

# Statistique

---

L. Rouvière

[laurent.rouviere@univ-rennes2.fr](mailto:laurent.rouviere@univ-rennes2.fr)

Septembre 2021

- **Objectifs** : Comprendre le problème de la modélisation statistique et acquérir les premières notions fondamentales de la théorie de l'estimation.
- **Pré-requis** : théorie des probabilités, variables aléatoires discrètes et continues.
- **Enseignant** : Laurent Rouvière [laurent.rouviere@univ-rennes2.fr](mailto:laurent.rouviere@univ-rennes2.fr)
  - **Recherche** : statistique non paramétrique, apprentissage statistique
  - **Enseignements** : statistique et probabilités (Université, école d'ingénieur et de commerce, formation continue).
  - **Consulting** : énergie, finance, marketing, sport.

- 48h : 24h CM + 24h TD.
- Matériel : slides + feuilles d'exercices. Disponible à l'url : [https://lrouviere.github.io/doc\\_cours/](https://lrouviere.github.io/doc_cours/)
- 5 parties :
  1. La modélisation
  2. Théorie de l'estimation
  3. Convergences stochastiques
  4. Critères de performance asymptotique et estimation par intervalles
  5. Introduction à l'approche non paramétrique

Première partie I

## La modélisation statistique

Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

- Variable aléatoire réelle

- Vecteurs aléatoires

Bibliographie

## Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

- Variable aléatoire réelle

- Vecteurs aléatoires

Bibliographie

## Statistique (version Wikipedia)

La statistique est l'étude de la collecte de données, leur analyse, leur traitement, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous.

## Statistique (version Wikipedia)

La statistique est l'étude de la collecte de **données**, leur analyse, leur traitement, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous.

### Conséquence

Plusieurs étapes :

1. Collecte des données
2. Analyse et vérification des données (**statistiques descriptives**)
3. Traitement (**modélisation**)
4. Interprétation des résultats (ou du **modèle**)
5. Présentation des résultats (**visualisation**)



# Un exemple célèbre : les iris de Fisher

## Question

Pour 3 espèces d'iris différentes, est-il possible d'**expliquer** (ou de **prédire**) l'appartenance à une des espèces connaissant les longueurs et largeurs de sépales ?



# Collecte des données

- On a mesuré sur  $n = 150$  iris les quantités d'intérêts.

```
> data(iris)
> head(iris)
```

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
4	4.6	3.1	1.5	0.2	setosa
5	5.0	3.6	1.4	0.2	setosa
6	5.4	3.9	1.7	0.4	setosa

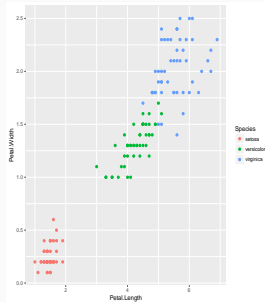
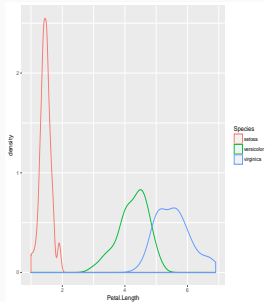
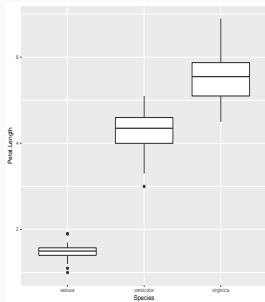
```
> summary(iris)
```

Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
Min. :4.300	Min. :2.000	Min. :1.000	Min. :0.100	setosa :50
1st Qu.:5.100	1st Qu.:2.800	1st Qu.:1.600	1st Qu.:0.300	versicolor:50
Median :5.800	Median :3.000	Median :4.350	Median :1.300	virginica :50
Mean :5.843	Mean :3.057	Mean :3.758	Mean :1.199	
3rd Qu.:6.400	3rd Qu.:3.300	3rd Qu.:5.100	3rd Qu.:1.800	
Max. :7.900	Max. :4.400	Max. :6.900	Max. :2.500	

# Statistiques descriptives

- Indicateurs **numériques** et **graphiques** permettant de mieux comprendre le problème.

```
> library(ggplot2)
> ggplot(iris)+aes(x=Species,y=Petal.Length)+geom_boxplot()
> ggplot(iris)+aes(x=Petal.Length,color=Species)+geom_density()
> ggplot(iris)+aes(x=Petal.Length,y=Petal.Width,color=Species)+geom_point()
```



- Modéliser =

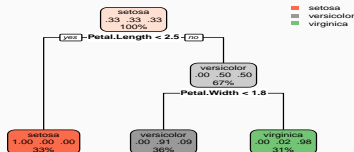
# Modélisation

- **Modéliser** = créer un objet qui permette d'**expliquer l'espèce** à partir des 4 variables quantitatives.
- On utilise ici un **arbre de classification**

```
> library(rpart)
> model <- rpart(Species~.,data=iris)
```

- que l'on peut visualiser

```
> library(rpart.plot)
> rpart.plot(model)
```



# Prévisions

- On dispose de 5 nouveaux iris sur lesquels on a mesuré les longueurs et largeurs de pétales et sépales.

```
> iris_prev
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
           5.0          3.6           1.4           0.2
           5.5          2.4           3.7           1.0
           5.8          2.7           5.1           1.9
           5.1          3.5           1.4           0.3
           6.3          2.9           5.6           1.8
```

- On souhaite connaître (**prédire, estimer...**) l'espèce de chacun.

