

Machine learning

L. Rouvière
laurent.rouviere@univ-rennes2.fr

OCTOBRE 2020

Présentation

- *Objectifs* : comprendre les aspects **théoriques** et **pratiques** des algorithmes machine learning de référence.
- *Pré-requis* : théorie des probabilités, modélisation statistique, régression (linéaire et logistique). R, niveau avancé.
- *Enseignant* : Laurent Rouvière *laurent.rouviere@univ-rennes2.fr*
 - **Recherche** : statistique non paramétrique, apprentissage statistique
 - **Enseignements** : statistique et probabilités (Université, école d'ingénieur et de commerce, formation continue).
 - **Consulting** : energie, finance, marketing, sport.

Programme

- *Matériel* :
 - slides : <https://lrouviere.github.io/INP-HB/>
 - Tutoriel (sans correction) : https://lrouviere.github.io/TUTO_ML/
 - Tutoriel (avec corrections) : https://lrouviere.github.io/TUTO_ML/correction/
- *2 parties*
 1. **Rappels machine learning** : notions de risque, estimation de risque, complexité/surapprentissage...
 2. **Support vector machine**.

Table des matières

I Apprentissage : contexte et formalisation	3
1 Motivations	3
2 Cadre mathématique pour l'apprentissage supervisé	6
3 Exemples de fonction de perte	8
4 Estimation du risque	9
5 Le sur-apprentissage	11

6	Le package caret	14
7	Annexe : compléments sur les scores	17
8	Bibliographie	19
II	Support vector machine	20
1	SVM - cas séparable	21
2	SVM : cas non séparable	25
3	SVM non linéaire : astuce du noyau	31
4	Scores et probabilités	34
5	Compléments : SVM multi-classes et SVR	36
5.1	SVM multiclasses	36
5.2	Support vector regression (SVR)	38

Première partie

Apprentissage : contexte et formalisation

1 Motivations

Apprentissage statistique ?

Plusieurs "définitions"

1. "... explores way of estimating functional dependency from a given collection of data" [Vapnik, 2000].
2. "...vast set of tools for modelling and understanding complex data" [James et al., 2015]
3. Comprendre et apprendre un comportement à partir d'exemples.

Constat

- Le développement des moyens informatiques fait que l'on est confronté à des données de plus en plus complexes.
- Les méthodes traditionnelles se révèlent souvent peu efficaces face à ce type de données.
- Nécessité de proposer des algorithmes/modèles statistiques qui apprennent directement à partir des données.

Un peu d'histoire - voir [Besse, 2018]

Période	Mémoire	Ordre de grandeur
1940-70	Octet	$n = 30, p \leq 10$
1970	kO	$n = 500, p \leq 10$
1980	MO	Machine Learning
1990	GO	Data-Mining
2000	TO	$p > n$, apprentissage statistique
2010	PO	n explose, cloud, cluster...
2013	??	Big data
2017	??	Intelligence artificielle...

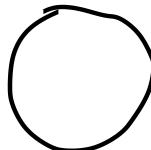
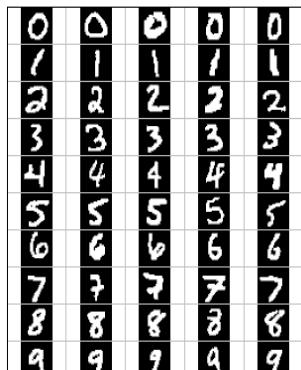
Conclusion

Capacités informatiques \Rightarrow Data Mining \Rightarrow Apprentissage statistique \Rightarrow Big Data \Rightarrow Intelligence artificielle...

Reconnaissance de l'écriture

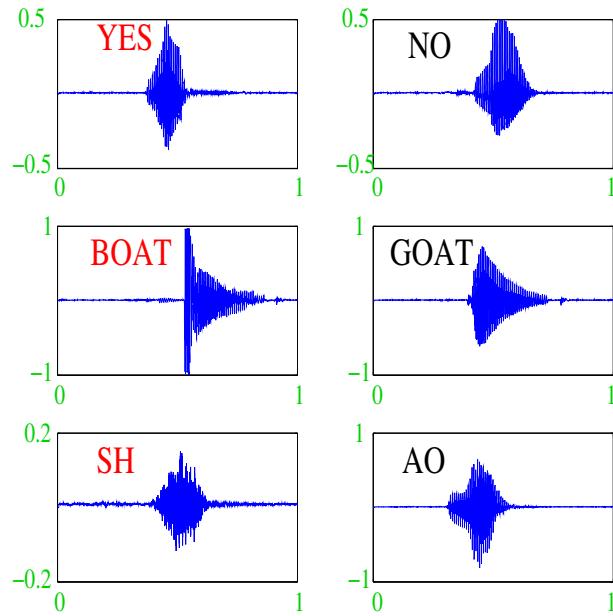
Apprentissage statistique

Comprendre et apprendre un comportement à partir d'exemples.

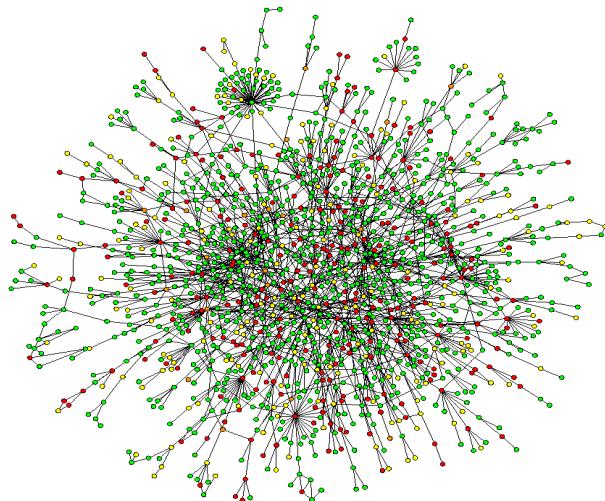


Qu'est-ce qui est écrit ? 0, 1, 2... ?

Reconnaissance de la parole



Apprentissage sur les réseaux



Prévision de pics d'ozone

- On a mesuré pendant 366 jours la *concentration maximale* en ozone (V4) ;
- On dispose également d'autres variables météorologiques (température, nébulosité, vent...).

```
> head(Ozone)
##   V1 V2 V3 V4   V5 V6 V7 V8     V9  V10 V11    V12 V13
## 1  1  1  4  3 5480  8 20 NA    NA 5000 -15 30.56 200
## 2  1  2  5  3 5660  6 NA 38    NA   NA -14    NA 300
## 3  1  3  6  3 5710  4 28 40    NA 2693 -25 47.66 250
## 4  1  4  7  5 5700  3 37 45    NA  590 -24 55.04 100
## 5  1  5  1  5 5760  3 51 54 45.32 1450  25 57.02  60
## 6  1  6  2  6 5720  4 69 35 49.64 1568  15 53.78  60
```

Question

Peut-on prédire la concentration maximale en ozone du **lendemain** à partir des prévisions météorologiques ?

Détection de spam

- Sur 4 601 mails, on a pu identifier *1813 spams*.
- On a également mesuré sur chacun de ces mails la présence ou absence de *57 mots*.

```
> spam %>% select(c(1:8,58)) %>% head()
##   make address all num3d our over remove internet type
## 1 0.00    0.64 0.64    0 0.32 0.00  0.00    0.00 spam
## 2 0.21    0.28 0.50    0 0.14 0.28  0.21    0.07 spam
## 3 0.06    0.00 0.71    0 1.23 0.19  0.19    0.12 spam
## 4 0.00    0.00 0.00    0 0.63 0.00  0.31    0.63 spam
## 5 0.00    0.00 0.00    0 0.63 0.00  0.31    0.63 spam
## 6 0.00    0.00 0.00    0 1.85 0.00  0.00    1.85 spam
```

Question

Peut-on construire à partir de ces données une méthode de **détection automatique de spam** ?

Estimation vs apprentissage

- *Estimation* : objectifs **explicatifs**
 - notion de **modèle** ;
 - décisions prises à l'aide de **tests statistiques**.
- *Apprentissage* : objectifs **prédictifs**
 - **complexité des modèles** "peu" importantes ;
 - décisions prises à l'aide de **critères de prévisions**.

Problématiques associées à l'apprentissage

- *Apprentissage supervisé* : expliquer/prédire une sortie $y \in \mathcal{Y}$ à partir d'entrées $x \in \mathcal{X}$;
- *Apprentissage non supervisé* : établir une typologie des observations ;
- *Règles d'association* : mesurer le lien entre différents produits ;
- *Systèmes de recommandation* : identifier les produits susceptibles d'intéresser des consommateurs.

NOMBREUSES APPLICATIONS

finance, économie, marketing, biologie, médecine...

Théorie de l'apprentissage statistique

Approche mathématique

- Ouvrage fondateur : [Vapnik, 2000]
- voir aussi [Bousquet et al., 2003].





The Elements of Statistical Learning [Hastie et al., 2009, James et al., 2015]

- Disponibles (avec jeux de données, codes...) aux url :

<https://web.stanford.edu/~hastie/ElemStatLearn/> <http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/>

Wikistat

- Page de cours et tutoriels très bien faits sur la *statistique classique et moderne*.
- On pourra notamment regarder les *vignettes* sur la partie **apprentissage** :
 - [Wikistat, 2020a]
 - [Wikistat, 2020b]
 - ...
- Plusieurs parties de ce cours sont *inspirées de ces vignettes*.

2 Cadre mathématique pour l'apprentissage supervisé

Régression vs Discrimination

- Données de type *entrée-sortie* : $d_n = (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathcal{X}$ représente l'entrée et $y_i \in \mathcal{Y}$ la sortie.

Objectifs

1. Expliquer le(s) mécanisme(s) liant les entrée x_i aux sorties y_i ;
2. Prédire « au mieux » la sortie y associée à une nouvelle entrée $x \in \mathcal{X}$.

Vocabulaire

- Lorsque la variable à expliquer est quantitative ($\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}$), on parle de *régression*.
- Lorsqu'elle est qualitative ($\text{Card}(\mathcal{Y})$ fini), on parle de *discrimination* ou de *classification supervisée*.

Exemples

- La plupart des problèmes présentés précédemment peuvent être appréhendés dans un contexte d'*apprentissage supervisé* : on cherche à expliquer une sortie y par des entrées x :

y_i	x_i	
Chiffre	image	Discri.
Mot	courbe	Discri.
Spam	présence/absence de mots	Discri.
C. en O_3	données météo.	Régression

Remarque

La nature des variables associées aux *entrées* x_i est *variée* (quanti, quali, fonctionnelle...).

