

Classification supervisée

L. Rouvière

laurent.rouviere@univ-rennes2.fr

Novembre 2019

- **Objectifs** : comprendre les aspects **formels** et **pratiques** de la classification supervisée.
- **Pré-requis** : théorie des probabilités, modélisation statistique, régression. R, niveau avancé.
- **Enseignant** : Laurent Rouvière laurent.rouviere@univ-rennes2.fr
 - **Recherche** : statistique non paramétrique, apprentissage statistique
 - **Enseignements** : statistique et probabilités (Université, école d'ingénieur et de commerce, formation continue).
 - **Consulting** : énergie, finance, marketing.

- **Matériel** : slides + Notebook R. Disponible à l'url :
https://lrouviere.github.io/classif_sup/
- **4 parties** :
 1. **Cadre mathématique de la classification supervisée** : 4h.
 2. **Analyse discriminante linéaire** : 4h.
 3. **Modèle logistique** : 4h
 4. **Arbres** : 4h.
 5. **Introduction aux forêts aléatoires** : 2h.

Première partie I

Le problème de la classification supervisée

Quelques exemples

Cadre mathématique

- L'erreur de classification

- La courbe ROC

- Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

Quelques exemples

Cadre mathématique

- L'erreur de classification

- La courbe ROC

- Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

Prévision de pics d'ozone

- On a mesuré pendant 366 jours la **concentration maximale** en ozone (V4) ;
- On dispose également d'autres **variables météorologiques** (température, nébulosité, vent...).

```
> Ozone[1:5,]  
  V1 V2 V3 V4    V5 V6 V7 V8    V9  V10 V11    V12 V13  
1  1  1  4  3 5480  8 20 NA    NA 5000 -15 30.56 200  
2  1  2  5  3 5660  6 NA 38    NA   NA -14    NA 300  
3  1  3  6  3 5710  4 28 40    NA 2693 -25 47.66 250  
4  1  4  7  5 5700  3 37 45    NA  590 -24 55.04 100  
5  1  5  1  5 5760  3 51 54 45.32 1450  25 57.02  60
```

Prévision de pics d'ozone

- On a mesuré pendant 366 jours la **concentration maximale** en ozone (V4) ;
- On dispose également d'autres **variables météorologiques** (température, nébulosité, vent...).

```
> Ozone[1:5,]  
  V1 V2 V3 V4    V5 V6 V7 V8    V9  V10 V11    V12 V13  
1  1  1  4  3 5480  8 20 NA    NA 5000 -15 30.56 200  
2  1  2  5  3 5660  6 NA 38    NA   NA -14    NA 300  
3  1  3  6  3 5710  4 28 40    NA 2693 -25 47.66 250  
4  1  4  7  5 5700  3 37 45    NA  590 -24 55.04 100  
5  1  5  1  5 5760  3 51 54 45.32 1450  25 57.02  60
```

Question

Peut-on **prédire** la concentration maximale en ozone du **lendemain** à partir des prévisions météorologiques ?

Détection de clients à risque

- Une chaine de magasins a mis en place une carte de crédit.
- Elle dispose d'un historique de 145 clients dont 40 ont connu des défauts de paiement.
- Elle connaît également d'autres caractéristiques sur ses clients (sexe, taux d'endettement, revenus mensuels, dépenses effectuées sur certaines gammes de produit...)

Détection de clients à risque

- Une chaîne de magasins a mis en place une carte de crédit.
- Elle dispose d'un **historique de 145 clients** dont 40 ont connu des défauts de paiement.
- Elle connaît également d'**autres caractéristiques** sur ses clients (sexe, taux d'endettement, revenus mensuels, dépenses effectuées sur certaines gammes de produit...)

Question

Comment **prédire** si un nouveau client connaîtra des défauts de paiement ?

Iris de Fisher

- On a mesuré sur 150 iris de 3 espèces différentes (Setosa, Versicolor, Virginica) les quantités suivantes :
 - Longueur et largeur des pétales
 - Longueur et largeur des sépales

```
> summary(iris)
```

Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
Min. :4.300	Min. :2.000	Min. :1.000	Min. :0.100	setosa :50
1st Qu.:5.100	1st Qu.:2.800	1st Qu.:1.600	1st Qu.:0.300	versicolor:50
Median :5.800	Median :3.000	Median :4.350	Median :1.300	virginica :50
Mean :5.843	Mean :3.057	Mean :3.758	Mean :1.199	
3rd Qu.:6.400	3rd Qu.:3.300	3rd Qu.:5.100	3rd Qu.:1.800	
Max. :7.900	Max. :4.400	Max. :6.900	Max. :2.500	

Iris de Fisher

- On a mesuré sur 150 iris de 3 espèces différentes (Setosa, Versicolor, Virginica) les quantités suivantes :
 - Longueur et largeur des pétales
 - Longueur et largeur des sépales

```
> summary(iris)
```

Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
Min. :4.300	Min. :2.000	Min. :1.000	Min. :0.100	setosa :50
1st Qu.:5.100	1st Qu.:2.800	1st Qu.:1.600	1st Qu.:0.300	versicolor:50
Median :5.800	Median :3.000	Median :4.350	Median :1.300	virginica :50
Mean :5.843	Mean :3.057	Mean :3.758	Mean :1.199	
3rd Qu.:6.400	3rd Qu.:3.300	3rd Qu.:5.100	3rd Qu.:1.800	
Max. :7.900	Max. :4.400	Max. :6.900	Max. :2.500	

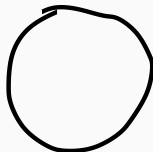
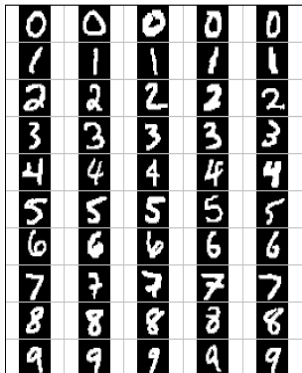
Question

Comment identifier l'espèce d'un iris à partir de ces 4 caractéristiques ?

Reconnaissance de l'écriture

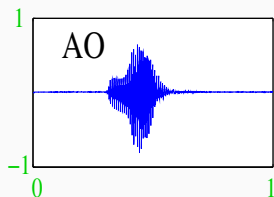
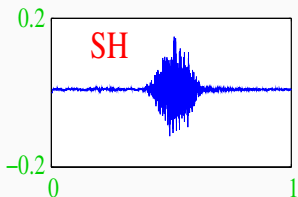
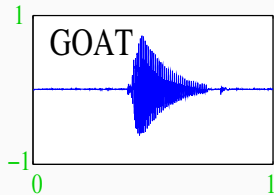
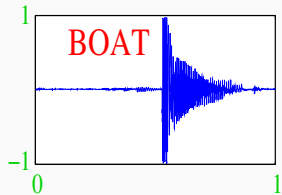
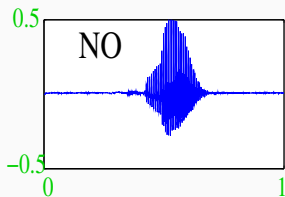
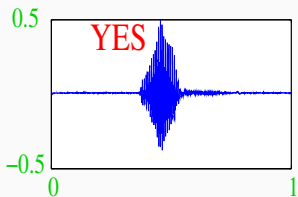
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8
9	9	9	9	9

Reconnaissance de l'écriture



Qu'est-ce qui est écrit ? 0, 1, 2... ?

Reconnaissance de la parole



Détection de spam

- Sur 4 601 mails, on a pu identifier 1813 spams.
- On a également mesuré sur chacun de ces mails la présence ou absence de 57 mots.

```
> spam[1:5,c(1:8,58)]  
  make address  all num3d  our over remove internet type  
1 0.00    0.64 0.64    0 0.32 0.00    0.00    0.00 spam  
2 0.21    0.28 0.50    0 0.14 0.28    0.21    0.07 spam  
3 0.06    0.00 0.71    0 1.23 0.19    0.19    0.12 spam  
4 0.00    0.00 0.00    0 0.63 0.00    0.31    0.63 spam  
5 0.00    0.00 0.00    0 0.63 0.00    0.31    0.63 spam
```


Détection de spam

- Sur 4 601 mails, on a pu identifier 1813 spams.
- On a également mesuré sur chacun de ces mails la présence ou absence de 57 mots.

```
> spam[1:5,c(1:8,58)]  
  make address  all num3d  our over remove internet type  
1 0.00    0.64 0.64     0 0.32 0.00    0.00    0.00 spam  
2 0.21    0.28 0.50     0 0.14 0.28    0.21    0.07 spam  
3 0.06    0.00 0.71     0 1.23 0.19    0.19    0.12 spam  
4 0.00    0.00 0.00     0 0.63 0.00    0.31    0.63 spam  
5 0.00    0.00 0.00     0 0.63 0.00    0.31    0.63 spam
```

Question

Peut-on construire à partir de ces données une méthode de **détection automatique** de spam ?

Variable à expliquer et variables explicatives

- Les exemples précédents appartiennent à une même famille de problèmes.
- Il s'agit d'expliquer une variable (notée Y) par p variables (notées X_1, \dots, X_p).

Variable à expliquer et variables explicatives

- Les exemples précédents appartiennent à une même famille de problèmes.
- Il s'agit d'expliquer une variable (notée Y) par p variables (notées X_1, \dots, X_p).

Y	X
maxO3	vent, pluie, maxO3v...
bon/mauvais payeur	sexe, revenus...
espèces de l'iris	longueur et largeur des pétales et sépales
spam ou pas spam	présence/absence de certains mots
Chiffre	Images
Mot	Courbes

Des problématiques diverses

- Apprentissage supervisé : expliquer/prédire une sortie $y \in \mathcal{Y}$ à partir d'entrées $x \in \mathcal{X}$;
- Apprentissage non supervisé : établir une typologie des observations ;
- Règles d'association : mesurer le lien entre différents produits ;
- Systèmes de recommandation : identifier les produits susceptibles d'intéresser des consommateurs.

Des problématiques diverses

- Apprentissage supervisé : expliquer/prédire une sortie $y \in \mathcal{Y}$ à partir d'entrées $x \in \mathcal{X}$;
- Apprentissage non supervisé : établir une typologie des observations ;
- Règles d'association : mesurer le lien entre différents produits ;
- Systèmes de recommandation : identifier les produits susceptibles d'intéresser des consommateurs.

Nombreuses applications

finance, économie, marketing, biologie, médecine...

Des problématiques diverses

- **Apprentissage supervisé** : expliquer/prédire une sortie $y \in \mathcal{Y}$ à partir d'entrées $x \in \mathcal{X}$;
- **Apprentissage non supervisé** : établir une typologie des observations ;
- **Règles d'association** : mesurer le lien entre différents produits ;
- **Systèmes de recommandation** : identifier les produits susceptibles d'intéresser des consommateurs.

Nombreuses applications

finance, économie, marketing, biologie, médecine...

Dans ce cours

On va se focaliser sur le problème d'apprentissage supervisé avec une sortie qualitative.

Quelques exemples

Cadre mathématique

- L'erreur de classification

- La courbe ROC

- Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

- Les **données** : $(x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$.

- Les **données** : $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$.
- **Modélisation** : ces données sont vues comme des **réalisations de variables aléatoires i.i.d** $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ de **loi inconnue**.

- Les **données** : $(x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$.
- **Modélisation** : ces données sont vues comme des **réalisations de variables aléatoires i.i.d** $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ de **loi inconnue**.
- **Objectif** : trouver une fonction $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que

$$g(x_i) \approx y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

- Les **données** : $(x_1, y_1) \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$.
- **Modélisation** : ces données sont vues comme des **réalisations de variables aléatoires i.i.d** $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ de **loi inconnue**.
- **Objectif** : trouver une fonction $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$ telle que

$$g(x_i) \approx y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Définition

On appelle **règle de classification** toute fonction $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$ qui, à une entrée $x \in \mathbb{R}^p$, renvoie une prévision $g(x) \in \mathcal{Y}$.

Quelques exemples

Cadre mathématique

- L'erreur de classification

- La courbe ROC

- Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

Règle optimale

- Il existe un grand nombre de façons de construire des règles g .
- Nécessité de se donner des critères de performance.

Règle optimale

- Il existe un grand nombre de façons de construire des règles g .
- Nécessité de se donner des critères de performance.

Définition

Etant donnée une règle de classification $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$, on appelle probabilité d'erreur ou erreur de classification de g le réel

$$L(g) = \mathbf{E}[1_{g(X) \neq Y}] = \mathbf{P}(g(X) \neq Y).$$

Règle optimale

- Il existe un grand nombre de façons de construire des règles g .
- Nécessité de se donner des critères de performance.

Définition

Etant donnée une règle de classification $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$, on appelle probabilité d'erreur ou erreur de classification de g le réel

$$L(g) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{g(X) \neq Y}] = \mathbf{P}(g(X) \neq Y).$$

Objectif

Pour ce critère de performance, le problème sera donc de construire une règle telle que sa probabilité d'erreur soit la plus petite possible.

- Problème facile d'un point de vue théorique...

- Problème facile d'un point de vue théorique...

Théorème

La règle de Bayes $g^* : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$ définie par

$$g^*(x) = \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{Y}} \mathbf{P}(Y = k | X = x)$$

est optimale au sens où $L(g^*) \leq L(g)$ pour toute règle g .

Règle de Bayes

- Problème facile d'un point de vue **théorique**...

Théorème

La **règle de Bayes** $g^* : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathcal{Y}$ définie par

$$g^*(x) = \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{Y}} \mathbf{P}(Y = k | X = x)$$

est **optimale** au sens où $L(g^*) \leq L(g)$ pour toute règle g .

Remarque

Cette règle est **naturelle** : elle consiste à affecter un nouvel individu dans le groupe k qui maximise $\mathbf{P}(Y = k | X = x)$.

Quelques exemples

Cadre mathématique

L'erreur de classification

La courbe ROC

Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

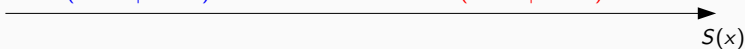
Le sur-apprentissage

Fonction de score

- On se place ici dans un cadre de **classification binaire** ($\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$).
- Mais... plutôt que de chercher une règle de prévision $g : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$, on **cherche une fonction** $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

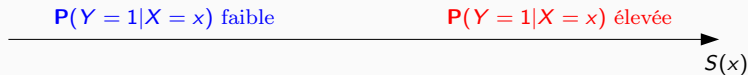
$P(Y = 1|X = x)$ faible

$P(Y = 1|X = x)$ élevée



Fonction de score

- On se place ici dans un cadre de **classification binaire** ($\mathcal{Y} = \{-1, 1\}$).
- Mais... plutôt que de chercher une règle de prévision $g : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$, on **cherche une fonction** $S : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que



- Une telle fonction est appelée **fonction de score** : plutôt que de prédire directement le groupe d'un nouvel individu $x \in \mathcal{X}$, on lui donne une **note** $S(x)$
 - **élevée** si il a des "chances" d'être dans le groupe 1 ;
 - **faible** si il a des "chances" d'être dans le groupe -1 ;

- On utilise souvent la **courbe ROC** pour **visualiser** la performance d'un score :

$$\begin{cases} x(s) = \alpha(s) = 1 - sp(s) = \mathbf{P}(S(X) > s | Y = -1) \\ y(s) = 1 - \beta(s) = se(s) = \mathbf{P}(S(X) \geq s | Y = 1) \end{cases}$$

Courbe ROC et AUC

- On utilise souvent la **courbe ROC** pour **visualiser** la performance d'un score :

$$\begin{cases} x(s) = \alpha(s) = 1 - sp(s) = \mathbf{P}(S(X) > s | Y = -1) \\ y(s) = 1 - \beta(s) = se(s) = \mathbf{P}(S(X) \geq s | Y = 1) \end{cases}$$

- On déduit de ce critère un **risque** pour les scores en considérant l'**aire sous la courbe ROC (AUC)** :

$$\mathcal{R}(S) = \text{AUC}(S).$$

Propriété

- $0.5 \leq \text{AUC}(S) \leq 1$.
- Plus l'AUC est **grand**, **meilleur** est le score.

Score parfait et score aléatoire

Remarque

Pour n'importe quel score S on a $x(-\infty) = y(-\infty) = 1$ et $x(+\infty) = y(+\infty) = 0$.

\Rightarrow la courbe ROC vit dans le carré $[0, 1]^2$.

Score parfait et score aléatoire

Remarque

Pour n'importe quel score S on a $x(-\infty) = y(-\infty) = 1$ et $x(+\infty) = y(+\infty) = 0$.

\implies la courbe ROC vit dans le carré $[0, 1]^2$.

- Un score parfait va vérifier $\alpha(s^*) = \beta(s^*) = 0$ pour une certaine valeur $s^* \implies$ sa courbe ROC passe donc par le point $(0, 1)$.

Score parfait et score aléatoire

Remarque

Pour n'importe quel score S on a $x(-\infty) = y(-\infty) = 1$ et $x(+\infty) = y(+\infty) = 0$.

\implies la courbe ROC vit dans le carré $[0, 1]^2$.

- Un **score parfait** va vérifier $\alpha(s^*) = \beta(s^*) = 0$ pour une certaine valeur $s^* \implies$ sa courbe ROC passe donc par le point $(0, 1)$.
- Un **score aléatoire** (le pire score) est un score qui note indépendamment de $Y \implies$ il vérifie donc $x(s) = y(s)$ pour tout $s \implies$ sa courbe ROC est donc la **première bissectrice**.

Score parfait et score aléatoire

Remarque

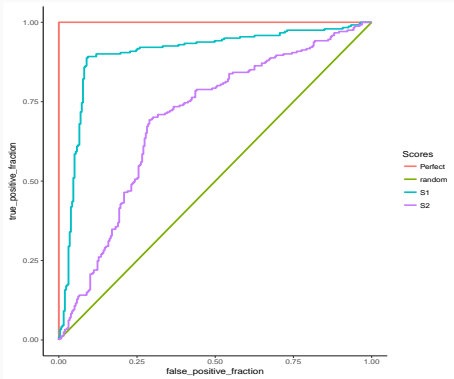
Pour n'importe quel score S on a $x(-\infty) = y(-\infty) = 1$ et $x(+\infty) = y(+\infty) = 0$.

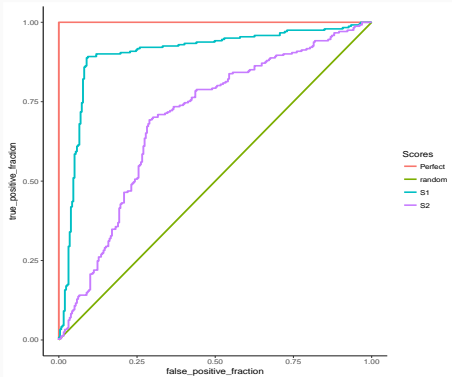
\implies la courbe ROC vit dans le carré $[0, 1]^2$.

- Un **score parfait** va vérifier $\alpha(s^*) = \beta(s^*) = 0$ pour une certaine valeur $s^* \implies$ sa courbe ROC passe donc par le point $(0, 1)$.
- Un **score aléatoire** (le pire score) est un score qui note indépendamment de $Y \implies$ il vérifie donc $x(s) = y(s)$ pour tout $s \implies$ sa courbe ROC est donc la **première bissectrice**.

AUC

$\text{AUC}(\text{score parfait})=1$ et $\text{AUC}(\text{score aléatoire})=0.5$.





```
> library(pROC)
> df1 %>% group_by(Scores) %>% summarize(auc(D,M))
## # A tibble: 4 x 2
##   Scores   'auc(D, M)'
##   <chr>      <dbl>
## 1 Perfect      1
## 2 random    0.5
## 3 S1         0.896
## 4 S2         0.699
```

- D'un point de vue **théorique**, la règle de Bayes et le score optimal se déduisent des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.

- D'un point de vue **théorique**, la règle de Bayes et le score optimal se déduisent des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.
- Problème plus **difficile** d'un point de vue **pratique**...

- D'un point de vue **théorique**, la règle de Bayes et le score optimal se déduisent des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.
- Problème plus **difficile** d'un point de vue **pratique**...

Travail statistique

- Les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ sont **inconnues**.
- Le job du statisticien sera de
 1. **Estimer** les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ à l'aide de l'échantillon $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

- D'un point de vue **théorique**, la règle de Bayes et le score optimal se déduisent des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.
- Problème plus **difficile** d'un point de vue **pratique**...

Travail statistique

- Les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ sont **inconnues**.
- Le job du statisticien sera de
 1. **Estimer** les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ à l'aide de l'**échantillon** $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.
 2. En déduire une **règle de classification** $\hat{g}_n(\cdot) = \hat{g}_n(\cdot, \mathcal{D}_n)$ telle que $L(\hat{g}_n) \approx L(g^*)$.

- D'un point de vue **théorique**, la règle de Bayes et le score optimal se déduisent des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.
- Problème plus **difficile** d'un point de vue **pratique**...

Travail statistique

- Les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ sont **inconnues**.
- Le job du statisticien sera de
 1. **Estimer** les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ à l'aide de l'**échantillon** $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.
 2. En déduire une **règle de classification** $\hat{g}_n(\cdot) = \hat{g}_n(\cdot, \mathcal{D}_n)$ telle que $L(\hat{g}_n) \approx L(g^*)$.

Exemple

Si pour une **nouvelle valeur** x , on a

$$\hat{\mathbf{P}}(Y = 1|X = x) = 0.2, \quad \hat{\mathbf{P}}(Y = 2|X = x) = 0.35, \quad \hat{\mathbf{P}}(Y = 3|X = x) = 0.45$$

- D'un point de vue **théorique**, la règle de Bayes et le score optimal se déduisent des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.
- Problème plus **difficile** d'un point de vue **pratique**...

Travail statistique

- Les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ sont **inconnues**.
- Le job du statisticien sera de
 1. **Estimer** les probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ à l'aide de l'**échantillon** $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.
 2. En déduire une **règle de classification** $\hat{g}_n(\cdot) = \hat{g}_n(\cdot, \mathcal{D}_n)$ telle que $L(\hat{g}_n) \approx L(g^*)$.

Exemple

Si pour une **nouvelle valeur** x , on a

$$\hat{\mathbf{P}}(Y = 1|X = x) = 0.2, \hat{\mathbf{P}}(Y = 2|X = x) = 0.35, \hat{\mathbf{P}}(Y = 3|X = x) = 0.45$$

alors on **prédira** $\hat{Y} = \hat{g}(x) = 3$.

Quelques exemples

Cadre mathématique

L'erreur de classification

La courbe ROC

Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

Un exemple : la règle des plus proches voisins

- Etant donné un entier $k \leq n$, elle consiste à affecter un nouvel individu x dans le **groupe majoritaire de ses plus proches voisins** :

$$\hat{g}_n(x) = \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{Y}} \sum_{i \in \text{kppv}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=k}$$

où $\text{kppv}(x) = \{i : X_i \text{ fait partie des kppv de } x \text{ parmi } \{X_1, \dots, X_n\}\}$.

Un exemple : la règle des plus proches voisins

- Etant donné un entier $k \leq n$, elle consiste à affecter un nouvel individu x dans le **groupe majoritaire de ses plus proches voisins** :

$$\hat{g}_n(x) = \operatorname{argmax}_{k \in \mathcal{Y}} \sum_{i \in \text{kppv}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=k}$$

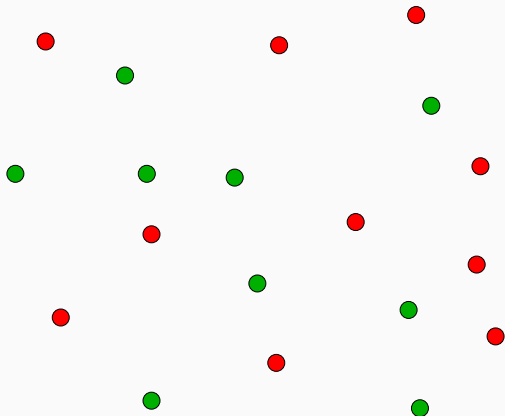
où $\text{kppv}(x) = \{i : X_i \text{ fait partie des kppv de } x \text{ parmi } \{X_1, \dots, X_n\}\}$.

Remarque importante

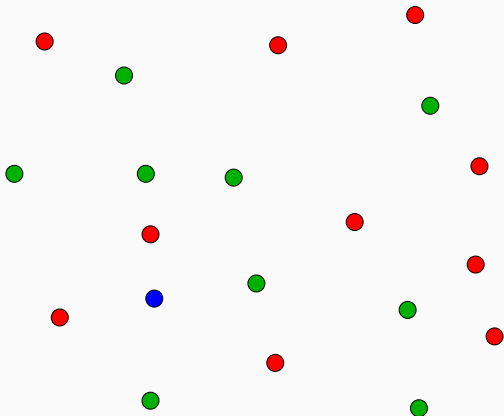
Le paramètre k est **crucial** pour la qualité de l'estimation :

1. **k grand** : estimateur « constant », variance faible, biais fort ;
2. **k petit** : « sur-ajustement », variance forte, biais faible.

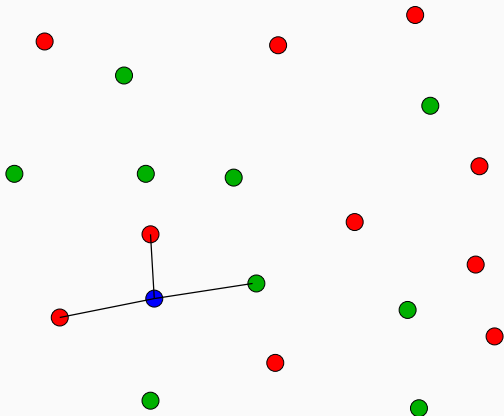
Exemple : règle des 3-ppv



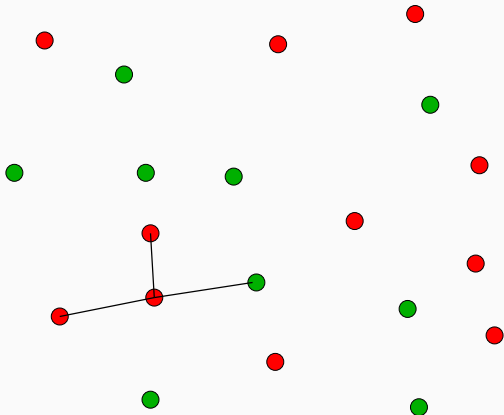
Exemple : règle des 3-ppv



Exemple : règle des 3-ppv

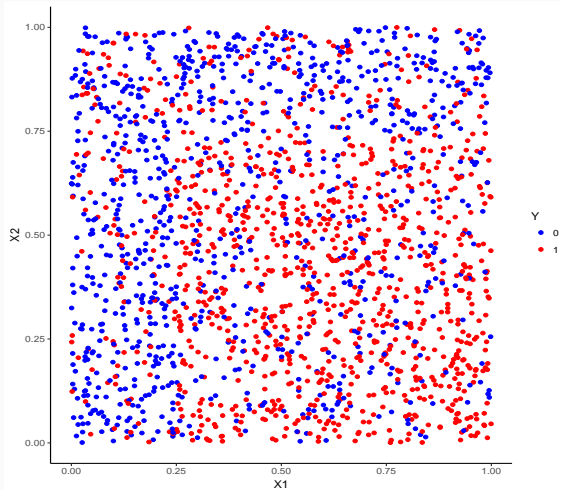


Exemple : règle des 3-ppv

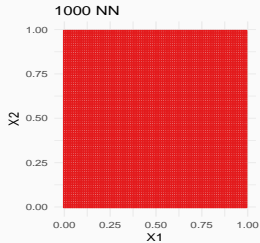
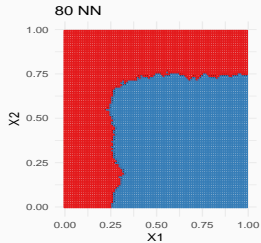
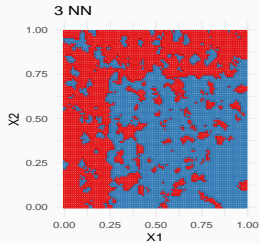
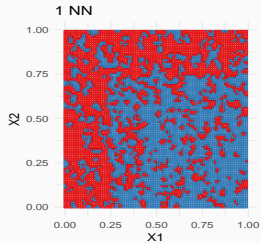


Un exemple

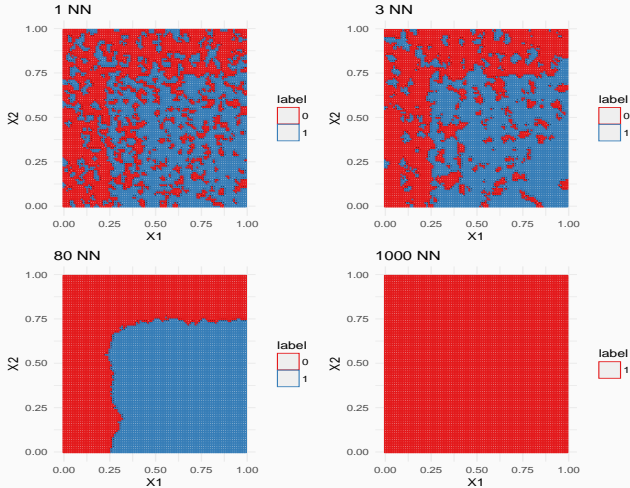
- On cherche à expliquer une variable Y binaire par 2 variables X_1 et X_2 quantitatives. On dispose de $n = 2000$ observations.



Représentation des règles des *k*ppv



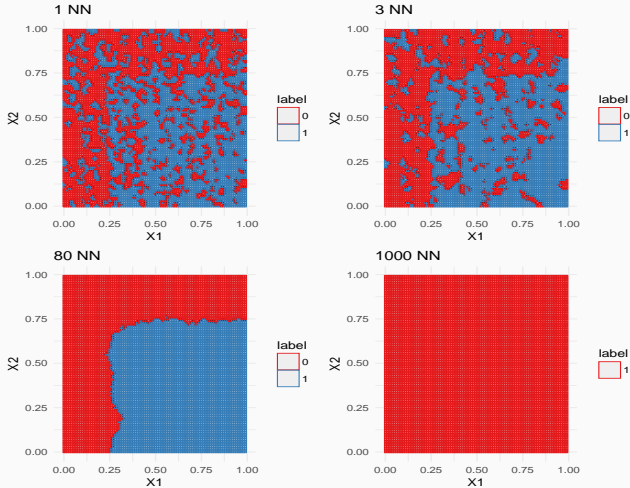
Représentation des règles des k ppv



Conclusion

On visualise bien l'importance du choix de k

Représentation des règles des k ppv



Conclusion

On visualise bien l'importance du choix de k (parce qu'on est en 2d...)

Quelques exemples

Cadre mathématique

- L'erreur de classification

- La courbe ROC

- Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

Rappels

- n observations $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathcal{Y}$.

Objectif

On cherche une **règle de prévision** $g_n(x) = g_n(x, \mathcal{D}_n)$ qui soit "proche" de l'oracle g^* défini par

$$g^* \in \operatorname{argmin}_g L(g)$$

où $L(g) = \mathbf{P}(g(X) \neq Y)$.

Rappels

- n observations $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}^p \times \mathcal{Y}$.

Objectif

On cherche une **règle de prévision** $g_n(x) = g_n(x, \mathcal{D}_n)$ qui soit "proche" de l'oracle g^* défini par

$$g^* \in \underset{g}{\operatorname{argmin}} L(g)$$

où $L(g) = \mathbf{P}(g(X) \neq Y)$.

Question

Etant donné un algorithme g_n , **que vaut son erreur**

$$L(g_n) = \mathbf{P}(g_n(X) \neq Y) ?$$

Risque empirique

- La loi de (X, Y) étant **inconnue** en pratique, il est **impossible de calculer** $L(g_n) = \mathbf{P}(g_n(X) \neq Y) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{g_n(X) \neq Y}]$.

Risque empirique

- La loi de (X, Y) étant **inconnue** en pratique, il est **impossible de calculer** $L(g_n) = \mathbf{P}(g_n(X) \neq Y) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{g_n(X) \neq Y}]$.
- **Première approche** : $L(g_n)$ étant une espérance, on peut l'estimer (LGN) par sa **version empirique**

$$L_n(g_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{g_n(X_i) \neq Y_i}.$$

Risque empirique

- La loi de (X, Y) étant **inconnue** en pratique, il est **impossible de calculer** $L(g_n) = \mathbf{P}(g_n(X) \neq Y) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{g_n(X) \neq Y}]$.
- **Première approche** : $L(g_n)$ étant une espérance, on peut l'estimer (LGN) par sa **version empirique**

$$L_n(g_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{g_n(X_i) \neq Y_i}.$$

Problème

- L'échantillon \mathcal{D}_n a **déjà été utilisé** pour construire l'algorithme de prévision $g_n \implies$ La LGN ne peut donc s'appliquer !
- **Conséquence** : $L_n(g_n)$ conduit souvent à une **sous-estimation** de $L(g_n)$.

Risque empirique

- La loi de (X, Y) étant **inconnue** en pratique, il est **impossible de calculer** $L(g_n) = \mathbf{P}(g_n(X) \neq Y) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{g_n(X) \neq Y}]$.
- **Première approche** : $L(g_n)$ étant une espérance, on peut l'estimer (LGN) par sa **version empirique**

$$L_n(g_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{g_n(X_i) \neq Y_i}.$$

Problème

- L'échantillon \mathcal{D}_n a **déjà été utilisé** pour construire l'algorithme de prévision $g_n \Rightarrow$ La LGN ne peut donc s'appliquer !
- **Conséquence** : $L_n(g_n)$ conduit souvent à une **sous-estimation** de $L(g_n)$.

Une solution

Utiliser des méthodes de type **validation croisée** ou **bootstrap**.

Apprentissage - Validation ou validation hold out

- L'approche consiste à séparer l'échantillon \mathcal{D}_n en :
 1. un échantillon d'apprentissage $\mathcal{D}_{n,app}$ pour construire la règle g_n ;
 2. un échantillon de validation ou test $\mathcal{D}_{n,test}$ pour estimer le risque de g_n .

Apprentissage - Validation ou validation hold out

- L'approche consiste à séparer l'échantillon \mathcal{D}_n en :
 1. un **échantillon d'apprentissage** $\mathcal{D}_{n,app}$ pour construire la règle g_n ;
 2. un **échantillon de validation** ou **test** $\mathcal{D}_{n,test}$ pour estimer le risque de g_n .

Algorithme

Entrées. \mathcal{D}_n : données, $\{\mathcal{A}, \mathcal{V}\}$: partition de $\{1, \dots, n\}$.

1. Construire l'algorithme de prédiction sur $\mathcal{D}_{n,app} = \{(X_i, Y_i) : i \in \mathcal{A}\}$, on le note $g_{n,app}$;
2. Calculer $\hat{L}_n(g_{n,app}) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \sum_{i \in \mathcal{V}} \mathbf{1}_{g_{n,app}(X_i) \neq Y_i}$.

Apprentissage - Validation ou validation hold out

- L'approche consiste à séparer l'échantillon \mathcal{D}_n en :
 1. un **échantillon d'apprentissage** $\mathcal{D}_{n,app}$ pour construire la règle g_n ;
 2. un **échantillon de validation** ou **test** $\mathcal{D}_{n,test}$ pour estimer le risque de g_n .

Algorithme

Entrées. \mathcal{D}_n : données, $\{\mathcal{A}, \mathcal{V}\}$: partition de $\{1, \dots, n\}$.

