uma questão estética, o diagrama deve ser construído assim.

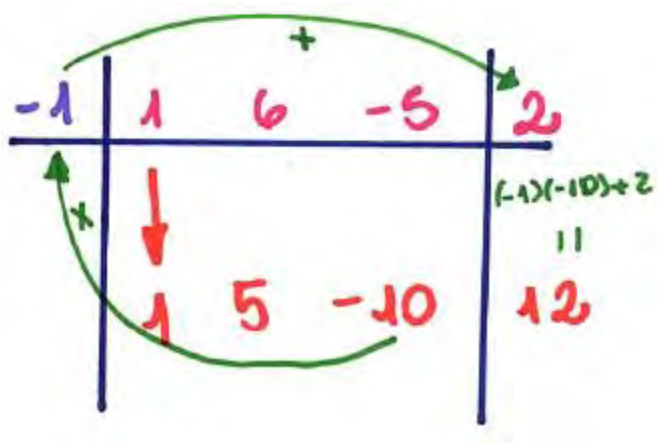
Vamos copiar o primeiro coeficiente uma linha abaixo, multiplicá-lo pela raiz, somá-lo com o valor do coeficiente à direita e vamos escrever o número obtido embaixo desse coeficiente. Isso fica mais simples olhando o diagrama. Acompanhe:



Vamos fazer o mesmo procedimento com o valor que obtivemos: multiplicamos pela raiz e somamos com o coeficiente à direita do estudado:



Novamente realizaremos o mesmo procedimento e obteremos o seguinte:



O procedimento está pronto! Precisamos apenas interpretá-lo. O que está no meio das hastes verticais é o quociente q(x) e o que está à direita da segunda haste vertical é o resto r(x) dessa divisão. Veja abaixo:

$$1 \quad 5 \quad -10 \rightarrow q(x) = x^2 + 5x - 10$$

$$12 \rightarrow r(x) = 12$$

Perceba que o procedimento de Briot-Ruffini, a cada aplicação, diminuirá um grau do polinômio. No nosso caso, tínhamos um polinômio de ordem 3 e obtivemos um polinômio de ordem 2.

DECOMPOSIÇÃO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS

Em primeiro lugar, é importante que você tenha claro que toda equação polinomial com grau 1 ou maior que 1 tem pelo menos uma raiz complexa. Esse preceito é chamado de Teorema Fundamental da Álgebra (você não precisa guardar esse nome, apenas a informação). Atrelado a esse teorema, temos outro, chamado de Teorema da Decomposição, que diz que todo polinômio de grau 1 ou maior que 1 pode ser decomposto utilizando suas raízes. Veja a forma geral dessa decomposição:

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Decomposição $\Rightarrow p(x) = a_m (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_{m-1})(x - x_m)$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m$ são raízes de $p(x) = 0$

Perceba que apenas o coeficiente dominante é utilizado na decomposição, juntamente com as raízes. Para deixar tudo mais claro, vamos ver um exemplo da forma decomposta do polinômio p(x) que tem como raízes -2, 3, 7:

$p(x) = 2x^3 - 16x^2 + 2x + 84$ ↳ raízes: $-2, 3, 7$

Decomp.: $p(x) = \underbrace{2}_{\text{coef. dominante}} [(x - (-2))] (x-3)(x-7) \rightarrow p(x) = 2(x+2)(x-3)(x-7)$

Então, quando você se deparar com a forma decomposta de um polinômio, já sabe que é muito mais fácil de identificar suas raízes, né?

Continuando nesse raciocínio... Quando você resolvia equações de segundo grau e o discriminante resultava em zero, você já sabia que a equação possuía duas raízes reais iguais, né? Mudando um pouquinho as palavras, podemos dizer que a multiplicidade da raiz é 2. Ou seja, a multiplicidade de uma raiz indica quantas vezes aquela raiz se repete. Assim, no caso do nosso exemplo, como temos as raízes -2, 3, 7, todas elas têm multiplicidade 1, que indica que não são repetidas, ou seja, são raízes simples. Saber a multiplicidade das raízes é bastante importante na hora de traçar um gráfico. Veja outro exemplo de como podemos "descobrir" a multiplicidade de uma raiz:

$$p(x) = x^2 - 6x + 9 \xrightarrow{\text{decomp.}} p(x) = (x-3)(x-3) \rightarrow \text{2 raízes iguais}$$