Un début de formalisation mathématique

- Etant données des observations $d_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ on cherche à *expliquer/prédire* les sorties $y_i \in \mathcal{Y}$ à partir des entrées $x_i \in \mathcal{X}$.
- Il s'agit donc de trouver une fonction de prévision $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que

$$f(x_i) \approx y_i, i = 1, \dots, n.$$

- Nécessité de se donner un *critère* qui permette de mesurer la qualité des fonctions de prévision f .
- Le plus souvent, on utilise une fonction de perte $\ell : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\begin{cases} \ell(y, y') = 0 & \text{si } y = y' \\ \ell(y, y') > 0 & \text{si } y \neq y'. \end{cases}$$

Approche statistique

- On suppose que les données $d_n = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ sont des réalisations d'un n -échantillon $\mathcal{D}_n = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ de loi *inconnue*.
- Les X_i sont des variables aléatoires à valeurs dans \mathcal{X} , les Y_i dans \mathcal{Y} .
- Le plus souvent on supposera que les couples $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$ sont *i.i.d* de loi \mathbf{P} .

Performance d'une fonction de prévision

- Etant donné une fonction de perte $\ell : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$, la performance d'une fonction (mesurable) de prévision $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est mesurée par

$$\mathcal{R}(f) = \mathbf{E}[\ell(Y, f(X))]$$

- où (X, Y) est indépendant des (X_i, Y_i) et de même loi P .
- $\mathcal{R}(f)$ est appelé risque ou erreur de généralisation de f .

Fonction de prévision optimale

Aspect théorique

- Pour une fonction de perte $\ell : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$ donnée, le problème théorique consiste à trouver

$$f^* \in \operatorname{argmin}_f \mathcal{R}(f).$$

- Une telle fonction f^* (si elle existe) est appelée fonction de prévision optimale pour la perte ℓ .

Aspect pratique

- La fonction de prévision optimale f^* dépend le plus souvent de la loi P des (X, Y) qui est en pratique inconnue.
- Le job du statisticien est de trouver un estimateur $f_n = f_n(\cdot, \mathcal{D}_n)$ tel que $\mathcal{R}(f_n) \approx \mathcal{R}(f^*)$.

Définition

- Un algorithme de prévision est représenté par une suite $(f_n)_n$ d'applications (mesurables) telles que pour $n \geq 1$, $f_n : (\mathcal{X} \times (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^n) \rightarrow \mathcal{Y}$.
- On dit que la suite $(f_n)_n$ est universellement consistante si $\forall P$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(f_n) = \mathcal{R}(f^*).$$

Choix de la fonction de perte

- Le cadre mathématique développé précédemment sous-entend qu'une fonction est *performante* (voire *optimale*) vis-à-vis d'un **critère** (représenté par la *fonction de perte* ℓ).
- Un algorithme de prévision performant pour un critère ne sera *pas forcément performant pour un autre*.

Conséquence pratique

Avant de s'attacher à construire un algorithme de prévision, il est **capital** de savoir **mesurer la performance** d'un algorithme de prévision.

3 Exemples de fonction de perte

Régression

- Dans un contexte de régression ($\mathcal{Y} = \mathbb{R}$), la *perte quadratique* est la plus souvent utilisée. Elle est définie par :

$$\begin{aligned}\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (y, y') &\mapsto (y - y')^2\end{aligned}$$

- Le *risque* pour une **fonction de prévision** ou **régresseur** $m : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est alors donné par

$$\mathcal{R}(m) = \mathbf{E}((Y - m(X))^2).$$

Classification binaire

- Dans un contexte de discrimination binaire ($\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$), la *perte indicatrice* est la plus souvent utilisée. Elle est définie par :

$$\begin{aligned}\ell : \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (y, y') &\mapsto \mathbf{1}_{y \neq y'}\end{aligned}$$

- Le *risque* pour une **fonction de prévision** ou **règle de prévision** $g : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$ est alors donné par

$$\mathcal{R}(g) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{g(X) \neq Y}) = \mathbf{P}(g(X) \neq Y).$$

Fonction de score

- On reste dans un cadre de *classification binaire* ($\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$).
- Mais... plutôt que de chercher une règle de prévision $g : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$, on *cherche une fonction* $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que



- Une telle fonction est appelée **fonction de score** : plutôt que de prédire directement le groupe d'un nouvel individu $x \in \mathcal{X}$, on lui donne une *note* $S(x)$
 - **élevée** si il a des "chances" d'être dans le groupe 1 ;
 - **faible** si il a des "chances" d'être dans le groupe -1 ;

	Perte $\ell(y, f(x))$	Risque $\mathbf{E}[\ell(Y, f(X))]$	Champion f^*
Régression	$(y - f(x))^2$	$\mathbf{E}[Y - f(X)]^2$	$\mathbf{E}[Y X = x]$
Classif. binaire	$\mathbf{1}_{y \neq f(x)}$	$\mathbf{P}(Y \neq f(X))$	Bayes
Scoring		$AUC(S)$	$\mathbf{P}(Y = 1 X = x)$

Courbe ROC et AUC

- On utilise souvent la *courbe ROC* pour **visualiser** la performance d'un score :

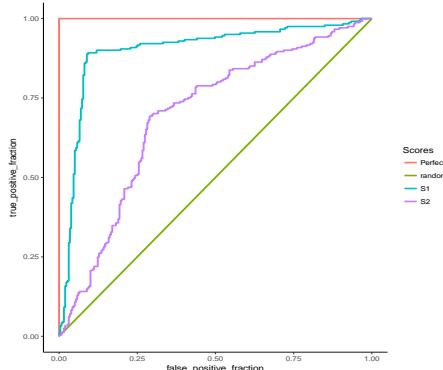
$$\begin{cases} x(s) = \alpha(s) = 1 - sp(s) = \mathbf{P}(S(X) > s|Y = -1) \\ y(s) = 1 - \beta(s) = se(s) = \mathbf{P}(S(X) \geq s|Y = 1) \end{cases}$$

- On déduit de ce critère un *risque* pour les scores en considérant l'*aire sous la courbe ROC (AUC)* :

$$\mathcal{R}(S) = \text{AUC}(S).$$

Propriété

- $0.5 \leq \text{AUC}(S) \leq 1$.
- Plus l'AUC est *grand, meilleur* est le score.



```
> library(pROC)
> df1 %>% group_by(Scores) %>% summarize(auc(D,M))
## # A tibble: 4 x 2
##   Scores   `auc(D, M)`
##   <chr>     <dbl>
## 1 Perfect      1
## 2 random      0.5
## 3 S1          0.896
## 4 S2          0.699
```

Résumé

4 Estimation du risque

Rappels

- n observations $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d à valeurs dans $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Objectif

Etant donnée une fonction de perte $\ell : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^+$, on cherche un **algorithme de prévision** $f_n(x) = f_n(x, \mathcal{D}_n)$ qui soit "proche" de l'oracle f^* défini par

$$f^* \in \operatorname{argmin}_f \mathcal{R}(f)$$

où $\mathcal{R}(f) = \mathbf{E}[\ell(Y, f(X))]$.

Question

Etant donné un algorithme f_n , que vaut son risque $\mathcal{R}(f_n)$?

Risque empirique

- La loi de (X, Y) étant *inconnue* en pratique, il est *impossible de calculer* $\mathcal{R}(f_n) = \mathbf{E}[\ell(Y, f_n(X))]$.
- **Première approche** : $\mathcal{R}(f_n)$ étant une espérance, on peut l'estimer (LGN) par sa *version empirique*

$$\mathcal{R}_n(f_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(Y_i, f_n(X_i)).$$

Problème

- L'échantillon \mathcal{D}_n a déjà été utilisé pour construire l'algorithme de prévision $f_n \implies$ La LGN ne peut donc s'appliquer !
- *Conséquence* : $\mathcal{R}_n(f_n)$ conduit souvent à une **sous-estimation** de $\mathcal{R}(f_n)$.

Une solution

Utiliser des méthodes de type **validation croisée** ou **bootstrap**.

Apprentissage - Validation ou Validation hold out

- Elle consiste à séparer l'échantillon \mathcal{D}_n en :
 1. un *échantillon d'apprentissage* $\mathcal{D}_{n,app}$ pour construire f_n ;
 2. un *échantillon de validation* $\mathcal{D}_{n,test}$ utilisé pour estimer le risque de f_n .

Algorithme

Entrées. \mathcal{D}_n : données, $\{\mathcal{A}, \mathcal{V}\}$: partition de $\{1, \dots, n\}$.

1. Construire l'algorithme de prédiction sur $\mathcal{D}_{n,app} = \{(X_i, Y_i) : i \in \mathcal{A}\}$, on le note $f_{n,app}$;
2. Calculer $\widehat{\mathcal{R}}_n(f_n) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \sum_{i \in \mathcal{V}} \ell(Y_i, f_{n,app}(X_i))$.

Commentaires

Nécessite d'avoir un **nombre suffisant d'observations** dans

1. $\mathcal{D}_{n,app}$ pour bien ajuster l'algorithme de prévision ;
2. $\mathcal{D}_{n,test}$ pour bien estimer l'erreur de l'algorithme.

Validation croisée K -blocs

- **Principe** : répéter l'algorithme apprentissage/validation sur *differentes partitions*.

Algorithme - CV

Entrées. \mathcal{D}_n : données, K un entier qui divise n ;

1. Construire une partition $\{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_K\}$ de $\{1, \dots, n\}$;
2. Pour $k = 1, \dots, K$
 - (a) $\mathcal{I}_{app} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_{test} = \mathcal{I}_k$;
 - (b) Construire l'algorithme de prédiction sur $\mathcal{D}_{n,app} = \{(X_i, Y_i) : i \in \mathcal{I}_{app}\}$, on le note $f_{n,k}$;
 - (c) En déduire $f_n(X_i) = f_{n,k}(X_i)$ pour $i \in \mathcal{I}_{test}$;
3. **Retourner**

$$\widehat{\mathcal{R}}_n(f_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(Y_i, f_n(X_i)).$$

Commentaires

- Plus adapté que la technique apprentissage/validation lorsqu'on a *peu d'observations*.
- Le *choix de K* doit être fait par l'utilisateur (souvent $K = 10$).

Leave one out

- Lorsque $K = n$, on parle de validation croisée *leave one out* ;
- Le risque est alors estimé par

$$\widehat{\mathcal{R}}_n(f_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(Y_i, f_n^i(X_i))$$

où f_n^i désigne l'algorithme de prévision construit sur \mathcal{D}_n amputé de la i -ème observation.

Autres approches

- *Estimation par pénalisation* : critère **ajustement/complexité**, C_p de Mallows, AIC-BIC...
- *Validation croisée Monte-Carlo* : répéter plusieurs fois la validation hold out ;
- *Bootstrap* : notamment **Out Of Bag** ;
- voir [Wikistat, 2020b].

5 Le sur-apprentissage

- La plupart des modèles statistiques renvoient des estimateurs qui dépendent de *paramètres λ à calibrer*.

Exemples

- nombres de variables dans un modèle linéaire ou logistique.
- paramètre de pénalités pour les régressions pénalisées.
- profondeur des arbres.
- nombre de plus proches voisins.
- nombre d'itérations en boosting.
- ...