1. Construire l'algorithme de prédiction sur $\mathcal{D}_{n,app} = \{(X_i, Y_i) : i \in \mathcal{A}\}$, on le note $g_{n,app}$;
2. Calculer $\hat{L}_n(g_{n,app}) = \frac{1}{|\mathcal{V}|} \sum_{i \in \mathcal{V}} \mathbf{1}_{g_{n,app}(X_i) \neq Y_i}$.

Commentaires

Nécessite d'avoir un **nombre suffisant d'observations** dans

1. $\mathcal{D}_{n,app}$ pour bien **ajuster l'algorithme de prévision** ;
2. $\mathcal{D}_{n,test}$ pour bien **estimer l'erreur de l'algorithme**.

Validation croisée K -blocs

- **Principe** : répéter l'algorithme apprentissage/validation sur différentes partitions.

Validation croisée K -blocs

- **Principe** : répéter l'algorithme apprentissage/validation sur différentes partitions.

Algorithme - CV

Entrées. \mathcal{D}_n : données, K un entier qui divise n ;

1. Construire une partition $\{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_K\}$ de $\{1, \dots, n\}$;
2. Pour $k = 1, \dots, K$
 - 2.1 $\mathcal{I}_{app} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_{test} = \mathcal{I}_k$;
 - 2.2 Construire l'algorithme de prédiction sur $\mathcal{D}_{n,app} = \{(X_i, Y_i) : i \in \mathcal{I}_{app}\}$, on le note $g_{n,k}$;
 - 2.3 En déduire $g_n(X_i) = g_{n,k}(X_i)$ pour $i \in \mathcal{I}_{test}$;

Retourner

$$\hat{L}_n(g_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{g_n(X_i) \neq Y_i}.$$

- Plus adapté que la technique apprentissage/validation lorsqu'on a **peu d'observations**.
- Le **choix de K** doit être fait par l'utilisateur (souvent $K = 10$).

Leave one out

- Lorsque $K = n$, on parle de validation croisée **leave one out** ;
- Le risque est alors estimé par

$$\hat{L}_n(g_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{g_n^i(X_i) \neq Y_i}$$

où g_n^i désigne l'algorithme de prévision construit sur \mathcal{D}_n **amputé de la i -ème observation**.

Exemple i

- On estime les probabilités d'erreur pour les règles de 1, 10, 20 et 95 ppv.

```
> dim(donnees)
[1] 500  3
> head(donnees)
      X1      X2 Y
1 0.1328209 0.3843303 0
2 0.5311487 0.4381712 0
3 0.9785594 0.4039880 1
4 0.5988594 0.3720228 1
5 0.3109124 0.4178881 0
6 0.5964184 0.1043874 1
```

Exemple ii

1. On sépare les données en 2

```
> set.seed(1234)
> ind.app <- sample(500,300)
> dapp <- donnees[ind.app,]
> dtest <- donnees[-ind.app,]
```

2. On ajuste les 4 modèles sur les données d'apprentissage uniquement et on calcule les prévisions pour les données test.

```
> library(class)
> m1 <- knn(train=dapp[,1:2],test=dtest[,1:2],cl=dapp$Y,k=1)
> m10 <- knn(train=dapp[,1:2],test=dtest[,1:2],cl=dapp$Y,k=10)
> m20 <- knn(train=dapp[,1:2],test=dtest[,1:2],cl=dapp$Y,k=20)
> m95 <- knn(train=dapp[,1:2],test=dtest[,1:2],cl=dapp$Y,k=95)
```

3. On compare les **prévisions** aux **valeurs observées** pour en déduire les **estimations de la probabilité d'erreur** :

```
> mean(m1!=dtest$Y)
[1] 0.155
> mean(m10!=dtest$Y)
[1] 0.12
> mean(m20!=dtest$Y)
[1] 0.135
> mean(m95!=dtest$Y)
[1] 0.16
```

Package Caret

- Il existe des packages (tels que **caret**) dédiés à l'estimation de critères d'erreur (et/ou au calibrage de paramètres) :

```
> library(caret)
> ctrl <- trainControl(method="cv")
> gr <- data.frame(k=c(1,10,20,95))
> a <- train(Y~.,data=donnees,method="knn",tuneGrid=gr,trControl=ctrl)
> a
```

k-Nearest Neighbors

500 samples

2 predictor

2 classes: '0', '1'

No pre-processing

Resampling: Cross-Validated (10 fold)

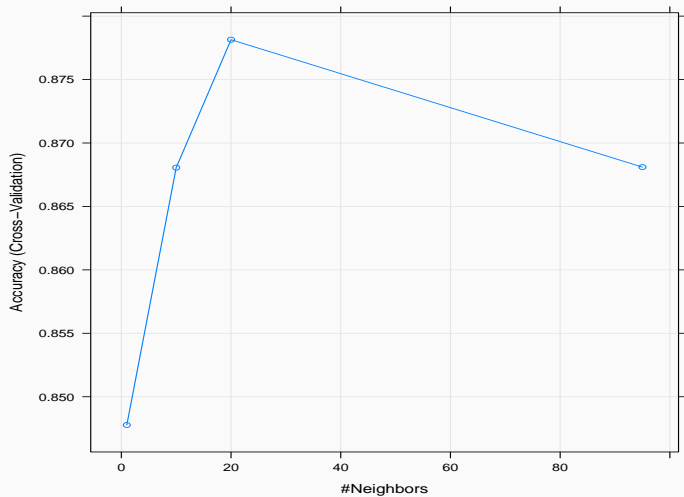
Summary of sample sizes: 450, 449, 451, 449, 451, 450, ...

Resampling results across tuning parameters:

k	Accuracy	Kappa
1	0.8477719	0.6901196
10	0.8680576	0.7329527
20	0.8781425	0.7542075
95	0.8681000	0.7300775

Package Caret

```
> plot(a)
```



Quelques exemples

Cadre mathématique

- L'erreur de classification

- La courbe ROC

- Un exemple : l'algorithme des plus proches voisins

Estimation de l'erreur

Le sur-apprentissage

- La plupart des algorithmes de prévision dépendent d'un paramètre λ .
- Ce paramètre représente souvent une mesure de la complexité du modèle.

- La plupart des algorithmes de prévision dépendent d'un paramètre λ .
- Ce paramètre représente souvent une mesure de la complexité du modèle.

Complexité

- λ petit \implies modèle restrictif \implies mauvais ajustement \implies biais \nearrow ,
variance \searrow

- La plupart des algorithmes de prévision dépendent d'un paramètre λ .
- Ce paramètre représente souvent une mesure de la complexité du modèle.

Complexité

- λ petit \implies modèle restrictif \implies mauvais ajustement \implies biais \nearrow , variance \searrow
- λ grand \implies modèle flexible (complexe) \implies sur-apprentissage (ou overfitting) \implies biais \searrow , variance \nearrow

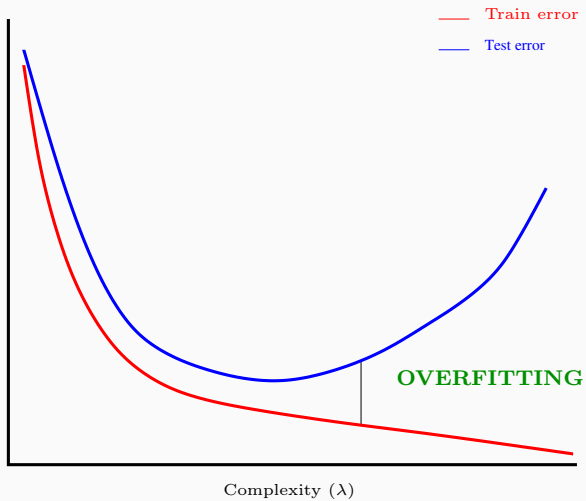
- La plupart des algorithmes de prévision dépendent d'un paramètre λ .
- Ce paramètre représente souvent une mesure de la complexité du modèle.

Complexité

- λ petit \implies modèle restrictif \implies mauvais ajustement \implies biais \nearrow , variance \searrow
- λ grand \implies modèle flexible (complexe) \implies sur-apprentissage (ou overfitting) \implies biais \searrow , variance \nearrow

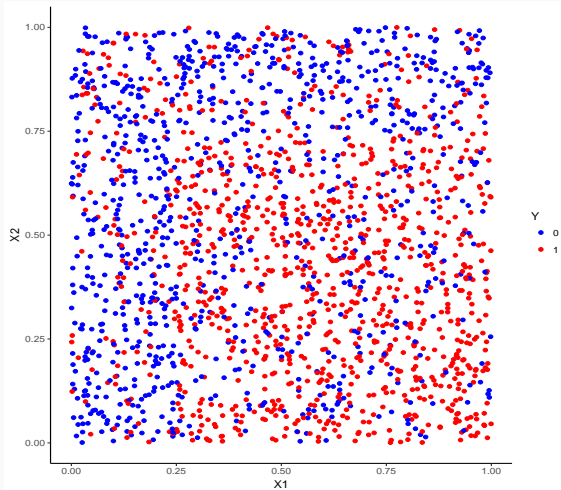
Overfitting

Très bon ajustement sur les données d'apprentissage (i.e. $g(X_i) = Y_i$)
mais faible performance prédictive sur des nouveaux individus.

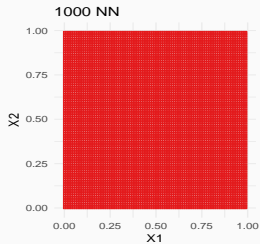
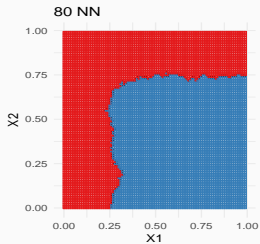
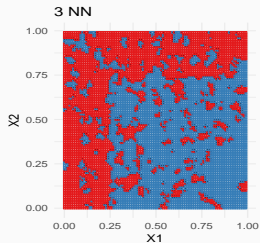
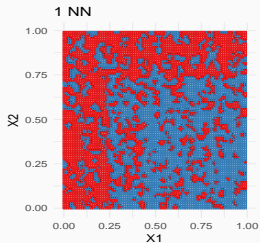


Un exemple

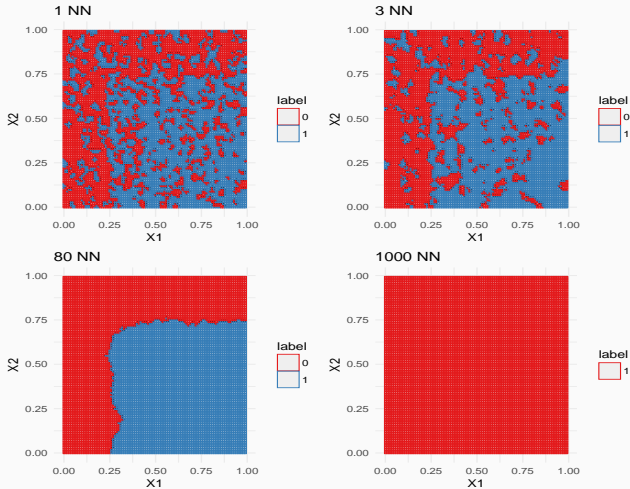
- On cherche à expliquer une variable Y binaire par 2 variables X_1 et X_2 quantitatives. On dispose de $n = 2000$ observations.



Overfitting pour les k -ppv



Overfitting pour les k -ppv



Conclusion

On sur-apprend pour les petites valeurs de k .

Deuxième partie II

L'analyse discriminante

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

Analyse discriminante quadratique

Régularisation

- **Modèle de référence** permettant d'expliquer une variable qualitative Y par plusieurs variables X_1, \dots, X_p .

- **Modèle de référence** permettant d'expliquer une variable qualitative Y par plusieurs variables X_1, \dots, X_p .
- Approche **modèle** mais aussi **géométrique** pour caractériser cette méthode.

- **Modèle de référence** permettant d'expliquer une variable qualitative Y par plusieurs variables X_1, \dots, X_p .
- Approche **modèle** mais aussi **géométrique** pour caractériser cette méthode.
- Références : [[Saporta, 2011](#)] et [[Hastie et al., 2009](#)].

- n -échantillon i.i.d $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ avec X_i à valeurs dans \mathbb{R}^p et Y_i dans $\mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$.
- On veut **estimer** $P(Y = k|X = x), k = 1, \dots, K$.

Notations

- n -échantillon i.i.d $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ avec X_i à valeurs dans \mathbb{R}^p et Y_i dans $\mathcal{Y} = \{1, \dots, K\}$.
- On veut **estimer** $\mathbf{P}(Y = k|X = x), k = 1, \dots, K$.

Notations

On note :

- $f_k(x), k = 1, \dots, K$ les densités des lois de $X|Y = k$;
- $f(x)$ la densité de X .
- $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$ les probabilités **a priori** d'appartenance aux groupes.

Théorème de Bayes

Les probabilités **a posteriori** d'appartenance aux groupes $1, \dots, K$ sont données par

$$\mathbf{P}(Y = k|X = x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{\ell=1}^K \pi_{\ell} f_{\ell}(x)}.$$

Théorème de Bayes

Les probabilités **a posteriori** d'appartenance aux groupes $1, \dots, K$ sont données par

$$\mathbf{P}(Y = k|X = x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{\ell=1}^K \pi_{\ell} f_{\ell}(x)}.$$

Conséquence

Une bonne estimation des densités de $X|Y = k$ nous donnera une bonne estimation des probabilités $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$.

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

Analyse discriminante quadratique

Régularisation

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

Classification

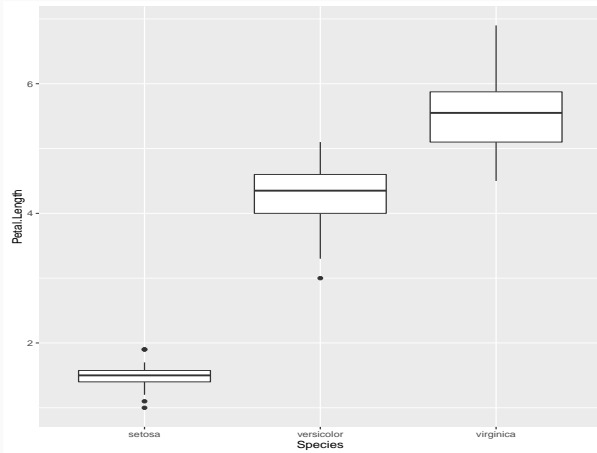
Analyse discriminante quadratique et régularisation

Analyse discriminante quadratique

Régularisation

- On commence d'abord par expliquer l'espèce des iris par la longueur des pétales **uniquement**.
- On peut visualiser ce problème à l'aide d'un **boxplot**.

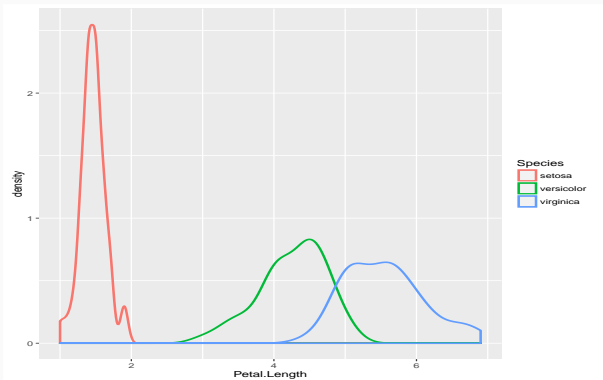
```
> ggplot(iris)+aes(x=Species,y=Petal.Length)+geom_boxplot()+theme_bw()
```



Représentation sous forme de densités

- La fonction `geom_density` permet de représenter des estimateurs des densités conditionnelles des lois conditionnelles de $X|Y = j, j = 1, 2, 3$.

```
> ggplot(iris)+aes(x=Petal.Length,color=Species)+geom_density(size=1)
```



- Les trois densités conditionnelles du graphe précédent ressemblent à des densités **gaussiennes**.

Un modèle

- Les trois densités conditionnelles du graphe précédent ressemblent à des densités **gaussiennes**.
- Si on désigne par X la variable (quantitative) **Petal.Length** et par Y la variable (qualitative) **Species**, on peut être tenté de **supposer** que les lois de X sachant $Y = k$ sont des lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma^2)$, $k = 1, 2, 3$.

- Les trois densités conditionnelles du graphe précédent ressemblent à des densités **gaussiennes**.
- Si on désigne par X la variable (quantitative) **Petal.Length** et par Y la variable (qualitative) **Species**, on peut être tenté de **supposer** que les lois de X sachant $Y = k$ sont des lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma^2)$, $k = 1, 2, 3$.
- La densité de **X sachant $Y = k$** s'écrit alors

$$f_{X|Y=k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu_k)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Estimation des paramètres inconnus

- Pour calculer les probabilités a posteriori $P(Y = k|X = x)$ il faut estimer les paramètres inconnus du modèle :

Estimation des paramètres inconnus

- Pour calculer les probabilités a posteriori $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ il faut estimer les paramètres inconnus du modèle :
 - Les paramètres μ_k et σ^2 des lois gaussiennes ;
 - Les probabilités a priori $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

Estimation des paramètres inconnus

- Pour calculer les probabilités a posteriori $\mathbf{P}(Y = k|X = x)$ il faut estimer les paramètres inconnus du modèle :
 - Les paramètres μ_k et σ^2 des lois gaussiennes ;
 - Les probabilités a priori $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

Les estimateurs

Ces quantités sont naturellement estimées à partir des données $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ selon

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^K \sum_{i: Y_i=k} (X_i - \hat{\mu}_k)^2$$

Estimation des paramètres inconnus

- Pour calculer les probabilités a posteriori $P(Y = k|X = x)$ il faut estimer les paramètres inconnus du modèle :
 - Les paramètres μ_k et σ^2 des lois gaussiennes ;
 - Les probabilités a priori $\pi_k = P(Y = k)$.

Les estimateurs

Ces quantités sont naturellement estimées à partir des données $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ selon

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^K \sum_{i: Y_i=k} (X_i - \hat{\mu}_k)^2$$

$$\hat{\pi}_k = \frac{n_k}{n} \quad \text{avec} \quad n_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i=k\}}$$

Exemple sur R

```
> model <- lda(Species~Petal.Length,data=iris)
```

```
> model
```

Call:

```
lda(Species ~ Petal.Length, data = iris)
```

Prior probabilities of groups:

	setosa	versicolor	virginica
	0.3333333	0.3333333	0.3333333

Group means:

	Petal.Length
setosa	1.462
versicolor	4.260
virginica	5.552

Coefficients of linear discriminants:

	LD1
Petal.Length	2.323774

Prévisions

- **predict** permet de **prédire** l'espèce de nouveaux iris uniquement à partir de leur longueur de pétales

```
> don_pred
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
          5.0         3.6         1.4         0.2
          5.5         2.4         3.7         1.0
          7.1         3.0         5.9         2.1
          6.7         3.3         5.7         2.5
```

Prévisions

- **predict** permet de **prédire** l'espèce de nouveaux iris uniquement à partir de leur longueur de pétales

```
> don_pred
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
           5.0           3.6           1.4           0.2
           5.5           2.4           3.7           1.0
           7.1           3.0           5.9           2.1
           6.7           3.3           5.7           2.5
```

```
> predict(model,newdata=don_pred)
$class
[1] setosa      versicolor virginica  virginica
Levels: setosa versicolor virginica
$posterior
      setosa  versicolor  virginica
1.000000e+00 2.589892e-10 6.170197e-21
3.123152e-06 9.997752e-01 2.217125e-04
1.113402e-23 9.723296e-04 9.990277e-01
9.198362e-22 3.913109e-03 9.960869e-01
```


Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

Analyse discriminante quadratique

Régularisation

- On souhaite maintenant expliquer l'espèce des iris par les 4 variables explicatives Sepal.Length, Sepal.Width, Petal.Length, Petal.Width. On notera X_1, X_2, X_3, X_4 ces 4 variables et $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

- On souhaite maintenant **expliquer** l'espèce des iris par les **4 variables explicatives** Sepal.Length, Sepal.Width, Petal.Length, Petal.Width. On notera X_1, X_2, X_3, X_4 ces 4 variables et $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.
- La méthodologie est **identique** au cas précédent :

- On souhaite maintenant **expliquer** l'espèce des iris par les **4 variables explicatives** Sepal.Length, Sepal.Width, Petal.Length, Petal.Width. On notera X_1, X_2, X_3, X_4 ces 4 variables et $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.
- La méthodologie est **identique** au cas précédent :
 1. On modélise les lois conditionnelles de $X|Y = k$ par des lois gaussiennes **multivariées**.
 2. On utilise la **formule de Bayes** pour en déduire la loi de $Y|X = x$.

LDA : cas général

- La loi de $X|Y = k$ est modélisée par une loi normale multivariée $\mathcal{N}(\mu_k, \Sigma)$ où $\mu_k \in \mathbb{R}^p$ et Σ est une matrice $p \times p$ définie positive. La densité de $X|Y = k$ est alors donnée par :

$$f_{X|Y=k}(x) = \frac{1}{(2\pi \det(\Sigma))^{p/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu_k)^t \Sigma^{-1} (x - \mu_k) \right).$$

LDA : cas général

- La loi de $X|Y = k$ est modélisée par une loi normale multivariée $\mathcal{N}(\mu_k, \Sigma)$ où $\mu_k \in \mathbb{R}^p$ et Σ est une matrice $p \times p$ définie positive. La densité de $X|Y = k$ est alors donnée par :

$$f_{X|Y=k}(x) = \frac{1}{(2\pi \det(\Sigma))^{p/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x - \mu_k)^t \Sigma^{-1} (x - \mu_k) \right).$$

- La loi conditionnelle de $Y|X = x$ se déduit de la formule de Bayes

$$\mathbf{P}(Y = k|X = x) = \frac{\pi_k f_{X|Y=k}(x)}{f(x)}$$

où $f(x)$, la densité de X , se déduit des densités conditionnelles $f_{X|Y=k}(x)$ et des probabilités a priori $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

Estimations

- Ici encore il faut **estimer les paramètres inconnus** du modèle :

Estimations

- Ici encore il faut **estimer les paramètres inconnus** du modèle :
 - les vecteurs $\mu_k, k = 1, \dots, K$ et la matrice de variance-covariance Σ des lois gaussiennes ;
 - les probabilités a priori $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

Estimations

- Ici encore il faut **estimer les paramètres inconnus** du modèle :
 - les vecteurs μ_k , $k = 1, \dots, K$ et la matrice de variance-covariance Σ des lois gaussiennes ;
 - les probabilités a priori $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

Les estimateurs

Ces quantités sont naturellement estimées à partir des données $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ selon

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} X_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n - K} \sum_{k=1}^K \sum_{i: Y_i=k} (X_i - \hat{\mu}_k)(X_i - \hat{\mu}_k)^t$$

Estimations

- Ici encore il faut **estimer les paramètres inconnus** du modèle :
 - les vecteurs μ_k , $k = 1, \dots, K$ et la matrice de variance-covariance Σ des lois gaussiennes ;
 - les probabilités a priori $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$.

Les estimateurs

Ces quantités sont naturellement estimées à partir des données $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ selon

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} X_i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{n-K} \sum_{k=1}^K \sum_{i: Y_i=k} (X_i - \hat{\mu}_k)(X_i - \hat{\mu}_k)^t$$

$$\hat{\pi}_k = \frac{n_k}{n} \quad \text{avec} \quad n_k = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{Y_i=k\}}.$$

Exemple sur R

```
> model_complet<- lda(Species~.,data=iris)
> model_complet
Call:
lda(Species ~ ., data = iris)
```

Prior probabilities of groups:

	setosa	versicolor	virginica
	0.3333333	0.3333333	0.3333333

Group means:

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
setosa	5.006	3.428	1.462	0.246
versicolor	5.936	2.770	4.260	1.326
virginica	6.588	2.974	5.552	2.026

Prévisions

- La fonction `predict` permet de `prédire` le groupe de nouveaux individus :

```
> don_pred
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
1          5.0          3.6          1.4          0.2
2          5.5          2.4          3.7          1.0
3          7.1          3.0          5.9          2.1
4          6.7          3.3          5.7          2.5
```

Prévisions

- La fonction **predict** permet de **prédire** le groupe de nouveaux individus :

```
> don_pred
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
          5.0          3.6          1.4          0.2
          5.5          2.4          3.7          1.0
          7.1          3.0          5.9          2.1
          6.7          3.3          5.7          2.5
```

```
> predict(model_complet,newdata=don_pred)
$class
[1] setosa      versicolor virginica  virginica
Levels: setosa versicolor virginica
```

```
$posterior
      setosa  versicolor  virginica
5  1.000000e+00 1.637387e-22 1.082605e-42
82 9.648075e-16 9.999997e-01 3.266704e-07
103 1.231264e-42 2.592826e-05 9.999741e-01
145 4.048249e-46 2.524984e-07 9.999997e-01
```

Règle de classification

- La manière la plus naturelle de classer une nouvelle observation $x \in \mathbb{R}^p$ est de **choisir le groupe qui maximise**

$$P(Y = k|X = x).$$

- Comparons les valeurs de ces probabilités pour les groupes k et ℓ :

$$\begin{aligned}\log \frac{P(Y = k|X = x)}{P(Y = \ell|X = x)} &= \log \frac{f_k(x)}{f_\ell(x)} + \log \frac{\pi_k}{\pi_\ell} \\ &= \log \frac{\pi_k}{\pi_\ell} - \frac{1}{2}(\mu_k + \mu_\ell)^t \Sigma^{-1}(\mu_k - \mu_\ell) \\ &\quad + x^t \Sigma^{-1}(\mu_k - \mu_\ell)\end{aligned}\tag{1}$$

Règle de classification

- La manière la plus naturelle de classer une nouvelle observation $x \in \mathbb{R}^p$ est de **choisir le groupe qui maximise**

$$P(Y = k|X = x).$$

- Comparons les valeurs de ces probabilités pour les groupes k et ℓ :

$$\begin{aligned}\log \frac{P(Y = k|X = x)}{P(Y = \ell|X = x)} &= \log \frac{f_k(x)}{f_\ell(x)} + \log \frac{\pi_k}{\pi_\ell} \\ &= \log \frac{\pi_k}{\pi_\ell} - \frac{1}{2}(\mu_k + \mu_\ell)^t \Sigma^{-1}(\mu_k - \mu_\ell) \\ &\quad + x^t \Sigma^{-1}(\mu_k - \mu_\ell)\end{aligned}\tag{1}$$

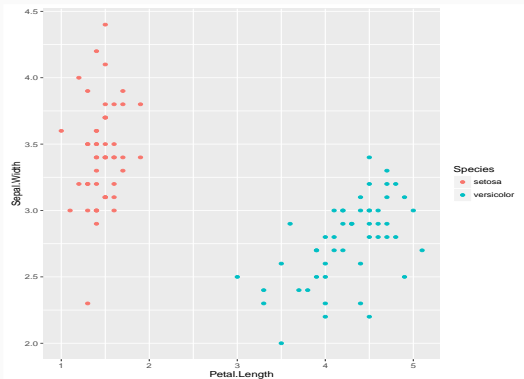
Conclusion

La **frontière** entre les classes k et ℓ est **linéaire** en x !

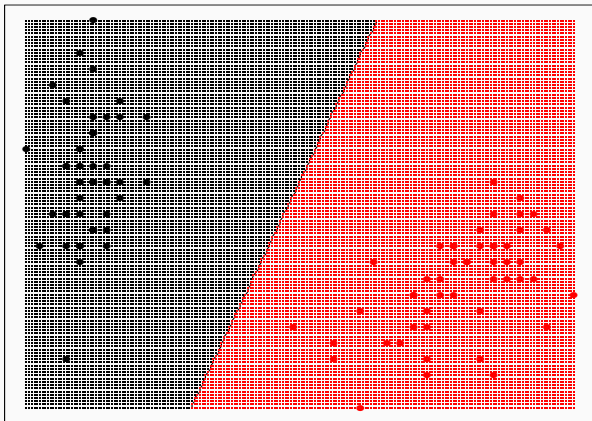
Exemple

- **Frontière** LDA entre "Setosa" et "Versicolor" avec 2 variables

```
> iris1 <- iris %>% filter(Species%in%c("setosa","versicolor")) %>%  
  select(Petal.Length,Sepal.Width,Species)  
> ggplot(iris1)+aes(x=Petal.Length,y=Sepal.Width,color=Species)+geom_point()
```



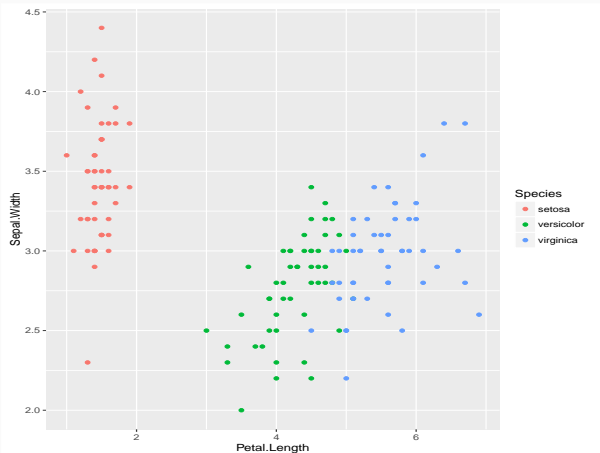
Frontière deux classes



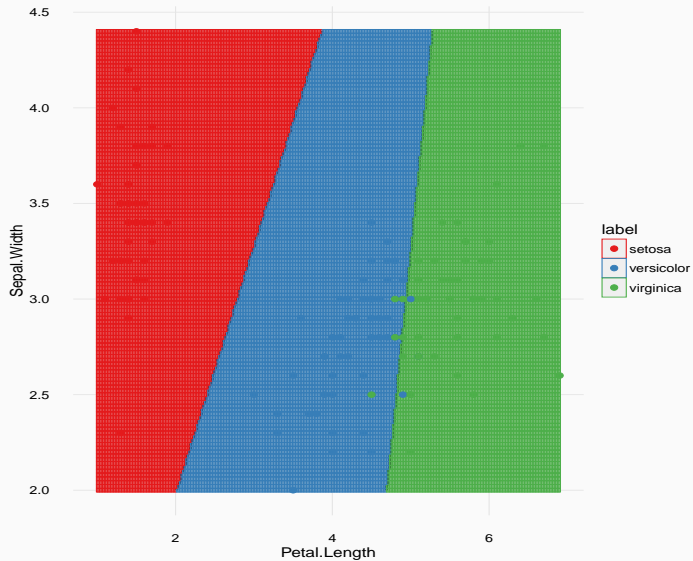
Exemple - 3 classes

- On fait de même pour les 3 espèces (3 classes).

```
> ggplot(iris)+aes(x=Petal.Length,y=Sepal.Width,color=Species)+geom_point()
```



Frontière trois classes



Fonctions linéaires discriminantes

Définition

On appelle **fonctions linéaires discriminantes** les fonctions

$$\delta_k(x) = x^t \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^t \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Fonctions linéaires discriminantes

Définition

On appelle **fonctions linéaires discriminantes** les fonctions

$$\delta_k(x) = x^t \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^t \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Propriété

D'après (1),

$$\operatorname{argmax}_k \mathbf{P}(Y = k | X = x) = \operatorname{argmax}_k \delta_k(x).$$

Fonctions linéaires discriminantes

Définition

On appelle **fonctions linéaires discriminantes** les fonctions

$$\delta_k(x) = x^t \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^t \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Propriété

D'après (1),

$$\operatorname{argmax}_k \mathbf{P}(Y = k | X = x) = \operatorname{argmax}_k \delta_k(x).$$

Conclusion

Choisir le groupe qui **maximise les probabilités a posteriori** revient à choisir le groupe qui **maximise les fonctions linéaires discriminantes**.

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

Analyse discriminante quadratique

Régularisation

- LDA a été présentée comme une méthode de classification **restreinte à un modèle gaussien**.

- LDA a été présentée comme une méthode de classification **restreinte à un modèle gaussien**.
- La popularité de cette approche est également (surtout ?) due à une **vision géométrique** de cette méthode.

- LDA a été présentée comme une méthode de classification **restreinte à un modèle gaussien**.
- La popularité de cette approche est également (surtout ?) due à une **vision géométrique** de cette méthode.
- L'analyse discriminante linéaire s'interprète également comme une méthode de **réduction de dimension** (démarche similaire à l'ACP).

- LDA a été présentée comme une méthode de classification **restreinte à un modèle gaussien**.
- La popularité de cette approche est également (surtout ?) due à une **vision géométrique** de cette méthode.
- L'analyse discriminante linéaire s'interprète également comme une méthode de **réduction de dimension** (démarche similaire à l'ACP).
- C'est également un outil de **visualisation de données**.

- **Données** : $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \{1, \dots, K\}$.
- **Problème** : expliquer les sorties y_i par les entrées x_i .

- **Données** : $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \{1, \dots, K\}$.
- **Problème** : expliquer les sorties y_i par les entrées x_i .
- Traditionnellement l'**analyse discriminante** se présente selon deux aspects :
 1. **objectif prédictif** (partie précédente) : il s'agit de prédire le groupe d'un nouvel individu $x \in \mathbb{R}^p$;
 2. **objectif descriptif** (cette partie) : il s'agit de trouver des sous-espaces de faibles dimensions tels que les observations projetées sur ces sous-espaces soient **au mieux** séparées.

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

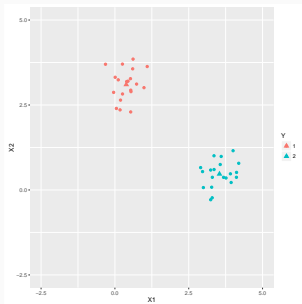
Analyse discriminante quadratique

Régularisation

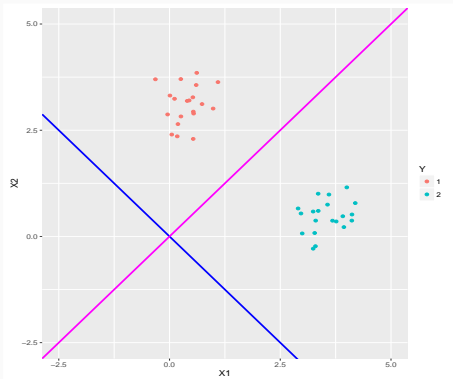
Notations

- **Données** : $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}^p$ et $y_i \in \{1, \dots, K\}$.
- g le centre de gravité des données $g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.
- g_k le centre de gravité du groupe k :

$$g_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i:y_i=k} x_i.$$



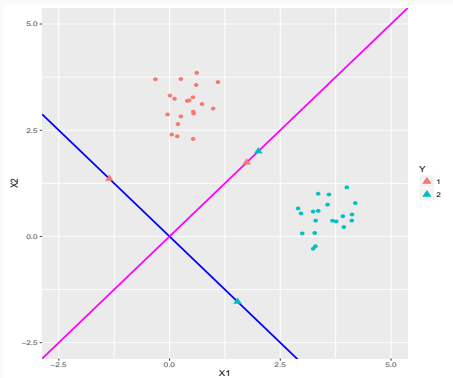
Le problème



Le problème

Trouver un sous espace de dimension 1 tel que les observations projetées sur ce sous espace soient **au mieux** séparées.