$$p(x) = (x-3)^2 \quad \text{↳ multiplicidade 2}$$

Pela decomposição vemos que esse polinômio tem duas raízes iguais, que chamamos de raiz com multiplicidade 2 ou raiz dupla. Podemos agrupá-las colocando o expoente 2 no termo correspondente. Vamos analisar mais um exemplo:

$$p(x) = x^4 - 11x^3 + 42x^2 - 68x + 40 \longrightarrow p(x) = (x-2)(x-2)(x-2)(x-5)$$

$$p(x) = (x-2)^3(x-5)$$

multiplicidade 3

↳ raiz simples

Uma das raízes tem multiplicidade 3 e a outra tem multiplicidade simples, ou seja, não se repete. Note que, como o polinômio tem grau 4, ele tem 4 raízes, apesar de uma delas se repetir 3 vezes.

Ainda nessa *vibe* de raízes e coeficientes, vamos abordar um tema que você já conhece para as equações de segundo grau: Soma e Produto. Agora chamaremos de Relações de Girard e ampliaremos a ideia dessas relações para polinômios de graus maiores.

RELAÇÕES DE GIRARD

As relações de Girard são baseadas em associar as raízes de um polinômio com seus coeficientes. Ou seja, a partir dos coeficientes de um polinômio você consegue encontrar as raízes dele. Vamos estudar essas relações para polinômios de grau 2, 3 e n, ou seja, para qualquer grau.

PARA POLINÔMIOS DE GRAU 2:

Vamos considerar um polinômio genérico em que a (com a diferente de zero), b e c são os coeficientes e r1 e r2 são as raízes. Lembre que, como é um polinômio de grau 2, teremos apenas duas raízes. Veja como ficam as relações entre os coeficientes e as raízes:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow \text{Soma}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow \text{Produto}$$

= Relações de Girard p/ eq. grau 2

Que, como já havia sido dito, são as equações de Soma e Produto que já vimos na apostila de Álgebra II.

PARA POLINÔMIOS DE GRAU 3

Agora considere o polinômio de grau 3 a seguir, em que a, b, c e d são os coeficientes e r1, r2, r3 são as raízes:

$$\left.\begin{array}{l} ax^3+bx^2+cx+d \\ x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2+x_1 \cdot x_3+x_2 \cdot x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{array}\right\} \text{Relações de Girard grau 3}$$

Note que agora temos uma equação a mais. Isso porque temos uma raiz a mais, ok?

PARA POLINÔMIOS DE GRAU N:

Vamos assumir que o polinômio de grau n é um polinômio de grau maior ou igual a 1 (nesse caso, você pode entender que o grau n é maior do que 3, porque as relações anteriores são mais simples de lembrar) e que tem como coeficientes an, an-1, an-2, ..., a1, a0 e raízes r1, r2, r3, ..., rn-1, rn.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Não faremos a dedução aqui, mas, utilizando o raciocínio dos casos anteriores, teremos o seguinte:

- A soma das n raízes é:

$$x_1+x_2+x_3+\dots+x_3=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- A soma dos produtos das raízes tomadas

  - duas a duas

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

  - três a três

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

  - quatro a quatro

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_3x_6 + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

  - p a p

$$x_1x_2\dots x_p + x_1x_2\dots x_{p-1}x_{p+1} + x_1x_2\dots x_{p-2}x_{p-1} + \dots + x_{n-(p-1)}x_{n-(p-2)}x_{n-(p-3)}\dots x_n = \frac{(-1)^p \cdot a_{n-p}}{a_n}$$