Remarque importante

Le choix de ces paramètres est le plus souvent *crucial* pour la **performance de l'estimateur sélectionné**.

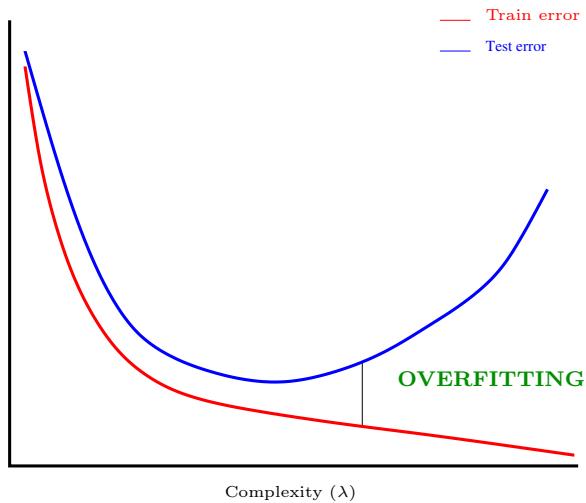
- Le paramètre λ à sélectionner représente le plus souvent la *complexité du modèle* :

Complexité \Rightarrow compromis biais/variance

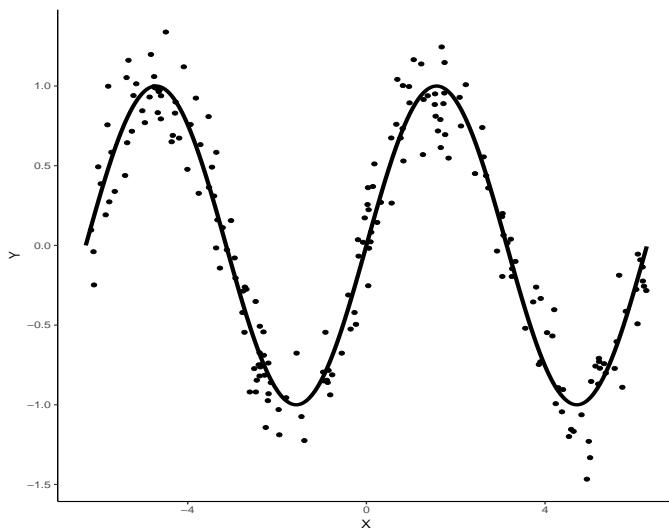
- λ petit \Rightarrow modèle peu flexible \Rightarrow mauvaise adéquation sur les données \Rightarrow biais \nearrow , variance \searrow .
- λ grand \Rightarrow modèle trop flexible \Rightarrow **sur-ajustement** \Rightarrow biais \searrow , variance \nearrow .

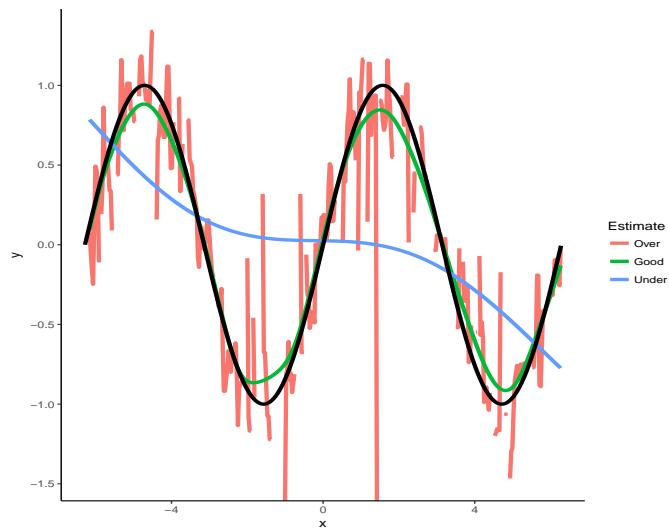
Overfitting

Sur-ajuster signifie que le modèle va (trop) bien ajuster sur les données d'apprentissage, il aura du mal à s'adapter à de nouveaux individus.

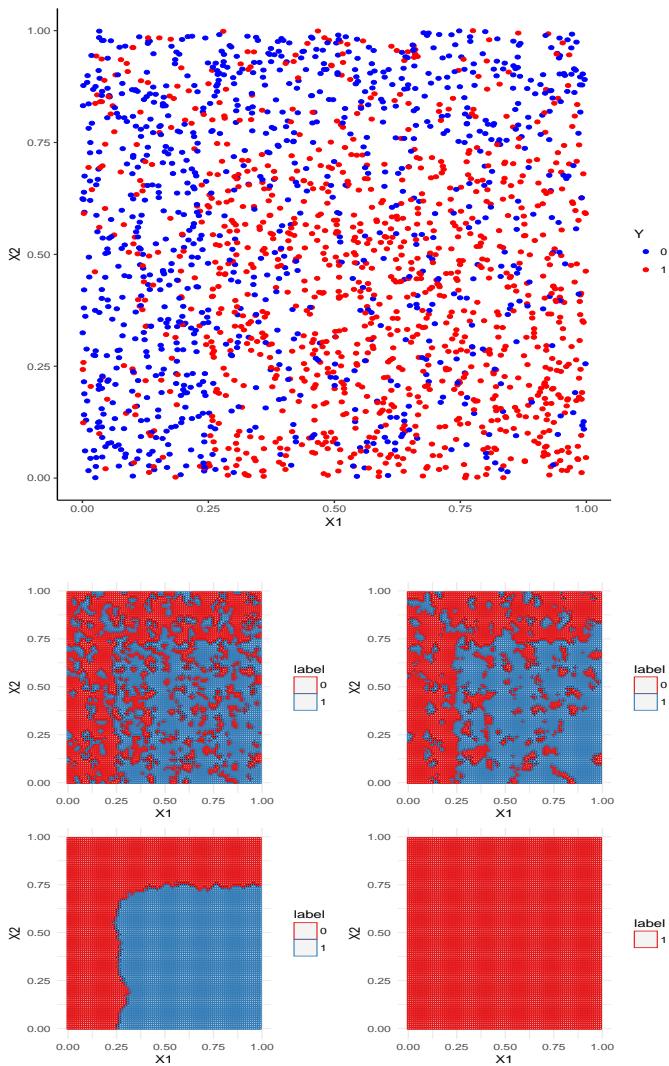


Overfitting en régression





Overfitting en classification supervisée



Application shiny

https://lrouviere.shinyapps.io/overfitting_app/

6 Le package caret

Le package caret

- Il permet d'évaluer la performance de plus de 230 méthodes : <http://topepo.github.io/caret/index.html>
- Il suffit d'indiquer :
 - la *méthode* (logistique, ppv, arbre, randomForest...)
 - Une grille pour les *paramètres* (nombre de ppv...)
 - Le *critère de performance* (erreur de classification, AUC, risque quadratique...)
 - La méthode d'estimation du critère (apprentissage validation, validation croisée, bootstrap...)

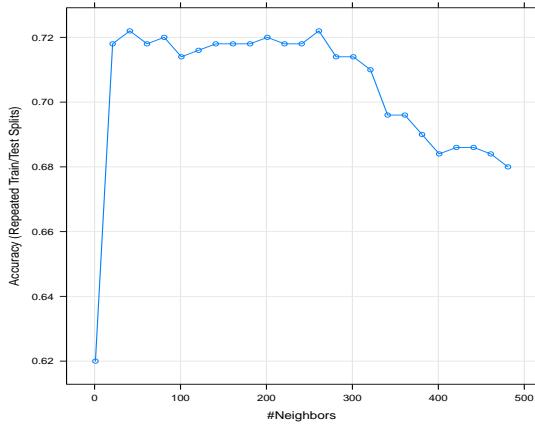
Apprentissage-validation

```
> library(caret)
> K_cand <- data.frame(k=seq(1,500,by=20))
> library(caret)
> ctrl1 <- trainControl(method="LGOCV",number=1,index=list(1:1500))
> e1 <- train(Y~.,data=donnees,method="knn",trControl=ctrl1,tuneGrid=K_cand)
> e1
## k-Nearest Neighbors
##
## 2000 samples
##    2 predictor
##    2 classes: '0', '1'
##
## No pre-processing
## Resampling: Repeated Train/Test Splits Estimated (1 reps, 75%)
## Summary of sample sizes: 1500
## Resampling results across tuning parameters:
##
##     k      Accuracy   Kappa
##     1     0.620     0.2382571
##    21    0.718     0.4342076
##    41    0.722     0.4418388

##    61    0.718     0.4344073
##    81    0.720     0.4383195
##   101    0.714     0.4263847
##   121    0.716     0.4304965
##   141    0.718     0.4348063
##   161    0.718     0.4348063
##   181    0.718     0.4348063
##   201    0.720     0.4387158
##   221    0.718     0.4350056
##   241    0.718     0.4350056
##   261    0.722     0.4428232
##   281    0.714     0.4267894
##   301    0.714     0.4269915
##   321    0.710     0.4183621
##   341    0.696     0.3893130
##   361    0.696     0.3893130
##   381    0.688     0.3727988
##   401    0.684     0.3645329
##   421    0.686     0.3686666
##   441    0.686     0.3679956
##   461    0.684     0.3638574
##   481    0.680     0.3558050
## Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
## The final value used for the model was k = 261.

> plot(e1)
```

Validation croisée



```

> library(doMC)
> registerDoMC(cores = 3)
> ctrl12 <- trainControl(method="cv",number=10)
> e2 <- train(Y~.,data=dapp,method="knn",trControl=ctrl12,tuneGrid=K_cand)
> e2
## k-Nearest Neighbors
##
## 1500 samples
##   2 predictor
##   2 classes: '0', '1'
##
## No pre-processing
## Resampling: Cross-Validated (10 fold)
## Summary of sample sizes: 1350, 1350, 1350, 1350, 1350, ...
## Resampling results across tuning parameters:
##
##     k      Accuracy    Kappa
##     1     0.6240000  0.2446251
##    21    0.7393333  0.4745290
##    41    0.7306667  0.4570024
##    61    0.7340000  0.4636743

##     81    0.7333333  0.4632875
##    101   0.7313333  0.4593480
##    121   0.7326667  0.4624249
##    141   0.7333333  0.4640787
##    161   0.7366667  0.4708178
##    181   0.7313333  0.4602309
##    201   0.7326667  0.4626618
##    221   0.7293333  0.4559741
##    241   0.7306667  0.4585960
##    261   0.7353333  0.4676751
##    281   0.7286667  0.4537842
##    301   0.7253333  0.4463516
##    321   0.7173333  0.4294524
##    341   0.7113333  0.4168003
##    361   0.7080000  0.4099303
##    381   0.7140000  0.4213569
##    401   0.7073333  0.4073761
##    421   0.7100000  0.4126434
##    441   0.7066667  0.4054984
##    461   0.6966667  0.3844183
##    481   0.6860000  0.3612515
##
## Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
## The final value used for the model was k = 21.