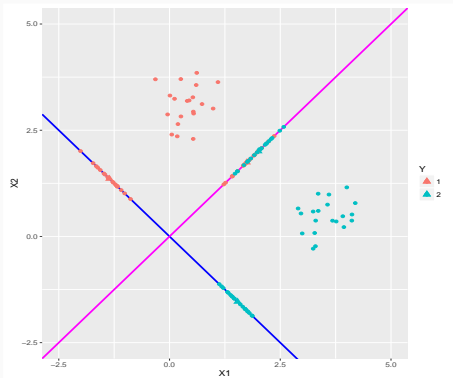
Le problème



Le problème

Trouver un sous espace de dimension 1 tel que les observations projetées sur ce sous espace soient **au mieux** séparées.

Le problème



Le problème

Trouver un sous espace de dimension 1 tel que les observations projetées sur ce sous espace soient **au mieux** séparées.

Axe discriminant

Chercher une combinaison linéaire $a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ telle que

1. les centres de gravité de chaque groupe projetés sur cet axe soient **au mieux séparés** ;
2. la distance entre les observations projetées et leur centre de gravité projeté soit **minimale**.

L'approche de Fisher

Axe discriminant

Chercher une combinaison linéaire $a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ telle que

1. les centres de gravité de chaque groupe projetés sur cet axe soient **au mieux séparés** ;
2. la distance entre les observations projetées et leur centre de gravité projeté soit **minimale**.

Cette approche revient à

- **maximiser** la distance (ou variance) **inter-classes** ;
- **minimiser** la distance (ou variance) **intra-classes**.

Décomposition de la variance

- Variance totale

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - g)(X_i - g)^t.$$

- Variance inter-classes (between)

$$B = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k (g_k - g)(g_k - g)^t.$$

- Variance intra-classes (within)

$$W = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k V_k \quad \text{avec} \quad V_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} (X_i - g_k)(X_i - g_k)^t.$$

Décomposition de la variance

- Variance totale

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - g)(X_i - g)^t.$$

- Variance inter-classes (between)

$$B = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k (g_k - g)(g_k - g)^t.$$

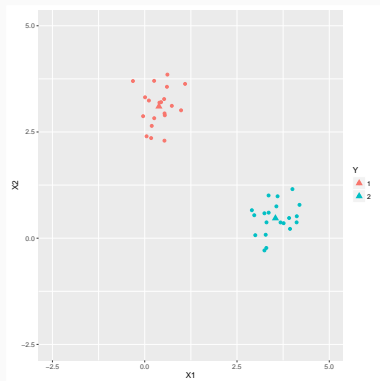
- Variance intra-classes (within)

$$W = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k V_k \quad \text{avec} \quad V_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} (X_i - g_k)(X_i - g_k)^t.$$

Propriété

$$V = B + W$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 2.63 & -2.04 \\ -2.04 & 1.90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.49 & -2.08 \\ -2.08 & 1.73 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.14 & 0.04 \\ 0.03 & 0.17 \end{pmatrix}$$

Projection - Rappels

- Le projeté d'un vecteur u sur la droite engendrée par un vecteur v est

$$\pi_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

- Si v est de norme 1, alors

$$\|\pi_v(u)\|^2 = v^t u u^t v.$$

Variances projetées

Soit $a \in \mathbb{R}^p$ de norme 1 :

- Variance totale sur $\text{vect}(a)$:

$$V(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\pi_a(X_i) - \pi_a(g)\|^2 = a^t V a.$$

- Variance inter sur $\text{vect}(a)$:

$$B(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k \|\pi_a(g_k) - \pi_a(g)\|^2 = a^t B a.$$

- Variance intra sur $\text{vect}(a)$:

$$W(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \sum_{i: Y_i=K} \|\pi_a(X_i) - \pi_a(g_k)\|^2 = a^t W a.$$

Variances projetées

Soit $a \in \mathbb{R}^p$ de norme 1 :

- Variance totale sur $\text{vect}(a)$:

$$V(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\pi_a(X_i) - \pi_a(g)\|^2 = a^t V a.$$

- Variance inter sur $\text{vect}(a)$:

$$B(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K n_k \|\pi_a(g_k) - \pi_a(g)\|^2 = a^t B a.$$

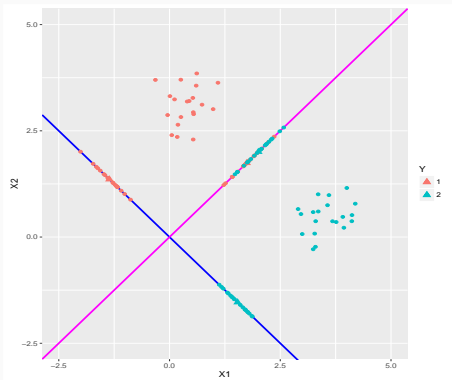
- Variance intra sur $\text{vect}(a)$:

$$W(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^K \sum_{i: Y_i=K} \|\pi_a(X_i) - \pi_a(g_k)\|^2 = a^t W a.$$

Propriété

$$V(a) = B(a) + W(a).$$

Exemple



$V(a)$	$B(a)$	$W(a)$
0.218	0.034	0.184
4.308	4.187	0.121

Axe discriminant

Un axe a est discriminant si

- Variance inter projetée grande $\implies B(a)$ grande
- Variance intra projetée petite $\implies W(a)$ petite.

Axe discriminant

Un axe a est **discriminant** si

- Variance **inter** projetée **grande** $\implies B(a)$ grande
- Variance **intra** projetée **petite** $\implies W(a)$ petite.

Coefficient de Rayleigh

Fisher propose d'utiliser comme mesure de la qualité d'un axe de discrimination le **coefficient de Rayleigh**

$$J(a) = \frac{a^t B a}{a^t W a}.$$

Première variable discriminante

Le problème d'optimisation

Le problème consiste à trouver $a \in \mathbb{R}^p$ qui maximise le coefficient de Rayleigh

$$\frac{a^t B a}{a^t W a},$$

ou de façon équivalente

$$\max_a a^t B a \quad \text{sous la contrainte} \quad a^t W a = 1.$$

Première variable discriminante

Le problème d'optimisation

Le problème consiste à trouver $a \in \mathbb{R}^p$ qui maximise le coefficient de Rayleigh

$$\frac{a^t B a}{a^t W a},$$

ou de façon équivalente

$$\max_a a^t B a \quad \text{sous la contrainte} \quad a^t W a = 1.$$

Solution

Elle est donnée par un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $W^{-1}B$.

Exemple

```
> mod
Call:
lda(Y ~ ., data = D)

Prior probabilities of groups:
  1  2
0.5 0.5

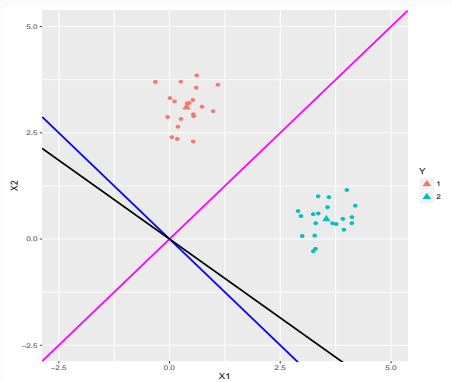
Group means:
      X1      X2
1 0.3850758 3.1009709
2 3.5410917 0.4692031

Coefficients of linear discriminants:
      LD1
X1  2.284995
X2 -1.694860
```

Sorties R

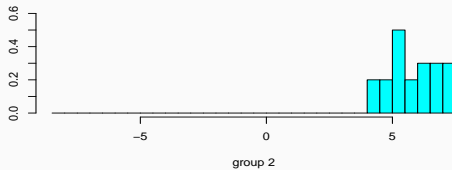
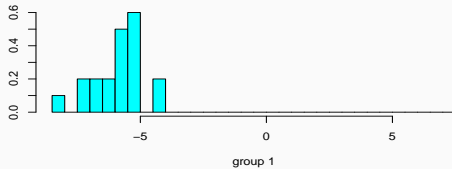
On a $a_1 = 2.284995$ et $a_2 = -1.694860$.

Exemple



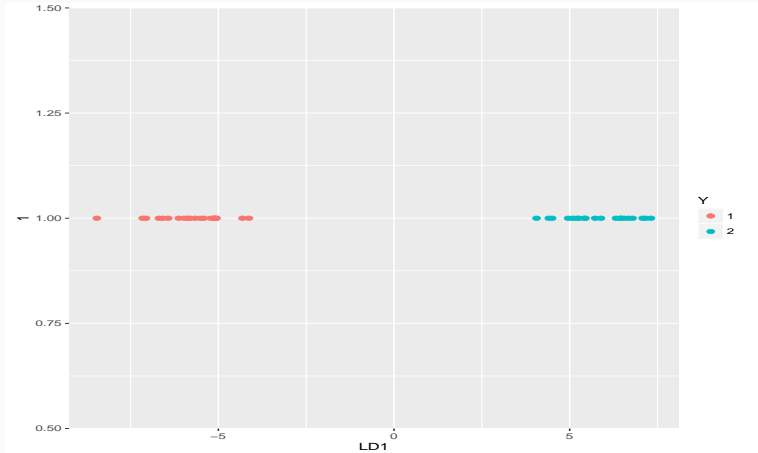
$V(a)$	$B(a)$	$W(a)$	Rayleigh
0.218	0.034	0.184	0.185
4.308	4.187	0.121	34.603
4.325	4.208	0.117	35.966

```
> plot(mod)
```



- On peut également représenter les **projections** des individus sur le **premier axe discriminant**

```
> score1 <- predict(mod)$x  
> donnees1 <- data.frame(score1, Y=D$Y)  
> ggplot(donnees1)+aes(x=LD1,y=1,col=Y)+geom_point(size=2)
```



Autres axes

- Les a_1, \dots, a_p s'appellent **coordonnées discriminantes**.
- La variable $a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ s'appelle **première variable discriminante** (ou première variable **canonique**).

Autres axes

- Les a_1, \dots, a_p s'appellent **coordonnées discriminantes**.
- La variable $a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ s'appelle **première variable discriminante** (ou première variable **canonique**).
- Les centres g_1, \dots, g_K appartiennent à un espace de **dimension $K - 1$** .
Si $K \geq 3$, on peut poursuivre les projections (comme pour l'ACP).

Calcul des autres variables discriminantes

- On cherche a_2 orthogonal à a_1 (par rapport à W) qui **maximise** $\frac{a_2^t B a_2}{a_2^t W a_2}$.

Autres axes

- Les a_1, \dots, a_p s'appellent **coordonnées discriminantes**.
- La variable $a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ s'appelle **première variable discriminante** (ou première variable **canonique**).
- Les centres g_1, \dots, g_K appartiennent à un espace de **dimension $K - 1$** . Si $K \geq 3$, on peut poursuivre les projections (comme pour l'ACP).

Calcul des autres variables discriminantes

- On cherche a_2 orthogonal à a_1 (par rapport à W) qui **maximise** $\frac{a_2^t B a_2}{a_2^t W a_2}$.
- La solution est donnée par le vecteur propre associé à la **deuxième plus grande valeur propre** de $W^{-1}B$.

Autres axes

- Les a_1, \dots, a_p s'appellent **coordonnées discriminantes**.
- La variable $a_1X_1 + \dots + a_pX_p$ s'appelle **première variable discriminante** (ou première variable **canonique**).
- Les centres g_1, \dots, g_K appartiennent à un espace de **dimension $K - 1$** . Si $K \geq 3$, on peut poursuivre les projections (comme pour l'ACP).

Calcul des autres variables discriminantes

- On cherche a_2 orthogonal à a_1 (par rapport à W) qui **maximise** $\frac{a_2^t B a_2}{a_2^t W a_2}$.
- La solution est donnée par le vecteur propre associé à la **deuxième plus grande valeur propre** de $W^{-1}B$.

Remarque

La matrice $W^{-1}B$ possède au plus **$K - 1$ valeurs propres non nulles**, on peut donc avoir au maximum $K - 1$ variables discriminantes.

Les iris de Fisher

```
> mod1 <- lda(Species~.,data=iris)
```

```
> mod1
```

Prior probabilities of groups:

	setosa	versicolor	virginica
	0.3333333	0.3333333	0.3333333

Group means:

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width
setosa	5.006	3.428	1.462	0.246
versicolor	5.936	2.770	4.260	1.326
virginica	6.588	2.974	5.552	2.026

Coefficients of linear discriminants:

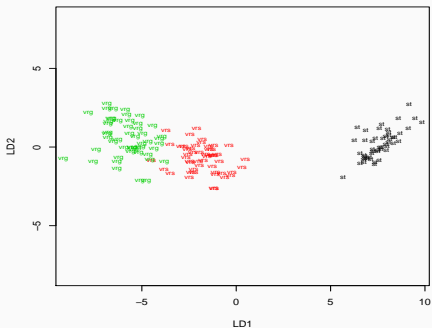
	LD1	LD2
Sepal.Length	0.8293776	0.02410215
Sepal.Width	1.5344731	2.16452123
Petal.Length	-2.2012117	-0.93192121
Petal.Width	-2.8104603	2.83918785

Proportion of trace:

	LD1	LD2
	0.9912	0.0088

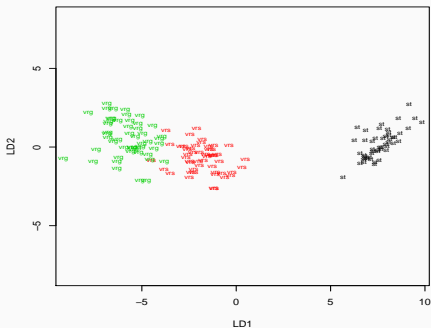
Représentation des individus sur les deux premiers axes

```
> plot(mod1)
```



Représentation des individus sur les deux premiers axes

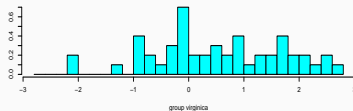
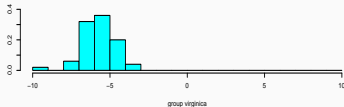
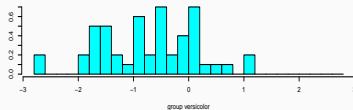
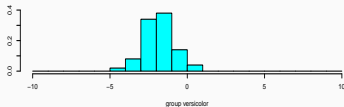
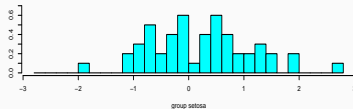
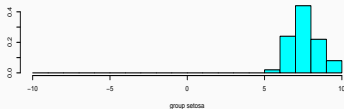
```
> plot(mod1)
```



Comparaison des axes discriminants

Le premier axe est (clairement) **plus discriminant** que le second.

Représentation des groupes par axes



Interprétation

On visualise à nouveau que le premier axe est beaucoup **plus discriminant** que le second.

Performances des variables canoniques

- On a

$$\frac{a_k^t B a_k}{a_k^t W a_k} = \lambda_k$$

où λ_k est la k -ème valeur propre de $W^{-1}B$

Performances des variables canoniques

- On a

$$\frac{a_k^t B a_k}{a_k^t W a_k} = \lambda_k$$

où λ_k est la k -ème valeur propre de $W^{-1}B$

Une mesure de performance

On peut donc mesurer la performance de la k -ème variable canonique par

$$\frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^{K-1} \lambda_j}.$$

Performances des variables canoniques

- On a

$$\frac{a_k^t B a_k}{a_k^t W a_k} = \lambda_k$$

où λ_k est la k -ème valeur propre de $W^{-1}B$

Une mesure de performance

On peut donc mesurer la performance de la k -ème variable canonique par

$$\frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^{K-1} \lambda_j}.$$

Proportion of trace:

LD1	LD2
0.9912	0.0088

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

Une seule variable explicative

LDA : cas général

Réduction de dimension

Recherche d'axes discriminants

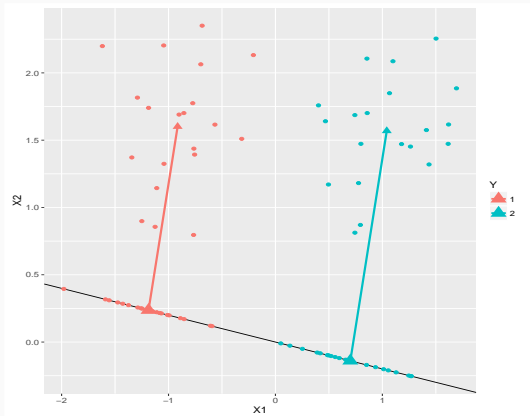
Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

Analyse discriminante quadratique

Régularisation

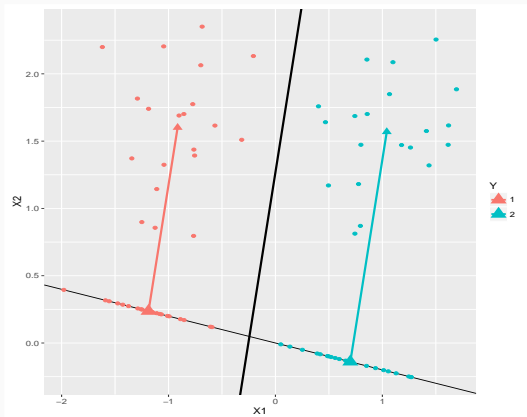
Le problème de la classification



Question

Comment classer un **nouveau point** $x = (x_1, x_2)$?

Une idée naturelle



Réponse

Utiliser l'axe **orthogonal** à l'axe **discriminant** passant par le point **équidistant** des projetés des centres de gravité.

Règle de Mahalanobis

Règle géométrique

On classe x dans le groupe 1 si

$$\|\pi_a(x) - \pi_a(g_1)\| \leq \|\pi_a(x) - \pi_a(g_2)\|.$$

Règle de Mahalanobis

Règle géométrique

On classe x dans le groupe 1 si

$$\|\pi_a(x) - \pi_a(g_1)\| \leq \|\pi_a(x) - \pi_a(g_2)\|.$$

Propriété

La règle géométrique est équivalente à classer x dans le groupe qui minimise la **distance de Mahalanobis**

$$d(x, g_k) = (x - g_k)^t W^{-1} (x - g_k).$$

Règle de Mahalanobis

Règle géométrique

On classe x dans le groupe 1 si

$$\|\pi_a(x) - \pi_a(g_1)\| \leq \|\pi_a(x) - \pi_a(g_2)\|.$$

Propriété

La règle géométrique est équivalente à classer x dans le groupe qui minimise la **distance de Mahalanobis**

$$d(x, g_k) = (x - g_k)^t W^{-1} (x - g_k).$$

- La propriété se **généralise** à un nombre de groupes K quelconque.

LDA prédictive

On affecte un nouvel individu x au groupe k qui maximise

- la probabilité **a posteriori** : $P(Y = k|x = x)$
- la **fonction linéaire discriminante**

$$\delta_k(x) = x^t \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^t \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k$$

- la distance de Mahalanobis "corrigée"

$$-\frac{1}{2}(x - \mu_k)^t \Sigma^{-1}(x - \mu_k) + \log \pi_k$$

Lien LDA descriptive/Prédictive

LDA prédictive

On affecte un nouvel individu x au groupe k qui maximise

- la probabilité **a posteriori** : $P(Y = k|x = x)$
- la **fonction linéaire discriminante**

$$\delta_k(x) = x^t \Sigma^{-1} \mu_k - \frac{1}{2} \mu_k^t \Sigma^{-1} \mu_k + \log \pi_k$$

- la distance de Mahalanobis "corrigée"

$$-\frac{1}{2}(x - \mu_k)^t \Sigma^{-1}(x - \mu_k) + \log \pi_k$$

LDA géométrique

On affecte un nouvel individu x au groupe k qui minimise la **distance de Mahalanobis**

$$d(x, g_k) = (x - g_k)^t W^{-1}(x - g_k).$$

Remarque (importante)

Dans le cas où on estime

- μ_k par g_k
- Σ par W ,

et que $\pi_k = 1/K, k = 1, \dots, K$ les règles **prédictives et géométriques coïncident**.

Remarque (importante)

Dans le cas où on estime

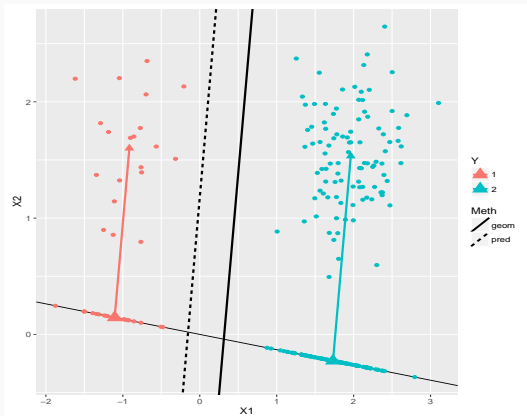
- μ_k par g_k
- Σ par W ,

et que $\pi_k = 1/K, k = 1, \dots, K$ les règles **prédictives et géométriques** coïncident.

Conséquence

La règle géométrique correspond à la règle probabiliste lorsque les **probabilités a priori** de chaque groupe sont **identiques**.

Exemple



Remarque

La règle géométrique "favorise" les groupes à faibles effectifs.

Quelques tests

- LDA peut-être accompagnée de quelques tests statistiques.
- Par exemple : $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_K = 0$.

Quelques tests

- LDA peut-être accompagnée de quelques tests statistiques.
- Par exemple : $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_K = 0$.

- Λ de Wilks :

$$\Lambda = \frac{|W|}{|V|} = \frac{|W|}{|W + B|}$$

suit la loi de Wilks de paramètres $(p, n - K, K - 1)$ sous H_0 .

- Lawley-Hotelling : $\text{tr}(W^{-1}B)$ suit la loi de T_0^2 généralisé de Hotelling sous H_0 (approximable par un $\chi_{p(K-1)}^2$).

Exemple

- Sous R, la fonction **manova** permet de mettre en œuvre ces tests.

```
> D <- as.matrix(iris[,1:4])
> mod <- manova(D~iris$Species)
> summary(mod,test="Wilks")
```

	Df	Wilks	approx F	num Df	den Df	Pr(>F)
iris\$Species	2	0.023439	199.15	8	288	< 2.2e-16 ***
Residuals	147					

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> summary(mod,test="Hotelling-Lawley")
```

	Df	Hotelling-Lawley	approx F	num Df	den Df	Pr(>F)
iris\$Species	2	32.477	580.53	8	286	< 2.2e-16 ***
Residuals	147					

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

- Une seule variable explicative

- LDA : cas général

Réduction de dimension

- Recherche d'axes discriminants

- Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

- Analyse discriminante quadratique

- Régularisation

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

- Une seule variable explicative

- LDA : cas général

Réduction de dimension

- Recherche d'axes discriminants

- Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

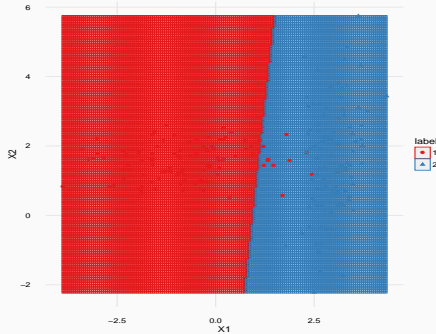
- Analyse discriminante quadratique

- Régularisation

1. Suppose $X|Y = k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma)$;
2. Estime μ_k et Σ par **maximum de vraisemblance**;
3. Bayes pour obtenir les **probabilités a posteriori**

$$\mathbf{P}(Y = k|X = x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{\ell=1}^K \pi_{\ell} f_{\ell}(x)}.$$

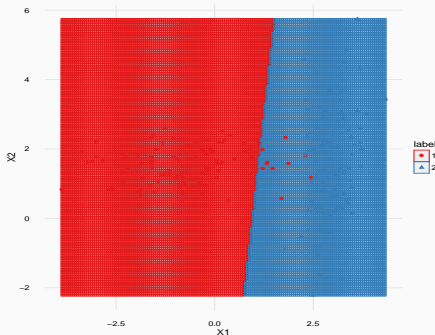
Exemple



Remarques

- LDA peut être mise en défaut lorsque les matrices de variance-covariance sont différentes.

Exemple



Remarques

- LDA peut être mise en défaut lorsque les matrices de variance-covariance sont différentes.
- L'analyse discriminante quadratique propose d'utiliser des matrices de variance-covariance différentes pour chaque groupe.

Modèle QDA

$$X|Y = k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k).$$

Modèle QDA

$$X|Y = k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k).$$

Estimation

- Les paramètres μ_k et $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$ sont estimés de la même façon que pour l'analyse discriminante linéaire.

Modèle QDA

$$X|Y = k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k).$$

Estimation

- Les paramètres μ_k et $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$ sont estimés de la même façon que pour l'analyse discriminante linéaire.
- Les matrices de variance-covariance Σ_k sont « naturellement » estimées selon

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} (X_i - \hat{\mu}_k)(X_i - \hat{\mu}_k)^t.$$

Modèle QDA

$$X|Y = k \sim \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k).$$

Estimation

- Les paramètres μ_k et $\pi_k = \mathbf{P}(Y = k)$ sont estimés de la même façon que pour l'analyse discriminante linéaire.
- Les matrices de variance-covariance Σ_k sont « naturellement » estimées selon

$$\hat{\Sigma}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i: Y_i=k} (X_i - \hat{\mu}_k)(X_i - \hat{\mu}_k)^t.$$

Formule de Bayes

$$\mathbf{P}(Y = k|X = x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{\ell=1}^K \pi_\ell f_\ell(x)}.$$

Fonctions linéaires discriminantes

- Même principe que pour LDA mais FLD différentes.

Définition

On appelle **fonctions linéaires discriminantes** (pour QDA) les fonctions

$$\delta_k(x) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma_k| - \frac{1}{2}(x - \mu_k)^t \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) + \log \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Fonctions linéaires discriminantes

- Même principe que pour LDA mais **FLD différentes**.

Définition

On appelle **fonctions linéaires discriminantes** (pour QDA) les fonctions

$$\delta_k(x) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma_k| - \frac{1}{2} (x - \mu_k)^t \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) + \log \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Propriété

$$\operatorname{argmax}_k \mathbf{P}(Y = k | X = x) = \operatorname{argmax}_k \delta_k(x).$$

Fonctions linéaires discriminantes

- Même principe que pour LDA mais **FLD différentes**.

Définition

On appelle **fonctions linéaires discriminantes** (pour QDA) les fonctions

$$\delta_k(x) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma_k| - \frac{1}{2} (x - \mu_k)^t \Sigma_k^{-1} (x - \mu_k) + \log \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Propriété

$$\operatorname{argmax}_k \mathbf{P}(Y = k | X = x) = \operatorname{argmax}_k \delta_k(x).$$

Conclusion

Choisir le groupe qui **maximise les probabilités a posteriori** revient à choisir le groupe qui **maximise les fonctions linéaires discriminantes**.

- Les frontières entre les groupes k et ℓ

$$\{x \text{ tq } \delta_k(x) = \delta_\ell(x)\}$$

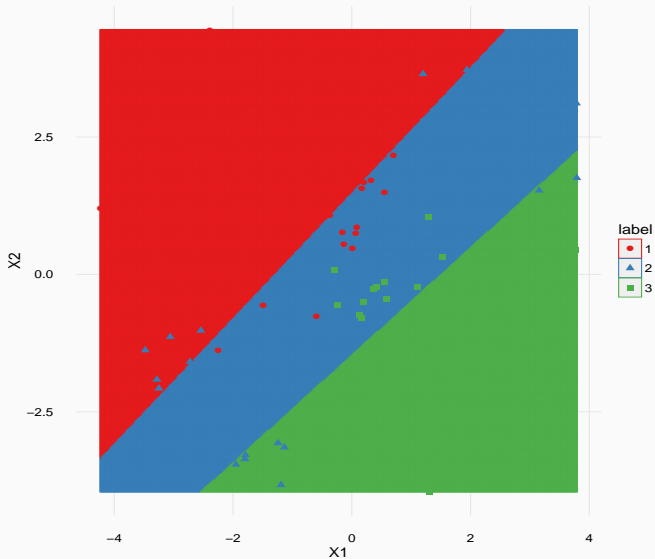
sont ici quadratiques en x (linéaires pour LDA).

Exemple

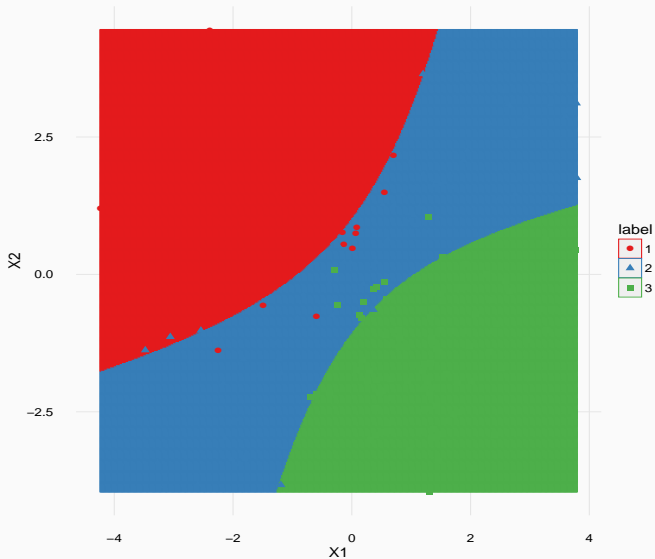
- On compare LDA et QDA sur les données du graphe ci-dessous



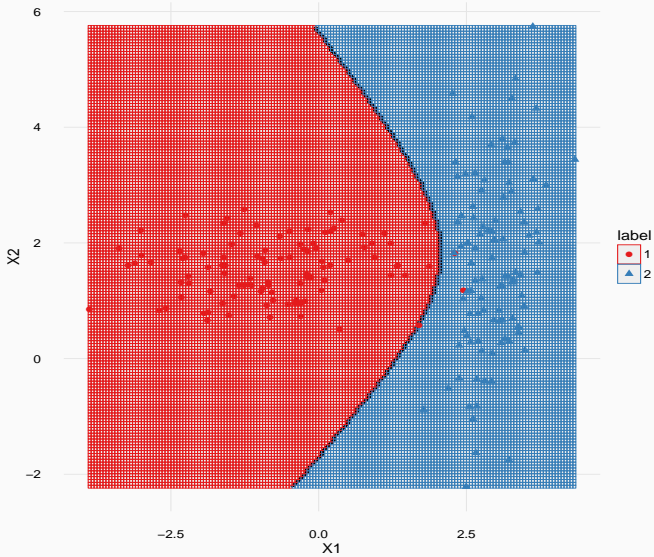
Frontières LDA



Frontières QDA



Autre exemple



- QDA est **plus flexible** que LDA : LDA est en quelques sortes « imbriquée » dans QDA.

- QDA est **plus flexible** que LDA : LDA est en quelques sortes « imbriquée » dans QDA.
- QDA permet donc a priori de modéliser une **gamme plus large** de phénomènes.

- QDA est **plus flexible** que LDA : LDA est en quelques sortes « imbriquée » dans QDA.
- QDA permet donc a priori de modéliser une **gamme plus large** de phénomènes.
- Mais... Le **prix à payer** se situe au niveau de l'estimation :
 - $(K - 1) \times (p + 1)$ paramètres pour LDA ;
 - $(K - 1) \times (p(p + 3)/2 + 1)$ pour QDA.

- QDA est **plus flexible** que LDA : LDA est en quelques sortes « imbriquée » dans QDA.
- QDA permet donc a priori de modéliser une **gamme plus large** de phénomènes.
- Mais... Le **prix à payer** se situe au niveau de l'estimation :
 - $(K - 1) \times (p + 1)$ paramètres pour LDA ;
 - $(K - 1) \times (p(p + 3)/2 + 1)$ pour QDA.

Conclusion

QDA est **plus complexe** \implies plus de paramètres à estimer \implies estimateurs **moins précis**.

Le modèle d'analyse discriminante linéaire

- Une seule variable explicative

- LDA : cas général

Réduction de dimension

- Recherche d'axes discriminants

- Classification

Analyse discriminante quadratique et régularisation

- Analyse discriminante quadratique

- Régularisation

- [Friedman, 1989] propose de combiner LDA et QDA.
- On reste dans le modèle gaussien mais

Régularisation 1

- [Friedman, 1989] propose de combiner LDA et QDA.
- On reste dans le modèle gaussien mais
- les matrices de variance-covariance des lois $X|Y = k$ sont estimées par

$$(1 - \lambda)\hat{\Sigma}_k + \lambda\hat{\Sigma}.$$

Régularisation 1

- [Friedman, 1989] propose de combiner LDA et QDA.
- On reste dans le modèle gaussien mais
- les matrices de variance-covariance des lois $X|Y = k$ sont estimées par

$$(1 - \lambda)\hat{\Sigma}_k + \lambda\hat{\Sigma}.$$

Role de λ

- $\lambda = 0 \implies$ QDA ;
- $\lambda = 1 \implies$ LDA.

Régularisation 1

- [Friedman, 1989] propose de combiner LDA et QDA.
- On reste dans le modèle gaussien mais
- les matrices de variance-covariance des lois $X|Y = k$ sont estimées par

$$(1 - \lambda)\hat{\Sigma}_k + \lambda\hat{\Sigma}.$$

Role de λ

- $\lambda = 0 \implies$ QDA ;
- $\lambda = 1 \implies$ LDA.
- $\lambda \in [0, 1]$ est un paramètre à calibrer.

- [Friedman, 1989] (toujours...) propose de régulariser la matrice de variance-covariance pour LDA :

$$(1 - \gamma)\hat{\Sigma} + \gamma\hat{\sigma}^2 I_p.$$

- [Friedman, 1989] (toujours...) propose de régulariser la matrice de variance-covariance pour LDA :

$$(1 - \gamma)\hat{\Sigma} + \gamma\hat{\sigma}^2 I_p.$$

Role de γ

- $\gamma = 0 \implies$ LDA ;

- [Friedman, 1989] (toujours...) propose de régulariser la matrice de variance-covariance pour LDA :

$$(1 - \gamma)\hat{\Sigma} + \gamma\hat{\sigma}^2 I_p.$$

Role de γ

- $\gamma = 0 \implies$ LDA ;
- $\gamma \in [0, 1]$ est un paramètre à calibrer.

- La fonction `rda` du package `klaR` permet de combiner les deux pénalités en estimant les matrices de variance-covariance selon

$$(1 - \gamma)\hat{\Sigma}_k(\lambda) + \gamma \frac{\text{trace}(\hat{\Sigma}_k(\lambda))}{p} I_p.$$

avec

$$\hat{\Sigma}_k(\lambda) = (1 - \lambda)\hat{\Sigma}_k + \lambda\hat{\Sigma}.$$

- La fonction `rda` du package `klaR` permet de combiner les deux pénalités en estimant les matrices de variance-covariance selon

$$(1 - \gamma)\hat{\Sigma}_k(\lambda) + \gamma \frac{\text{trace}(\hat{\Sigma}_k(\lambda))}{p} I_p.$$

avec

$$\hat{\Sigma}_k(\lambda) = (1 - \lambda)\hat{\Sigma}_k + \lambda\hat{\Sigma}.$$

Roles de γ et λ

- $\gamma = 0, \lambda = 0 \implies$ QDA ;
- $\gamma = 0, \lambda = 1 \implies$ LDA ;

- La fonction **rda** du package **klaR** permet de combiner les deux pénalités en estimant les matrices de variance-covariance selon

$$(1 - \gamma)\hat{\Sigma}_k(\lambda) + \gamma \frac{\text{trace}(\hat{\Sigma}_k(\lambda))}{p} I_p.$$

avec

$$\hat{\Sigma}_k(\lambda) = (1 - \lambda)\hat{\Sigma}_k + \lambda\hat{\Sigma}.$$

Roles de γ et λ

- $\gamma = 0, \lambda = 0 \implies$ QDA ;
- $\gamma = 0, \lambda = 1 \implies$ LDA ;
- Le problème est de bien choisir λ et γ .

Exemple

- La fonction `rda` propose de sélectionner automatiquement ces paramètres

```
> set.seed(1234)
> rda(Species~.,data=iris)
Call:
rda(formula = Species ~ ., data = iris)
```

Regularization parameters:

gamma	lambda
0.09303661	0.85993116

Prior probabilities of groups:

setosa	versicolor	virginica
0.3333333	0.3333333	0.3333333

Misclassification rate:

apparent:	2 %
cross-validated:	2 %

Sélection avec caret i

- On peut bien entendu également utiliser la fonction **train** du package **caret**.