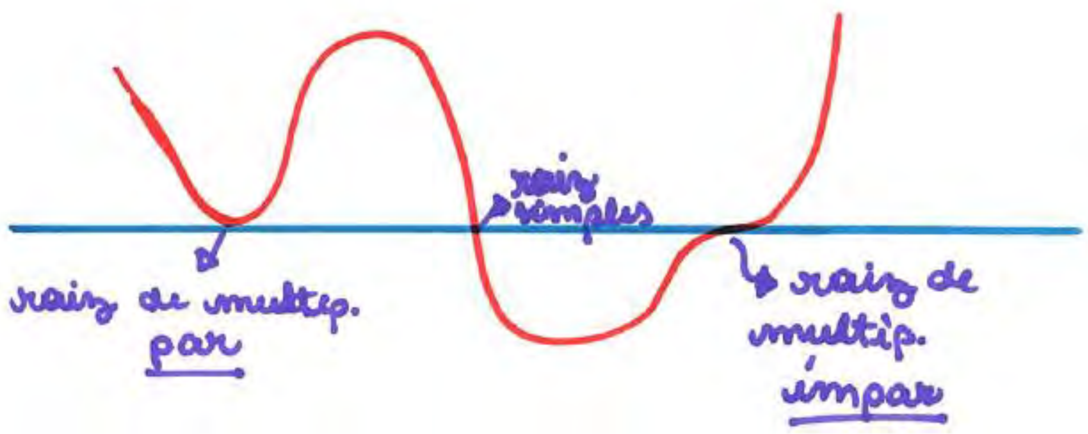
- O produto das n raízes é:

$$x_1x_2x_3\dots x_{n-1}x_n = \frac{(-1)^n \cdot a_0}{a_n}$$

Com essas equações você é capaz de resolver inúmeros problemas, mas analise a viabilidade na utilização delas para não perder muito tempo nas questões, ok?

ANÁLISE GRÁFICA

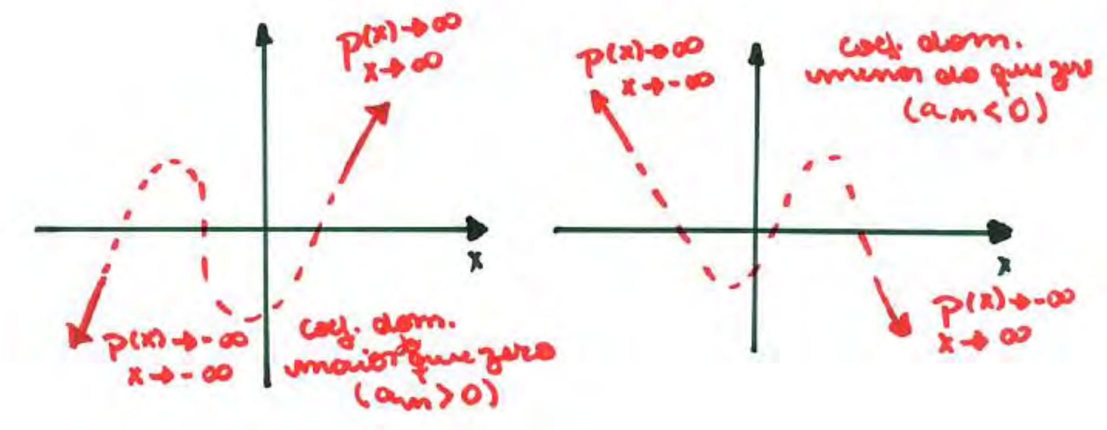
Agora que já sabemos como calcular as raízes e as multiplicidades, podemos entender como interpretar e/ou traçar os gráficos dos polinômios de graus maiores do que 2 (porque os de grau 2 você já deve estar cansado de fazer, né?). Para iniciarmos nosso estudo é imprescindível que você lembre que a raiz é o local em que o gráfico corta ou encosta no eixo x. Vamos analisar o esboço abaixo:



Note que o gráfico tangencia o eixo x quando a multiplicidade da raiz é par; já quando a multiplicidade é ímpar, o gráfico faz uma espécie de degrau no eixo x; quando a raiz é simples, como você está acostumado, o gráfico corta o eixo x.