```

Validation croisée répétée

```

> ctrl13 <- trainControl(method="repeatedcv",repeats=5,number=10)
> e3 <- train(Y~.,data=dapp,method="knn",trControl=ctrl13,tuneGrid=K_cand)

```

```

> e3
## k-Nearest Neighbors
##
## 1500 samples
##   2 predictor
##   2 classes: '0', '1'
##
## No pre-processing
## Resampling: Cross-Validated (10 fold, repeated 5 times)
## Summary of sample sizes: 1350, 1350, 1350, 1350, 1350, ...
## Resampling results across tuning parameters:
##
##   k     Accuracy   Kappa
##   1    0.6232000  0.2438066
##   21   0.7354667  0.4665640
##   41   0.7314667  0.4585144
##   61   0.7317333  0.4592608
##   81   0.7302667  0.4568784
##  101   0.7310667  0.4589567

```

```

## 121  0.7320000  0.4609326
## 141  0.7322667  0.4616077
## 161  0.7336000  0.4643374
## 181  0.7340000  0.4649895
## 201  0.7332000  0.4632905
## 221  0.7325333  0.4620114
## 241  0.7316000  0.4600484
## 261  0.7305333  0.4578098
## 281  0.7286667  0.4536040
## 301  0.7238667  0.4434101
## 321  0.7189333  0.4330787
## 341  0.7136000  0.4215865
## 361  0.7122667  0.4183400
## 381  0.7098667  0.4131761
## 401  0.7090667  0.4112403
## 421  0.7058667  0.4043164
## 441  0.7001333  0.3920207
## 461  0.6952000  0.3811374
## 481  0.6872000  0.3636126
##
## Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
## The final value used for the model was k = 21.

```

Critère AUC

```

> donnees1 <- donnees
> names(donnees1)[3] <- c("Class")
> levels(donnees1$Class) <- c("G0", "G1")
> ctrl111 <- trainControl(method="LGOCV", number=1, index=list(1:1500),
+                           classProbs=TRUE, summary=twoClassSummary)
> e4 <- train(Class~., data=donnees1, method="knn", trControl=ctrl111,
+               metric="ROC", tuneGrid=K_cand)
> e4
## k-Nearest Neighbors
##
## 2000 samples
##   2 predictor
##   2 classes: 'G0', 'G1'
##
## No pre-processing
## Resampling: Repeated Train/Test Splits Estimated (1 reps, 75%)
## Summary of sample sizes: 1500
## Resampling results across tuning parameters:
##

```

```

##   k     ROC      Sens      Spec
##   1    0.6190866  0.5983264  0.6398467
##   21   0.7171484  0.6903766  0.7432950
##   41   0.7229757  0.6861925  0.7547893
##   61   0.7200500  0.6945607  0.7394636
##   81   0.7255567  0.6945607  0.7432950

```

```

## 101 0.7319450 0.6903766 0.7356322
## 121 0.7382452 0.6945607 0.7356322
## 141 0.7353757 0.7029289 0.7318008
## 161 0.7308549 0.7029289 0.7318008
## 181 0.7351272 0.7029289 0.7318008
## 201 0.7340050 0.7029289 0.7356322
## 221 0.7324099 0.7071130 0.7279693
## 241 0.7349028 0.7071130 0.7279693
## 261 0.7365780 0.7071130 0.7356322
## 281 0.7349749 0.6987448 0.7279693
## 301 0.7356963 0.7029289 0.7241379
## 321 0.7341493 0.6861925 0.7318008
## 341 0.7343898 0.6527197 0.7356322
## 361 0.7306385 0.6527197 0.7356322
## 381 0.7301816 0.6359833 0.7394636
## 401 0.7270957 0.6276151 0.7356322
## 421 0.7255487 0.6317992 0.7356322

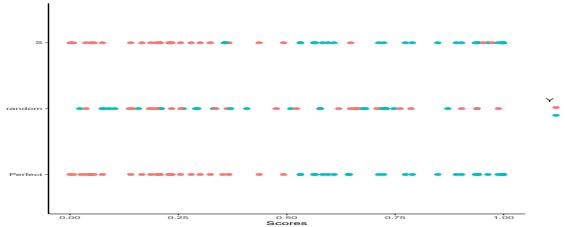
## 441 0.7258933 0.6192469 0.7471264
## 461 0.7220619 0.6150628 0.7471264
## 481 0.7236330 0.6108787 0.7432950
##
## ROC was used to select the optimal model using the largest value.
## The final value used for the model was k = 121.

```

⇒ Partie 1 du tuto

7 Annexe : compléments sur les scores

Scores parfait et aléatoire



Définition 7.1. — *Score parfait* : il est tel qu'il existe un seuil s^* tel que

$$\mathbf{P}(Y = 1|S(X) \geq s^*) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y = -1|S(X) < s^*) = 1.$$

— *Score aléatoire* : il est tel que $S(X)$ et Y sont indépendantes.

Lien score/règle de prévision

— Etant donné un score S , on peut déduire une *règle de prévision* en fixant un **seuil** s (la réciproque n'est pas vraie) :

$$g_s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } S(x) \geq s \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

— Cette règle définit la *table de confusion*

	$g_s(X) = -1$	$g_s(X) = 1$
$Y = -1$	OK	E_1
$Y = 1$	E_2	OK

— Pour chaque seuil s , on distingue deux types d'*erreur*

$$\alpha(s) = \mathbf{P}(g_s(X) = 1|Y = -1) = \mathbf{P}(S(X) \geq s|Y = -1)$$

et

$$\beta(s) = \mathbf{P}(g_s(X) = -1|Y = 1) = \mathbf{P}(S(X) < s|Y = 1).$$

On définit également

- Spécificité : $sp(s) = \mathbf{P}(S(X) < s | Y = -1) = 1 - \alpha(s)$
- Sensibilité : $se(s) = \mathbf{P}(S(X) \geq s | Y = 1) = 1 - \beta(s)$

Performance d'un score

Elle se mesure généralement en visualisant les erreurs $\alpha(s)$ et $\beta(s)$ et/ou la spécificité et la sensibilité pour tous les seuils s .

Courbe ROC

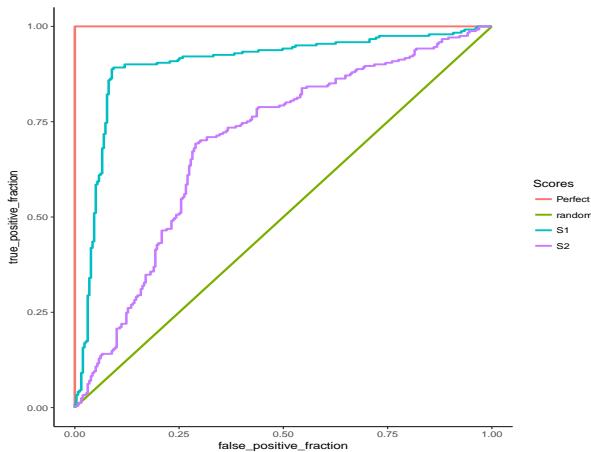
- Idée : représenter sur un graphe 2d les deux types d'erreur pour tous les seuils s .

Définition 7.2. C'est une courbe paramétrée par le seuil :

$$\begin{cases} x(s) = \alpha(s) = 1 - sp(s) = \mathbf{P}(S(X) > s | Y = -1) \\ y(s) = 1 - \beta(s) = se(s) = \mathbf{P}(S(X) \geq s | Y = 1) \end{cases}$$

Remarque

- La courbe ROC d'un score parfait passe par le point (0,1).
- La courbe ROC d'un score aléatoire correspond à la première bissectrice.



Interprétation

On mesurera la performance d'un score par sa capacité à se rapprocher de la droite d'équation $y = 1$ le plus vite possible.

AUC

Définition 7.3. — L'aire sous la courbe ROC d'un score S , notée $AUC(S)$ est souvent utilisée pour mesurer sa performance.

- Pour un score parfait on a $AUC(S) = 1$, pour un score aléatoire $AUC(S) = 1/2$.

Proposition 7.1. — Etant données deux observations (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) indépendantes et de même loi que (X, Y) , on a

$$AUC(S) = \mathbf{P}(S(X_1) \geq S(X_2) | (Y_1, Y_2) = (1, -1)).$$

AUC

```

> library(pROC)
> df1 %>% group_by(Scores) %>% summarize(auc(D,M))
## # A tibble: 4 x 2
##   Scores   `auc(D, M)`
##   <chr>     <dbl>
## 1 Perfect      1
## 2 random      0.5
## 3 S1         0.896
## 4 S2         0.699

```

Score optimal

- Le critère $AUC(S)$ peut être interprété comme une *fonction de perte* pour un score S ;
- Se pose donc la question d'existence d'un *score optimal* S^* vis-à-vis de ce critère.

Théorème 7.1 ([Cléménçon et al., 2008]). *Soit $S^*(x) = \mathbf{P}(Y = 1|X = x)$, on a alors pour toutes fonctions de score S*

$$AUC(S^*) \geq AUC(S).$$

Conséquence

Le problème pratique consistera à trouver un "bon" estimateur $S_n(x) = S_n(x, \mathcal{D}_n)$ de

$$S^*(x) = \mathbf{P}(Y = 1|X = x).$$

8 Bibliographie

Références

Biblio1

- [Besse, 2018] Besse, P. (2018). *Science des données - Apprentissage Statistique*. INSA - Toulouse. http://www.math.univ-toulouse.fr/~besse/pub/Appren_stat.pdf.
- [Bousquet et al., 2003] Bousquet, O., Boucheron, S., and Lugosi, G. (2003). *Introduction to Statistical Learning Theory*, chapter Advanced Lectures on Machine Learning. Springer.
- [Cléménçon et al., 2008] Cléménçon, S., Lugosi, G., and Vayatis, N. (2008). Ranking and empirical minimization of u-statistics. *The Annals of Statistics*, 36(2) :844–874.
- [Hastie et al., 2009] Hastie, T., Tibshirani, R., and Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning : Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer, second edition.
- [James et al., 2015] James, G., Witten, D., Hastie, T., and Tibshirani, R. (2015). *The Elements of Statistical Learning : Data Mining, Inference, and Prediction*. Springer.
- [Vapnik, 2000] Vapnik, V. (2000). *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer, second edition.
- [Wikistat, 2020a] Wikistat (2020a). Apprentissage machine — introduction. <http://wikistat.fr/pdf/st-m-Intro-ApprentStat.pdf>.
- [Wikistat, 2020b] Wikistat (2020b). Qualité de prévision et risque. <http://wikistat.fr/pdf/st-m-app-risque.pdf>.

Deuxième partie

Support vector machine

Cadre et notation

- *Discrimination binaire* : Y à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $X = (X_1, \dots, X_p)$ dans \mathbb{R}^p .