```
> ctrl <- trainControl(method="cv")
> gr <- expand.grid(data.frame(gamma=seq(0,1,by=0.1),lambda=seq(0,1,by=0.1)))
> set.seed(12345)
> train(Species~.,data=iris,method="rda",tuneGrid=gr,trControl=ctrl)
```

Regularized Discriminant Analysis

150 samples

4 predictor

3 classes: 'setosa', 'versicolor', 'virginica'

No pre-processing

Resampling: Cross-Validated (10 fold)

Summary of sample sizes: 135, 135, 135, 135, 135, 135, ...

Sélection avec caret ii

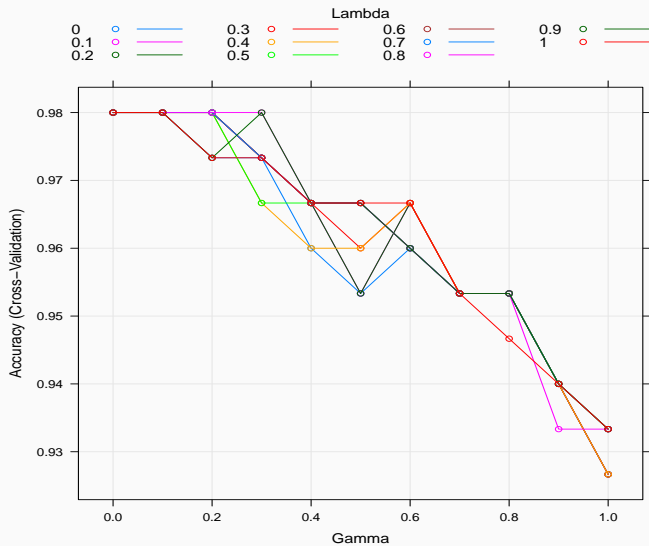
Resampling results across tuning parameters:

gamma	lambda	Accuracy	Kappa
0.0	0.0	0.9800000	0.97
0.0	0.1	0.9800000	0.97
0.0	0.2	0.9800000	0.97
0.0	0.3	0.9800000	0.97
0.0	0.4	0.9800000	0.97
0.0	0.5	0.9800000	0.97
0.0	0.6	0.9800000	0.97
0.0	0.7	0.9800000	0.97
0.0	0.8	0.9800000	0.97
0.0	0.9	0.9800000	0.97
0.0	1.0	0.9800000	0.97
0.1	0.0	0.9800000	0.97
0.1	0.1	0.9800000	0.97
0.1	0.2	0.9800000	0.97
0.1	0.3	0.9800000	0.97

Sélection avec caret iii

0.1	0.4	0.9800000	0.97
0.1	0.5	0.9800000	0.97
0.1	0.6	0.9800000	0.97
0.1	0.7	0.9800000	0.97
0.1	0.8	0.9800000	0.97
0.1	0.9	0.9800000	0.97
0.1	1.0	0.9800000	0.97
0.2	0.0	0.9733333	0.96
0.2	0.1	0.9800000	0.97
0.2	0.2	0.9800000	0.97

Accuracy was used to select the optimal model using the largest value.
The final values used for the model were $\gamma = 0$ and $\lambda = 1$.



- Tout comme pour les modèles linéaire et logistique, on peut chercher à sélectionner des variables pour un modèle d'analyse discriminante linéaire (les objectifs sont identiques).

- Tout comme pour les modèles linéaire et logistique, on peut chercher à sélectionner des variables pour un modèle d'analyse discriminante linéaire (les objectifs sont identiques).
- L'approche est similaire, on se donne un critère de choix de modèle (par exemple estimation de la probabilité d'erreur) et on utilise des techniques pas à pas.

- Tout comme pour les modèles linéaire et logistique, on peut chercher à sélectionner des variables pour un modèle d'analyse discriminante linéaire (les objectifs sont identiques).
- L'approche est similaire, on se donne un critère de choix de modèle (par exemple estimation de la probabilité d'erreur) et on utilise des techniques pas à pas.
- Sur R, les fonctions stepClass et train des packages klaR et caret permettent de faire de la sélection de variables.

Sélection avec stepClass

```
> stepclass(Species~.,data=iris,method="lda",direction="both")
  'stepwise classification', using 10-fold cross-validated
correctness rate of method lda'.
150 observations of 4 variables in 3 classes; direction: both
stop criterion: improvement less than 5%.
correctness rate: 0.96; in: "Petal.Width"; variables (1): Petal.Width

hr.elapsed min.elapsed sec.elapsed
      0.000      0.000      0.194
method      : lda
final model : Species ~ Petal.Width
<environment: 0x12d5b5e38>
correctness rate = 0.96
```

Sélection avec train

```
> slda <- train(Species ~ ., data = iris,  
               method = "stepLDA",  
               trControl = trainControl(method = "cv"))  
  
> slda$finalModel  
method      : lda  
final model : y ~ Petal.Width  
<environment: 0x12c509298>  
correctness rate = 0.96
```

- L'analyse discriminante est une méthode **simple** permettant de répondre au problème de classification supervisée.
- Elle est implémentée dans tous les **logiciels statistiques**.
- Elle peut se révéler performante même lorsque les "hypothèses modèles" ne sont **pas vérifiées** (justifié par l'approche géométrique).
- Plutôt utilisée pour des variables explicatives quantitatives à la base mais **peut s'adapter à des variables qualitatives** :
 1. **codage disjonctif** des variables qualitatives ;
 2. faire une analyse discriminante sur les axes d'une **analyse des correspondances multiples** (ACM) \implies **méthode DISQUAL** (voir [Saporta, 2011]).

Troisième partie III

Régression logistique

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

Pathologie concernant les artères coronaires

- **Problème** : étudier la présence d'une pathologie concernant les artères coronaires en fonction de l'âge des individus.

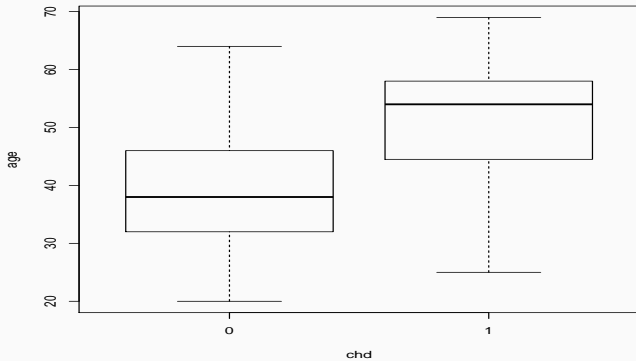
Pathologie concernant les artères coronaires

- **Problème** : étudier la présence d'une pathologie concernant les artères coronaires en fonction de l'âge des individus.
- **Données** : on dispose d'un échantillon de taille 100 sur lequel on a mesuré les variables :
 - chd qui vaut 1 si la pathologie est présente, 0 sinon ;
 - age qui correspond à l'âge de l'individu.

```
> artere[1:5,]  
  age agrp chd  
1.  20    1   0  
2.  23    1   0  
3.  24    1   0  
4.  25    1   0  
5.  25    1   1
```

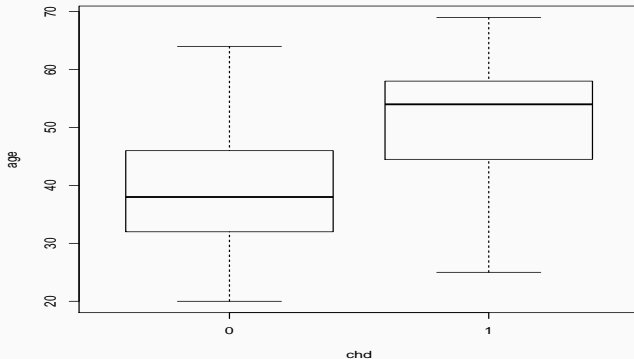
Boxplot

```
> plot(age~chd,data=artere)
```



Boxplot

```
> plot(age~chd,data=artere)
```



Interprétation

Il semble que la maladie soit **plus présente** chez les personnes âgées.

Question

Comment **expliquer** la relation entre la maladie et l'âge ?

Question

Comment **expliquer** la relation entre la maladie et l'âge ?

- On désigne par
 - Y la variable qui prend pour valeur 1 si l'individu est atteint, 0 sinon.
 - X la variable qui correspond à l'âge de l'individu.

Question

Comment **expliquer** la relation entre la maladie et l'âge ?

- On désigne par
 - Y la variable qui prend pour valeur 1 si l'individu est atteint, 0 sinon.
 - X la variable qui correspond à l'âge de l'individu.

Le problème

Quantifier la relation entre Y et X à partir des données $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de taille $n = 100$.

- On se base sur le modèle linéaire.

- On se base sur le **modèle linéaire**.
- On suppose que les deux variables Y et X sont liées par une relation de la forme

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad (2)$$

où $\beta_0 \in \mathbb{R}$ et $\beta_1 \in \mathbb{R}$ sont les **paramètres inconnus** du modèle et ε est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- On se base sur le **modèle linéaire**.
- On suppose que les deux variables Y et X sont liées par une relation de la forme

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad (2)$$

où $\beta_0 \in \mathbb{R}$ et $\beta_1 \in \mathbb{R}$ sont les **paramètres inconnus** du modèle et ε est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Problème

La variable Y est ici **qualitative**, l'écriture (2) n'a donc aucun sens.

\Rightarrow **mauvaise idée**

- Chercher à expliquer Y par X revient à chercher de l'information sur la loi de probabilité de Y sachant X .

- Chercher à expliquer Y par X revient à chercher de l'information sur la loi de probabilité de Y sachant X .
- En effet, le modèle de régression linéaire peut se réécrire en caractérisant la loi de $Y|X = x$ par la loi $\mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$.

- Chercher à expliquer Y par X revient à chercher de l'information sur la loi de probabilité de Y sachant X .
- En effet, le modèle de régression linéaire peut se réécrire en caractérisant la loi de $Y|X = x$ par la loi $\mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$.

Idée

- Etendre cette caractérisation à notre contexte (où la variable à expliquer est binaire).

- Chercher à expliquer Y par X revient à chercher de l'information sur la loi de probabilité de Y sachant X .
- En effet, le modèle de régression linéaire peut se réécrire en caractérisant la loi de $Y|X = x$ par la loi $\mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$.

Idée

- Etendre cette caractérisation à notre contexte (où la variable à expliquer est binaire).
- Une loi candidate naturelle pour la variable $Y|X = x$ est la loi de Bernoulli.

- On va ainsi caractériser la loi de $Y|X = x$ par la loi de Bernoulli.
- Cette loi dépend d'un paramètre

$$p(x) = \mathbf{P}(Y = 1|X = x).$$

- Sachant $X = x$, on a donc

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p(x) \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - p(x) \end{cases}$$

La modélisation

Il reste maintenant à caractériser la probabilité $p(x)$.

- Là encore, on peut se baser sur le **modèle linéaire** et proposer

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

- Là encore, on peut se baser sur le **modèle linéaire** et proposer

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

- Cette écriture n'est pas satisfaisante. En effet

- Là encore, on peut se baser sur le **modèle linéaire** et proposer

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

- Cette écriture n'est pas satisfaisante. En effet
 - $p(x) \in [0, 1]$ tandis que $\beta_0 + \beta_1 x \in \mathbb{R}$.

- Là encore, on peut se baser sur le **modèle linéaire** et proposer

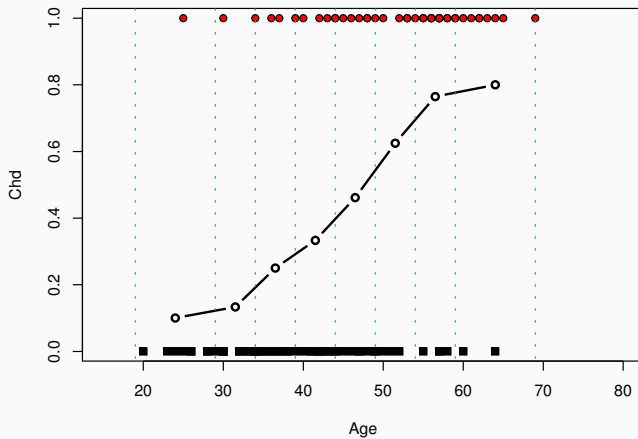
$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

- Cette écriture n'est pas satisfaisante. En effet
 - $p(x) \in [0, 1]$ tandis que $\beta_0 + \beta_1 x \in \mathbb{R}$.
 - **Idée** : trouver une transformation φ de $p(x)$ telle que $\varphi(p(x))$ prenne ses valeurs dans \mathbb{R} .

Visualisation : découpage en classes d'âge

Age	<i>n</i>	Absent	Présent	Proportion
[19, 29[10	9	1	.10
[29, 34[15	13	2	.13
[34, 39[12	9	3	.25
[39, 44[15	10	5	.33
[44, 49[13	7	6	.46
[49, 54[8	3	5	.625
[54, 59[17	4	13	.76
[59, 69[10	2	8	.8

Représentation graphique

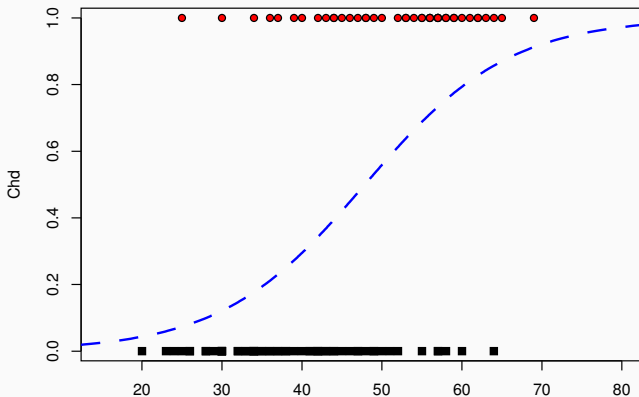


Pour aller plus loin

On souhaiterait trouver une fonction

- un peu plus régulière
- qui utilise toutes les données

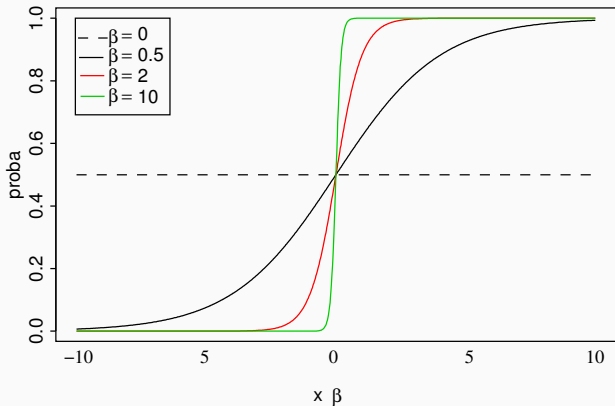
pour obtenir par exemple



Equation d'une courbe en S

Une façon d'obtenir une courbe en S est de considérer

$$x \mapsto \frac{\exp(x'\beta)}{1 + \exp(x'\beta)}$$



Le modèle de régression logistique

- Il propose de modéliser la probabilité $p(x)$ selon

$$p(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}.$$

- On peut réécrire

$$\text{logit } p(x) = \log \left(\frac{p(x)}{1 - p(x)} \right) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Le modèle de régression logistique

- Il propose de modéliser la probabilité $p(x)$ selon

$$p(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}.$$

- On peut réécrire

$$\text{logit } p(x) = \log \left(\frac{p(x)}{1 - p(x)} \right) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Le modèle de régression logistique

Le modèle de régression logistique consiste donc à caractériser la loi de $Y|X = x$ par une loi de Bernoulli de paramètre $p(x)$ tel que

$$\text{logit } p(x) = \log \left(\frac{p(x)}{1 - p(x)} \right) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Exemple sur R

```
> model <- glm(chd~age,data=artere,family=binomial)
> model
```

```
Call:  glm(formula = chd ~ age, family = binomial, data = artere)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	age
-5.3095	0.1109

```
Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null); 98 Residual
```

```
Null Deviance: 136.7
```

```
Residual Deviance: 107.4 AIC: 111.4
```

Exemple sur R

```
> model <- glm(chd~age,data=artere,family=binomial)
```

```
> model
```

```
Call:  glm(formula = chd ~ age, family = binomial, data = artere)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	age
-5.3095	0.1109

```
Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null); 98 Residual
```

```
Null Deviance: 136.7
```

```
Residual Deviance: 107.4 AIC: 111.4
```

- La fonction **glm** renvoie les **estimations** de β_0 et β_1 .

Exemple sur R

```
> model <- glm(chd~age,data=artere,family=binomial)
> model
```

```
Call:  glm(formula = chd ~ age, family = binomial, data = artere)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	age
-5.3095	0.1109

```
Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null); 98 Residual
```

```
Null Deviance: 136.7
```

```
Residual Deviance: 107.4 AIC: 111.4
```

- La fonction **glm** renvoie les **estimations** de β_0 et β_1 .
- On peut ainsi avoir une estimation de la **probabilité d'avoir une maladie pour un individu de 30 ans** :

Exemple sur R

```
> model <- glm(chd~age,data=artere,family=binomial)
> model
```

```
Call:  glm(formula = chd ~ age, family = binomial, data = artere)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	age
-5.3095	0.1109

```
Degrees of Freedom: 99 Total (i.e. Null); 98 Residual
```

```
Null Deviance: 136.7
```

```
Residual Deviance: 107.4 AIC: 111.4
```

- La fonction **glm** renvoie les **estimations** de β_0 et β_1 .
- On peut ainsi avoir une estimation de la **probabilité d'avoir une maladie pour un individu de 30 ans** :

$$\hat{p}(x = 30) = \frac{\exp(-5.3095 + 0.1109 * 30)}{1 + \exp(-5.3095 + 0.1109 * 30)} \approx 0.12.$$

- La fonction sur R qui permet d'ajuster le modèle logistique est la fonction `glm`.

- La fonction sur R qui permet d'ajuster le modèle logistique est la fonction `glm`.
- Le modèle de régression logistique, tout comme le modèle linéaire, appartient à la famille des modèles linéaires généralisés.

- La fonction sur R qui permet d'ajuster le **modèle logistique** est la fonction **glm**.
- Le modèle de régression logistique, tout comme le modèle linéaire, appartient à la famille des **modèles linéaires généralisés**.
- C'est pourquoi il faut spécifier l'argument **family=binomial** lorsque l'on veut faire une régression logistique.

- Dans la quasi-totalité des cas pratiques on cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives.

- Dans la quasi-totalité des cas pratiques on cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives.
- Exemple : on cherche à expliquer la présence/absence d'une maladie cardiovasculaire (chd) par 9 variables. On dispose de $n = 462$ individus.

Maladie cardiovasculaire

- Dans la quasi-totalité des cas pratiques on cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives.
- Exemple : on cherche à expliquer la présence/absence d'une maladie cardiovasculaire (chd) par 9 variables. On dispose de $n = 462$ individus.

```
> data(SAheart, package="bestglm")
> head(SAheart)
```

	sbp	tobacco	ldl	adiposity	famhist	typea	obesity	alcohol	age	chd
1	160	12.00	5.73	23.11	Present	49	25.30	97.20	52	1
2	144	0.01	4.41	28.61	Absent	55	28.87	2.06	63	1
3	118	0.08	3.48	32.28	Present	52	29.14	3.81	46	0
4	170	7.50	6.41	38.03	Present	51	31.99	24.26	58	1
5	134	13.60	3.50	27.78	Present	60	25.99	57.34	49	1

Le modèle de régression logistique multiple

- On dispose d'une variable binaire Y et de p variables explicatives $X = (X_1, \dots, X_p)$.

Le modèle de régression logistique multiple

- On dispose d'une variable binaire Y et de p variables explicatives $X = (X_1, \dots, X_p)$.
- On cherche toujours à modéliser la loi de $Y|X = x$. La seule chose qui change ici est que x est un vecteur de dimension p .

Le modèle de régression logistique multiple

- On dispose d'une variable binaire Y et de p variables explicatives $X = (X_1, \dots, X_p)$.
- On cherche toujours à modéliser la loi de $Y|X = x$. La seule chose qui change ici est que x est un vecteur de dimension p .

Le modèle de régression logistique multiple ([Hosmer and Lemeshow, 2000])

La loi de $Y|X = x$ est caractérisée par une loi de Bernoulli de paramètre $p(x) = \mathbf{P}(Y = 1|X = x)$ tel que

$$\text{logit } p(x) = \log \left(\frac{p(x)}{1 - p(x)} \right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p = x^t \beta$$

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

- La **vraisemblance** du modèle est une fonction des paramètres β_1, \dots, β_p définie par

$$L_n(\beta) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Y = y_i | X = x_i).$$

La vraisemblance

- La **vraisemblance** du modèle est une fonction des paramètres β_1, \dots, β_p définie par

$$L_n(\beta) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Y = y_i | X = x_i).$$

- Cette fonction "mesure" la **probabilité d'observer les données** que l'on a pour chaque valeur de β_0 et β_1 .

La vraisemblance

- La **vraisemblance** du modèle est une fonction des paramètres β_1, \dots, β_p définie par

$$L_n(\beta) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Y = y_i | X = x_i).$$

- Cette fonction "mesure" la **probabilité d'observer les données** que l'on a pour chaque valeur de β_0 et β_1 .
- L'idée consiste à trouver les valeurs de β_0 et β_1 qui maximise cette probabilité (on parle **d'estimateurs du maximum de vraisemblance**).

Calcul de la vraisemblance

- Les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n étant **discrètes et indépendantes**, la vraisemblance du modèle logistique est définie par

$$L_n : \{0, 1\}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(y_1, \dots, y_n, \beta) \mapsto \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Y_i = y_i | X_i = x_i).$$

Calcul de la vraisemblance

- Les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n étant **discrètes et indépendantes**, la vraisemblance du modèle logistique est définie par

$$L_n : \{0, 1\}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(y_1, \dots, y_n, \beta) \mapsto \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(Y_i = y_i | X_i = x_i).$$

- Pour simplifier, on notera $L_n(y_1, \dots, y_n, \beta) = L_n(\beta)$ et $\mathcal{L}_n(\beta) = \log(L_n(\beta))$.

Propriété

$$\mathcal{L}_n(\beta) = \sum_{i=1}^n \{y_i x_i' \beta - \log(1 + \exp(x_i' \beta))\}.$$

Maximisation de la vraisemblance

- **Malheureusement** il n'existe pas de solutions explicites pour maximiser la vraisemblance.
- **Mais...**

Maximisation de la vraisemblance

- **Malheureusement** il n'existe pas de solutions explicites pour maximiser la vraisemblance.
- **Mais...** la vraisemblance possède généralement **un maximum unique** et il existe des **algorithmes numériques itératifs** qui permettent d'obtenir ce maximum :
 - algorithme de Newton-Raphson ;
 - algorithme du score de Fisher.

- On peut vérifier sur R si l'algorithme a bien **convergé**

```
> summary(model)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -5.30945     1.13365  -4.683 2.82e-06 ***
age          0.11092     0.02406   4.610 4.02e-06 ***
---
Number of Fisher Scoring iterations: 4
> model$converged
[1] TRUE
```

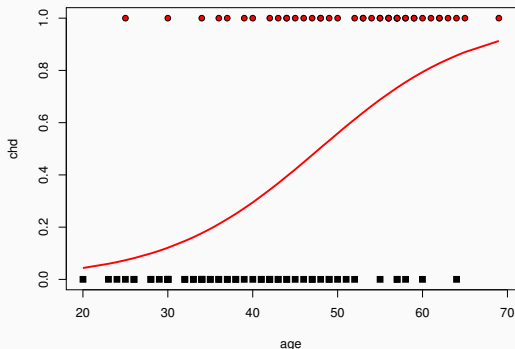
- On peut vérifier sur R si l'algorithme a bien **convergé**

```
> summary(model)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -5.30945     1.13365  -4.683 2.82e-06 ***
age          0.11092     0.02406   4.610 4.02e-06 ***
---
Number of Fisher Scoring iterations: 4
> model$converged
[1] TRUE
```

- Le **modèle ajusté** est donc

$$\hat{P}(Y = 1|X = x) = \frac{\exp(-5.30945 + 0.11092x)}{1 + \exp(-5.30945 + 0.11092x)}.$$

Fonction estimée



Quand le coefficient β_j associé à la variable X_j est

- positif : X_j augmente $\rightarrow p$ augmente
- négatif : X_j augmente $\rightarrow p$ diminue

Ici, $\hat{\beta}_{age} = 0.11$, donc la probabilité augmente avec l'âge !

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

Comportement asymptotique des estimateurs

- Contrairement au modèle linéaire, on ne connaît pas la loi des estimateurs $\hat{\beta}_j$ pour le modèle logistique.

Comportement asymptotique des estimateurs

- Contrairement au modèle linéaire, on ne connaît pas la loi des estimateurs $\hat{\beta}_j$ pour le modèle logistique.
- Néanmoins, la théorie du maximum de vraisemblance ([Fahrmeir and Kaufmann, 1985]) nous permet d'obtenir la loi limite du vecteur aléatoire $\hat{\beta}$:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathcal{I}(\beta)^{-1}).$$

Remarques

- $\mathcal{I}(\beta)$, matrice d'information de Fisher du modèle au point β ;

Comportement asymptotique des estimateurs

- Contrairement au modèle linéaire, **on ne connaît pas la loi des estimateurs** $\hat{\beta}_j$ pour le modèle logistique.
- Néanmoins, la théorie du maximum de vraisemblance ([Fahrmeir and Kaufmann, 1985]) nous permet d'obtenir la **loi limite du vecteur aléatoire** $\hat{\beta}$:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathcal{I}(\beta)^{-1}).$$

Remarques

- $\mathcal{I}(\beta)$, **matrice d'information de Fisher** du modèle au point β ;
- Cette matrice est **inconnue** mais possibilité de "bien" l'estimer.
- En pratique, on fait l'**approximation**

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \approx \mathcal{N}(0, \hat{\mathcal{I}}(\hat{\beta})^{-1}).$$

Loi de $\hat{\beta}_j$

On déduit du théorème précédent

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_j} \stackrel{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\hat{\sigma}_j^2$ désigne le j^{e} terme de la diagonale de $\hat{\mathcal{I}}(\hat{\beta})$.

Intervalle de confiance et tests

Loi de $\hat{\beta}_j$

On déduit du théorème précédent

$$\sqrt{n} \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\hat{\sigma}_j} \stackrel{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\hat{\sigma}_j^2$ désigne le j^{e} terme de la diagonale de $\hat{\mathcal{I}}(\hat{\beta})$.

Applications :

- Intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour β_j :

$$\left[\hat{\beta}_j - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{n}}; \hat{\beta}_j + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{n}} \right].$$

- Tests : $H_0 : \beta_j = 0$ contre $H_1 : \beta_j \neq 0$.

L'exemple du chd

- Le modèle :

$$\log \frac{P(chd = 1|age)}{1 - P(chd = 1|age)} = \beta_0 + \beta_1 age.$$

L'exemple du chd

- Le modèle :

$$\log \frac{P(chd = 1|age)}{1 - P(chd = 1|age)} = \beta_0 + \beta_1 age.$$

- La sortie R :

```
> summary(model)$coefficients
```

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	-5.3094534	1.13365365	-4.683488	2.820338e-06
age	0.1109211	0.02405982	4.610224	4.022356e-06

au risque 5%, on rejette l'hypothèse $\beta_1 = 0$.

L'exemple du chd

- Le modèle :

$$\log \frac{P(chd = 1|age)}{1 - P(chd = 1|age)} = \beta_0 + \beta_1 age.$$

- La sortie R :

```
> summary(model)$coefficients
              Estimate Std. Error    z value    Pr(>|z|)
(Intercept) -5.3094534  1.13365365  -4.683488  2.820338e-06
age           0.1109211  0.02405982   4.610224  4.022356e-06
```

au risque 5%, on rejette l'hypothèse $\beta_1 = 0$.

- Intervalles de confiance :

```
> confint(model)
Waiting for profiling to be done...
              2.5 %      97.5 %
(Intercept) -7.72587162 -3.2461547
age           0.06693158  0.1620067
```

Test de nullité de q coefficients

- Tester la nullité d'un paramètre n'est pas suffisant.

Test de nullité de q coefficients

- Tester la nullité d'un paramètre n'est **pas suffisant**.
 1. Comment **tester la nullité de tous les paramètres** (à l'exception de la constante) ? Equivalent du test de Fisher en régression linéaire.

Test de nullité de q coefficients

- Tester la nullité d'un paramètre n'est pas suffisant.
 1. Comment tester la nullité de tous les paramètres (à l'exception de la constante) ? Equivalent du test de Fisher en régression linéaire.
 2. Comment tester l'effet d'une variable explicative qualitative ?

Test de nullité de q coefficients

- Tester la nullité d'un paramètre n'est **pas suffisant**.
 1. Comment **tester la nullité de tous les paramètres** (à l'exception de la constante) ? Equivalent du test de Fisher en régression linéaire.
 2. Comment tester l'**effet d'une variable explicative qualitative** ? Pour tester l'effet de la variable `marque`, on teste la nullité simultanée des coefficients du modèle associé à cette variable

Test de nullité de q coefficients

- Tester la nullité d'un paramètre n'est **pas suffisant**.
 1. Comment **tester la nullité de tous les paramètres** (à l'exception de la constante) ? Equivalent du test de Fisher en régression linéaire.
 2. Comment tester l'**effet d'une variable explicative qualitative** ? Pour tester l'effet de la variable *marque*, on teste la nullité simultanée des coefficients du modèle associé à cette variable

Plusieurs paramètres

Nécessité de **développer des procédures de tests** permettant de tester des hypothèses du genre :

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_q = 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists j \in \{1, \dots, q\} : \beta_j \neq 0.$$

Test de Wald

- Il est basé sur le résultat :

$$(\hat{\beta}_n - \beta)' \hat{\Sigma} (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2.$$

- Il est basé sur le résultat :

$$(\hat{\beta}_n - \beta)' \hat{\Sigma} (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2.$$

- On désigne par $\hat{\beta}_n^{(q)}$ les q premières composantes de $\hat{\beta}_n$ et $\hat{\Sigma}^{(q)}$ la matrice $q \times q$ comprenant les q premières lignes et colonnes de $\hat{\Sigma}$. On a alors :

$$(\hat{\beta}_n^{(q)} - \beta^{(q)})' \hat{\Sigma}^{(q)} (\hat{\beta}_n^{(q)} - \beta^{(q)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

Test de Wald

- Il est basé sur le résultat :

$$(\hat{\beta}_n - \beta)' \hat{\Sigma} (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2.$$

- On désigne par $\hat{\beta}_n^{(q)}$ les q premières composantes de $\hat{\beta}_n$ et $\hat{\Sigma}^{(q)}$ la matrice $q \times q$ comprenant les q premières lignes et colonnes de $\hat{\Sigma}$. On a alors :

$$(\hat{\beta}_n^{(q)} - \beta^{(q)})' \hat{\Sigma}^{(q)} (\hat{\beta}_n^{(q)} - \beta^{(q)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

- On déduit que sous H_0

$$\hat{\beta}^{(q)} \hat{\Sigma}^{(q)} \hat{\beta}^{(q)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

Test de Wald

- Il est basé sur le résultat :

$$(\hat{\beta}_n - \beta)' \hat{\Sigma} (\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_p^2.$$

- On désigne par $\hat{\beta}_n^{(q)}$ les q premières composantes de $\hat{\beta}_n$ et $\hat{\Sigma}^{(q)}$ la matrice $q \times q$ comprenant les q premières lignes et colonnes de $\hat{\Sigma}$. On a alors :

$$(\hat{\beta}_n^{(q)} - \beta^{(q)})' \hat{\Sigma}^{(q)} (\hat{\beta}_n^{(q)} - \beta^{(q)}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

- On déduit que sous H_0

$$\hat{\beta}^{(q)} \hat{\Sigma}^{(q)} \hat{\beta}^{(q)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

- On rejette l'hypothèse nulle si la valeur observée de la statistique de test ci dessus est supérieure au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi χ_q^2 .

Test de déviance ou du rapport de vraisemblance

- **Idée** : on note $\hat{\beta}_{H_0}$ l'emv contraint sous H_0 . Si H_0 est vraie, on doit avoir

$$\hat{\beta}_{H_0} \approx \hat{\beta}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_{H_0}) \approx \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n).$$

Test de déviance ou du rapport de vraisemblance

- **Idée** : on note $\hat{\beta}_{H_0}$ l'emv contraint sous H_0 . Si H_0 est vraie, on doit avoir

$$\hat{\beta}_{H_0} \approx \hat{\beta}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_{H_0}) \approx \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n).$$

- Plus précisément, on montre que **sous H_0** ,

$$2(\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) - \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_{H_0})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

Test de déviance ou du rapport de vraisemblance

- **Idée** : on note $\hat{\beta}_{H_0}$ l'emv contraint sous H_0 . Si H_0 est vraie, on doit avoir

$$\hat{\beta}_{H_0} \approx \hat{\beta}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_{H_0}) \approx \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n).$$

- Plus précisément, on montre que **sous H_0** ,

$$2(\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) - \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_{H_0})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2.$$

- On rejette l'hypothèse nulle si la valeur observée de la statistique de test ci dessus est supérieure au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi χ_q^2 .

- **Idée** : on note $\hat{\beta}_{H_0}$ l'emv contraint sous H_0 . Si H_0 est vraie, on doit avoir $S(\hat{\beta}_{H_0}) = \nabla \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_0) \approx 0$.

- **Idée** : on note $\hat{\beta}_{H_0}$ l'emv contraint sous H_0 . Si H_0 est vraie, on doit avoir $S(\hat{\beta}_{H_0}) = \nabla \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_0) \approx 0$.
- Plus précisément, on montre que **sous H_0** ,

$$S(\hat{\beta}_{H_0})' \hat{\Sigma}_{H_0}^{-1} S(\hat{\beta}_{H_0}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2,$$

$$\text{où } \hat{\Sigma}_{H_0} = \mathbb{X} W_{\hat{\beta}_{H_0}} \mathbb{X}.$$

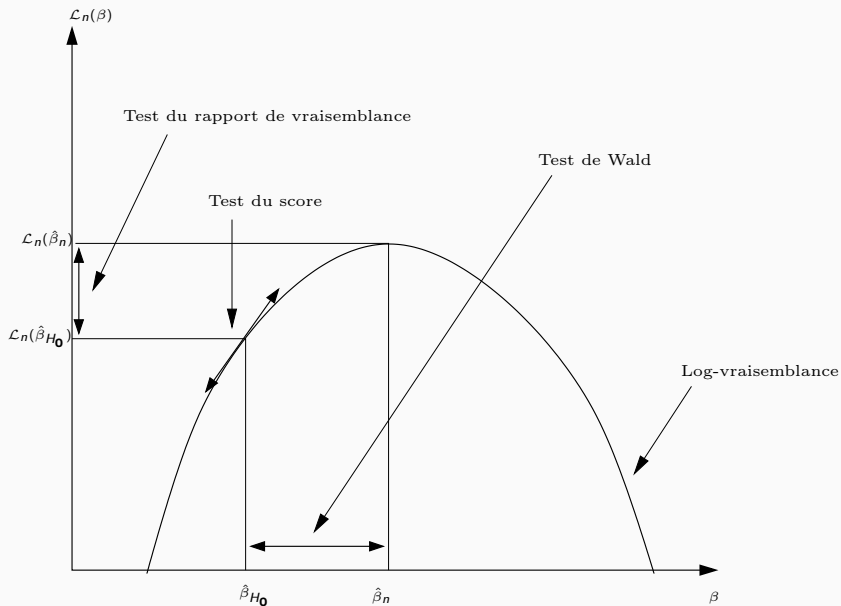
- **Idée** : on note $\hat{\beta}_{H_0}$ l'emv contraint sous H_0 . Si H_0 est vraie, on doit avoir $S(\hat{\beta}_{H_0}) = \nabla \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_0) \approx 0$.
- Plus précisément, on montre que **sous H_0** ,

$$S(\hat{\beta}_{H_0})' \hat{\Sigma}_{H_0}^{-1} S(\hat{\beta}_{H_0}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_q^2,$$

$$\text{où } \hat{\Sigma}_{H_0} = \mathbb{X} W_{\hat{\beta}_{H_0}} \mathbb{X}.$$

- On rejette l'hypothèse nulle si la valeur observée de la statistique de test ci dessus est supérieure au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi χ_q^2 .

Récapitulatif



Exemple sous R

On peut utiliser la fonction `Anova` du package `car` :

Exemple sous R

On peut utiliser la fonction **Anova** du package **car** :

1. Test de Wald :

```
> library(car)
> Anova(model,type=3,test.statistic="Wald")
```

	Df	Chisq	Pr(>Chisq)
(Intercept)	1	0.3294	0.5660
age	1	0.0218	0.8826
marque	2	1.9307	0.3809
Residuals	29		

Exemple sous R

On peut utiliser la fonction **Anova** du package **car** :

1. Test de Wald :

```
> library(car)
> Anova(model,type=3,test.statistic="Wald")
```

	Df	Chisq	Pr(>Chisq)
(Intercept)	1	0.3294	0.5660
age	1	0.0218	0.8826
marque	2	1.9307	0.3809
Residuals	29		

2. Test du rapport de vraisemblance :

```
> Anova(model,type=3,test.statistic="LR")
```

	LR	Chisq	Df	Pr(>Chisq)
age	0.02189	1		0.8824
marque	2.09562	2		0.3507

- Sous SAS, on utilise la **proc logistic**

```
proc logistic data=Tp1_panne descending;  
class marque;  
model panne= age marque;  
run;
```


Le Système SAS***Procédure LOGISTIC***

Statistiques d'ajustement du modèle		
Critère	Constante uniquement	Constante et covariables
AIC	47.717	51.502
SC	49.214	57.488
-2 Log	45.717	43.502

Test de l'hypothèse nulle globale : BETA=0			
Test	Khi-2	DDL	Pr > Khi-2
Rapport de vrais	2.2152	3	0.5290
Score	2.1630	3	0.5393
Wald	2.0333	3	0.5655

Analyse des effets Type 3			
Effet	DDL	Khi-2 de Wald	Pr > Khi-2
age	1	0.0218	0.8826
marque	2	1.9306	0.3809

Le Système SAS***Procédure LOGISTIC***

Estimations par l'analyse du maximum de vraisemblance						
Paramètre		DDL	Valeur estimée	Erreur type	Khi-2 de Wald	Pr > Khi-2
Intercept		1	-0.1471	0.6265	0.0551	0.8144
age		1	0.0139	0.0940	0.0218	0.8826
marque	0	1	0.6252	0.5344	1.3684	0.2421
marque	1	1	0.2058	0.4907	0.1758	0.6750

Estimations des rapports de cotes			
Effet	Valeur estimée du point	Intervalle de confiance de Wald à 95 %	
age	1.014	0.843	1.219
marque 0 vs 3	4.289	0.544	33.820
marque 1 vs 3	2.820	0.407	19.544

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

- Les variables continues sont souvent (tout le temps) discrétisées avant une régression logistique.