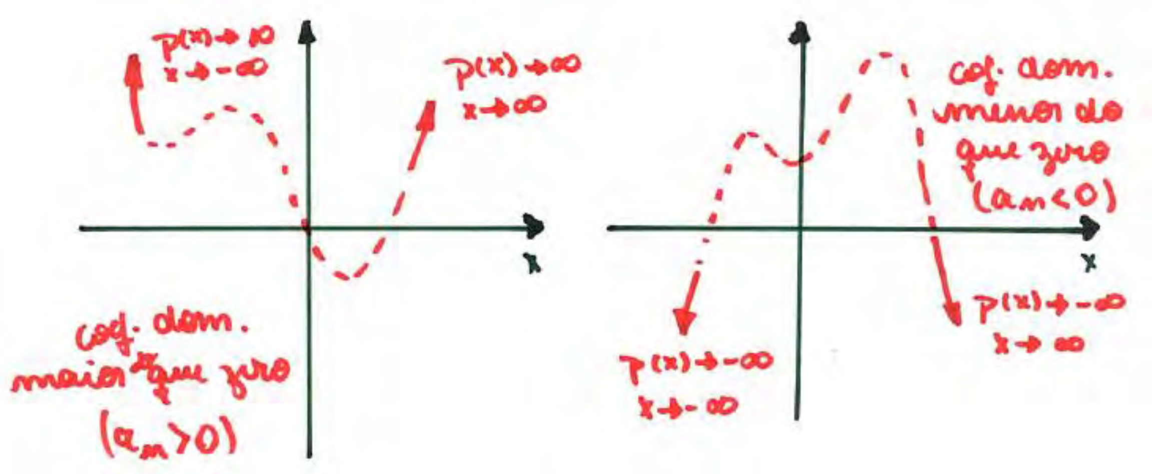
Para compreender o comportamento do gráfico no infinito é necessário avaliar dois fatores: o sinal do coeficiente dominante e se o grau do polinômio é par ou ímpar. Vamos ver o esboço desses gráficos para entender melhor:

SE O GRAU FOR ÍMPAR



Perceba que, na primeira situação, quando o coeficiente dominante é maior do que zero, os valores do polinômio tendem ao menos infinito quando o x tende ao menos infinito; e os valores do polinômio tendem ao mais infinito quando o x tende ao mais infinito. Já na segunda situação, quando o coeficiente dominante é menor do que zero, os valores do polinômio tendem ao mais infinito quando o x tende ao menos infinito; os valores do polinômio tendem ao menos infinito quando o x tende ao mais infinito.

SE O GRAU FOR PAR



Na primeira situação, quando o coeficiente dominante é maior do que zero, os valores do polinômio tendem a mais infinito tanto com x tendendo a menos infinito quanto com x tendendo a mais infinito. Já na segunda situação, quando o coeficiente dominante é menor do que zero, os valores do polinômio tendem a menos infinito, tanto para x tendendo a menos infinito quanto tendendo para mais infinito.

Com essas informações sobre as raízes e coeficientes fica bem mais fácil interpretar ou esboçar o gráfico de qualquer função polinomial.

GRÁFICOS DE INEQUAÇÕES

Nós já estudamos algumas inequações polinomiais e como esboçar seus intervalos a partir de gráficos. Agora vamos aprender como resolver essas inequações quando temos mais de duas raízes. Para isso, vamos fazer um exemplo utilizando polinômio p(x) abaixo, considerando que as raízes dele são 3, -1 e -4:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 11 - 12$$

E vamos investigá-lo para valores menores ou iguais a zero:

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 \leq 0$$

Como já sabemos quais são as raízes do polinômio, vamos apenas colocá-las em ordem crescente e formar intervalos com elas:

Ordem crescente: $-4, -1, 3$

Intervalos: $(-\infty, -4); (-4, -1); (-1, 3); (3, +\infty)$

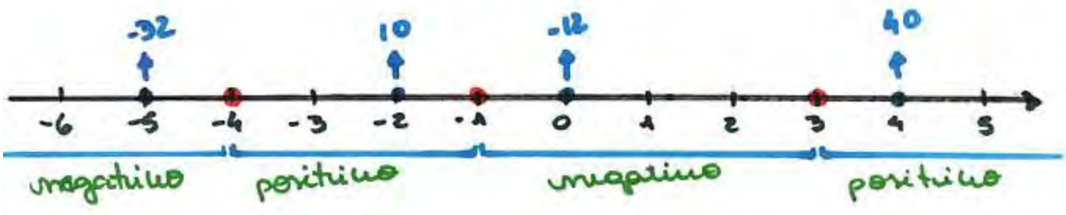
Como os polinômios mudam de sinal apenas em suas raízes, vamos testar o sinal da função em cada um desses intervalos que fizemos, escolhendo um valor entre cada um deles. Por exemplo: entre menos infinito e -4 podemos testar o sinal de -5; entre -4 e -1 podemos testar sinal de -2; entre -1 e 3, o sinal de 0; e, por fim, entre 3 e mais infinito, o sinal de 4. Perceba que esses valores foram arbitrados, você poderia escolher quaisquer outros desde que os valores estejam entre os intervalos das raízes. Escolhidos os valores dos quais queremos saber o sinal, basta substituir no polinômio. Fazer uma tabelinha ajuda bastante. Veja:

Intervalo	x	$p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$
$(-\infty, -4)$	-5	$(-5)^3 + 2(-5)^2 - 11(-5) - 12 = -32$
$(-4, -1)$	-2	$(-2)^3 + 2(-2)^2 - 11(-2) - 12 = 10$
$(-1, 3)$	0	$0^3 + 2(0)^2 - 11(0) - 12 = -12$
$(3, +\infty)$	4	$4^3 + 2(4)^2 - 11(2) - 12 = 40$

Vamos traçar uma reta com valores de x. Vamos marcar um pontinho vermelho em cima das raízes e um pontinho preto em cima dos valores que arbitramos para saber o sinal. Vamos, ainda, só para entender melhor, colocar o valor que encontramos quando substituímos esses x no polinômio. Acompanhe:

Lembre-se de duas coisas: i) a função muda de sinal nas raízes; ii) estamos procurando valores para os quais o polinômio é menor ou igual a zero. Analisando o gráfico, você percebe que até o -4 (que é onde o sinal muda) o polinômio é negativo, já que analisamos x = -5 e vimos que ele é negativo (-32). Entre -4 e -1o polinômio é positivo, já que x = -2 é +10, positivo, afinal. Entre 1 e 3 o polinômio é negativo, como vimos, x = 0 é -12, então temos um intervalo negativo. A partir de 3 o polinômio é positivo, já que x = 4 é +40. Veja esses intervalos no gráfico:

Então, expressando o resultado em intervalos, e lembrando que procurávamos valores para os quais o polinômio era negativo, teremos que:



$$P(x) \leq \;\rightarrow\; \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } -1 \leq x \leq 3\}$$

É trabalhoso, mas não podemos chamar de difícil, né? Veja o resuminho:

1. Você precisa determinar as raízes da equação associada. Se o problema fornecê-las, pule esta etapa;
2. Crie intervalos com as raízes. Lembre-se de incluir o menos infinito e o mais infinito;
3. Escolha um ponto em cada intervalo e substitua no polinômio para determinar o sinal;
4. Trace o gráfico e analise o que obteve;
5. Expresse o resultado em forma de intervalos.

FUNÇÕES RACIONAIS

Quando uma função é expressa por uma razão de polinômios, temos uma função racional. Formalmente, a função racional é o seguinte:

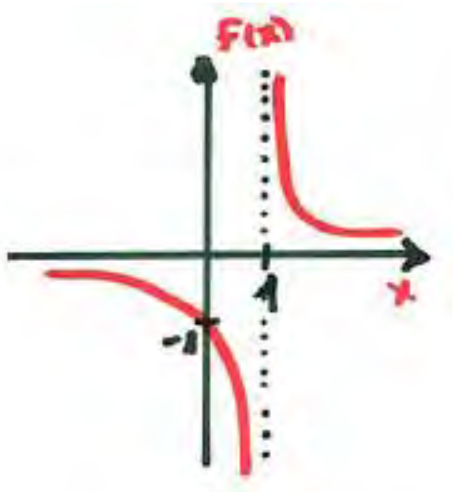
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Em que P(x) e Q(x) são polinômios e Q(x) é diferente de zero.

Para resolver equações racionais basta que você faça manipulações algébricas como igualar o numerador ao denominador e passe tudo para o mesmo lado da igualdade, assim você terá apenas um polinômio, como os que estudamos até agora. A parte mais interessante é quando analisamos graficamente as funções racionais. Elas têm algumas particularidades:

O gráfico de uma função racional não é necessariamente contínuo, como estamos bastante acostumados. Funções desse tipo podem apresentar interrupções em seus gráficos, que são os pontos em que o denominador é zero; assim, a função não existe naquele ponto. Veja um exemplo da função racional abaixo.