Objectif

- Estimer la *fondation de score* $S(x) = \mathbf{P}(Y = 1|X = x)$;
- En déduire une *règle de classification* $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \{-1, 1\}$.

Règles linéaires

- Elles consistent à *séparer* l'espace des X par un *hyperplan*.
- On classe ensuite 1 d'un côté de l'hyperplan, -1 de l'autre côté.

Mathématiquement

- On cherche une combinaison linéaire des variables $w_1X_1 + \dots + w_pX_p$.
- *Règle associée* :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } w_1X_1 + \dots + w_pX_p \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1 : régression logistique

- *Modèle* :

$$\text{logit} \frac{p(x)}{1-p(x)} = \beta_0 + \beta_1x_1 + \dots + \beta_px_p$$

où $p(x) = \mathbf{P}(Y = 1|X = x)$.

- *Règle de classification* :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(x) \geq 0.5 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- équivalent à

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta_0 + \beta_1x_1 + \dots + \beta_px_p \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2 : LDA

- *Modèle* : $\mathcal{L}(X|Y = k) = \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma), k = 0, 1$.

- *Règle de classification* :

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(x) \geq 0.5 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- équivalent à

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } c + x'\Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_0) \geq 0 \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Illustration avec $p = 2$

- Ces approches linéaires s'obtiennent à partir d'un *modèle statistique*
 - sur la loi de Y sachant X pour la logistique;
 - sur la loi de X sachant Y pour la discriminante linéaire.
- L'approche *SVM* repose sur le calcul direct du "meilleur" *hyperplan séparateur* qui sera déterminé à partir d'algorithmes d'optimisation.



FIGURE 1 – Règles logistique (gauche) et lda (droite).

1 SVM - cas séparable

Bibliographie

En plus des documents cités précédemment, cette partie s'appuie sur les diapos de cours de

- Magalie Fromont, Apprentissage statistique, Université Rennes 2 ([?]).
- Jean-Philippe Vert, *Support vector machines and applications in computational biology*, disponible à l'url <http://cbio.ensmp.fr/~jvert/svn/kernelcourse/slides/kernel2h/kernel2h.pdf>

Remarque

Les aspects techniques ne seront pas présentés ici, on pourra en trouver dans la [partie 2.4 du tutoriel](#).

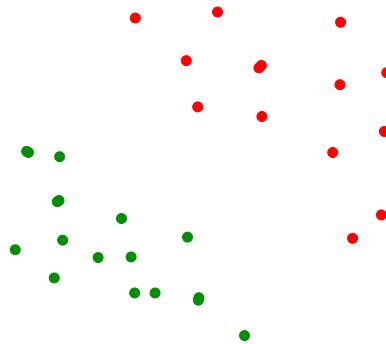
Présentation

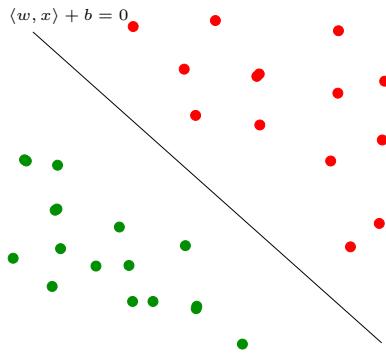
- L'approche SVM [Vapnik, 2000] peut être vue comme une *généralisation* de "recherche d'hyperplan optimal".

Cas simple

Les données $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ sont dites *linéairement séparables* si il existe $(w, b) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ tel que pour tout i :

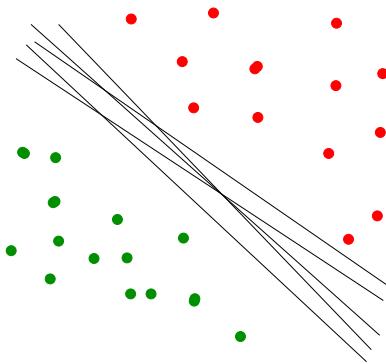
- $y_i = 1$ si $\langle w, x_i \rangle + b = w^t x_i + b > 0$;
- $y_i = -1$ si $\langle w, x_i \rangle + b = w^t x_i + b < 0$.





Vocabulaire

- L'équation $\langle w, x \rangle + b$ définit un **hyperplan séparateur** de vecteur normal w .
- La fonction signe($\langle w, x \rangle + b$) est une règle de **discrimination** potentielle.

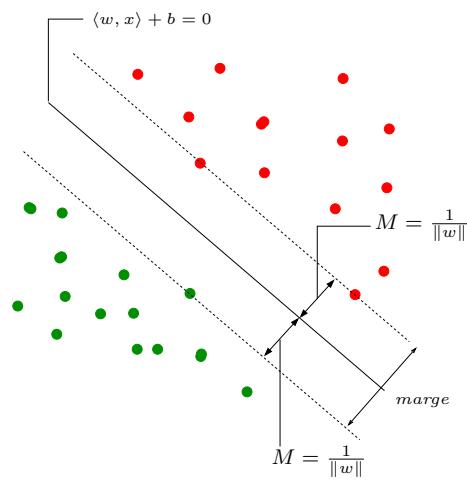


Problème

Il existe une *infinité d'hyperplans séparateurs* donc une **infinité de règles de discrimination potentielles**.

Solution

[Vapnik, 2000] propose de choisir l'hyperplan ayant la **marge maximale**.



Le problème d'optimisation

- On veut trouver l'hyperplan de *marge maximale* qui *sépare* les groupes.

Hyperplan séparateur optimal

Solution du problème *d'optimisation sous contrainte* :

— Version 1 :

$$\max_{w,b,\|w\|=1} M$$

sous les contraintes $y_i(w^t x_i + b) \geq M, i = 1, \dots, n.$

— Version 2 :

$$\min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2$$

sous les contraintes $y_i(w^t x_i + b) \geq 1, i = 1, \dots, n.$

Solutions

— On obtient

$$w^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i x_i.$$

où les α_i^* sont des constantes positives qui s'obtiennent en résolvant le *dual* du problème précédent.

— De plus, b^* s'obtient en résolvant

$$\alpha_i^*[y_i(x_i^t w^* + b) - 1] = 0$$

pour un α_i^* non nul.

Remarque

w^* s'écrit comme une **combinaison linéaire** des x_i .

Vecteurs supports

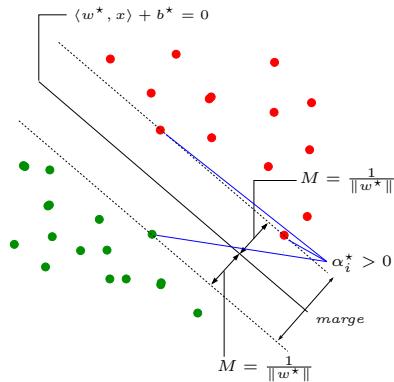
Propriété (conditions KKT)

$$\alpha_i^*[y_i(x_i^t w^* + b) - 1] = 0, i = 1, \dots, n.$$

Conséquence (importante)

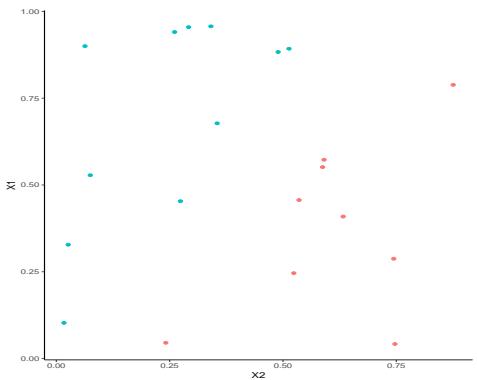
- Si $\alpha_i^* \neq 0$ alors $y_i(x_i^t w^* + b) = 1$ et x_i est **sur la marge**.
- w^* se calcule **uniquement** à partir de ces points là.
- Ces points sont appelés les **vecteurs supports** de la SVM.

Représentation



Le coin R

- La fonction *svm* du package **e1071** permet d'ajuster des *SVM*.



```
> library(e1071)
> mod.svm <- svm(Y~., data=df, kernel="linear", cost=10000000000)
```

La fonction *svm*

- Les vecteurs supports :

```
> mod.svm$index
## [1] 6 14 12
```

- $mod.svm\$coefs = \alpha^* u_i$ pour chaque vecteur support

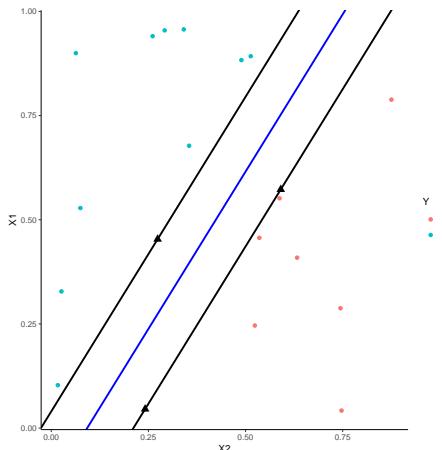
```
> mod.svm$coefs
##          [,1]
## [1,]  1.898982
## [2,]  1.905497
## [3,] -3.804479
```

- On peut en déduire l'hyperplan séparateur

```
> w <- apply(mod.svm$coefs * df[mod.svm$index, 2:3], 2, sum)
> b <- -mod.svm$rho
> w
##      X1          X2
## -0.5470382  0.5427583
> b
## [1] -0.4035113
```

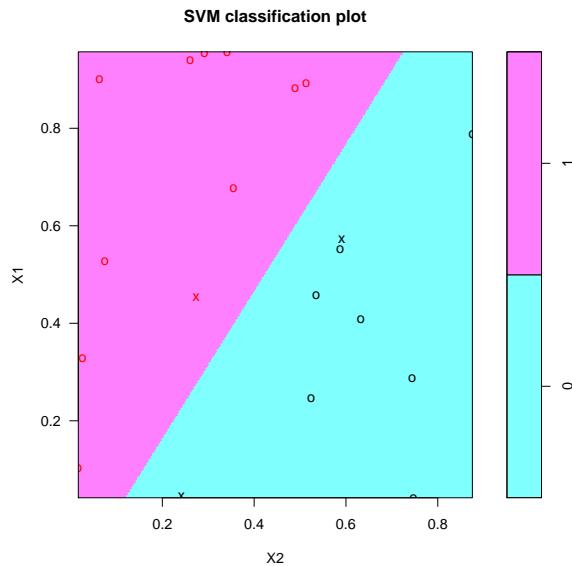
On peut ainsi visualiser

- les vecteurs supports ;
- l'hyperplan séparateur ;
- la marge.



- La fonction `plot` donne aussi une représentation de l'*hyperplan séparateur*.