```
> summary(dapp)
```

	X1	X2	Y
Min.	:-3.39606	Min. : -3.080366	0:312
1st Qu.	:-0.69551	1st Qu.: -0.656398	1:288
Median	:-0.02684	Median : -0.014737	
Mean	:-0.02128	Mean : 0.003285	
3rd Qu.	: 0.62586	3rd Qu.: 0.633525	
Max.	: 3.19590	Max. : 2.585601	

```
> summary(dapp1)
```

	X11	X22	Y
[-10,-0.849]	:120	[-10,-0.849]	:112
(-0.849,-0.285]	:124	(-0.849,-0.285]	:122
(-0.285,0.193]	:107	(-0.285,0.193]	:116
(0.193,0.761]	:128	(0.193,0.761]	:122
(0.761,10]	:121	(0.761,10]	:128

Ajustement des modèles

On ajuste le modèle logistique sur les **données brutes**, puis sur les **variables discrétisées**.

```
> m1
Coefficients:
(Intercept)          X1          X2
   -0.08301      0.93426      1.10734

> m2
Coefficients:
      (Intercept) X11(-0.849,-0.285] X11(-0.285,0.193] X11(0.193,0.761]
        -3.0673          0.9280          0.9095          1.5994
X11(0.761,10] X22(-0.849,-0.285] X22(-0.285,0.193] X22(0.193,0.761]
   2.5822          1.3961          1.9471          1.8978
X22(0.761,10]
   3.2447
```

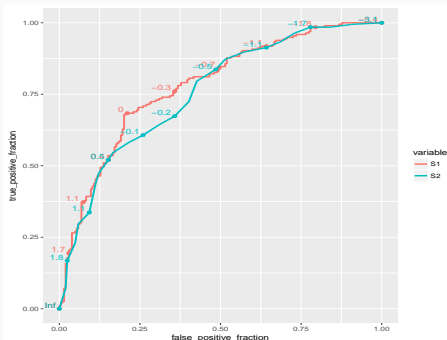
Pourquoi discrétiser ?

- **Avantage** : prise en compte d'effets non linéaires.

Pourquoi discrétiser ?

- **Avantage** : prise en compte d'effets non linéaires.
- **Inconvénients** :
 - **Perte d'information** et de **performance** si l'effet de la variable est linéaire.
 - **Pas de règle optimale** pour discrétiser : les approches classiques sont basées sur des analyses bivariées. Aucune garantie de leur validité dans un contexte multivarié.
 - **Augmentation de la complexité** du modèle (plus de paramètres à estimer).

```
> S1 <- predict(m1,newdata=dtest); S2 <- predict(m2,newdata=dtest1)
> tab.score <- data.frame(S1,S2,Y=as.numeric(dtest$Y)-1)
> tab.score1 <- melt(tab.score,"Y")
> library(plotROC)
> ggplot(tab.score1)+aes(d=Y,m=value,color=variable)+geom_roc()
```



```
> library(pROC)
> auc(dtest$Y,S1)
Area under the curve: 0.78
> auc(dtest$Y,S2)
Area under the curve: 0.7568
```


Une solution : les résidus partiels

- On considère le modèle logistique

$$\text{logit } p_{\beta}(x) = \beta_1 x_1 + \dots, \beta_p x_p.$$

Définition

Les **résidus partiels** sont définis par :

$$r_{ij} = \frac{Y_i - p_{\hat{\beta}_n}(x_i)}{p_{\hat{\beta}_n}(x_i)(1 - p_{\hat{\beta}_n}(x_i))} + \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1 \dots p.$$

Une solution : les résidus partiels

- On considère le modèle logistique

$$\text{logit } p_{\beta}(x) = \beta_1 x_1 + \dots, \beta_p x_p.$$

Définition

Les **résidus partiels** sont définis par :

$$r_{ij} = \frac{Y_i - p_{\hat{\beta}_n}(x_i)}{p_{\hat{\beta}_n}(x_i)(1 - p_{\hat{\beta}_n}(x_i))} + \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1 \dots p.$$

Diagnostic

- L'analyse consiste à tracer pour **toutes les variables j** les T résidus $r_{ij}, i = 1, \dots, n$.

Une solution : les résidus partiels

- On considère le modèle logistique

$$\text{logit } p_{\beta}(x) = \beta_1 x_1 + \dots, \beta_p x_p.$$

Définition

Les **résidus partiels** sont définis par :

$$r_{ij} = \frac{Y_i - p_{\hat{\beta}_n}(x_i)}{p_{\hat{\beta}_n}(x_i)(1 - p_{\hat{\beta}_n}(x_i))} + \hat{\beta}_j x_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1 \dots p.$$

Diagnostic

- L'analyse consiste à tracer pour **toutes les variables j** les T résidus $r_{ij}, i = 1, \dots, n$.
- Si le tracé est linéaire alors tout est "normal". Si par contre une **tendance non linéaire se dégage**, il faut remplacer la variable j par une fonction de celle ci donnant la même tendance que celle observée.

Un exemple : les données panne

```
> model <- glm(etat~.,data=panne,family=binomial)
> summary(model)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
(Intercept)	0.47808	0.83301	0.574	0.566
age	0.01388	0.09398	0.148	0.883
marqueB	-0.41941	0.81428	-0.515	0.607
marqueC	-1.45608	1.05358	-1.382	0.167

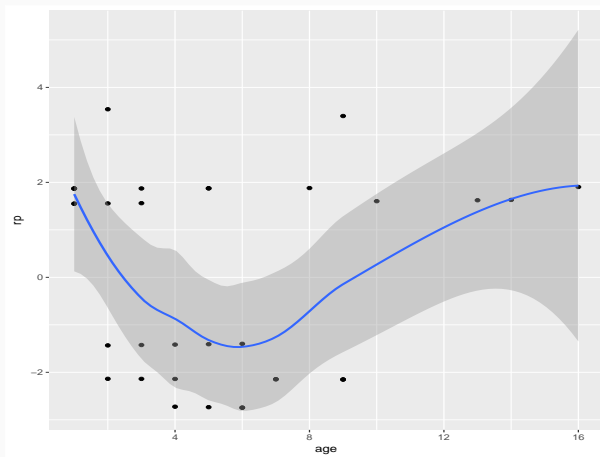
Un exemple : les données panne

```
> model <- glm(etat~.,data=panne,family=binomial)
> summary(model)
Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  0.47808    0.83301   0.574   0.566
age          0.01388    0.09398   0.148   0.883
marqueB      -0.41941    0.81428  -0.515   0.607
marqueC      -1.45608    1.05358  -1.382   0.167
```

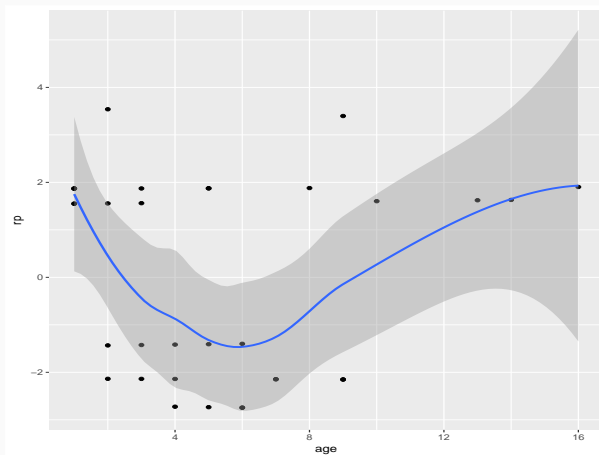
Remarque

On accepte la nullité du coefficient age.

```
> rp <- residuals(model,type="partial")
> df <- data.frame(age=panne$age,rp=rp[,1])
> ggplot(df)+aes(x=age,y=rp)+geom_point()+geom_smooth()
```



```
> rp <- residuals(model,type="partial")
> df <- data.frame(age=panne$age,rp=rp[,1])
> ggplot(df)+aes(x=age,y=rp)+geom_point()+geom_smooth()
```



Conclusion

Le graphe suggère d'**ajouter la variable age^2** dans le modèle.

```
> model1 <- glm(etat~age+I(age^2),data=panne,family=binomial)
> summary(model1)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)	
(Intercept)	4.18501	1.73860	2.407	0.01608	*
age	-2.03343	0.77401	-2.627	0.00861	**
I(age^2)	0.17601	0.07044	2.499	0.01247	*

Remarque

On rejette maintenant la nullité du coefficient age.

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

- Principalement 2 motifs d'insatisfaction :

- Principalement 2 motifs d'insatisfaction :
 1. Précision d'estimation : les estimateurs des MCO pour la régression et du MV pour la logistique ont souvent un biais relativement faible mais une variance élevée (notamment lorsque le nombre de variables d est grand).

- Principalement 2 motifs d'insatisfaction :
 1. **Précision d'estimation** : les estimateurs des MCO pour la régression et du MV pour la logistique ont souvent un biais relativement faible mais une variance élevée (notamment lorsque le nombre de variables d est grand).
 2. **Interprétation** : lorsque le nombre de variables d est grand, on ne connaît pas les variables "importantes".

- Principalement 2 motifs d'insatisfaction :
 1. **Précision d'estimation** : les estimateurs des MCO pour la régression et du MV pour la logistique ont souvent un biais relativement faible mais une variance élevée (notamment lorsque le nombre de variables d est grand).
 2. **Interprétation** : lorsque le nombre de variables d est grand, on ne connaît pas les variables "importantes".

Objectifs

- Avec l'augmentation du volume des données ces dernières années, ces deux inconvénients sont de plus en plus visibles.
- Nécessité de développer des procédures de sélection de sous-groupes de variables.

Un exemple

- On génère des données $(x_i, y_i), i = 1, \dots, 500$ selon le modèle

$$\text{logit } p_{\beta}(x) = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{q+1}$$

où X_1, \dots, X_{q+1} sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

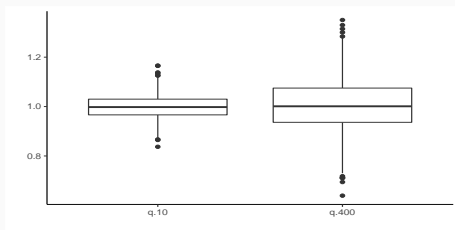
Un exemple

- On génère des données (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, 500$ selon le modèle

$$\text{logit } p_{\beta}(x) = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{q+1}$$

où X_1, \dots, X_{q+1} sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- On calcule l'estimateur du MV de β_1 sur 1000 répétitions. On trace les boxplot de ces estimateurs pour $q = 10$ et $q = 400$.



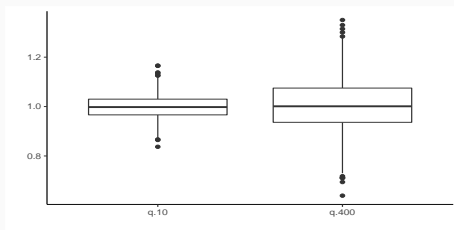
Un exemple

- On génère des données $(x_i, y_i), i = 1, \dots, 500$ selon le modèle

$$\text{logit } p_{\beta}(x) = 1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{q+1}$$

où X_1, \dots, X_{q+1} sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

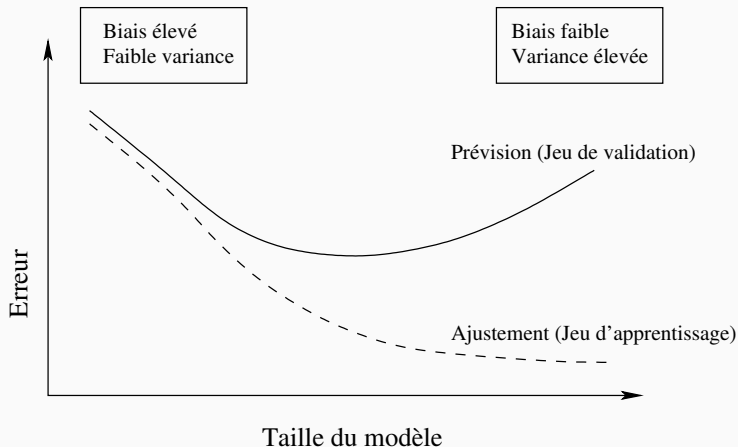
- On calcule l'estimateur du MV de β_1 sur 1000 répétitions. On trace les boxplot de ces estimateurs pour $q = 10$ et $q = 400$.



Conclusion

Plus de variance (donc moins de précisions) lorsque le nombre de variables inutiles augmente.

Taille de modèle



Idem erreur d'estimation (variance) / erreur d'approximation (biais).

Comment comparer des modèles ?

- Nécessité de définir des critères mais...

Comment comparer des modèles ?

- Nécessité de définir des critères mais...
- Il n'existe pas de critère universel permettant de définir la notion de meilleur modèle.

Comment comparer des modèles ?

- Nécessité de définir des critères mais...
- Il n'existe pas de critère universel permettant de définir la notion de meilleur modèle.
- Nous proposons quelques exemples de critères dans la suite.

Quelques questions

Comment comparer des modèles ?

- Nécessité de définir des **critères** mais...
- Il n'existe pas de **critère universel** permettant de définir la notion de meilleur modèle.
- Nous proposons quelques exemples de critères dans la suite.

Comment choisir les meilleurs variables parmi X_1, \dots, X_p ?

- Nécessité de proposer des **algorithmes**.
- Recherche **exhaustive** vs **pas à pas**.

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

- **Idée** : mesurer la **qualité d'ajustement** en utilisant la **vraisemblance**.

- **Idée** : mesurer la **qualité d'ajustement** en utilisant la **vraisemblance**.

Problème

Si $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ alors $\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_1) \leq \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_2)$ où $\hat{\beta}_j$ désigne l'emv du modèle $\mathcal{M}_j, j = 1, 2$.

- **Idée** : mesurer la **qualité d'ajustement** en utilisant la **vraisemblance**.

Problème

Si $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ alors $\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_1) \leq \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_2)$ où $\hat{\beta}_j$ désigne l'emv du modèle $\mathcal{M}_j, j = 1, 2$.

- **Conséquence** : la vraisemblance sélectionnera toujours le modèle le plus complexe.

- **Idée** : mesurer la **qualité d'ajustement** en utilisant la **vraisemblance**.

Problème

Si $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ alors $\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_1) \leq \mathcal{L}_n(\hat{\beta}_2)$ où $\hat{\beta}_j$ désigne l'emv du modèle $\mathcal{M}_j, j = 1, 2$.

- **Conséquence** : la vraisemblance sélectionnera toujours le modèle le plus complexe.

Solution

Pénaliser la vraisemblance par la **complexité** du modèle.

Définition

Soit \mathcal{M} un modèle logistique à p paramètres. On note $\hat{\beta}_n$ l'emv des paramètres du modèle.

- L'**AIC (Akaike Information Criterion)** du modèle \mathcal{M} est défini par

$$AIC(\mathcal{M}) = -2\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) + 2p.$$

- Le **BIC (Bayesian Information Criterion)** du modèle \mathcal{M} est défini par

$$BIC(\mathcal{M}) = -2\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) + p \log n.$$

Définition

Soit \mathcal{M} un modèle logistique à p paramètres. On note $\hat{\beta}_n$ l'emv des paramètres du modèle.

- L'**AIC (Akaike Information Criterion)** du modèle \mathcal{M} est défini par

$$AIC(\mathcal{M}) = -2\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) + 2p.$$

- Le **BIC (Bayesian Information Criterion)** du modèle \mathcal{M} est défini par

$$BIC(\mathcal{M}) = -2\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) + p \log n.$$

Conclusion

- Le modèle retenu sera celui qui **minimise** l'AIC ou le BIC.

Définition

Soit \mathcal{M} un modèle logistique à p paramètres. On note $\hat{\beta}_n$ l'emv des paramètres du modèle.

- L'**AIC (Akaike Information Criterion)** du modèle \mathcal{M} est défini par

$$AIC(\mathcal{M}) = -2\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) + 2p.$$

- Le **BIC (Bayesian Information Criterion)** du modèle \mathcal{M} est défini par

$$BIC(\mathcal{M}) = -2\mathcal{L}_n(\hat{\beta}_n) + p \log n.$$

Conclusion

- Le modèle retenu sera celui qui **minimise** l'AIC ou le BIC.
- $\log n > 2$ (pour $n \geq 8$) BIC aura tendance à choisir des modèles plus **parcimonieux** que AIC.

Exemple

- On considère les mêmes modèles que précédemment :

```
> model1 <- glm(chd~tobacco+famhist,data=SAheart,family=binomial)
> model2 <- glm(chd~tobacco+famhist+adiposity+alcohol,data=SAheart,
                family=binomial)
```

Exemple

- On considère les mêmes modèles que précédemment :

```
> model1 <- glm(chd~tobacco+famhist,data=SAheart,family=binomial)
> model2 <- glm(chd~tobacco+famhist+adiposity+alcohol,data=SAheart,
                family=binomial)
```

- On les compare en terme d'AIC et de BIC.

```
> c(AIC(model1),AIC(model2))
[1] 530.5759 523.4657
> c(BIC(model1),BIC(model2))
[1] 542.9826 544.1436
```

Exemple

- On considère les mêmes modèles que précédemment :

```
> model1 <- glm(chd~tobacco+famhist,data=SAheart,family=binomial)
> model2 <- glm(chd~tobacco+famhist+adiposity+alcohol,data=SAheart,
                family=binomial)
```

- On les compare en terme d'AIC et de BIC.

```
> c(AIC(model1),AIC(model2))
[1] 530.5759 523.4657
> c(BIC(model1),BIC(model2))
[1] 542.9826 544.1436
```

Conclusion

AIC sélectionne model2 tandis que BIC sélectionne model1.

Présentation du modèle

Estimation des paramètres

Propriétés des estimateurs

Discrétisation des variables explicatives

Sélection de modèle logistique

- Critères de choix de modèles

- Sélection de variables

Motivations

- Dans la partie précédente, on a présenté des outils permettant de comparer des modèles **construits**.

Motivations

- Dans la partie précédente, on a présenté des outils permettant de comparer des modèles **construits**.
- On se place dans un cadre différent : étant donné p variables explicatives X_1, \dots, X_p , on cherche une procédure automatique permettant de trouver le "**meilleur**" **sous-groupe de variables** à mettre dans le modèle logistique.

Motivations

- Dans la partie précédente, on a présenté des outils permettant de comparer des modèles **construits**.
- On se place dans un cadre différent : étant donné p variables explicatives X_1, \dots, X_p , on cherche une procédure automatique permettant de trouver le "**meilleur**" **sous-groupe de variables** à mettre dans le modèle logistique.

Pourquoi ?

(Au moins) 2 raisons peuvent motiver cette démarche :

1. **Descriptif** : identifier les variables qui permettent d'**expliquer la cible**.

Motivations

- Dans la partie précédente, on a présenté des outils permettant de comparer des modèles **construits**.
- On se place dans un cadre différent : étant donné p variables explicatives X_1, \dots, X_p , on cherche une procédure automatique permettant de trouver le "**meilleur**" **sous-groupe de variables** à mettre dans le modèle logistique.

Pourquoi ?

(Au moins) 2 raisons peuvent motiver cette démarche :

1. **Descriptif** : identifier les variables qui permettent d'**expliquer la cible**.
2. **Statistique** : la variance des estimateurs augmente avec le nombre de paramètres du modèle. Diminuer le nombre de variables permettra d'avoir des **estimateurs plus précis**.

Recherche exhaustive

- Une approche naturelle est de construire **tous** les modèles logistiques (2^p) et de retenir celui qui **optimise un critère donné** (AIC-BIC...).

Recherche exhaustive

- Une approche naturelle est de construire **tous** les modèles logistiques (2^p) et de retenir celui qui **optimise un critère donné** (AIC-BIC...).
- Les package **leaps** permet de faire cela pour la **régression linéaire**.

Recherche exhaustive

- Une approche naturelle est de construire tous les modèles logistiques (2^p) et de retenir celui qui optimise un critère donné (AIC-BIC...).
- Les package leaps permet de faire cela pour la régression linéaire.
- Pour le modèle logistique, on peut utiliser le package bestglm.

Recherche exhaustive

- Une approche naturelle est de construire **tous** les modèles logistiques (2^p) et de retenir celui qui **optimise un critère donné** (AIC-BIC...).
- Les package **leaps** permet de faire cela pour la **régression linéaire**.
- Pour le **modèle logistique**, on peut utiliser le package **bestglm**.

```
> library(bestglm)
> model4 <- bestglm(dapp,family=binomial,IC="BIC")
Morgan-Tatar search since family is non-gaussian.
> model4$BestModel
```

```
Call: glm(formula = y ~ ., family = family, data = Xi, weights = weights)
```

Coefficients:

(Intercept)	ldl	famhistPresent	age
-4.29645	0.18650	0.82172	0.05088

```
Degrees of Freedom: 249 Total (i.e. Null); 246 Residual
```

```
Null Deviance: 319.2
```

```
Residual Deviance: 267.5 AIC: 275.5
```

- On peut également visualiser les **variables retenues dans les meilleurs modèles** pour le critère donné

```
> model4$BestModels
```

	sbp	tobacco	ldl	adiposity	famhist	typea	obesity	alcohol	age	Criterion
1	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	284.0427
2	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	286.0520
3	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	286.7856
4	FALSE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	287.3270
5	FALSE	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	287.9329

Remarque

Lorsque le nombre de variables p est trop grand, balayer tous les modèles peut se révéler **très couteux en tant de calcul**. On a alors recours à des méthodes **pas à pas**.

L'approche consiste à :

- construire un modèle initial

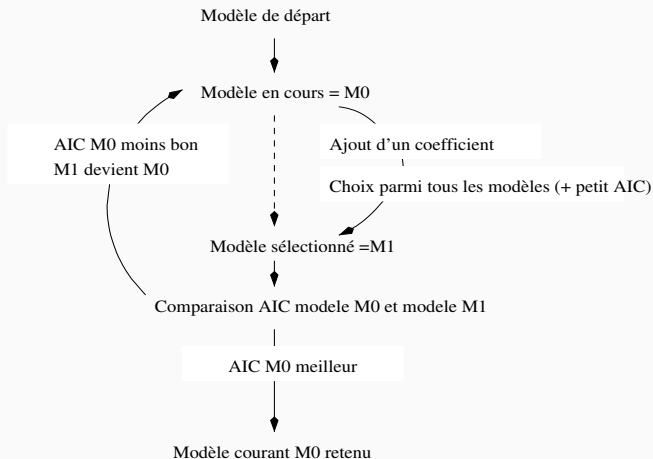
L'approche consiste à :

- construire un **modèle initial**
- Ajouter (**forward**) ou supprimer (**backward**) la variable qui optimise un critère donné (**BIC** ou **AIC**) par exemple.

L'approche consiste à :

- construire un **modèle initial**
- Ajouter (**forward**) ou supprimer (**backward**) la variable qui optimise un critère donné (**BIC** ou **AIC**) par exemple.
- Répéter le processus jusqu'à un **critère d'arrêt**.

Technique ascendante utilisant l'AIC



Exemple sur R

- La fonction **step** permet de sélectionner des variables à l'aide de méthodes **pas à pas**.

```
> model_complet <- glm(chd~.,data=dapp,family=binomial)
> model_step <- step(model_complet,direction="backward",k=log(nrow(dapp)))
> model_step
```