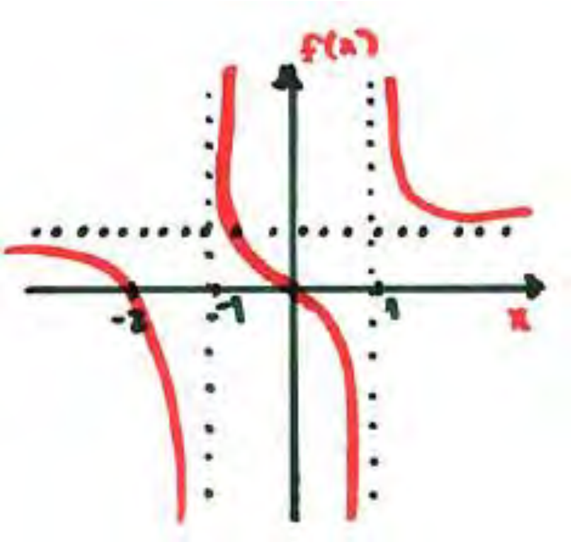
$f(x) = \frac{1}{x-1}$ tem como gráfico:



A linha tracejada na vertical é chamada de assíntota vertical.

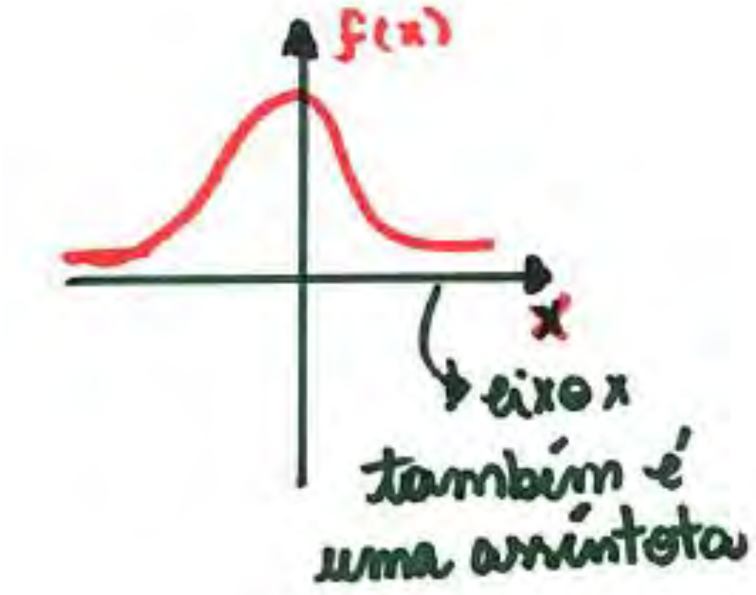
A função racional pode também não estar definida para alguns valores de x. Por causa disso, quando a função chega próxima a esses valores, o gráfico acaba se aproximando da assíntota vertical. Veja o exemplo:

$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ tem como gráfico:



A função racional pode também começar ou terminar muito perto da assíntota horizontal. Veja o exemplo abaixo (analise o exemplo anterior também):

$$f(x) = \frac{7}{x^2 + 2}$$



As funções racionais também podem estar associadas a inequações racionais. Para resolver esse tipo de função basta que você analise o polinômio do denominador separado do polinômio do numerador, como duas inequações separadas. Vamos fazer um exemplo. Observe a inequação abaixo:

$$\frac{x+5}{x-2} \geq 0$$

Podemos reescrevê-la como uma função racional:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+5}{x-2}$$

Note que x deve ser diferente de 2, porque, caso seja igual, o denominador será zero e a inequação seria inconsistente.

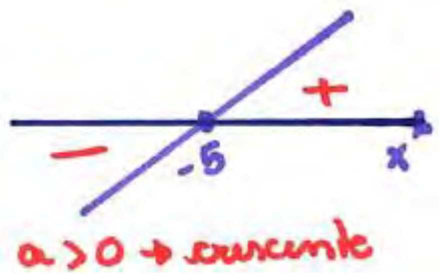
Vamos analisar P(x) e Q(x) separadamente, como se fossem duas funções separadas, começando por P(x).

$$f_1(x) = x + 5$$

Encontrando a raiz dessa função:

$$x + 5 = 0$$
$$x = -5$$

Como o coeficiente dominante é maior do que zero, a função é crescente e seu gráfico será:



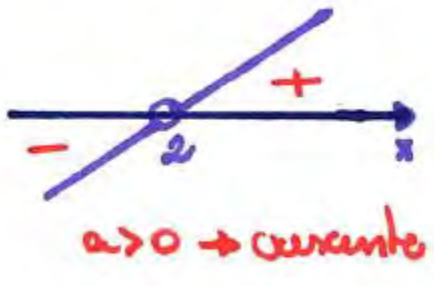
Vamos fazer o mesmo procedimento com o Q(x):

$$f_2(x) = x - 2$$

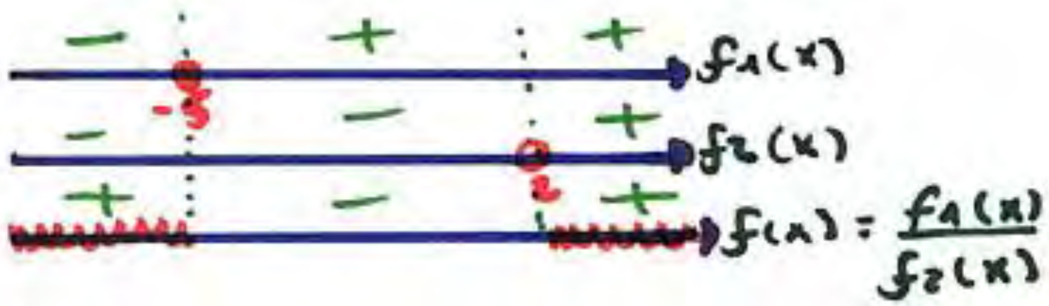
Encontrando as raízes da função:

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Novamente o coeficiente dominante é maior do que zero, assim a função será crescente e o gráfico será como o indicado abaixo. Mas fique atento! Lembre-se que o x deve ser diferente de 2 para que o denominador não zere; assim, é importante indicar isso no gráfico com um intervalo aberto.



Por fim, vamos juntar esses dois gráficos, ou seja, faremos a intersecção entre eles. Acompanhe:



Portanto, o local em que a função é maior ou igual a zero é de menos infinito a -5 (incluindo -5) ou acima de 2. Formalmente é o seguinte:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x > 2\}$$

FUNÇÃO MÓDULO

Antes de abordarmos a função módulo, vamos entender o que é o módulo de um número real. Quando falamos que estamos preocupados com o módulo de um número queremos dizer que estamos interessados no valor absoluto, sem o sinal. O módulo é indicado por duas barrinhas verticais que envolvem algum número. Veja os exemplos:

$$|8| = 8$$
$$|-4| = 4$$
$$|0| = 0$$
$$|\sqrt{17}| = \sqrt{17}$$
$$|0{,}89| = 0{,}89$$
$$\left|\frac{-7}{3}\right| = \frac{7}{3}$$
$$|-54| = 54$$

Note que o módulo de um número positivo é apenas ele mesmo; já o módulo de um número negativo é o seu oposto.

Qual é o valor da equação abaixo |x| = 5? Perceba que x pode ser igual a 5 ou igual a -5, já que o módulo de -5 é 5, certo? Veja abaixo:

$$|x| = 5 \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Mas se estivéssemos interessados em saber |x| = 0 teríamos apenas uma resposta, x = 0, já que não temos -0 ou +0, ok?

Qual é a solução de |x| = -10? Nesse caso, não temos solução, já que o módulo é sempre maior ou igual a zero, nunca negativo, como foi apresentado.

Agora que já deixamos claro o que é o módulo de um número e como é uma equação (bem simples) envolvendo o módulo, podemos abordar a função módulo (ou função modular). Ela é caracterizada da seguinte forma: f(x) = |x|. Podemos afirmar, a partir do que acabamos de estudar, que:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Perceba que temos duas sentenças nessa função. Para esboçar o gráfico precisamos analisá-las separadamente. Vamos iniciar a análise arbitrando valores maiores ou iguais a zero para x:

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = x$$

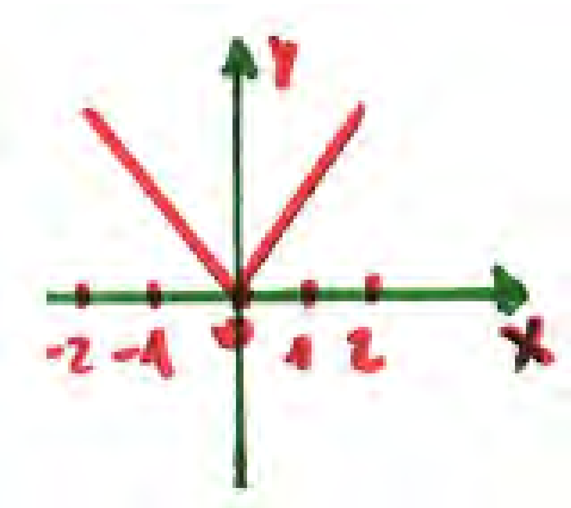
x	$f(x)$
0	0
1	1
2	2

Arbitramos valores menores do que zero para x:

$$x < 0 \rightarrow f(x) = -x$$

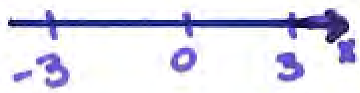
x	$f(x)$
-2	$-(-2) = 2$
-1	$-(-1) = 1$

Traçando o gráfico, teremos o seguinte:

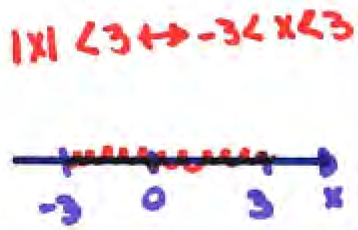


Note que o gráfico não cruza o eixo x, ficando apenas na parte positiva de y.

Vamos analisar como fica a situação das inequações modulares (por exemplo, $|3x-12| < 2$). Primeiramente, vamos entender algumas propriedades dos módulos de números reais. Veja a reta abaixo em que marcamos os pontos -3, 0 (origem) e 3:



Quando x é maior que -3 e menor que 3, a distância entre um ponto de x até a origem é menor do que 3. Assim, para qualquer um desses x, teremos que $-3 < x < 3$, que pode ser escrito como $|x| < 3$, ok? Veja a indicação no gráfico:



Mas se o x é menor do que -3 e maior do que 3, a distância entre um ponto de x até a origem é maior do que 3. Então, para qualquer um desses x, teremos que x < -3 ou x > 3, que pode ser escrito como |x| > 3. Veja no gráfico:

$$|x| > 3 \leftrightarrow x < -3 \text{ ou } x > 3$$

Assim, podemos concluir que quando temos uma inequação em que k > 0:

$$|x| < k \leftrightarrow -k < x < k$$
$$|x| \leq k \leftrightarrow -k \leq x \leq k$$
$$|x| > k \leftrightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$
$$|x| \geq k \leftrightarrow x \leq -k \text{ ou } x \geq k$$

Vamos fazer um exemplinho para entender melhor determinando o conjunto solução de |x+7| > 12.

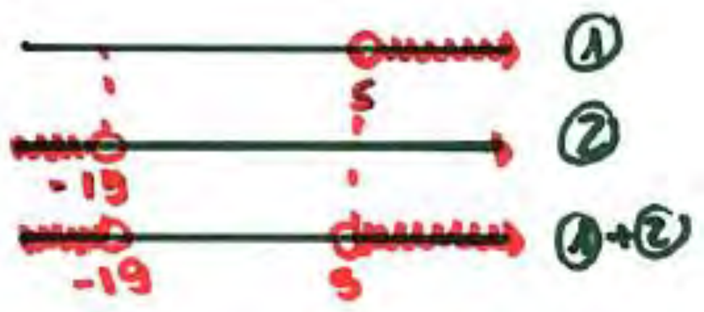
Precisamos utilizar uma das propriedades que acabamos de estudar, em que:

$$|x| > k \leftrightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

Então, teremos o seguinte:

$$|x+7| > 12 \longleftrightarrow \begin{cases} x+7 > 12 \rightarrow x > 12-7 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x > 5 \quad (1) \\ x+7 < -12 \rightarrow x+7 < -12 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x < -12-7 \\ \qquad\qquad\qquad\quad x < -19 \quad (2) \end{cases}$$

Expressando cada uma das inequações graficamente e fazendo a união delas, teremos:



Portanto, a solução dessa inequação é:

$$S = \{x \in \Re \mid x < -19 \text{ ou } x > 5\}$$

Foram muitas informações nessa apostila, né? Revise tudo com carinho e entenda cada detalhe. No final das contas, você vai perceber que tudo está interligado. Bons estudos!

REFERÊNCIAS

Cálculo Digital. Disponível em <http://www.calculo.iq.unesp.br/Calculo1/funcao-graficos-racional.html>. Acesso em 25 de jul de 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

meSalva!