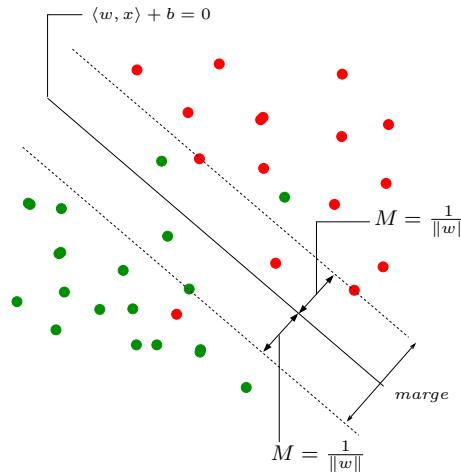
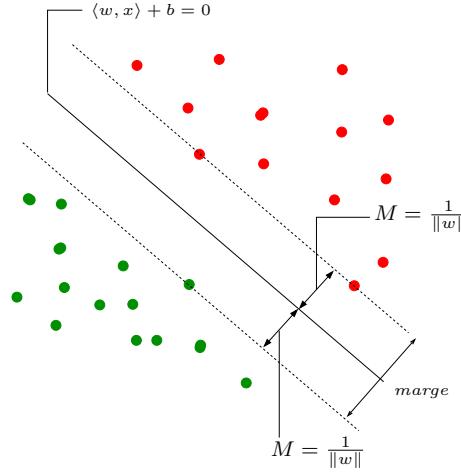
```
> plot(mod.svm,data=df,fill=TRUE,grid=500)
```



2 SVM : cas non séparable

Problème

Dans la vraie vie, les données ne sont (quasiment) **jamais linéairement séparables...**



Idée

Autoriser certains points

1. à être *bien classés* mais à l'*intérieur* de la marge;
2. et/ou à être *mal classés*.

Slack variables

Rappel : cas séparable

$$\min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2$$

sous les contraintes $y_i(w^t x_i + b) \geq 1, i = 1, \dots, n$.

- Les contraintes $y_i(w^t x_i + b) \geq 1$ signifient que tous les points se trouvent en dehors de la frontière définie par la *marge*;
- **Cas non séparable** : le problème ci-dessus n'admet pas de solution !

Variables ressorts

On introduit des *variables ressorts* (*slack variables*) positives ξ_1, \dots, ξ_n telles que $y_i(w^t x_i + b) \geq 1 - \xi_i$. 2 cas sont à distinguer :

1. $\xi_i \in [0, 1] \implies$ bien classé mais *dans* la région définie par la *marge*;
2. $\xi_i > 1 \implies$ *mal classé*.

- Bien entendu, on souhaite avoir le *maximum* de variables ressorts ξ_i *nulles*;
- Lorsque $\xi_i > 0$, on souhaite que ξ_i soit le *plus petit possible*.

Cas non séparable : problème d'optimisation (primal)

- Il s'agit de minimiser en (w, b, ξ)

$$\frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i$$

sous les contraintes $\begin{cases} y_i(w^t x_i + b) \geq 1 - \xi_i \\ \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n. \end{cases}$

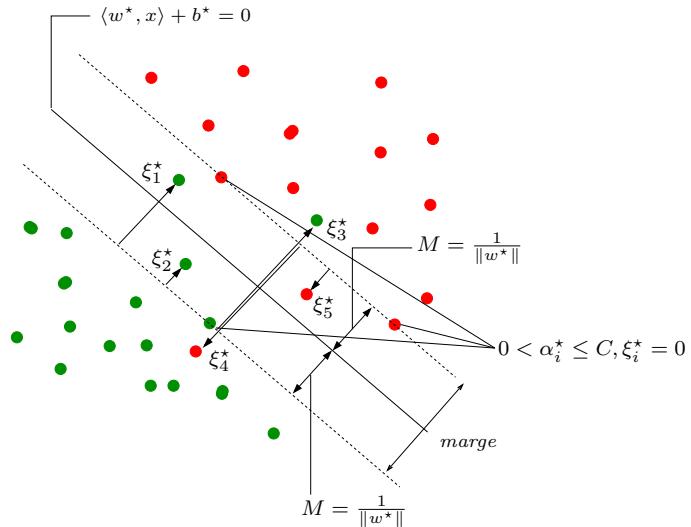
- $C > 0$ est un paramètre à calibrer (**paramètre de coût**).
- Le **cas séparable** correspond à $C \rightarrow \infty$.
- Les *solutions* de ce nouveau problème d'optimisation s'obtiennent de la *même façon* que dans le cas séparable (Lagrangien, problème dual...).
- L'*hyperplan optimal* est défini par

$$w^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i x_i$$

et b^* est solution de $y_i(\langle w^*, x_i \rangle + b^*) = 1$ pour tout i tel que $0 < \alpha_i^* < C$.

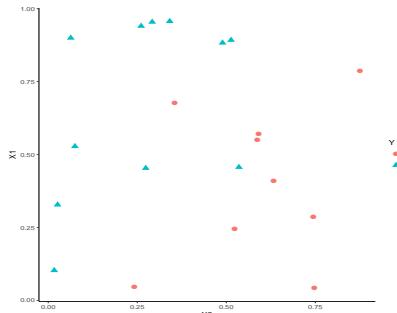
Vecteurs supports

- Les x_i tels que $\alpha_i^* > 0$ sont les vecteurs supports ;
- On distingue 2 types :
 - ceux sur la frontière définie par la marge : $\xi_i^* = 0$;
 - ceux en dehors : $\xi_i^* > 0$ et $\alpha_i^* = C$.
- Les vecteurs **non supports** vérifient $\alpha_i^* = 0$ et $\xi_i^* = 0$.



Le coin R

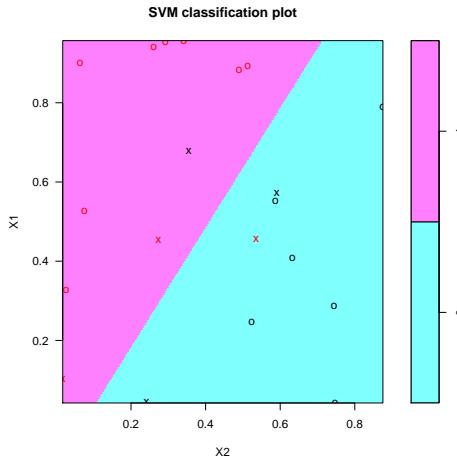
- On utilise la même fonction que dans le *cas séparable* (**svm** du package **e1071**) ;
- L'argument **cost** correspond à la *constante de régularisation* C .



```
> mod.svm1 <- svm(Y~, data=df1, kernel="linear", cost=1000)
> mod.svm1$index
## [1] 6 13 14 10 12 15
```

Visualisation de l'hyperplan séparateur

```
> plot(mod.svm1, data=df1, fill=TRUE, grid=500)
```



Choix de C

Ce paramètre régule le *compromis biais/variance* de la svm :

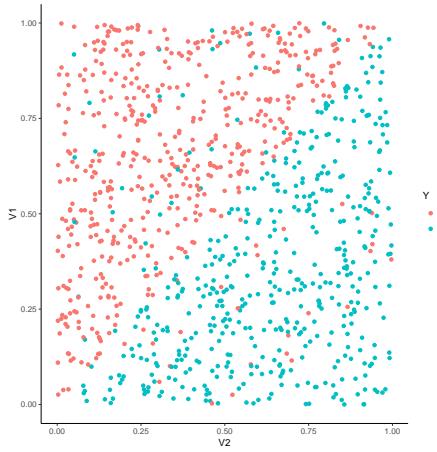
- $C \searrow$: la marge est privilégiée et les $\xi_i \nearrow \Rightarrow$ beaucoup d'observations dans la marge ou **mal classées** (et donc beaucoup de vecteurs supports).
- $C \nearrow \Rightarrow \xi_i \searrow$ donc moins d'observations mal classées \Rightarrow **meilleur ajustement** mais petite marge \Rightarrow risque de **surajustement**.

Conclusion

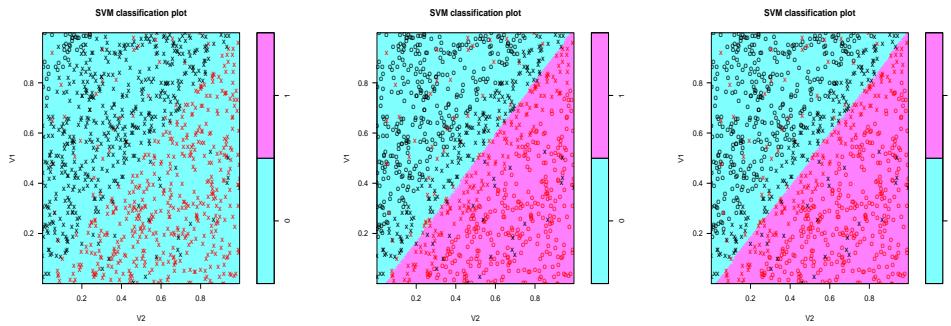
Il est donc très important de bien choisir ce paramètre.

- Le choix est souvent effectué de façon "classique" :
 1. On se donne un *critère de performance* (taux de mal classés par exemple) ;
 2. On *estime la valeur du critère* pour différentes valeurs de C ;
 3. On choisit la valeur de C pour laquelle le *critère estimé est minimum*.
- La fonction `tune.svm` permet de choisir C en estimant le taux de mal classés par *validation croisée*. On peut aussi (bien entendu) utiliser la fonction `train` du package `caret`.

Un exemple



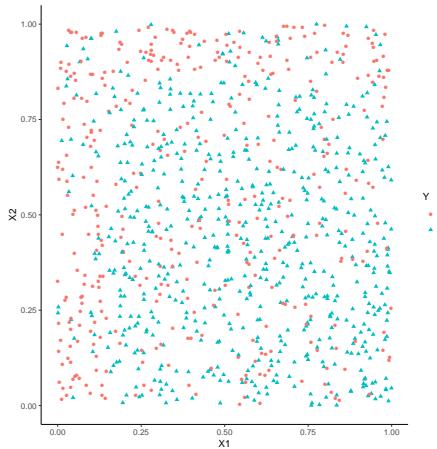
```
> mod.svm1 <- svm(Y~., data=df3, kernel="linear", cost=0.000001)
> mod.svm2 <- svm(Y~., data=df3, kernel="linear", cost=0.1)
> mod.svm3 <- svm(Y~., data=df3, kernel="linear", cost=5)
```



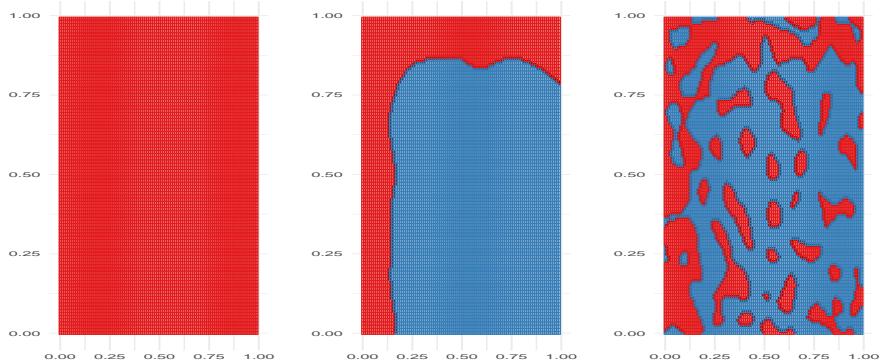
```
> mod.svm1$nSV
## [1] 480 480
> mod.svm2$nSV
## [1] 190 190
> mod.svm3$nSV
## [1] 166 165
```