```
Call:  glm(formula = chd ~ ldl + famhist + age, family = binomial,
           data = dapp)
```

Coefficients:

(Intercept)	ldl	famhistPresent	age
-4.29645	0.18650	0.82172	0.05088

Quatrième partie IV

Arbres

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

- Les arbres sont des algorithmes de prédiction qui fonctionnent en régression et en discrimination.
- Il existe différentes variantes permettant de construire des prédicteurs par arbres.
- Nous nous focalisons dans cette partie sur la méthode CART [Breiman et al., 1984] qui est la plus utilisée. La méthode CHAID est proposée en annexe.

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

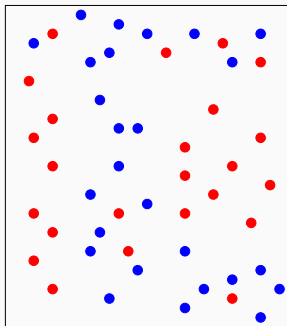
- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives X_1, \dots, X_p .

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives X_1, \dots, X_p .
- Y peut admettre un nombre quelconque de modalités et les variables X_1, \dots, X_p peuvent être qualitatives et/ou quantitatives.

- On cherche à expliquer une variable Y par p variables explicatives X_1, \dots, X_p .
- Y peut admettre un nombre quelconque de modalités et les variables X_1, \dots, X_p peuvent être qualitatives et/ou quantitatives.
- Néanmoins, pour simplifier on se place dans un premier temps en discrimination binaire : Y admet 2 modalités (-1 ou 1). On suppose de plus que l'on a simplement 2 variables explicatives quantitatives.

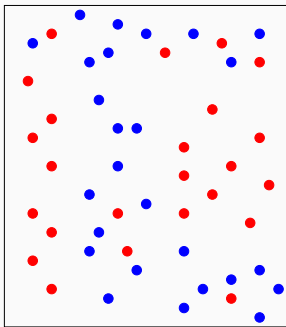
Représentation des données

- On dispose de n observations $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ où $X_i \in \mathbb{R}^2$ et $Y_i \in \{-1, 1\}$.



Représentation des données

- On dispose de n observations $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ où $X_i \in \mathbb{R}^2$ et $Y_i \in \{-1, 1\}$.



Approche par arbres

Trouver une **partition** des observations qui **sépare** "au mieux" les points rouges des points bleus.

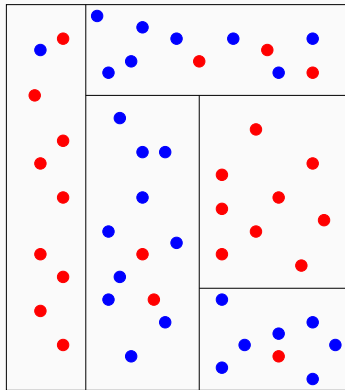
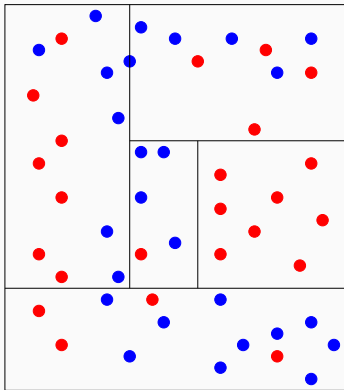
Arbre binaire

Un **arbre binaire de décision** CART est

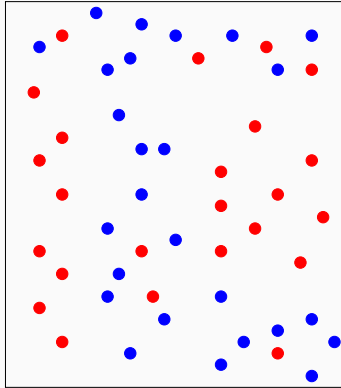
- un algorithme de **moyennage local** par partition (moyenne ou vote à la majorité sur les éléments de la partition),
- dont la partition est construite par **divisions successives** au moyen d'**hyperplans orthogonaux aux axes** de \mathbb{R}^P , dépendant des données (X_i, Y_i) .

Arbres binaires

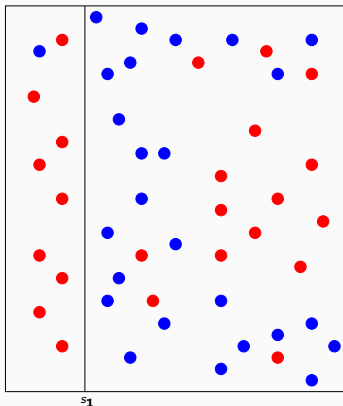
- La **méthode CART** propose de construire une partition basée sur des divisions **successives parallèles aux axes**.
- 2 exemples de partition :



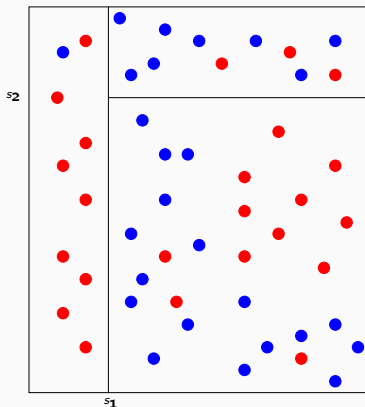
- A chaque étape, la méthode cherche une **nouvelle division** : une **variable** et un **seuil** de coupure.



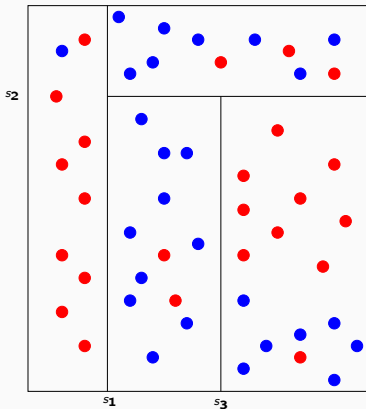
- A chaque étape, la méthode cherche une **nouvelle division** : une **variable** et un **seuil** de coupure.



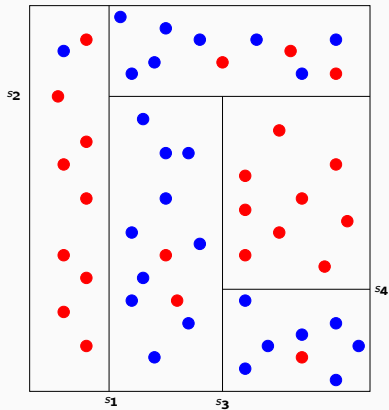
- A chaque étape, la méthode cherche une **nouvelle division** : une **variable** et un **seuil** de coupure.



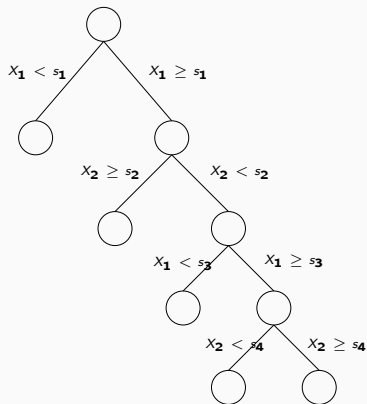
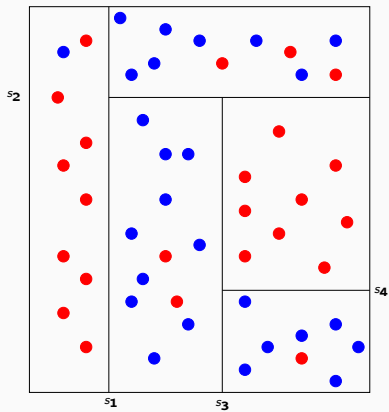
- A chaque étape, la méthode cherche une **nouvelle division** : une **variable** et un **seuil** de coupure.



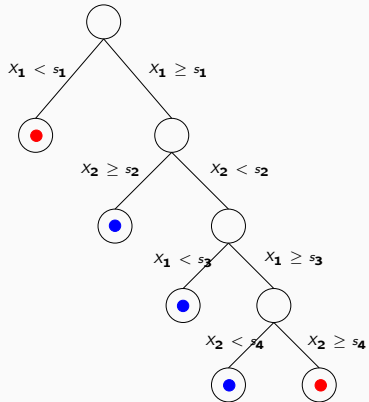
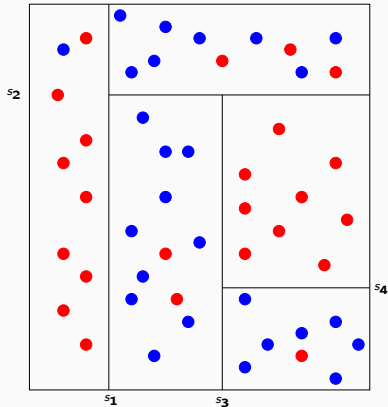
- A chaque étape, la méthode cherche une **nouvelle division** : une **variable** et un **seuil** de coupure.



Représentation de l'arbre



Représentation de l'arbre



Règle de classification

On effectue un **vote à la majorité** dans les nœuds terminaux de l'arbre.

Définition

- Les éléments de la partition d'un arbre sont appelés les **nœuds terminaux** ou les **feuilles** de l'arbre.
- L'ensemble \mathbb{R}^p constitue le **nœud racine**.
- Chaque division définit deux nœuds, les **nœuds fils à gauche et à droite**.

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

Questions

1. Comment choisir les découpes ?
2. Faut-il stopper les découpes ? Si oui, quand ?

Questions

1. Comment choisir les découpes ?
 2. Faut-il stopper les découpes ? Si oui, quand ?
- A chaque étape, on cherche un couple (j, s) qui split un noeud \mathcal{N} en deux nœuds fils :
- $$\mathcal{N}_1(j, s) = \{X \in \mathcal{N} | X_j \leq s\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(j, s) = \{X \in \mathcal{N} | X_j > s\}.$$
- La sélection du couple (j, s) s'effectue en optimisant un critère qui mesure l'(im)pureté ou l'hétérogénéité des deux nœuds fils.

- L'**impureté** \mathcal{I} d'un nœud doit être :
 1. **faible** lorsque un nœud est homogène : les valeurs de Y dans le nœud sont **proches**.
 2. **élevée** lorsque un nœud est hétérogène : les valeurs de Y dans le nœud sont **dispersés**.

Critère de découpe

- L'**impureté** \mathcal{I} d'un nœud doit être :
 1. **faible** lorsque un nœud est homogène : les valeurs de Y dans le nœud sont **proches**.
 2. **élevée** lorsque un nœud est hétérogène : les valeurs de Y dans le nœud sont **dispersés**.

L'idée

Une fois \mathcal{I} défini, on choisira le couple (j, s) qui **maximise le gain d'impureté** :

$$\Delta(\mathcal{I}) = \mathbf{P}(\mathcal{N})\mathcal{I}(\mathcal{N}) - (\mathbf{P}(\mathcal{N}_1)\mathcal{I}(\mathcal{N}_1(j, s)) + \mathbf{P}(\mathcal{N}_2)\mathcal{I}(\mathcal{N}_2(j, s))).$$

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

- Une mesure naturelle de l'impureté d'un nœud \mathcal{N} en régression est la variance du nœud :

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}} (Y_i - \bar{Y}_{\mathcal{N}})^2,$$

où $\bar{Y}_{\mathcal{N}}$ désigne la moyenne des Y_i dans \mathcal{N} .

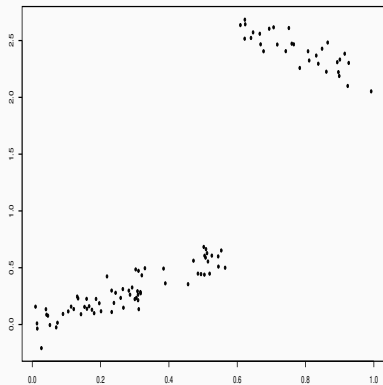
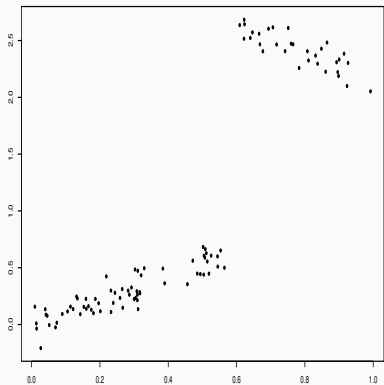
Découpe en régression

A chaque étape, on choisit le couple (j, s) qui minimise

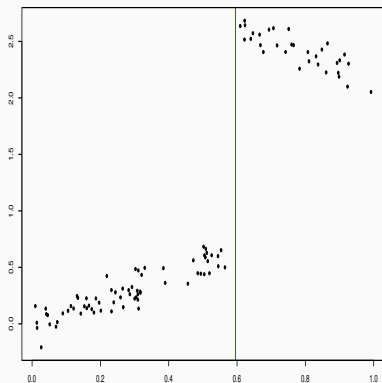
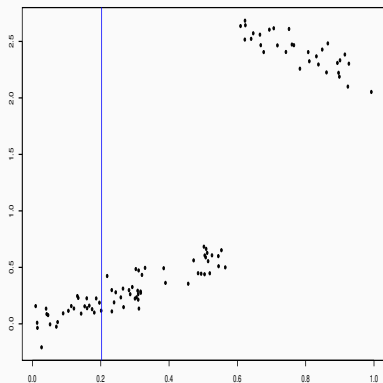
$$\sum_{X_i \in \mathcal{N}_1(j,s)} (Y_i - \bar{Y}_1)^2 + \sum_{X_i \in \mathcal{N}_2(j,s)} (Y_i - \bar{Y}_2)^2$$

où $\bar{Y}_k = \frac{1}{|\mathcal{N}_k(j,s)|} \sum_{X_i \in \mathcal{N}_k(j,s)} Y_i, k = 1, 2.$

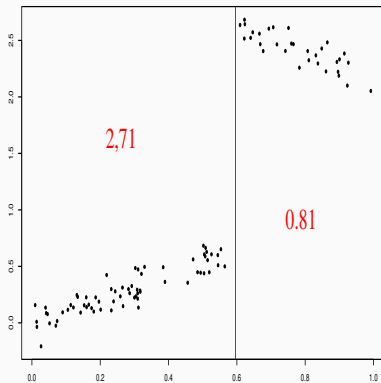
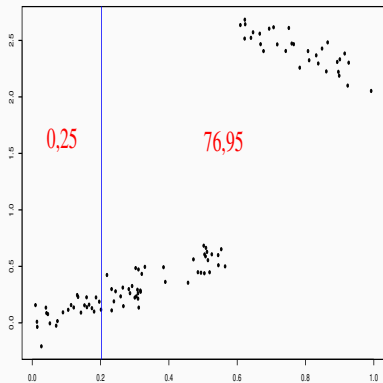
Example



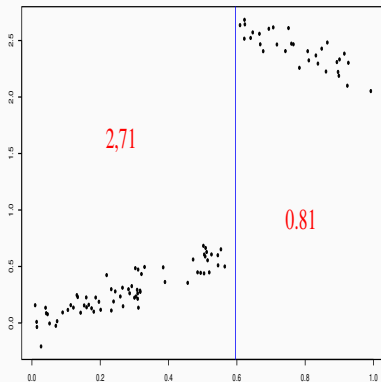
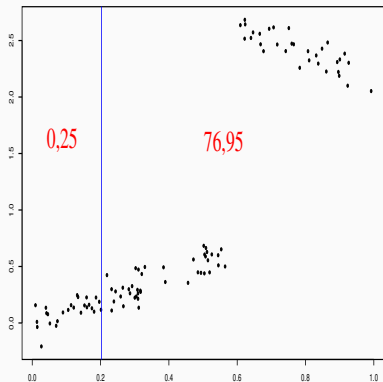
Exemple



Exemple



Exemple



Sélection

On choisira le seuil de droite.

Arbres binaires

Choix des découpes

Cas de la régression

Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

Regroupement des modalités

Division d'un nœud

Choix des paramètres

- Les $Y_i, i = 1, \dots, n$ sont à valeurs dans $\{1, \dots, K\}$.

- Les $Y_i, i = 1, \dots, n$ sont à valeurs dans $\{1, \dots, K\}$.
- On cherche une fonction \mathcal{I} telle que $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ soit
 - petite si un label majoritaire se distingue clairement dans \mathcal{N} ;
 - grande sinon.

- Les $Y_i, i = 1, \dots, n$ sont à valeurs dans $\{1, \dots, K\}$.
- On cherche une fonction \mathcal{I} telle que $\mathcal{I}(\mathcal{N})$ soit
 - **petite** si un **label majoritaire** se distingue clairement dans \mathcal{N} ;
 - **grande** sinon.

Impureté

L'**impureté** d'un nœud \mathcal{N} en classification se mesure selon

$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) = \sum_{j=1}^K f(p_j(\mathcal{N}))$$

où

- $p_j(\mathcal{N})$ représente la proportion d'observations de la classe j dans le nœud \mathcal{N} .
- f est une fonction (concave) $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Exemples de fonctions f

- Si \mathcal{N} est pur, on veut $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = 0$

Exemples de fonctions f

- Si \mathcal{N} est pur, on veut $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = 0 \implies$ c'est pourquoi f doit vérifier $f(0) = f(1) = 0$.

Exemples de fonctions f

- Si \mathcal{N} est pur, on veut $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = 0 \implies$ c'est pourquoi f doit vérifier $f(0) = f(1) = 0$.
- Les 2 mesures d'impureté les plus classiques sont :
 1. Gini : $f(p) = p(1 - p)$;
 2. Information : $f(p) = -p \log(p)$.

Exemples de fonctions f

- Si \mathcal{N} est pur, on veut $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = 0 \implies$ c'est pourquoi f doit vérifier $f(0) = f(1) = 0$.
- Les 2 mesures d'impureté les plus classiques sont :
 1. Gini : $f(p) = p(1 - p)$;
 2. Information : $f(p) = -p \log(p)$.

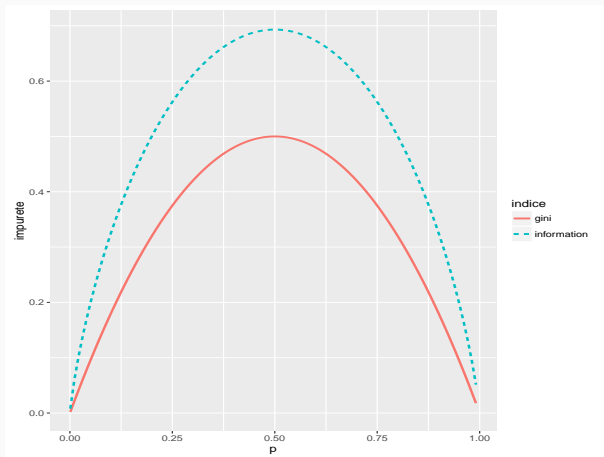
Cas binaire

Dans ce cas on a

1. $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = 2p(1 - p)$ pour Gini
2. $\mathcal{I}(\mathcal{N}) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$ pour Information

où p désigne la proportion de 1 (ou -1) dans \mathcal{N} .

Impureté dans le cas binaire



- On rappelle que pour un nœud \mathcal{N} donné et un couple (j, s) , on note

$$\mathcal{N}_1(j, s) = \{X \in \mathcal{N} | X_j \leq s\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(j, s) = \{X \in \mathcal{N} | X_j > s\}.$$

- On rappelle que pour un nœud \mathcal{N} donné et un couple (j, s) , on note

$$\mathcal{N}_1(j, s) = \{X \in \mathcal{N} | X_j \leq s\} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(j, s) = \{X \in \mathcal{N} | X_j > s\}.$$

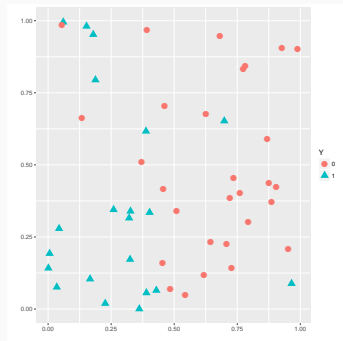
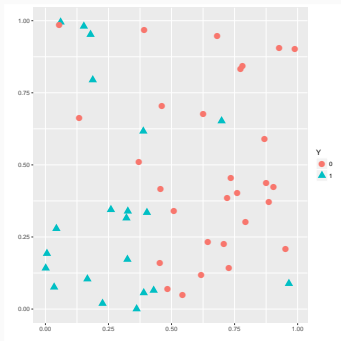
Choix de (j, s)

Pour une mesure d'impureté \mathcal{I} donnée, on choisira le couple (j, s) qui maximise le gain d'impureté :

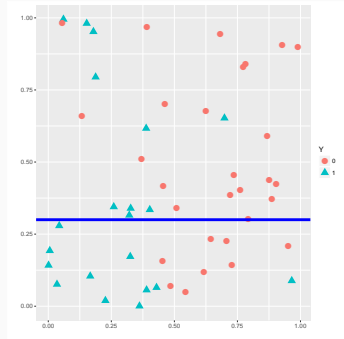
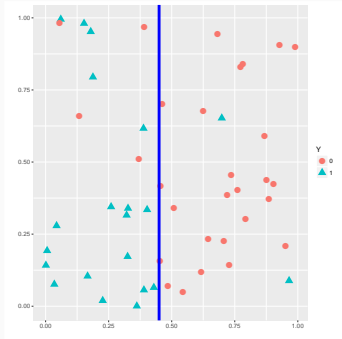
$$\Delta(\mathcal{I}) = \mathbf{P}(\mathcal{N})\mathcal{I}(\mathcal{N}) - (\mathbf{P}(\mathcal{N}_1)\mathcal{I}(\mathcal{N}_1(j, s)) + \mathbf{P}(\mathcal{N}_2)\mathcal{I}(\mathcal{N}_2(j, s))).$$

Exemple

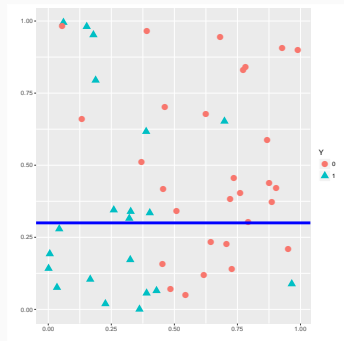
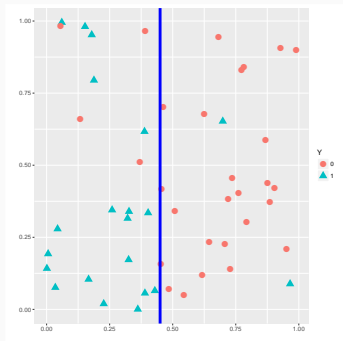
$$\mathcal{I}(\mathcal{N}) = 0.4872$$



Exemple

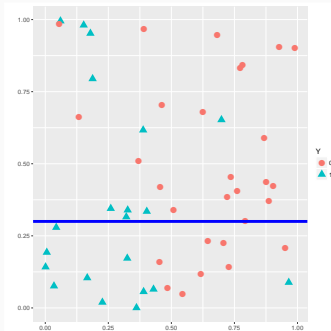
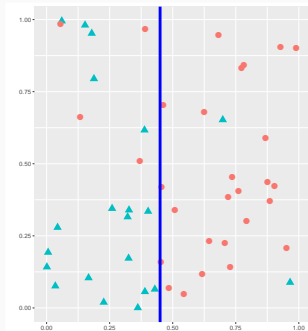


Exemple



	$\mathcal{I}(\mathcal{N}_1)$	$\mathcal{I}(\mathcal{N}_2)$	$\Delta(\mathcal{I})$
Gauche	0.287	0.137	0.281
Droite	0.488	0.437	0.031

Exemple



	$\mathcal{I}(\mathcal{N}_1)$	$\mathcal{I}(\mathcal{N}_2)$	$\Delta(\mathcal{I})$
Gauche	0.287	0.137	0.281
Droite	0.488	0.437	0.031

Conclusion

On choisira la découpe de **gauche**.

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

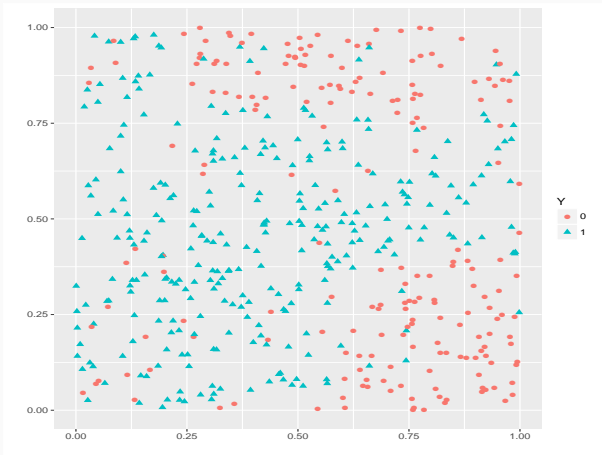
- Comment construire un "bon" arbre ?

- Comment construire un "bon" arbre ?
- Construire l'arbre maximal ? (on découpe les nœuds jusqu'à ce qu'on ne puisse plus).

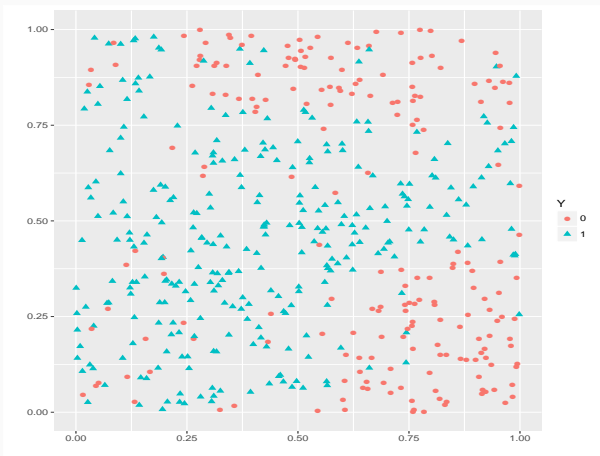
- Comment construire un "bon" arbre ?
- Construire l'arbre maximal ? (on découpe les nœuds jusqu'à ce qu'on ne puisse plus).
- Faut-il se donner un critère d'arrêt ?

- Comment construire un "bon" arbre ?
- Construire l'arbre maximal ? (on découpe les nœuds jusqu'à ce qu'on ne puisse plus).
- Faut-il se donner un critère d'arrêt ?
- Faut-il construire un arbre grand et choisir un sous-arbre de ce dernier ?

Un exemple en discrimination



Un exemple en discrimination

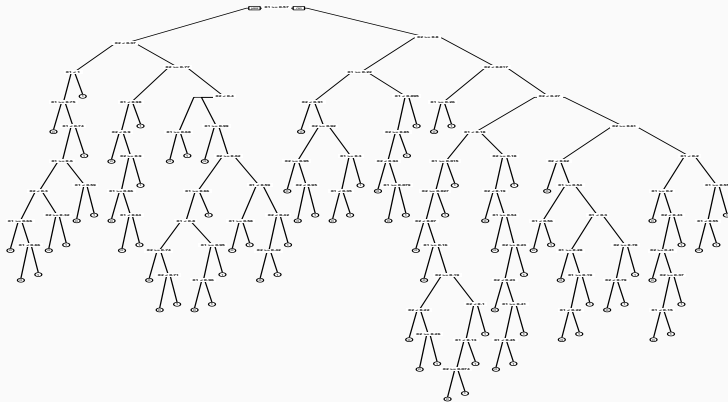


Arbre optimal ?

Intuitivement, on a envie de faire à peu près 5 classes.

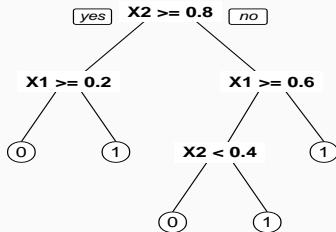
Arbre « maximal »

```
> library(rpart)
> library(rpart.plot)
> arbre1 <- rpart(Y~.,data=donnees,cp=0.0001,minsplitlevel=2)
> prp(arbre1)
```



Un arbre plus petit

```
> arbre2 <- rpart(Y~.,data=donnees)  
> prp(arbre2)
```



Comparaison des deux arbres

- On compare les performances des deux arbres en estimant leur **probabilité de mauvais classement** sur un échantillon test :

```
> prev1 <- predict(arbre1,newdata=dtest,type="class")
> prev2 <- predict(arbre2,newdata=dtest,type="class")
> round(mean(prev1!=dtest$Y),3)
[1] 0.157
> round(mean(prev2!=dtest$Y),3)
[1] 0.115
```

Comparaison des deux arbres

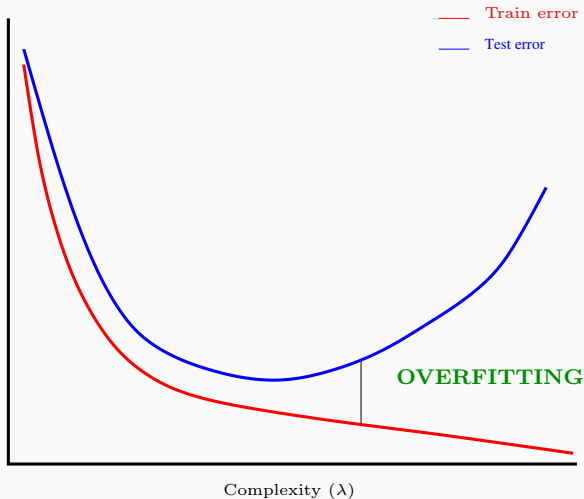
- On compare les performances des deux arbres en estimant leur **probabilité de mauvais classement** sur un échantillon test :

```
> prev1 <- predict(arbre1,newdata=dtest,type="class")
> prev2 <- predict(arbre2,newdata=dtest,type="class")
> round(mean(prev1!=dtest$Y),3)
[1] 0.157
> round(mean(prev2!=dtest$Y),3)
[1] 0.115
```

Conclusion

La performance **n'augmente pas forcément avec la profondeur**.

Sur-ajustement pour les arbres



Remarque

La complexité d'un arbre est mesurée par sa taille ou profondeur.

Biais et variance

La **profondeur** régule le compromis biais/variance :

1. **Peu de découpes** (arbres peu profonds) \implies arbres stables \implies **peu de variance**... mais... **beaucoup de biais**.
2. **Beaucoup de découpes** (arbres profonds) \implies arbres instables \implies **peu de biais**... mais... **beaucoup de variance (surapprentissage)**.

Biais et variance

La **profondeur** régule le compromis biais/variance :

1. **Peu de découpes** (arbres peu profonds) \implies arbres stables \implies **peu de variance**... mais... **beaucoup de biais**.
2. **Beaucoup de découpes** (arbres profonds) \implies arbres instables \implies **peu de biais**... mais... **beaucoup de variance** (surapprentissage).

Principe d'élagage [Breiman et al., 1984]

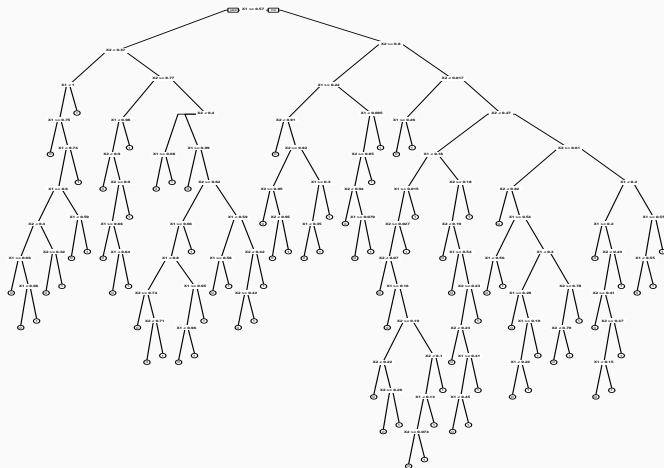
Plutôt que de choisir « quand couper » on raisonne en 3 temps :

1. On construit un **arbre maximal** (très profond) \mathcal{T}_{max} ;
2. On sélectionne une **suite d'arbres emboîtés** :

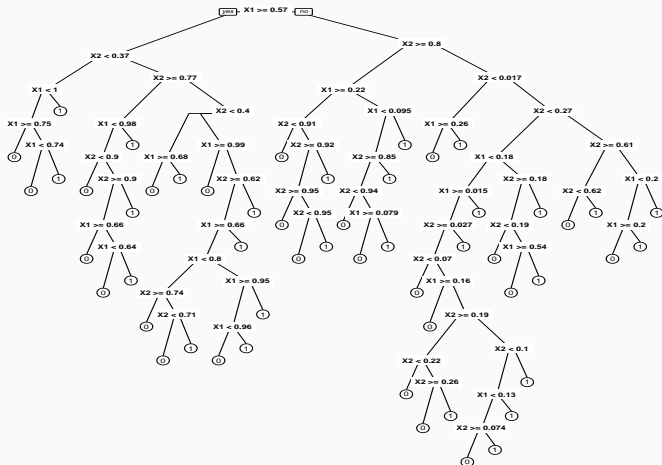
$$\mathcal{T}_{max} = \mathcal{T}_0 \supset \mathcal{T}_1 \supset \dots \supset \mathcal{T}_K.$$

3. On **sélectionne un arbre** dans cette sous-suite.

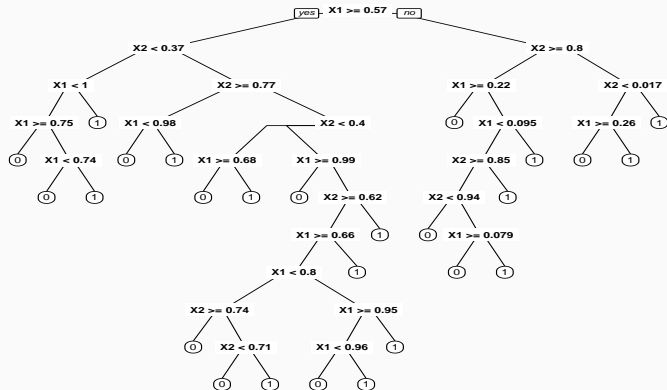
Arbres emboîtés



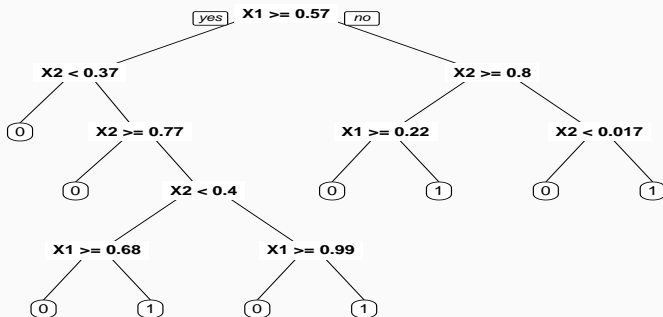
Arbres emboîtés

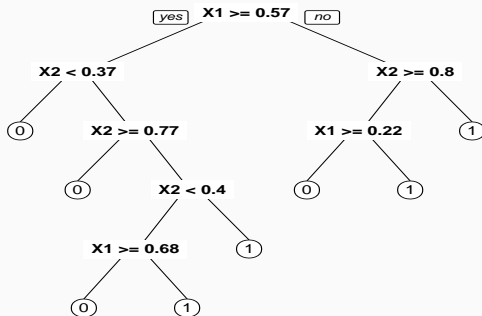


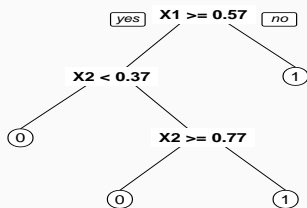
Arbres emboîtés



Arbres emboîtés







①

Construction de la suite de sous arbres

- Soit T un arbre à $|T|$ nœuds terminaux $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{|T|}$.
- Soit $R(\mathcal{N})$ le risque (l'erreur) dans le nœud \mathcal{N} :

- Régression :

$$R(\mathcal{N}) = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}} (Y_i - \bar{Y}_{\mathcal{N}})^2.$$

- Classification binaire :

$$R(\mathcal{N}) = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}} \mathbf{1}_{Y_i \neq Y_{\mathcal{N}}}.$$

Construction de la suite de sous arbres

- Soit T un arbre à $|T|$ nœuds terminaux $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{|T|}$.
- Soit $R(\mathcal{N})$ le risque (l'erreur) dans le nœud \mathcal{N} :
 - Régression :

$$R(\mathcal{N}) = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}} (Y_i - \bar{Y}_{\mathcal{N}})^2.$$

- Classification binaire :

$$R(\mathcal{N}) = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}} \mathbf{1}_{Y_i \neq Y_{\mathcal{N}}}.$$

Définition

Soit $\alpha > 0$, on pose

$$C_{\alpha}(T) = \sum_{m=1}^{|T|} N_m R(\mathcal{N}_m) + \alpha |T|.$$

Idée

- $C_\alpha(T)$ est un critère qui prend en compte l'adéquation d'un arbre et sa complexité.
- L'idée est de chercher un arbre T_α qui minimise $C_\alpha(T)$ pour une valeur de α bien choisie.

Idée

- $C_\alpha(T)$ est un critère qui prend en compte l'adéquation d'un arbre et sa complexité.
- L'idée est de chercher un arbre T_α qui minimise $C_\alpha(T)$ pour une valeur de α bien choisie.

Remarque

- $\alpha = 0 \implies T_\alpha = T_0 = T_{max}$.
- $\alpha = +\infty \implies T_\alpha = T_{+\infty} = \text{arbre sans coupure}$.

Idée

- $C_\alpha(T)$ est un critère qui prend en compte l'adéquation d'un arbre et sa complexité.
- L'idée est de chercher un arbre T_α qui minimise $C_\alpha(T)$ pour une valeur de α bien choisie.

Remarque

- $\alpha = 0 \implies T_\alpha = T_0 = T_{max}$.
- $\alpha = +\infty \implies T_\alpha = T_{+\infty} = \text{arbre sans coupure}$.
- α est appelé paramètre de complexité et $C_\alpha(T)$ le cout de l'arbre T .

[
Théorème[Breiman et al., 1984]] Il existe une sous-suite finie
 $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_M$ avec $M < |T_{max}|$ et une suite associée d'arbres
emboîtés

$$T_{max} = T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_M$$

telles que $\forall \alpha \in [\alpha_m, \alpha_{m+1}[$

$$T_m = \operatorname{argmin}_T C_\alpha(T).$$

[

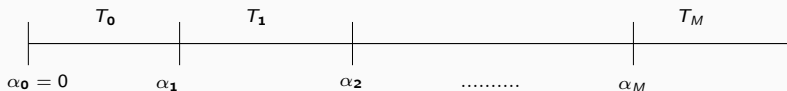
Théorème[Breiman et al., 1984]] Il existe une sous-suite finie

$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_M$ avec $M < |T_{\max}|$ et une suite associée d'arbres emboîtés

$$T_{\max} = T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_M$$

telles que $\forall \alpha \in [\alpha_m, \alpha_{m+1}[$

$$T_m = \operatorname{argmin}_T C_\alpha(T).$$

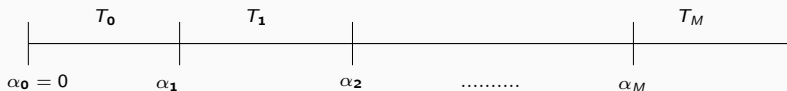


[
Théorème[Breiman et al., 1984]] Il existe une sous-suite finie
 $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_M$ avec $M < |T_{\max}|$ et une suite associée d'arbres
 emboîtés

$$T_{\max} = T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_M$$

telles que $\forall \alpha \in [\alpha_m, \alpha_{m+1}[$

$$T_m = \operatorname{argmin}_T C_\alpha(T).$$



Conséquences

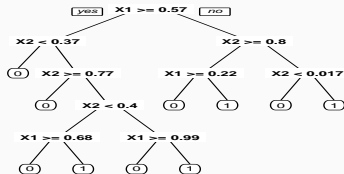
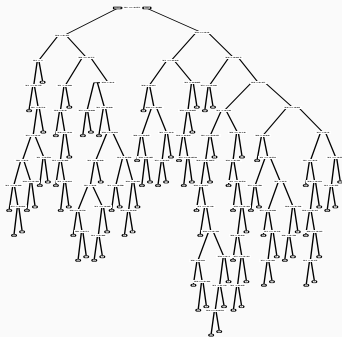
- On se ramène à une sous-suite finie d'arbres (emboîtés).
- Il reste à choisir un arbre (ou une valeur de α).

Exemple

```
> printcp(arbre)
Classification tree:
rpart(formula = Y ~ ., data = donnees, cp = 1e-04, minsplit = 2)
Variables actually used in tree construction:
[1] X1 X2
Root node error: 204/500 = 0.408
n= 500
```

	CP	nsplit	rel error	xerror	xstd
1	0.2941176	0	1.000000	1.00000	0.053870
2	0.1225490	1	0.705882	0.71569	0.049838
3	0.0931373	3	0.460784	0.49020	0.043844
4	0.0637255	4	0.367647	0.43627	0.041928
5	0.0122549	5	0.303922	0.34314	0.038034
6	0.0098039	7	0.279412	0.34314	0.038034
7	0.0049020	9	0.259804	0.36275	0.038923
8	0.0040107	25	0.181373	0.34804	0.038260
9	0.0036765	41	0.112745	0.39216	0.040184
10	0.0032680	49	0.083333	0.40196	0.040586
11	0.0024510	52	0.073529	0.41176	0.040980
12	0.0001000	82	0.000000	0.43137	0.041742

```
> arbre1 <- prune(arbre, cp=0.005)
> prp(arbre)
> prp(arbre1)
```



Choix d'un arbre

Il reste à sélectionner un arbre dans la suite

$$T_{max} = T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_M$$

Sélection d'un arbre

Choix d'un risque

La sélection de l'**arbre final** s'effectue en choisissant l'élément de la suite qui minimise le risque moyen $\mathbf{E}[R(Y, T_m(X))]$. Par exemple,

1. l'**erreur quadratique** $\mathbf{E}[(Y - T_m(X))^2]$ en **régression** ;
2. la **probabilité d'erreur** $\mathbf{P}(Y \neq T_m(X))$ en **discrimination binaire**.

Ce risque (inconnu) est estimé par **validation croisée**.

Sélection d'un arbre

Choix d'un risque

La sélection de l'**arbre final** s'effectue en choisissant l'élément de la suite qui minimise le risque moyen $\mathbf{E}[R(Y, T_m(X))]$. Par exemple,

1. l'**erreur quadratique** $\mathbf{E}[(Y - T_m(X))^2]$ en **régression** ;
2. la **probabilité d'erreur** $\mathbf{P}(Y \neq T_m(X))$ en **discrimination binaire**.

Ce risque (inconnu) est estimé par **validation croisée**.

Choix de l'arbre final

L'approche consiste à

1. **estimer le risque** pour chaque α_m .
2. choisir le α_m qui **minimise le risque estimé** $\implies T_{\alpha_m}$.

Algorithme

1. Calculer la suite $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_M$ et poser

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}, \quad \beta_3 = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3}, \quad \dots, \quad \beta_{M+1} = \infty.$$

2. **Séparer les données** en K blocs G_1, \dots, G_k de taille k/n . Pour $i = 1, \dots, k$:

- 2.1 Construire les arbres $T_{\beta_1}, \dots, T_{\beta_{M+1}}$ sur l'ensemble des observations **privé du i ème bloc**.

- 2.2 En déduire pour tout $j \in G_i$ et tout $m \leq M+1$, $\hat{Y}_j(\beta_m) = T_{\beta_m}(X_j)$.

3. Calculer $\mathcal{R}(m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(Y_i, \hat{Y}_i(\beta_m))$ pour $m = 1, \dots, M+1$.

4. **Choisir** α_{m^*} tel que $\beta_{m^*+1} = \operatorname{argmin}_{m \leq M+1} \mathcal{R}(m)$.

- Les estimations $\mathcal{R}(m)$ se trouvent dans la colonne **xerror** de la fonction **printcp** :

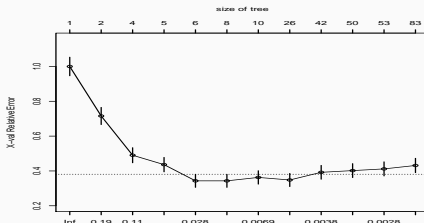
	CP	nsplit	rel error	xerror	xstd
1	0.2941176	0	1.000000	1.00000	0.053870
2	0.1225490	1	0.705882	0.71569	0.049838
3	0.0931373	3	0.460784	0.49020	0.043844
4	0.0637255	4	0.367647	0.43627	0.041928
5	0.0122549	5	0.303922	0.34314	0.038034
6	0.0098039	7	0.279412	0.34314	0.038034
7	0.0049020	9	0.259804	0.36275	0.038923

- Les estimations $\mathcal{R}(m)$ se trouvent dans la colonne **xerror** de la fonction **printcp** :

	CP	nsplit	rel error	xerror	xstd
1	0.2941176	0	1.000000	1.00000	0.053870
2	0.1225490	1	0.705882	0.71569	0.049838
3	0.0931373	3	0.460784	0.49020	0.043844
4	0.0637255	4	0.367647	0.43627	0.041928
5	0.0122549	5	0.303922	0.34314	0.038034
6	0.0098039	7	0.279412	0.34314	0.038034
7	0.0049020	9	0.259804	0.36275	0.038923

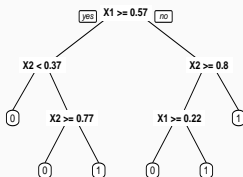
- On peut représenter les erreurs en fonction des α_m à l'aide de **plotcp**