Un autre exemple

— $n = 1000$ observations.



```
> model1 <- svm(Y~, data=donnees, cost=0.001, kernel="radial", gamma=5)
> model2 <- svm(Y~, data=donnees, cost=1, kernel="radial", gamma=5)
> model3 <- svm(Y~, data=donnees, cost=100000, kernel="radial", gamma=5)
```



Choix de C avec tune

```
> tune.out <- tune(svm, Y~, data=df3, kernel="linear",
+                     ranges=list(cost=c(0.001, 0.01, 1, 10, 100, 1000)))
> summary(tune.out)
## Parameter tuning of 'svm':
## - sampling method: 10-fold cross validation
## - best parameters:
##   cost
##   1
## - best performance: 0.071
## - Detailed performance results:
##   cost error dispersion
## 1 1e-03 0.142 0.03675746
## 2 1e-02 0.084 0.03373096
## 3 1e+00 0.071 0.02766867
## 4 1e+01 0.072 0.02820559
## 5 1e+02 0.072 0.02820559
## 6 1e+03 0.071 0.02766867
```

```
> bestmod <- tune.out$best.model
> summary(bestmod)
##
## Call:
## best.tune(method = svm, train.x = Y ~ ., data = df3, ranges =
##   list(cost = c(0.001, 0.01, 1, 10, 100, 1000)), kernel = "linear")
##
## Parameters:
##   SVM-Type: C-classification
##   SVM-Kernel: linear
##   cost: 1
##   gamma: 0.5
##
## Number of Support Vectors: 336
##
## ( 168 168 )
##
## Number of Classes: 2
##
## Levels:
## 0 1
```

Choix de C avec caret

```
> library(caret)
> gr <- data.frame(C=c(0.001, 0.01, 1, 10, 100, 1000))
> ctrl <- trainControl(method="repeatedcv", number=10, repeats=5)
> train(Y~, data=df3, method="svmLinear", trControl=ctrl, tuneGrid=gr)
```

```

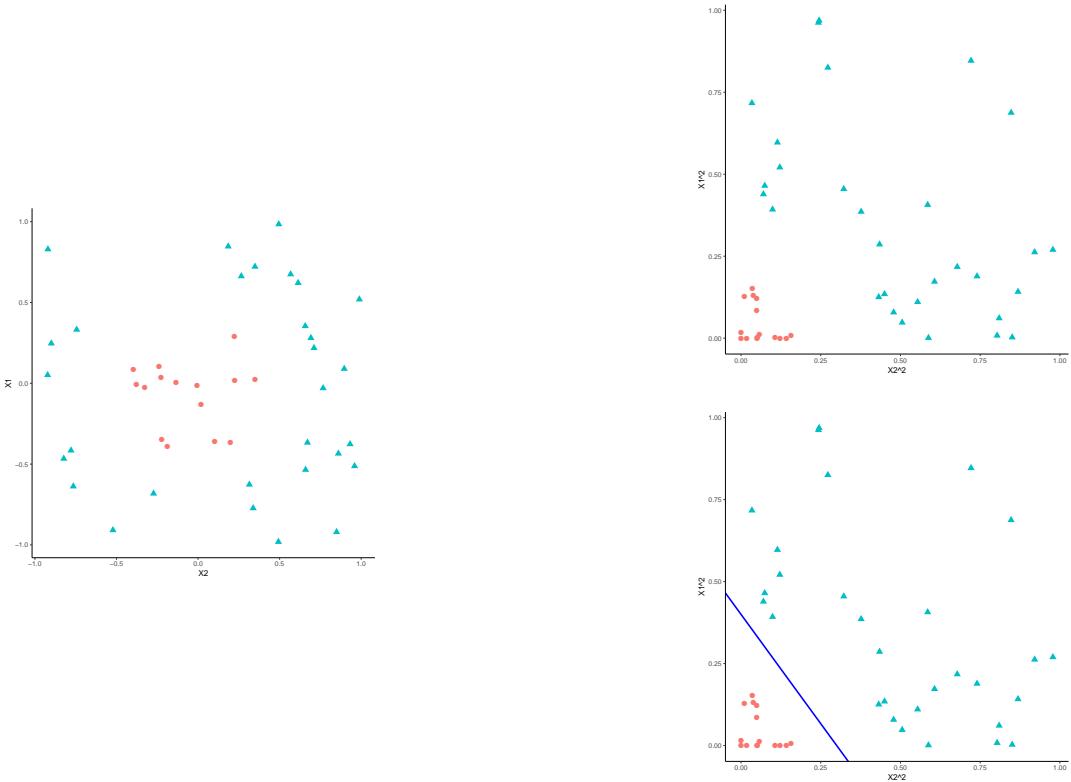
## Support Vector Machines with Linear Kernel
## No pre-processing
## Resampling: Cross-Validated (10 fold, repeated 5 times)
## Summary of sample sizes: 900, 900, 900, 900, 900, ...
## Resampling results across tuning parameters:
##   C      Accuracy   Kappa
##   1e-03  0.8700    0.7377051
##   1e-02  0.9188    0.8369121
##   1e+00  0.9304    0.8604317
##   1e+01  0.9292    0.8580356
##   1e+02  0.9294    0.8584333
##   1e+03  0.9294    0.8584333
## Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
## The final value used for the model was C = 1.

```

⇒ Parties 2.1 et 2.2 du tuto

3 SVM non linéaire : astuce du noyau

- Les *solutions linéaires* ne sont pas toujours intéressantes.



Idée

Trouver une transformation des données telle que les *données transformées* soient *linéairement séparables*.

Noyau

Définition 3.1. Soit $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$ une application qui va de l'espace des observations \mathcal{X} dans un Hilbert \mathcal{H} . Le noyau K entre x et x' associé à Φ est le produit scalaire entre $\Phi(x)$ et $\Phi(x')$:

$$K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, x') \mapsto \langle \Phi(x), \Phi(x') \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Exemple

Si $\mathcal{X} = \mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ et $\varphi(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2)$ alors

$$K(x, x') = (x_1 x'_1)^2 + (x_2 x'_2)^2.$$

L'astuce noyau

- L'astuce consiste donc à envoyer les observations x_i dans un espace de Hilbert \mathcal{H} appelé *espace de représentation* ou *feature space*...
- en espérant que les données $(\Phi(x_1), y_1), \dots, (\Phi(x_n), y_n)$ soient (presque) linéairement séparables de manière à appliquer une *svm* sur ces données transformées.

Remarque

1. Beaucoup d'*algorithmes linéaires* (en particulier les SVM) peuvent être appliqués sur $\Phi(x)$ sans calculer explicitement Φ ! Il suffit de pouvoir calculer le noyau $K(x, x')$;
2. On n'a pas besoin de connaître l'espace \mathcal{H} ni l'application Φ , il suffit de se donner un noyau K !

SVM dans l'espace original

- Le *problème dual* consiste à maximiser

$$L_D(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k y_i y_k \langle x_i, x_k \rangle$$

sous les contraintes $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$

- La règle de décision s'obtient en calculant le signe de

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i \langle x_i, x \rangle + b^*.$$

SVM dans le feature space

- Le *problème dual* consiste à maximiser

$$L_D(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k y_i y_k \langle \Phi(x_i), \Phi(x_k) \rangle$$

sous les contraintes $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$

- La règle de décision s'obtient en calculant le signe de

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i \langle \Phi(x_i), \Phi(x) \rangle + b^*.$$

SVM dans le feature space avec un noyau

- Le *problème dual* consiste à maximiser

$$L_D(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i \alpha_k y_i y_k K(x_i, x_k)$$

sous les contraintes $\begin{cases} 0 \leq \alpha_i \leq C, & i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = 0. \end{cases}$

- La règle de décision s'obtient en calculant le signe de

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i K(x_i, x) + b^*.$$

Conclusion

— Pour calculer la svm, on n'a *pas besoin de connaitre* \mathcal{H} ou Φ , il suffit de connaitre K !

Questions

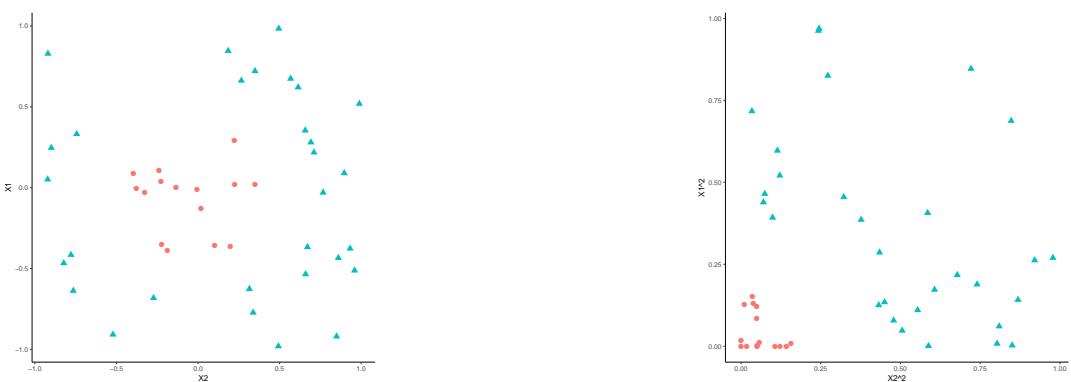
Qu'est-ce qu'un **noyau**? Comment construire un noyau?

Théorème 3.1 ([?]). *Une fonction $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau si et seulement si elle est (symétrique) définie positive, c'est-à-dire ssi*

1. $K(x, x') = K(x', x) \forall (x, x') \in \mathcal{X}^2$;
2. $\forall (x_1, \dots, x_N) \in \mathcal{X}^N$ et $\forall (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

Exemple



— Si

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2) \end{aligned}$$

alors $K(x, x') = (x^t x')^2$ (noyau polynomial de degré 2).

Exemples de noyau

1. *Linéaire* (sur \mathbb{R}^d) : $K(x, x') = x^t x'$.
2. *Polynomial* (sur \mathbb{R}^d) : $K(x, x') = (x^t x' + 1)^d$.
3. *Gaussien* (Gaussian radial basis function ou RBF) (sur \mathbb{R}^d)

$$K(x, x') = \exp\left(-\frac{\|x - x'\|}{2\sigma^2}\right).$$

4. *Laplace* (sur \mathbb{R}) : $K(x, x') = \exp(-\gamma|x - x'|)$.
5. Noyau *min* (sur \mathbb{R}^+) : $K(x, x') = \min(x, x')$.

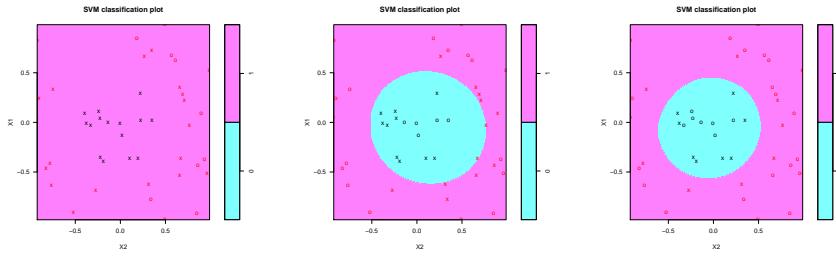
Remarque

N'importe quelle *fonction définie positive* fait l'affaire... Possibilité de construire des noyaux (et donc de faire des svm) sur des *objets plus complexes* (courbes, images, séquences de lettres...).

Le coin R - exemple 1

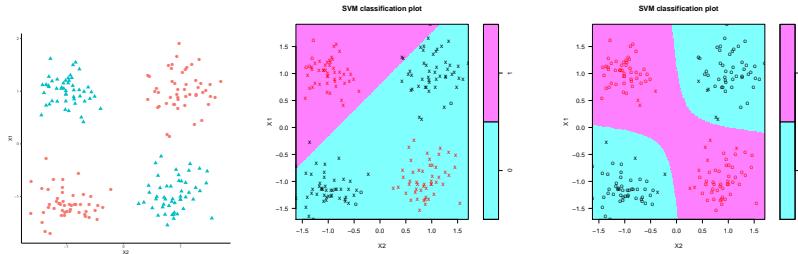
— Argument *kernel* dans la fonction **svm**.

```
> svm(Y~, data=donnees, cost=1, kernel="linear")
> svm(Y~, data=donnees, cost=1, kernel="polynomial", degree=2)
> svm(Y~, data=donnees, cost=1, kernel="radial", gamma=1)
```



Le coin R - exemple 2

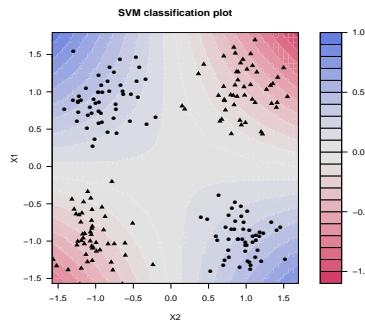
```
> svm(Y~, data=donnees, kernel="linear", cost=1)
> svm(Y~, data=donnees, kernel="polynomial", degree=2, cost=1)
```



Le package kernlab

- Il propose un *choix plus large* de noyaux.

```
> library(kernlab)
> mod.ksvm <- ksvm(Y~, data=donnees, kernel="polydot", kpar=list(degree=2), C=0.001)
> plot(mod.ksvm)
```



⇒ Partie 2.3 du tuto

4 Scores et probabilités

- Jusqu'à présent nous avons utiliser la SVM uniquement pour *classer* :
 - 1 si on est d'un **côté de l'hyperplan** $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i K(x_i, x) + b^* \neq 0$;
 - 1 si on est de l'**autre côté** $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i K(x_i, x) + b^* < 0$.

- *Rappel* : dans le cas linéaire la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* y_i K(x_i, x) + b^*$$

mesure la **distance entre x et l'hyperplan séparateur**.

- *Conclusion* : cette fonction peut être utilisée comme un **score**, puisque sa valeur (absolue) traduit une **confiance** que l'on a dans la prévision.

Probabilités

- La valeur de $f(x)$ est *difficilement interprétable* en tant que telle.
- Il peut être intéressant de la "ramener" entre 0 et 1 pour l'interpréter comme une **estimation de $\mathbf{P}(Y = 1|X = x)$** .

Une solution

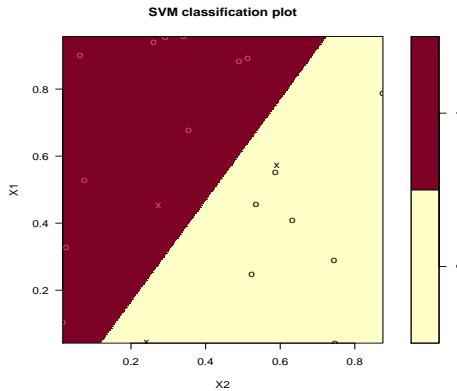
- Considérer un **modèle logistique** :

$$\mathbf{P}(Y = 1|X = x) = \frac{1}{1 + \exp(a f(x) + b)}$$

- et d'estimer a et b par **maximum de vraisemblance** sur les données $(f(x_i), y_i), i = 1, \dots, n$.

Le coin R

```
> mod.svm <- svm(Y~., data=df, kernel="linear", cost=10000000000, probability=TRUE)
> plot(mod.svm, data=df, fill=TRUE, grid=500)
```



- Nouvelle observation :

```
> newX <- data.frame(X1=0.2, X2=0.6)
```

- Calcul du *score* et de la *proba* :

```
> predict(mod.svm, newdata=newX, decision.values = TRUE, probability=TRUE)
## 1
## 0
## attr(,"decision.values")
##          0/1
## 1 3.153157
## attr(,"probabilities")
##          0          1
## 1 0.9634021 0.0365979
## Levels: 0 1
```

- On peut retrouver cette proba avec :

```
> a <- mod.svm$probA
> b <- mod.svm$probB
> 1/(1+exp(a*3.153157+b))
## [1] 0.9634021
```

5 Compléments : SVM multi-classes et SVR

Cible multi-classes ou quantitative

- On a abordé ici uniquement le problème de la *classification binaire* : $y_i \in \{-1, 1\}$.
- Les SVM se généralisent aux cas *multi-classes* : $y_i \in \{1, \dots, M\}$
- et à la *régession* : $y_i \in \mathbb{R}$.

5.1 SVM multiclasses

- On suppose ici que $y_i \in \{1, \dots, M\}$
- Il existe plusieurs approches pour généraliser les SVM à ce contexte, notamment :
- **One against one**

Idée

Faire une SVM binaire sur **toutes les paires** $(j, k) \in \{1, \dots, M\}^2$ avec $j \neq k$ et choisir le **groupe qui gagne le plus souvent**.

- **On against all**

Idée

Faire une SVM binaire de **chaque groupe contre les autres** et choisir le **groupe qui a la "plus belle victoire"**.

One against one

Algorithme

1. Pour chaque paire (j, k) , faire la SVM **binaire** avec uniquement les individus des groupes k et j ;
2. On obtient ainsi $M(M - 1)/2$ **règles "linéaires"** $f_{j,k}(x)$.
3. On calcule pour $j = 1, \dots, M$

$$V(j) = \sum_{k \neq j} \text{signe}(f_{j,k}(x))$$

qui représente le **nombre de fois où on a voté j contre les autres groupes**.

4. On classe un nouvel individu x dans le groupe qui a **rappor  t   le plus de suffrage** :

$$f(x) = \underset{j}{\operatorname{argmax}} V(j).$$

One against all

Algorithme

1. Faire une SVM binaire avec **tous les individus** de chaque groupe contre les autres.
2. On obtient ainsi M **règles "linéaires"** $f_j(x)$.
3. On classe un nouvel individu dans la classe qui a le score le plus élevé :

$$f(x) = \underset{j}{\operatorname{argmax}} f_j(x).$$

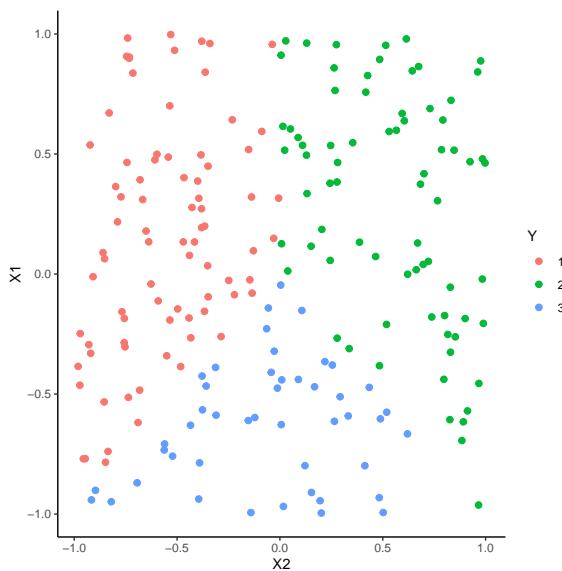
Comparaison

- M SVM binaire avec l'approche **one against all** contre $M(M - 1)/2$ avec le **one against one** mais...
- moins d'individus dans les **one against one**.
- Risque de déséquilibre plus fort avec le **one against all** (mais généralement plus rapide).
- Comme dans le cas binaire, il faut *sélectionner* le paramètre de complexité, le noyau, les paramètres du noyau...

Le coin R

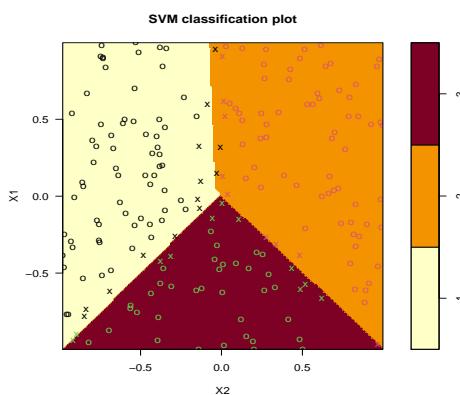
- L'approche **one against one** est plus souvent utilisée.
- C'est le cas par défaut avec **svm** de *e1071* et **ksvm** de *kernlab*.

Exemple



SVM linéaire multi classes

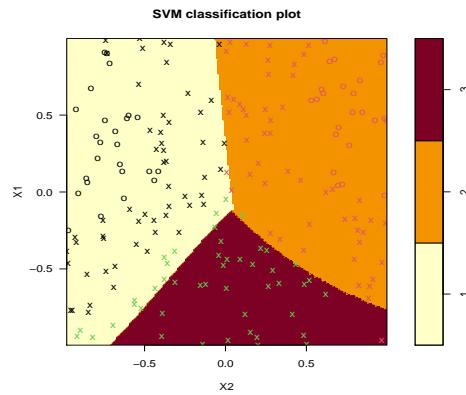
```
> multi <- svm(Y~, data=df, cost=10, kernel="linear")
> plot(multi, data=D, grid=200)
```



SVM linéaire multi classes

— Il "suffit" d'utiliser un *noyau*.

```
> multi2 <- svm(Y~, data=df, cost=0.1, kernel="sigmoid")
> plot(multi, data=D, grid=200)
```



5.2 Support vector regression (SVR)