```
> plotcp(arbre3)
```



Tracé de l'arbre final

```
> alpha_opt <- arbre$cptable[which.min(arbre$cptable[, "xerror"]), "CP"]  
> arbre_final <- prune(arbre, cp=alpha_opt)  
> prp(arbre_final)
```



- L'arbre final \mathcal{T} renvoie une **partition** de \mathbb{R}^p en $|\mathcal{T}|$ nœuds terminaux $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{|\mathcal{T}|}$.

Règle de classification et score par arbre

- L'arbre final \mathcal{T} renvoie une **partition** de \mathbb{R}^p en $|\mathcal{T}|$ nœuds terminaux $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{|\mathcal{T}|}$.
- **Règle de classification** :

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=1} \geq \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=0} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{N}(x)$ désigne le nœud terminal qui contient x .

Règle de classification et score par arbre

- L'arbre final \mathcal{T} renvoie une **partition** de \mathbb{R}^p en $|\mathcal{T}|$ nœuds terminaux $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{|\mathcal{T}|}$.
- **Règle de classification** :

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=1} \geq \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=0} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathcal{N}(x)$ désigne le nœud terminal qui contient x .

- **Score** :

$$\hat{S}(x) = \hat{\mathbf{P}}(Y = 1 | X = x) = \frac{1}{n} \sum_{i: X_i \in \mathcal{N}(x)} \mathbf{1}_{Y_i=1}.$$

Fonction predict

- La fonction predict (predict.rpart) permet d'estimer la classe ou le score :

```
> x_new <- data.frame(X1=0.5,X2=0.85)
> predict(arbre_final,newdata=x_new)
      0      1
1 0.9 0.1
> predict(arbre_final,newdata=x_new,type="class")
1
0
Levels: 0 1
```

- Méthode « simple » relativement facile à mettre en œuvre.
- Fonctionne en régression et en discrimination.
- Résultats interprétables (à condition que l'arbre ne soit pas trop profond).

- Méthode « simple » relativement facile à mettre en œuvre.
- Fonctionne en **régression** et en **discrimination**.
- Résultats **interprétables** (à condition que l'arbre ne soit pas trop profond).
- **Un inconvénient** : méthode connue pour être **instable**, sensible à de légères perturbations de l'échantillon.

- Méthode « simple » relativement facile à mettre en œuvre.
- Fonctionne en régression et en discrimination.
- Résultats interprétables (à condition que l'arbre ne soit pas trop profond).
- Un inconvénient : méthode connue pour être instable, sensible à de légères perturbations de l'échantillon.
- Cet inconvénient sera un avantage pour des agrégations bootstrap \Rightarrow forêts aléatoires.

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

- CHAID : Chi2 Automatic Interaction Detection [[Kass, 1980](#)].

- CHAID : Chi2 Automatic Interaction Detection [Kass, 1980].
- 2 étapes χ^2 dans le procédé de division d'un nœud :
 - regrouper les modalités peu discriminantes de chaque variable explicative X_j ;
 - choisir la variable à utiliser pour scinder le nœud.

χ^2 d'indépendance : rappel

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F . On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : " X et Y sont indépendantes" contre H_1 : " X et Y ne sont pas indépendantes".

χ^2 d'indépendance : rappel

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F . On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : " X et Y sont indépendantes" contre H_1 : " X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne (E_1, \dots, E_I) et (F_1, \dots, F_J) deux partitions de E et F .

χ^2 d'indépendance : rappel

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F . On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : " X et Y sont indépendantes" contre H_1 : " X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne (E_1, \dots, E_I) et (F_1, \dots, F_J) deux partitions de E et F .
- On dispose de n mesures du couple (X, Y) et on désigne par N_{ij} l'effectif observé dans la classe $E_i \times F_j$.

χ^2 d'indépendance : rappel

- Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans E et F . On souhaite tester au niveau α les hypothèses H_0 : " X et Y sont indépendantes" contre H_1 : " X et Y ne sont pas indépendantes".
- On se donne (E_1, \dots, E_I) et (F_1, \dots, F_J) deux partitions de E et F .
- On dispose de n mesures du couple (X, Y) et on désigne par N_{ij} l'effectif observé dans la classe $E_i \times F_j$.

	F_1	\dots	F_j	\dots	F_J	Total
E_1	N_{11}	\dots	N_{1j}	\dots	N_{1J}	$N_{1\bullet}$
\vdots						\vdots
E_i	N_{i1}	\dots	N_{ij}	\dots	N_{iJ}	$N_{i\bullet}$
\vdots						\vdots
E_I	N_{I1}	\dots	N_{Ij}	\dots	N_{IJ}	$N_{I\bullet}$
Total	$N_{\bullet 1}$	\dots	$N_{\bullet j}$	\dots	$N_{\bullet J}$	n

Propriété

Sous H_0 la statistique

$$X_n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\left(\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n} - N_{ij} \right)^2}{\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}}$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

Propriété

Sous H_0 la statistique

$$X_n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\left(\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n} - N_{ij} \right)^2}{\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}}$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

Conséquence

- Au niveau α , on **rejettera l'hypothèse H_0** si X_{obs} est supérieure au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

Propriété

Sous H_0 la statistique

$$X_n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\left(\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n} - N_{ij} \right)^2}{\frac{N_{i\bullet} N_{\bullet j}}{n}}$$

converge en loi vers la loi $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.

Conséquence

- Au niveau α , on **rejettera l'hypothèse H_0** si X_{obs} est supérieure au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi du $\chi^2_{(I-1)(J-1)}$.
- Une **forte valeur de X_{obs}** (ou une **faible valeur de la probabilité critique**) signifiera un **lien fort** entre les deux variables.

Chaid : le principe

- On suppose dans un premier temps que toutes les variables explicatives $X_j, j = 1, \dots, p$ sont qualitatives à M_j modalités.

Division d'un nœud

1. **Regroupement** des modalités peu discriminantes de chaque variable X_j ;
2. **Choix** de la variable X_j la plus **discriminante**
3. Le nœud est alors **divisé** en un nombre de nœuds fils égal au nombre de modalités créées à l'étape 1.

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

1. On se place dans un nœud \mathcal{N} et on considère une variable X_j à M_j modalités ;
2. Les observations dans le nœud définissent la table de contingence suivante

	M_1	\dots	M_j
1			
\vdots			
K			

3. $\forall (M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2$, on calcule la statistique du χ^2 croisant Y et les modalités $(M_i, M_\ell) \implies \chi^2(M_i, M_\ell)$ et $p(M_i, M_\ell)$ la probabilité critique associée.

1. On se place dans un nœud \mathcal{N} et on considère une variable X_j à M_j modalités ;
2. Les observations dans le nœud définissent la table de contingence suivante

	M_1	\dots	M_j
1			
\vdots			
K			

3. $\forall (M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2$, on calcule la statistique du χ^2 croisant Y et les modalités $(M_i, M_\ell) \Rightarrow \chi^2(M_i, M_\ell)$ et $p(M_i, M_\ell)$ la probabilité critique associée.

Remarque

- 2 modalités discriminantes \Rightarrow dépendance forte dans le test avec $Y \Rightarrow$ "Fort rejet" de $H_0 \Rightarrow \chi^2$ élevé ou pc faible ;

1. On se place dans un nœud \mathcal{N} et on considère une variable X_j à M_j modalités ;
2. Les observations dans le nœud définissent la table de contingence suivante

	M_1	\dots	M_j
1			
\vdots			
K			

3. $\forall (M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2$, on calcule la statistique du χ^2 croisant Y et les modalités $(M_i, M_\ell) \Rightarrow \chi^2(M_i, M_\ell)$ et $p(M_i, M_\ell)$ la probabilité critique associée.

Remarque

- 2 modalités discriminantes \Rightarrow dépendance forte dans le test avec $Y \Rightarrow$ "Fort rejet" de $H_0 \Rightarrow \chi^2$ élevé ou pc faible ;
- Regrouper les modalités peu discriminantes revient donc à regrouper celles qui ont un χ^2 faible ou une pc grande.

4. On choisit la **paire de modalités** qui minimise le χ^2 :

$$(\tilde{M}_i, \tilde{M}_\ell) = \underset{(M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2}{\operatorname{argmin}} \chi^2(M_i, M_\ell) = \underset{(M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2}{\operatorname{argmax}} p(M_i, M_\ell).$$

4. On choisit la **paire de modalités** qui minimise le χ^2 :

$$(\tilde{M}_i, \tilde{M}_\ell) = \underset{(M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2}{\operatorname{argmin}} \chi^2(M_i, M_\ell) = \underset{(M_i, M_\ell) \in \{M_1, \dots, M_j\}^2}{\operatorname{argmax}} p(M_i, M_\ell).$$

5. Si $p(\tilde{M}_i, \tilde{M}_\ell) > \alpha_2$ ($\alpha_2 \in]0, 1[$ **fixé par l'utilisateur**) alors on **regroupe les modalités \tilde{M}_i et \tilde{M}_ℓ** et on retourne à l'étape 2 avec le tableau à $M_j - 1$ modalités

	M_1	\dots	$M_j - 1$
1			
\vdots			
K			

Sinon, on stoppe les regroupements.

Exemple i

- On considère la variable **marstat** :

```
> aa <- table(USvoteS$vote3,USvoteS$marstat)
> aa
```

	married	widowed	divorced	never married
Gore	246	57	82	111
Bush	315	44	48	60

- On calcule les **probabilités critiques** pour les **6 croisements** :

Exemple ii

```
> res <- matrix(0,nrow=4,ncol=4)
> rownames(res) <- levels(USvoteS$marstat)
> colnames(res) <- levels(USvoteS$marstat)
> for (i in 1:3)
+   for (j in (i+1):4)
+     res[i,j] <- chisq.test(aa[,c(i,j)])$p.value
+
+
> res
```

	married	widowed	divorced	never married
married	0	0.0194	7.64e-05	1.41e-06
widowed	0	0.0000	3.06e-01	1.65e-01
divorced	0	0.0000	0.00e+00	7.42e-01
never married	0	0.0000	0.00e+00	0.00e+00

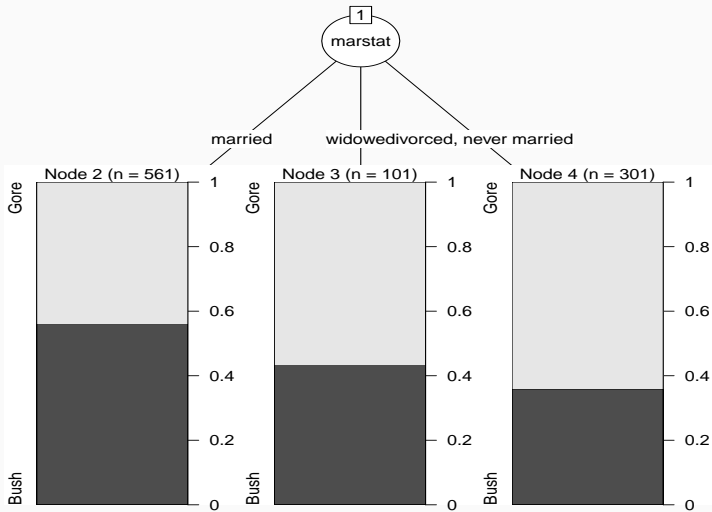
Exemple de regroupement

Les modalités **divorced** et **never married** sont regroupées (si $\alpha_2 < 0.742$).

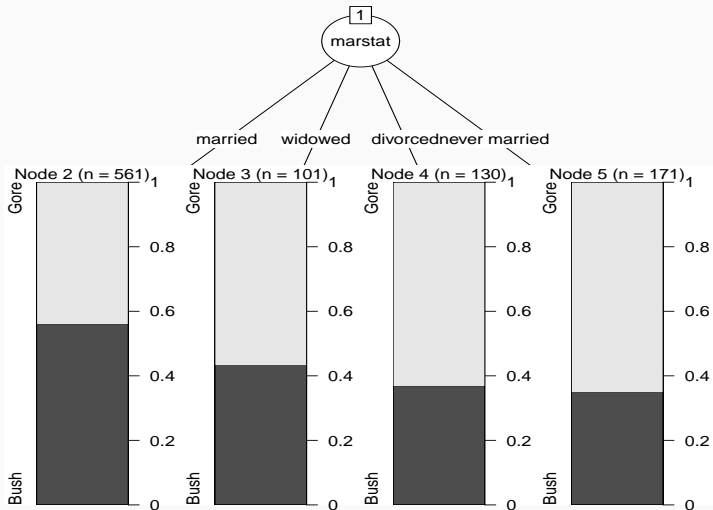
- En effet

```
> ctrl <- chaid_control(minsplit = 20,alpha2=0.74)
> a1 <- chaid(vote3~marstat,data=USvoteS,control = ctrl)
> plot(a1)
```

Exemple iv



```
> ctrl1 <- chaid_control(minsplit = 20,alpha2=0.75)
> a2 <- chaid(vote3~marstat,data=USvoteS,control = ctrl1)
> plot(a2)
```



- Variables **ordinales** : le traitement est **identique**. Seules les **modalités contiguës** peuvent être regroupées.

- Variables **ordinales** : le traitement est **identique**. Seules les **modalités contiguës** peuvent être regroupées.
- Variables **continues** : traitées comme des variables ordinales. Penser à utiliser **as.ordered** sur **R**.

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

Un autre χ^2 pour choisir la variable

- La phase **regroupement** effectuée, il faut choisir une variable parmi les p variables regroupées pour **diviser** le nœud.

Un autre χ^2 pour choisir la variable

- La phase **regroupement** effectuée, il faut choisir une variable parmi les p variables regroupées pour **diviser** le nœud.
- Idée** : faire un χ^2 pour chaque variable :

	(X_1, M_1)	...	(X_1, M_{1j})	(X_2, M_1)	...	(X_2, M_{2j})	...
1							
\vdots							
K							

$\Rightarrow p$ probabilités critiques $p(X_1), \dots, p(X_p)$ et

Un autre χ^2 pour choisir la variable

- La phase **regroupement** effectuée, il faut choisir une variable parmi les p variables regroupées pour **diviser** le nœud.
- Idée** : faire un χ^2 pour chaque variable :

	(X_1, M_1)	...	(X_1, M_{1j})	(X_2, M_1)	...	(X_2, M_{2j})	...
1							
\vdots							
K							

$\implies p$ probabilités critiques $p(X_1), \dots, p(X_p)$ et

- X_j discriminante \implies rejet de $H_0 \implies p(X_j)$ petite.

Un autre χ^2 pour choisir la variable

- La phase **regroupement** effectuée, il faut choisir une variable parmi les p variables regroupées pour **diviser** le nœud.
- Idée** : faire un χ^2 pour chaque variable :

	(X_1, M_1)	...	(X_1, M_{1j})	(X_2, M_1)	...	(X_2, M_{2j})	...
1							
\vdots							
K							

$\implies p$ probabilités critiques $p(X_1), \dots, p(X_p)$ et

- X_j discriminante \implies rejet de $H_0 \implies p(X_j)$ petite.
- On **choisit la variable j** qui possède la plus **petite probabilité critique**.

Correction de Bonferroni

- Tendance à **favoriser** les variables ayant subi le **plus de regroupements** (erreur de type 1).

Correction de Bonferroni

- Tendance à **favoriser** les variables ayant subi le **plus de regroupements** (erreur de type 1).
- Pour rééquilibrer, les probabilités critiques sont multipliées par le **coefficient de Bonferroni** :

$$p'(X_j) = b_j p(X_j)$$

où b_j correspond au nombre de manières les regrouper les M_j modalités initiales de X_j en \tilde{M}_j modalités finales.

Correction de Bonferroni

- Tendance à **favoriser** les variables ayant subi le **plus de regroupements** (erreur de type 1).
- Pour rééquilibrer, les probabilités critiques sont multipliées par le **coefficient de Bonferroni** :

$$p'(X_j) = b_j p(X_j)$$

où b_j correspond au nombre de manières les regrouper les M_j modalités initiales de X_j en \tilde{M}_j modalités finales.

- Variable **qualitative** et **ordinaire** :

$$b_j = \sum_{i=0}^{\tilde{M}_j-1} (-1)^i \frac{(\tilde{M}_j - i)^{M_j}}{i! (\tilde{M}_j - i)!} \quad b_j = \binom{M_j - 1}{\tilde{M}_j - 1}.$$

- On choisira la variable j^* qui minimise $p'(X_j)$...

- On choisira la variable j^* qui minimise $p'(X_j)$...
- à condition que $p'(X_j)$ soit plus petit qu'un certain seuil α_4 fixé par l'utilisateur.

- On choisira la variable j^* qui minimise $p'(X_j)$...
- à condition que $p'(X_j)$ soit plus petit qu'un certain seuil α_4 fixé par l'utilisateur.
- Le nœud sera scindé en autant de groupes que X_j possède de modalités (après la phase de regroupement).

Un nœud ne sera pas divisé si :

- $p'(X_j) > \alpha_4$ pour tout $j = 1, \dots, p$.
- le nœud est pur ou quasiment pur.
- le nœud contient trop peu d'observations...

Critère d'arrêt

Un nœud ne sera pas divisé si :

- $p'(X_j) > \alpha_4$ pour **tout** $j = 1, \dots, p$.
- le nœud est **pur** ou quasiment pur.
- le nœud contient **trop peu d'observations**...

Remarque

Sur **R**, on pourra regarder la fonction **chaid.control** :

```
chaid_control(alpha2 = 0.05, alpha3 = -1, alpha4 = 0.05,  
              minsplitlet = 20, minbucket = 7, minprob = 0.01,  
              stump = FALSE, maxheight = -1)
```

Arbres binaires

Choix des découpes

- Cas de la régression

- Cas de la classification supervisée

Elagage

Annexe : arbres Chaid

- Regroupement des modalités

- Division d'un nœud

- Choix des paramètres

- En plus des paramètres associés au critère d'arrêt, deux paramètres sont à calibrer pour construire l'arbre : les niveaux α_2 et α_4 .

- En plus des paramètres associés au critère d'arrêt, deux paramètres sont à calibrer pour construire l'arbre : les niveaux α_2 et α_4 .
- Il en existe un troisième (α_3) qui concerne la remise en cause des regroupements des modalités.

- En plus des paramètres associés au critère d'arrêt, deux paramètres sont à calibrer pour construire l'arbre : les niveaux α_2 et α_4 .
- Il en existe un troisième (α_3) qui concerne la remise en cause des regroupements des modalités.

Choix de α_4

Degrés d'exigence pour couper un nœud :

- petit : très exigeant \implies arbres peu profonds (beaucoup de biais et peu de variance) ;
- grand : peu exigeant \implies arbres profonds (beaucoup de variance et peu de biais).

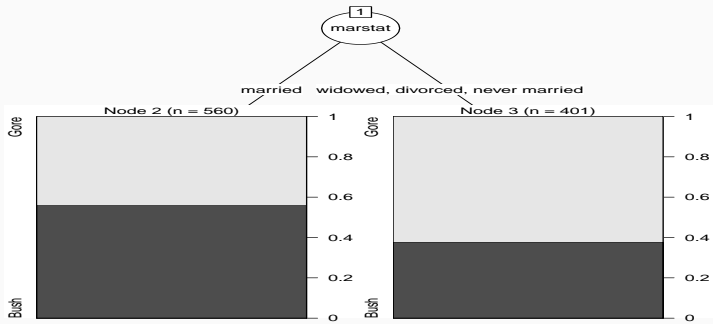
Choix de α_2

Degrés d'exigence pour regrouper des modalités :

- **petit** : peu exigeant \implies beaucoup de regroupements (on se rapproche des arbres binaires) ;
- **grand** : très exigeant \implies peu de regroupements.

```
> ctrl <- chaid_control(minsplit = 20,alpha4=0.0005)
> a1 <- chaid(vote3~.,data=USvoteS,control=ctrl)
> plot(a1)
```

Illustration α_4 ii

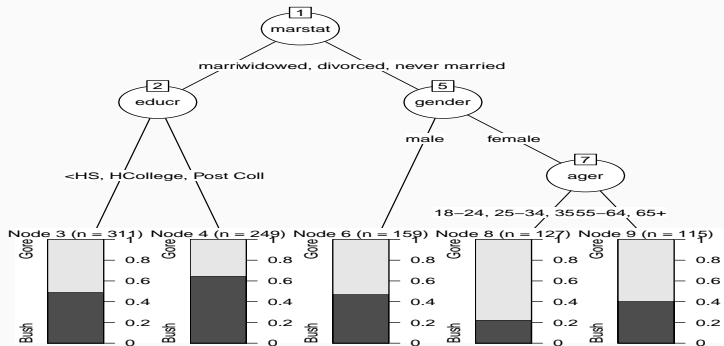


```
> ctrl <- chaid_control(minsplit = 20,alpha4=0.25)
> a2 <- chaid(vote3~.,data=USvoteS,control=ctrl)
> plot(a2)
```

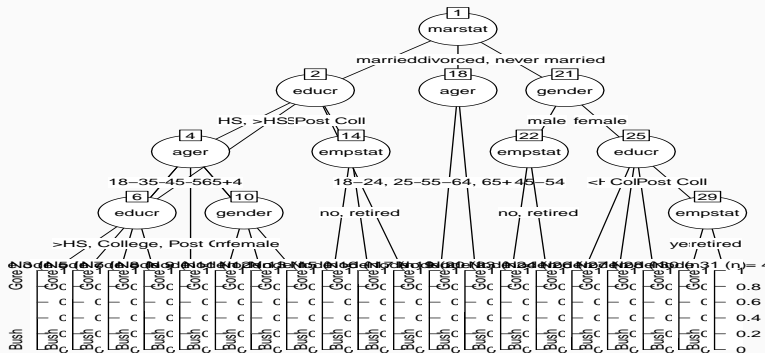


```
> ctrl <- chaid_control(minsplit = 20,alpha2=0.005)
> a3 <- chaid(vote3~.,data=USvoteS,control=ctrl)
> plot(a3)
```

Illustration α_2 ii



```
> ctrl <- chaid_control(minsplit = 20,alpha2=0.5)
> a4 <- chaid(vote3~.,data=USvoteS,control=ctrl)
> plot(a4)
```



- L'influence de ces deux paramètres est bien entendu conjointe.

- L'influence de ces deux paramètres est bien entendu conjointe.
- Il n'est pas facile de les calibrer simultanément.

- L'influence de ces deux paramètres est bien entendu conjointe.
- Il n'est pas facile de les calibrer simultanément.
- Approche classique : évaluer les performances (erreur de classification AUC...) pour plusieurs valeurs de (α_2, α_4) sur un échantillon test ou par validation croisée.

Exemple i

- On veut expliquer avec un arbre CHAID la variable **chd** par les autres variables du jeu de données **SAheart**.

```
> donnees <- SAheart  
> donnees$chd <- as.factor(donnees$chd)  
> for (i in c(1:4,6:9)){donnees[,i] <- as.ordered(donnees[,i])}
```

- On va séparer l'échantillon en 2 et estimer l'erreur de classification sur une grille de valeur de α_2 et α_4 :

Exemple ii

```
> alpha2 <- seq(0.01,0.35,by=0.05)
> alpha4 <- seq(0.01,0.35,by=0.05)
> gr.alpha <- expand.grid(alpha2,alpha4)
> names(gr.alpha) <- c("alpha2","alpha4")
> gr.alpha$perf <- 0
> set.seed(1234)
> perm <- sample(nrow(SAheart))
> dapp <- donnees[perm[1:300],]
> dtest <- donnees[-perm[1:300],]
```

- On estime l'erreur de classification sur les données test :

Exemple iii

```
> for (i in 1:nrow(gr.alpha)){  
>   ctrl <- chaid_control(alpha2=gr.alpha[i,1],alpha4=gr.alpha[i,2])  
>   a <- chaid(chd~.,data=dapp,control=ctrl)  
>   prev <- predict(a,newdata = dtest)  
>   gr.alpha$perf[i] <- mean(prev!=dtest$chd)  
> }
```

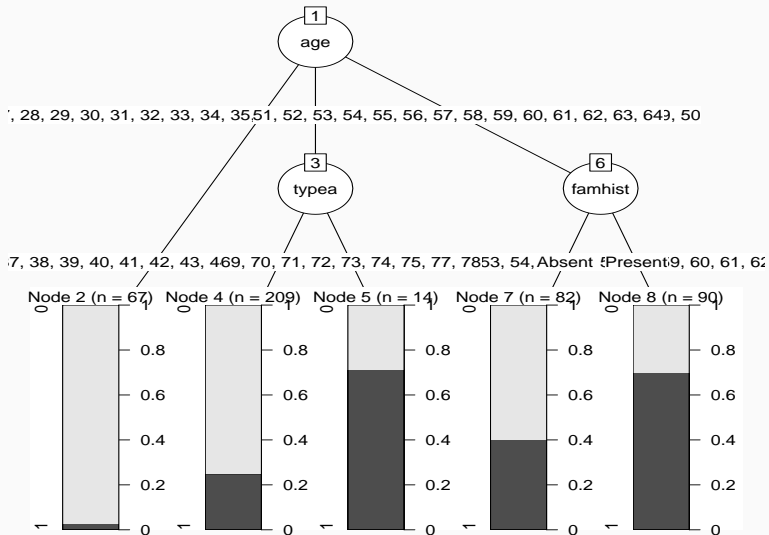
- On récupère les valeurs de α_2 et α_4 qui minimisent l'erreur estimée :

```
> alpha_opt <- gr.alpha[which.min(gr.alpha$perf),]  
> alpha_opt  
  alpha2 alpha4      perf  
1    0.01    0.01 0.2716049
```

- On peut tracer l'arbre sélectionné :

```
> ctrl <- chaid_control(alpha2=alpha_opt[1],alpha4=alpha_opt[2])  
> arbre_final <- chaid(chd~.,data=donnees,control=ctrl)  
> plot(arbre_final)
```

Exemple iv



- On peut faire la même chose avec **caret** (en plus efficace) :

```
> grille <- gr.alpha[,1:2]
> grille$alpha3 <- -1
> library(doMC)
> registerDoMC(cores = 3)
> bb <- train(donnees[,-10],donnees$chd,method="chaid",
             tuneGrid=grille,trControl=ctrl1,metric="Accuracy")
> bb
```

CHi-squared Automated Interaction Detection

462 samples

9 predictor

2 classes: '0', '1'

No pre-processing

Resampling: Repeated Train/Test Splits Estimated (1 reps, 75%)

Summary of sample sizes: 300

Resampling results across tuning parameters:

alpha2	alpha4	Accuracy	Kappa
0.01	0.01	0.7283951	0.3847747
0.01	0.06	0.7283951	0.3847747
0.01	0.11	0.7283951	0.3847747
0.01	0.16	0.7283951	0.3847747
0.01	0.21	0.7283951	0.3847747
0.01	0.26	0.6851852	0.2528486
0.01	0.31	0.6851852	0.2528486
0.06	0.01	0.6851852	0.2528486
0.06	0.06	0.6851852	0.2528486
0.06	0.11	0.6851852	0.2528486
0.06	0.16	0.6851852	0.2528486
0.06	0.21	0.6851852	0.2528486
0.06	0.26	0.6728395	0.3284843
0.06	0.31	0.6728395	0.2302313
0.11	0.01	0.6419753	0.2394366

0.11	0.06	0.6419753	0.2839506
0.11	0.11	0.6419753	0.2839506
0.11	0.16	0.6419753	0.2839506
0.11	0.21	0.6419753	0.2839506
0.11	0.26	0.6296296	0.2646391
0.11	0.31	0.6419753	0.2839506
0.16	0.01	0.6419753	0.2394366
0.16	0.06	0.6419753	0.2839506
0.16	0.11	0.6419753	0.2839506
0.16	0.16	0.6419753	0.2839506
0.16	0.21	0.6419753	0.2839506
0.16	0.26	0.6296296	0.2646391
0.16	0.31	0.6419753	0.2839506
0.21	0.01	0.6419753	0.2394366
0.21	0.06	0.6419753	0.2394366
0.21	0.11	0.6419753	0.2394366
0.21	0.16	0.6419753	0.2394366
0.21	0.21	0.6419753	0.2394366

0.21	0.26	0.6419753	0.2394366
0.21	0.31	0.6419753	0.2394366
0.26	0.01	0.6419753	0.2394366
0.26	0.06	0.6419753	0.2394366
0.26	0.11	0.6419753	0.2394366
0.26	0.16	0.6419753	0.2394366
0.26	0.21	0.6419753	0.2394366
0.26	0.26	0.6419753	0.2394366
0.26	0.31	0.6419753	0.2394366
0.31	0.01	0.6419753	0.2394366
0.31	0.06	0.6419753	0.2394366
0.31	0.11	0.6419753	0.2394366
0.31	0.16	0.6419753	0.2394366
0.31	0.21	0.6419753	0.2394366
0.31	0.26	0.6419753	0.2394366
0.31	0.31	0.6419753	0.2394366

Tuning parameter 'alpha3' was held constant at a value of -1

Accuracy was used to select the optimal model using the largest value. The final values used for the model were $\alpha_2 = 0.01$, $\alpha_3 = -1$ and $\alpha_4 = 0.21$.

Cinquième partie V

Bagging et forêts aléatoires

Bagging

Forêts aléatoires

- Idem que précédemment, on cherche à expliquer une variable Y par d variables explicatives X_1, \dots, X_d .

- Idem que précédemment, on cherche à **expliquer** une variable Y par d variables explicatives X_1, \dots, X_d .
- Pour simplifier on se place en **régression** : Y est à valeurs dans \mathbb{R} mais tout ce qui va être fait s'étant directement à la **classification binaire ou multiclassés**.

- Idem que précédemment, on cherche à **expliquer** une variable Y par d variables explicatives X_1, \dots, X_d .
- Pour simplifier on se place en **régression** : Y est à valeurs dans \mathbb{R} mais tout ce qui va être fait s'étant directement à la **classification binaire ou multiclassées**.
- **Notations** :
 - (X, Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.
 - $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ un n -échantillon i.i.d. de même loi que (X, Y) .

Bagging

Forêts aléatoires

- Le **bagging** désigne un ensemble de méthodes introduit par Léo Breiman [Breiman, 1996].
- **Bagging** : vient de la contraction de **B**ootstrap **A**ggregating.
- **Idée** : plutôt que de construire un seul estimateur, en construire un grand nombre (sur des échantillons **bootstrap**) et les **agréger**.

Pourquoi agréger ?

- On se place dans le modèle de régression

$$Y = m(X) + \varepsilon.$$

- On note

$$\hat{m}_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x)$$

un estimateur de m obtenu en agrégeant B estimateurs m_1, \dots, m_B .

Pourquoi agréger ?

- On se place dans le modèle de régression

$$Y = m(X) + \varepsilon.$$

- On note

$$\hat{m}_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x)$$

un estimateur de m obtenu en agrégeant B estimateurs m_1, \dots, m_B .

- **Rappels** : $\hat{m}_B(x) = \hat{m}_B(x; (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ et $m_k(x) = m_k(x; (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ sont des variables aléatoires.

Pourquoi agréger ?

- On se place dans le modèle de régression

$$Y = m(X) + \varepsilon.$$

- On note

$$\hat{m}_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x)$$

un estimateur de m obtenu en agrégeant B estimateurs m_1, \dots, m_B .

- **Rappels** : $\hat{m}_B(x) = \hat{m}_B(x; (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ et $m_k(x) = m_k(x; (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n))$ sont des **variables aléatoires**.
- On peut **mesurer l'intérêt d'agréger** en comparant les performances de $\hat{m}_B(x)$ à celles des $m_k(x)$, $k = 1, \dots, B$ (en comparant, par exemple, le **biais** et la **variance** de ces estimateurs).

- **Hypothèse** : les variables aléatoires m_1, \dots, m_B sont i.i.d.

- **Hypothèse** : les variables aléatoires m_1, \dots, m_B sont i.i.d.
 - **Biais** :

$$\mathbf{E}[\hat{m}_B(x)] = \mathbf{E}[m_k(x)].$$

Conclusion

Agréger ne modifie pas le biais.

Biais et variance

- **Hypothèse** : les variables aléatoires m_1, \dots, m_B sont i.i.d.

- **Biais** :

$$\mathbf{E}[\hat{m}_B(x)] = \mathbf{E}[m_k(x)].$$

Conclusion

Agréger ne modifie pas le biais.

- **Variance** :

$$\mathbf{V}[\hat{m}_B(x)] = \frac{1}{B} \mathbf{V}[m_k(x)].$$

Conclusion

Agréger tue la variance.

- Les conclusions précédentes sont vraies sous l'hypothèse que les variables aléatoires m_1, \dots, m_B sont i.i.d.

- Les conclusions précédentes sont vraies sous l'hypothèse que les variables aléatoires m_1, \dots, m_B sont i.i.d.
- Les estimateurs m_1, \dots, m_B étant construits sur le même échantillon, l'hypothèse d'indépendance n'est clairement pas raisonnable !

- Les conclusions précédentes sont vraies sous l'hypothèse que les variables aléatoires m_1, \dots, m_B sont i.i.d.
- Les estimateurs m_1, \dots, m_B étant construits sur le même échantillon, l'hypothèse d'indépendance n'est clairement pas raisonnable !

Idée

Atténuer la dépendance entre les estimateurs $m_k, k = 1, \dots, B$ en introduisant de nouvelles sources d'aléa.

Idée : échantillons bootstrap

- Echantillon **initial** :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Idée : échantillons bootstrap

- Echantillon **initial** :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

- Echantillons **bootstrap** :

3	4	6	10	3	9	10	7	7	1	m_1
2	8	6	2	10	10	2	9	5	6	m_2
2	9	4	4	7	7	2	3	6	7	m_3
6	1	3	3	9	3	8	10	10	1	m_4
3	7	10	3	2	8	6	9	10	2	m_5
	\vdots								\vdots	
7	10	3	4	9	10	10	8	6	1	m_B

Idée : échantillons bootstrap

- Echantillon **initial** :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

- Echantillons **bootstrap** :

3	4	6	10	3	9	10	7	7	1	m_1
2	8	6	2	10	10	2	9	5	6	m_2
2	9	4	4	7	7	2	3	6	7	m_3
6	1	3	3	9	3	8	10	10	1	m_4
3	7	10	3	2	8	6	9	10	2	m_5
	\vdots								\vdots	
7	10	3	4	9	10	10	8	6	1	m_B

- A la fin, on **agrège** :

$$\hat{m}_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x).$$

- Les estimateurs m_k ne vont pas être construits sur l'échantillon $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, mais sur des **échantillons bootstrap** de \mathcal{D}_n .

Bagging

- Les estimateurs m_k ne vont pas être construits sur l'échantillon $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, mais sur des **échantillons bootstrap** de \mathcal{D}_n .

Bagging

Entrées :

- $x \in \mathbb{R}^d$ l'observation à prévoir ; \mathcal{D}_n l'échantillon
- un régresseur (arbre CART, 1 plus proche voisin...)
- B le nombre d'estimateurs que l'on agrège.

Bagging

- Les estimateurs m_k ne vont pas être construits sur l'échantillon $\mathcal{D}_n = (X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, mais sur des **échantillons bootstrap** de \mathcal{D}_n .

Bagging

Entrées :

- $x \in \mathbb{R}^d$ l'observation à prévoir ; \mathcal{D}_n l'échantillon
- un régresseur (arbre CART, 1 plus proche voisin...)
- B le nombre d'estimateurs que l'on agrège.

Pour $k = 1, \dots, B$:

- Tirer un échantillon **bootstrap** dans \mathcal{D}_n
- Ajuster le régresseur** sur cet échantillon bootstrap : $m_k(x)$

Sortie : L'estimateur $\hat{m}_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x)$.

Tirage de l'échantillon bootstrap

- Les tirages bootstrap sont représentés par B variables aléatoires $\theta_k, k = 1, \dots, B$.

Tirage de l'échantillon bootstrap

- Les tirages bootstrap sont représentés par B variables aléatoires $\theta_k, k = 1, \dots, B$.
- Les tirages bootstrap sont généralement effectués selon la même loi et de façon indépendante : $\theta_1, \dots, \theta_B$ sont i.i.d. de même loi que θ .

Tirage de l'échantillon bootstrap

- Les tirages bootstrap sont représentés par B variables aléatoires $\theta_k, k = 1, \dots, B$.
- Les tirages bootstrap sont généralement effectués selon la même loi et de façon indépendante : $\theta_1, \dots, \theta_B$ sont i.i.d. de même loi que θ .
- 2 techniques sont généralement utilisées :
 1. tirage de n observations avec remise ;
 2. tirage de $\ell < n$ observation sans remise.

Tirage de l'échantillon bootstrap

- Les tirages bootstrap sont représentés par B variables aléatoires $\theta_k, k = 1, \dots, B$.
- Les tirages bootstrap sont généralement effectués selon la même loi et de façon indépendante : $\theta_1, \dots, \theta_B$ sont i.i.d. de même loi que θ .
- 2 techniques sont généralement utilisées :
 1. tirage de n observations avec remise ;
 2. tirage de $\ell < n$ observation sans remise.

Conséquence

Les estimateurs agrégés contiennent 2 sources d'aléa (échantillon et tirage bootstrap) :

$$m_k(x) = m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n).$$

Choix du nombre d'itérations

- Deux paramètres sont à choisir : le nombre d'itérations B et le régresseur.

Choix du nombre d'itérations

- Deux paramètres sont à choisir : le nombre d'itérations B et le régresseur.
- On a d'après la loi des grands nombres

$$\begin{aligned}\lim_{B \rightarrow \infty} \hat{m}_B(x) &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n) \\ &= \mathbf{E}_{\theta}[m(x, \theta, \mathcal{D}_n)] = \bar{m}(x, \mathcal{D}_n) \quad p.s|\mathcal{D}_n.\end{aligned}$$

Choix du nombre d'itérations

- Deux paramètres sont à choisir : le nombre d'itérations B et le régresseur.
- On a d'après la loi des grands nombres

$$\begin{aligned}\lim_{B \rightarrow \infty} \hat{m}_B(x) &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n) \\ &= \mathbf{E}_{\theta}[m(x, \theta, \mathcal{D}_n)] = \bar{m}(x, \mathcal{D}_n) \quad p.s|\mathcal{D}_n.\end{aligned}$$

- Lorsque B est grand, \hat{m}_B se "stabilise" vers l'estimateur bagging $\bar{m}(x, \mathcal{D}_n)$.

Choix du nombre d'itérations

- Deux paramètres sont à choisir : le nombre d'itérations B et le régresseur.
- On a d'après la loi des grands nombres

$$\begin{aligned}\lim_{B \rightarrow \infty} \hat{m}_B(x) &= \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m_k(x) = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n) \\ &= \mathbf{E}_{\theta}[m(x, \theta, \mathcal{D}_n)] = \bar{m}(x, \mathcal{D}_n) \quad p.s|\mathcal{D}_n.\end{aligned}$$

- Lorsque B est grand, \hat{m}_B se "stabilise" vers l'estimateur bagging $\bar{m}(x, \mathcal{D}_n)$.

Conséquence importante

Le nombre d'itérations B n'est pas un paramètre à calibrer, il est conseillé de le prendre le plus grand possible en fonction du temps de calcul.

Propriété : biais et variance

On a

$$\mathbf{E}[\hat{m}_B(x)] = \mathbf{E}[m_k(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)]$$

et

$$\mathbf{V}[\hat{m}_B(x)] = \rho(x) \mathbf{V}[m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)] + \frac{1 - \rho(x)}{B} \mathbf{V}[m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)]$$

où $\rho(x) = \text{corr}(m(x, \theta_k, \mathcal{D}_n), m(x, \theta_{k'}, \mathcal{D}_n))$ pour $k \neq k'$.

Conséquence

- Bagging ne modifie pas le biais.

Conséquence

- Bagging ne modifie pas le biais.
- Pour B grand, $\mathbf{V}[\hat{m}_B(x)] \approx \rho(x) \mathbf{V}[\hat{m}_k(x, \theta_k(\mathcal{D}_n))]$

Conséquence

- Bagging ne modifie pas le biais.
- Pour B grand, $\mathbf{V}[\hat{m}_B(x)] \approx \rho(x) \mathbf{V}[\hat{m}_k(x, \theta_k(\mathcal{D}_n))] \implies$ la variance diminue d'autant plus que la corrélation entre les prédicteurs diminue.

Conséquence

- Bagging ne modifie pas le biais.
- Pour B grand, $\mathbf{V}[\hat{m}_B(x)] \approx \rho(x) \mathbf{V}[\hat{m}_k(x, \theta_k(\mathcal{D}_n))] \implies$ la variance diminue d'autant plus que la corrélation entre les prédicteurs diminue.
- Il est donc nécessaire d'agréger des estimateurs sensibles à de légères perturbations de l'échantillon.

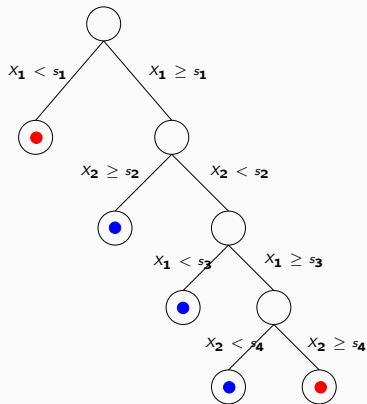
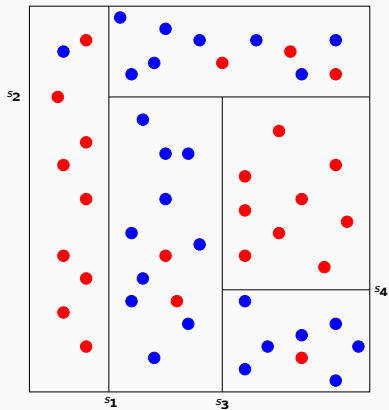
Conséquence

- Bagging ne modifie pas le biais.
- Pour B grand, $\mathbf{V}[\hat{m}_B(x)] \approx \rho(x) \mathbf{V}[\hat{m}_k(x, \theta_k(\mathcal{D}_n))] \implies$ la variance diminue d'autant plus que la corrélation entre les prédicteurs diminue.
- Il est donc nécessaire d'agréger des estimateurs sensibles à de légères perturbations de l'échantillon.
- Les arbres sont connus pour posséder de telles propriétés.

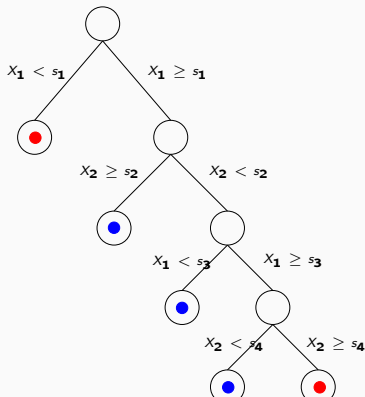
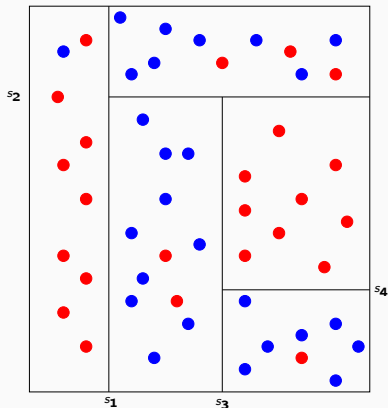
Bagging

Forêts aléatoires

Rappels sur les arbres



Rappels sur les arbres



Paramètre à calibrer

Profondeur de l'arbre :

- petite : biais ↗, variance ↘
- grande : biais ↘, variance ↗

- Comme son nom l'indique, une forêt aléatoire est définie à partir d'un ensemble d'arbres.

- Comme son nom l'indique, une forêt aléatoire est définie à partir d'un ensemble d'arbres.

Définition

Soit $T_k(x)$, $k = 1, \dots, B$ des prédicteurs par arbre ($T_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$). Le prédicteur des forêts aléatoires est obtenu par agrégation de cette collection d'arbres :

$$\hat{T}_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B T_k(x).$$

- Forêts aléatoires = collection d'arbres.

Forêts aléatoires

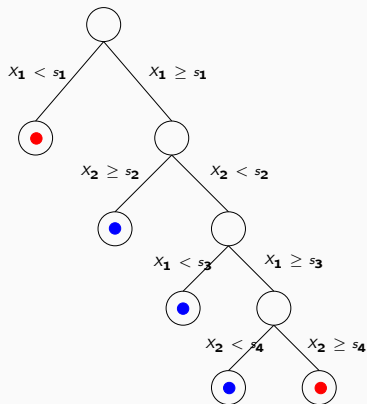
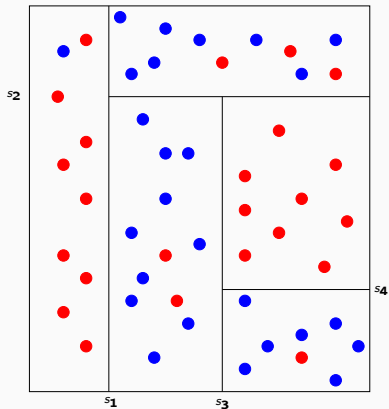
- Forêts aléatoires = collection d'arbres.
- Les forêts aléatoires les plus utilisées sont (de loin) celles proposées par Léo Breiman (au début des années 2000).

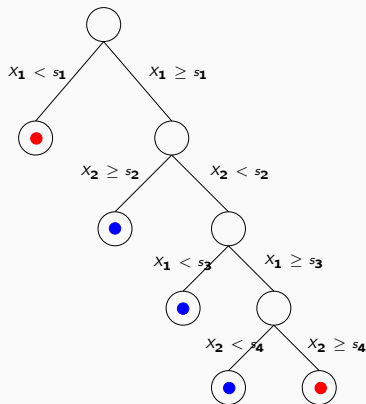
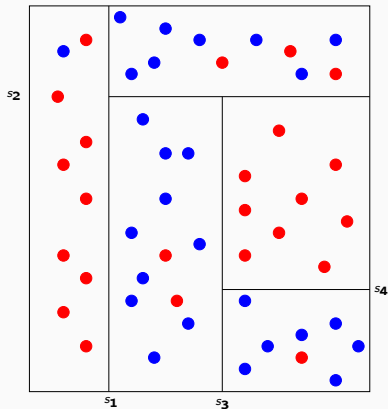
Forêts aléatoires

- Forêts aléatoires = collection d'arbres.
- Les forêts aléatoires les plus utilisées sont (de loin) celles proposées par Léo Breiman (au début des années 2000).
- Elles consistent à agréger des arbres construits sur des échantillons bootstrap.

Forêts aléatoires

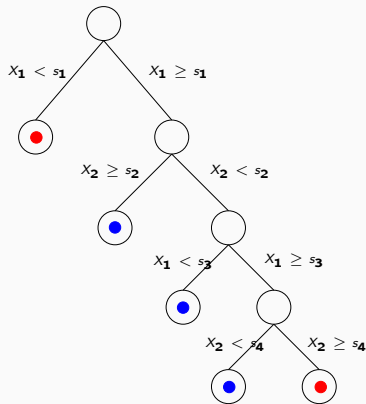
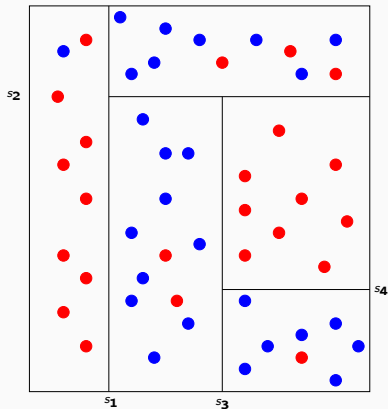
- Forêts aléatoires = collection d'arbres.
- Les forêts aléatoires les plus utilisées sont (de loin) celles proposées par Léo Breiman (au début des années 2000).
- Elles consistent à agréger des arbres construits sur des échantillons bootstrap.
- On pourra trouver de la doc à l'url
<http://www.stat.berkeley.edu/~breiman/RandomForests/>
et consulter la thèse de Robin Genuer [Genuer, 2010].





Arbres pour forêt

- Breiman propose de sélectionner la "meilleure" variable dans un ensemble composé **uniquement de m variables choisies aléatoirement parmi les d variables initiales.**



Arbres pour forêt

- Breiman propose de sélectionner la "meilleure" variable dans un ensemble composé **uniquement de m variables choisies aléatoirement parmi les d variables initiales.**
- Objectif : **diminuer la corrélation** entre les arbres que l'on agrège.

Entrées :

- $x \in \mathbb{R}^d$ l'observation à prévoir ;
- \mathcal{D}_n l'échantillon ;
- B nombre d'arbres ; n_{max} nombre max d'observations par nœud
- $m \in \{1, \dots, d\}$ le nombre de variables candidates pour découper un nœud.

Algorithme : randomforest

Entrées :

- $x \in \mathbb{R}^d$ l'observation à prévoir ;
- \mathcal{D}_n l'échantillon ;
- B nombre d'arbres ; n_{max} nombre max d'observations par nœud
- $m \in \{1, \dots, d\}$ le nombre de variables candidates pour découper un nœud.

Pour $k = 1, \dots, B$:

1. Tirer un échantillon **bootstrap** dans \mathcal{D}_n
2. Construire un **arbre CART sur cet échantillon bootstrap**, chaque coupure est sélectionnée en minimisant la fonction de coût de CART sur un ensemble de **m variables choisies au hasard** parmi les d . On note $T(., \theta_k, \mathcal{D}_n)$ l'arbre construit.

Sortie : L'estimateur $T_B(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)$.

- Si on est en discrimination (Y qualitative), l'étape d'agrégation consiste à faire voter les arbres à la majorité.

- Si on est en discrimination (Y qualitative), l'étape d'agrégation consiste à faire voter les arbres à la majorité.
- Il y a deux sources d'aléa présentes dans θ_k : le tirage bootstrap et les m variables sélectionnées à chaque étape de la construction de l'arbre.

- Si on est en discrimination (Y qualitative), l'étape d'agrégation consiste à faire voter les arbres à la majorité.
- Il y a deux sources d'aléa présentes dans θ_k : le tirage bootstrap et les m variables sélectionnées à chaque étape de la construction de l'arbre.
- Méthode simple à mettre en oeuvre et déjà implémentée sur la plupart des logiciels statistiques (sur R, il suffit de lancer la fonction randomForest du package randomForest).

- Si on est en discrimination (Y qualitative), l'étape d'agrégation consiste à faire voter les arbres à la majorité.
- Il y a deux sources d'aléa présentes dans θ_k : le tirage bootstrap et les m variables sélectionnées à chaque étape de la construction de l'arbre.
- Méthode simple à mettre en oeuvre et déjà implémentée sur la plupart des logiciels statistiques (sur R, il suffit de lancer la fonction randomForest du package randomForest).
- Estimateur connu pour fournir des estimations précises sur des données complexes (beaucoup de variables, données manquantes...).

- Si on est en discrimination (Y qualitative), l'étape d'agrégation consiste à faire voter les arbres à la majorité.
- Il y a deux sources d'aléa présentes dans θ_k : le tirage bootstrap et les m variables sélectionnées à chaque étape de la construction de l'arbre.
- Méthode simple à mettre en oeuvre et déjà implémentée sur la plupart des logiciels statistiques (sur R, il suffit de lancer la fonction randomForest du package randomForest).
- Estimateur connu pour fournir des estimations précises sur des données complexes (beaucoup de variables, données manquantes...).
- Estimateur peu sensible au choix de ses paramètres (B , n_{max} , $m...$)

Choix des paramètres

- B : réglé... le plus grand possible.

Choix des paramètres

- B : réglé... le plus grand possible.

Intérêt du bagging (rappel)

Diminuer la variance des estimateurs qu'on agrège :

$$\mathbf{V}[\hat{T}_B(x)] = \rho(x)\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)] + \frac{1 - \rho(x)}{B}\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)]$$

Choix des paramètres

- B : réglé... le plus grand possible.

Intérêt du bagging (rappel)

Diminuer la variance des estimateurs qu'on agrège :

$$\mathbf{V}[\hat{T}_B(x)] = \rho(x)\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)] + \frac{1 - \rho(x)}{B}\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)]$$

Conséquence

- Le biais n'étant pas amélioré par "l'agrégation bagging", il est recommandé d'agréger des estimateurs qui possèdent un biais faible (contrairement au boosting).

Choix des paramètres

- B : réglé... le plus grand possible.

Intérêt du bagging (rappel)

Diminuer la variance des estimateurs qu'on agrège :

$$\mathbf{V}[\hat{T}_B(x)] = \rho(x)\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)] + \frac{1 - \rho(x)}{B}\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)]$$

Conséquence

- Le biais n'étant pas amélioré par "l'agrégation bagging", il est recommandé d'agréger des estimateurs qui possèdent un biais faible (contrairement au boosting).
- On choisira donc des arbres "profonds", c'est-à-dire avec peu d'observation dans les nœuds terminaux.

Choix des paramètres

- B : réglé... le plus grand possible.

Intérêt du bagging (rappel)

Diminuer la variance des estimateurs qu'on agrège :

$$\mathbf{V}[\hat{T}_B(x)] = \rho(x)\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)] + \frac{1 - \rho(x)}{B}\mathbf{V}[T(x, \theta_k, \mathcal{D}_n)]$$

Conséquence

- Le biais n'étant pas amélioré par "l'agrégation bagging", il est recommandé d'agréger des estimateurs qui possèdent un biais faible (contrairement au boosting).
- On choisira donc des arbres "profonds", c'est-à-dire avec peu d'observation dans les nœuds terminaux.
- Par défaut dans randomForest, $n_{max} = 5$ en régression et 1 en classification.

- Il est en relation avec la corrélation entre les arbres $\rho(x)$.

Choix de m

- Il est en relation avec la corrélation entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.

Choix de m

- Il est en relation avec la corrélation entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres \implies les arbres sont de plus en plus différents

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres \implies les arbres sont de plus en plus différents $\implies \rho(x) \searrow \implies$ **la variance de la forêt diminue**.

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres \implies les arbres sont de plus en plus différents $\implies \rho(x) \searrow \implies$ **la variance de la forêt diminue**.
 2. mais... le biais des arbres \nearrow

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres \implies les arbres sont de plus en plus différents $\implies \rho(x) \searrow \implies$ **la variance de la forêt diminue**.
 2. mais... le biais des arbres $\nearrow \implies$ les **biais de la forêt \nearrow** .

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres \implies les arbres sont de plus en plus différents $\implies \rho(x) \searrow \implies$ **la variance de la forêt diminue**.
 2. mais... le biais des arbres $\nearrow \implies$ les **biais de la forêt** \nearrow .
- Inversement lorsque $m \nearrow$.

Choix de m

- Il est en **relation avec la corrélation** entre les arbres $\rho(x)$.
- Ce paramètre a une (légère) influence sur le compromis biais/variance de la forêt.
- $m \searrow$
 1. tendance à se rapprocher d'un **choix "aléatoire"** des variables de découpe des arbres \implies les arbres sont de plus en plus différents $\implies \rho(x) \searrow \implies$ **la variance de la forêt diminue**.
 2. mais... le biais des arbres $\nearrow \implies$ les **biais de la forêt \nearrow** .
- Inversement lorsque $m \nearrow$.

Conclusion

- Il est recommandé de comparer les performances de la forêt pour **plusieurs valeurs de m** .
- Par défaut $m = d/3$ en régression et \sqrt{d} en classification.

Application sur les données spam

```
> library(randomForest)
> foret1 <- randomForest(type~.,data=spam)
> foret1
```

Call:

```
randomForest(formula = type ~ ., data = spam)
      Type of random forest: classification
      Number of trees: 500
No. of variables tried at each split: 7
```

OOB estimate of error rate: 5.26%

Confusion matrix:

	0	1	class.error
0	1352	42	0.03012912
1	79	827	0.08719647

Mesure de performance

- Comme pour les autres classifieurs et régresseurs il convient de définir des critères qui permettent de mesurer la performance des forêts aléatoires.

- Comme pour les autres classifieurs et régresseurs il convient de définir des critères qui permettent de **mesurer la performance des forêts aléatoires**.
- Exemples :
 - Erreur de prédiction : $\mathbf{E}[(Y - \hat{T}_B(X))^2]$ en régression ;
 - Probabilité d'erreur : $\mathbf{P}(Y \neq \hat{T}_B(X))$ en classification.

- Comme pour les autres classifieurs et régresseurs il convient de définir des critères qui permettent de **mesurer la performance des forêts aléatoires**.
- Exemples :
 - Erreur de prédiction : $\mathbf{E}[(Y - \hat{T}_B(X))^2]$ en régression ;
 - Probabilité d'erreur : $\mathbf{P}(Y \neq \hat{T}_B(X))$ en classification.
- Comme pour les autres méthodes, ces critères peuvent être évalués par **apprentissage/validation** ou **validation croisée**.

Mesure de performance

- Comme pour les autres classifieurs et régresseurs il convient de définir des critères qui permettent de **mesurer la performance des forêts aléatoires**.
- Exemples :
 - Erreur de prédiction : $\mathbf{E}[(Y - \hat{T}_B(X))^2]$ en régression ;
 - Probabilité d'erreur : $\mathbf{P}(Y \neq \hat{T}_B(X))$ en classification.
- Comme pour les autres méthodes, ces critères peuvent être évalués par **apprentissage/validation** ou **validation croisée**.
- La phase **bootstrap** des algorithmes bagging permet de définir une nouvelle méthode d'estimation de ces critères : méthode **OOB (Out Of Bag)**.

- Pour chaque observation (X_i, Y_i) de \mathcal{D}_n , on désigne par \mathcal{I}_B l'ensemble des arbres de la forêt qui **ne contiennent pas cette observation** dans leur échantillon bootstrap.
- La prévision de Y au point X_i se fait selon

$$\hat{Y}_i = \frac{1}{|\mathcal{I}_B|} \sum_{k \in \mathcal{I}_B} T(X_i, \theta_k, \mathcal{D}_n).$$

Erreur Out Of Bag

- Pour chaque observation (X_i, Y_i) de \mathcal{D}_n , on désigne par \mathcal{I}_B l'ensemble des arbres de la forêt qui **ne contiennent pas cette observation** dans leur échantillon bootstrap.
- La prévision de Y au point X_i se fait selon

$$\hat{Y}_i = \frac{1}{|\mathcal{I}_B|} \sum_{k \in \mathcal{I}_B} T(X_i, \theta_k, \mathcal{D}_n).$$

Estimateurs Out Of Bag

- L'**erreur de prédiction** est estimée par $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2$.
- La **probabilité d'erreur** est estimée par $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\hat{Y}_i \neq Y_i}$.

Exemple

3	4	6	10	3	9	10	7	7	1	m_1
2	8	6	2	10	10	2	9	5	6	m_2
2	9	4	4	7	7	2	3	6	7	m_3
6	1	3	3	9	3	8	10	10	1	m_4
3	7	10	3	2	8	6	9	10	2	m_5
7	10	3	4	9	10	10	8	6	1	m_6

Exemple

3	4	6	10	3	9	10	7	7	1	m_1
2	8	6	2	10	10	2	9	5	6	m_2
2	9	4	4	7	7	2	3	6	7	m_3
6	1	3	3	9	3	8	10	10	1	m_4
3	7	10	3	2	8	6	9	10	2	m_5
7	10	3	4	9	10	10	8	6	1	m_6

- Les échantillons 2, 3 et 5 ne contiennent pas la première observation, donc

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{3}(m_2(X_1) + m_3(X_1) + m_5(X_1)).$$

- On fait de même pour toutes les observations $\Rightarrow \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_n$.

Exemple

3	4	6	10	3	9	10	7	7	1	m_1
2	8	6	2	10	10	2	9	5	6	m_2
2	9	4	4	7	7	2	3	6	7	m_3
6	1	3	3	9	3	8	10	10	1	m_4
3	7	10	3	2	8	6	9	10	2	m_5
7	10	3	4	9	10	10	8	6	1	m_6

- Les échantillons 2, 3 et 5 ne contiennent pas la première observation, donc

$$\hat{Y}_1 = \frac{1}{3}(m_2(X_1) + m_3(X_1) + m_5(X_1)).$$

- On fait de même pour toutes les observations $\Rightarrow \hat{Y}_2, \dots, \hat{Y}_n$.
- On estime l'erreur selon

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - Y_i)^2.$$

Exemple

- On construit la forêt avec $m = 1$:

```
> foret2 <- randomForest(type~.,data=spam,mtry=1)
> foret2
```

Call:

```
randomForest(formula = type ~ ., data = spam, mtry = 1)
```

```
      Type of random forest: classification
```

```
      Number of trees: 500
```

```
No. of variables tried at each split: 1
```

```
      OOB estimate of  error rate: 8.04%
```

```
Confusion matrix:
```

```
      0   1 class.error
```

```
0 1367  27 0.01936872
```

```
1  158 748 0.17439294
```

Exemple

- On construit la forêt avec $m = 1$:

```
> foret2 <- randomForest(type~.,data=spam,mtry=1)
> foret2
```

Call:

```
randomForest(formula = type ~ ., data = spam, mtry = 1)
      Type of random forest: classification
      Number of trees: 500
No. of variables tried at each split: 1
```

```
      OOB estimate of  error rate: 8.04%
```

Confusion matrix:

```
      0    1 class.error
0 1367  27  0.01936872
1  158 748  0.17439294
```

Conclusion

L'erreur OOB est de 8.04%, elle est de 5.26% lorsque $m = 7$.

- Un des reproches souvent fait aux forêts est l'aspect **boîte noire** et **manque d'interprétabilité** par rapport aux modèles paramétriques tels que le modèle logistique.

Importance des variables

- Un des reproches souvent fait aux forêts est l'aspect **boîte noire** et **manque d'interprétabilité** par rapport aux modèles paramétriques tels que le modèle logistique.
- Il existe un **indicateur** qui permet de mesurer l'**importance des variables** présentes dans le modèle.
- Comme l'erreur OOB, ce critère est basé sur le fait que toutes les observations **ne sont pas utilisées** pour construire les arbres de la forêt.

- Soit OOB_k l'échantillon Out Of Bag associé au k^{eme} arbre : il contient les observations qui ne sont pas dans le k^{eme} échantillon bootstrap.

- Soit OOB_k l'échantillon Out Of Bag associé au k^{eme} arbre : il contient les observations qui ne sont pas dans le k^{eme} échantillon bootstrap.
- Soit E_{OOB_k} l'erreur de prédiction de l'arbre k mesurée sur cet échantillon :

$$E_{OOB_k} = \frac{1}{|OOB_k|} \sum_{i \in OOB_k} (T(X_i, \theta_k, \mathcal{D}_n) - Y_i)^2.$$

- Soit OOB_k l'échantillon Out Of Bag associé au k^{eme} arbre : il contient les observations qui **ne sont pas** dans le k^{eme} échantillon bootstrap.
- Soit E_{OOB_k} l'erreur de prédiction de l'arbre k mesurée sur cet échantillon :

$$E_{OOB_k} = \frac{1}{|OOB_k|} \sum_{i \in OOB_k} (T(X_i, \theta_k, \mathcal{D}_n) - Y_i)^2.$$

- Soit OOB_k^j l'échantillon OOB_k dans lequel on a **perturbé aléatoirement** les valeurs de la variable j et $E_{OOB_k^j}$ **l'erreur de prédiction** de l'arbre k mesurée sur cet échantillon :

$$E_{OOB_k}^j = \frac{1}{|OOB_k^j|} \sum_{i \in OOB_k^j} (T(X_i^j, \theta_k, \mathcal{D}_n) - Y_i)^2,$$

- Soit OOB_k l'échantillon Out Of Bag associé au k^{eme} arbre : il contient les observations qui ne sont pas dans le k^{eme} échantillon bootstrap.
- Soit E_{OOB_k} l'erreur de prédiction de l'arbre k mesurée sur cet échantillon :

$$E_{OOB_k} = \frac{1}{|OOB_k|} \sum_{i \in OOB_k} (T(X_i, \theta_k, \mathcal{D}_n) - Y_i)^2.$$

- Soit OOB_k^j l'échantillon OOB_k dans lequel on a perturbé aléatoirement les valeurs de la variable j et $E_{OOB_k^j}$ l'erreur de prédiction de l'arbre k mesurée sur cet échantillon :

$$E_{OOB_k^j}^j = \frac{1}{|OOB_k^j|} \sum_{i \in OOB_k^j} (T(X_i^j, \theta_k, \mathcal{D}_n) - Y_i)^2,$$

Définition

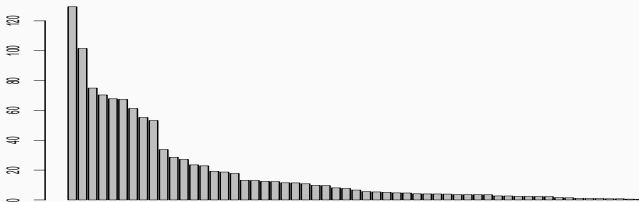
L'importance de la j^{eme} variable est définie par

$$Imp(X_j) = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B (E_{OOB_k^j}^j - E_{OOB_k}).$$

Exemple

- L'importance s'obtient facilement avec le package randomForest

```
> imp <- importance(foret1)
> imp1 <- sort(imp,decreasing=TRUE)
> ord <- order(imp,decreasing=TRUE)
> ord
[1] 52 53 55  7 56 16 21 25 57  5 24 19 26 23 46 27 11  8 50 12 37  3 18  6 45
[26] 17 10  2 28 42 49 35  1 36 39 13 54  9 30 33 22 51 29 14 43 44 31 20 48 15
[51] 40  4 41 34 32 38 47
> barplot(imp1,beside=TRUE)
```

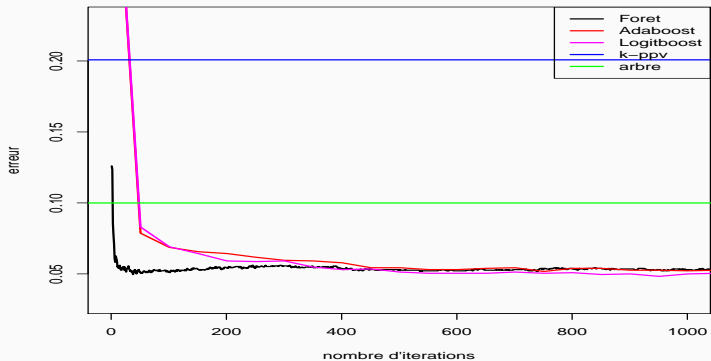


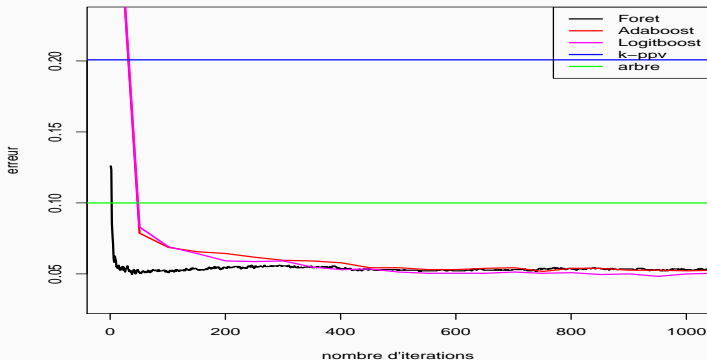
- On compare les performances du boosting (Adaboost et Logitboost), des forêts aléatoires, d'un arbre de classification ainsi que la méthode des k -ppv sur les données spam.

Comparaison de méthodes

- On compare les performances du boosting (Adaboost et Logitboost), des forêts aléatoires, d'un arbre de classification ainsi que la méthode des k -ppv sur les données spam.
- Pour ce faire, on ajuste les différents modèles sur un échantillon d'apprentissage de taille 2300 et on compare les performances de chaque méthode en estimant la probabilité d'erreur par l'erreur empirique calculée sur l'échantillon test de taille 2301 :

$$L_n(\hat{g}) = \frac{1}{n_{test}} \sum_{i \in \mathcal{D}_{test}} \mathbf{1}_{\hat{g}(X_i) \neq Y_i}.$$





Méthode	Erreur
Forêt	0.050
Ada	0.052
Logit	0.048
k-ppv	0.200
arbre	0.100



Breiman, L. (1996).

Bagging predictors.

Machine Learning, 26(2) :123–140.



Breiman, L., Friedman, J., Olshen, R., and Stone, C. (1984).

Classification and regression trees.

Wadsworth & Brooks.



Fahrmeir, L. and Kaufmann, H. (1985).

Consistency and asymptotic normality of the maximum likelihood estimator in generalized linear models.

The Annals of Statistics, 13 :342–368.



Friedman, J. (1989).

Regularized discriminant analysis.

Journal of the American Statistical Association, 84 :165–175.



Genuer, R. (2010).

Forêts aléatoires : aspects théoriques, sélection de variables et applications.

PhD thesis, Université Paris XI.



Hastie, T., Tibshirani, R., and Friedman, J. (2009).

The Elements of Statistical Learning : Data Mining, Inference, and Prediction.

Springer, second edition.

 Hosmer, D. and Lemeshow, S. (2000).

Applied Logistic Regression.

Wiley.

 Kass, G. (1980).

An exploratory technique for investigating large quantities of categorical data.

Applied Statistics, 29(2) :119–127.

 Saporta, G. (2011).

Probabilités, analyse des données et statistique.

Tecnip, 3ème édition.