# Prévisions

- On dispose de 5 nouveaux iris sur lesquels on a mesuré les longueurs et largeurs de pétales et sépales.

```
> iris_prev
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width
           5.0         3.6         1.4         0.2
           5.5         2.4         3.7         1.0
           5.8         2.7         5.1         1.9
           5.1         3.5         1.4         0.3
           6.3         2.9         5.6         1.8
```

- On souhaite connaître (**prédire, estimer...**) l'espèce de chacun.
- On utilise le **modèle** (l'arbre) pour faire ces prévisions.

- Prévisions des **probabilités** d'appartenance aux espèces :

```
> predict(model,newdata=iris_prev)
  setosa versicolor virginica
    1      0.000      0.000
    0      0.907      0.093
    0      0.022      0.978
    1      0.000      0.000
    0      0.022      0.978
```



- Prévisions des **probabilités** d'appartenance aux espèces :

```
> predict(model,newdata=iris_prev)
  setosa versicolor virginica
    1      0.000      0.000
    0      0.907      0.093
    0      0.022      0.978
    1      0.000      0.000
    0      0.022      0.978
```

- Prévisions des **espèces** :

```
> predict(model,newdata=iris_prev,type="class")
  setosa versicolor virginica  setosa virginica
Levels: setosa versicolor virginica
```

- Chacune de ces étapes est **primordiale** pour le succès d'une étude statistique.

### Dans ce cours

- On va s'intéresser à la phase de **modélisation mathématique** d'un problème.

- Chacune de ces étapes est **primordiale** pour le succès d'une étude statistique.

### Dans ce cours

- On va s'intéresser à la phase de **modélisation mathématique** d'un problème.
- On supposera les données **collectées** (c'est en grande partie une affaire de praticien). Elles seront souvent notées  $x_1, \dots, x_n$ .

- Chacune de ces étapes est **primordiale** pour le succès d'une étude statistique.

## Dans ce cours

- On va s'intéresser à la phase de **modélisation mathématique** d'un problème.
- On supposera les données **collectées** (c'est en grande partie une affaire de praticien). Elles seront souvent notées  $x_1, \dots, x_n$ .
- Les phases d'**interprétation** et de **visualisation** des résultats seront abordées plus tard.

Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

Variable aléatoire réelle

Vecteurs aléatoires

Bibliographie

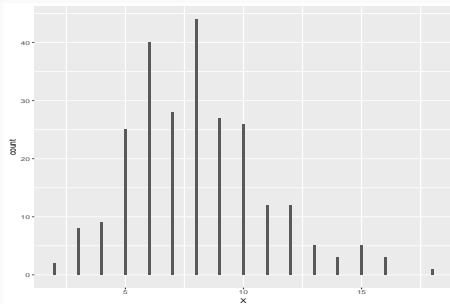
## Nombre de voitures à un feu rouge

- Afin de mieux gérer la circulation, on s'intéresse au nombre de voitures à un feu rouge sur un créneau donné.

# Nombre de voitures à un feu rouge

- Afin de mieux gérer la circulation, on s'intéresse au **nombre de voitures** à un feu rouge sur un créneau donné.
- **Expérience** : on compte le nombre de voitures dans la file d'attente à chaque fois que le feu passe au vert.
- On récolte  $n = 250$  observations

5 9 9 9 11 9



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer le feu ?



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer le feu ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** du nombre de voitures arrêtées au feu à ce créneau.

## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer le feu ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** du nombre de voitures arrêtées au feu à ce créneau.
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc **inconnue**.

## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer le feu ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** du nombre de voitures arrêtées au feu à ce créneau.
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc **inconnue**.
- Le **travail statistique** va donc consister à essayer de reconstruire au mieux cette loi (discrète) à partir des mesures effectuées.

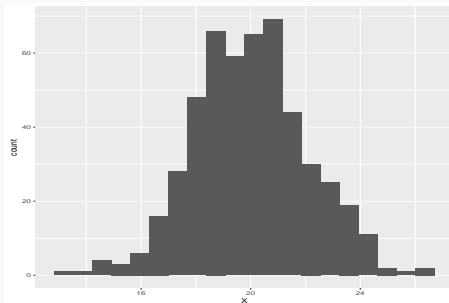
## Durée d'un trajet

- J'ai une réunion à mon travail à 8h, à quelle heure dois-je partir pour "avoir de grandes chances" d'être à l'heure?

# Durée d'un trajet

- J'ai une réunion à mon travail à 8h, à quelle heure dois-je partir pour "avoir de grandes chances" d'être à l'heure ?
- **Expérience** : je mesure la durée de trajet domicile/travail pendant plusieurs jours.
- Je récolte  $n = 100$  observations

20.87 22.12 20.90 21.33 17.73



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer mon heure de départ ?

## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer mon heure de départ ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** de la durée de trajet domicile/travail.

## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer mon heure de départ ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** de la durée de trajet domicile/travail.
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc **inconnue**.



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour gérer mon heure de départ ?

## Quantité d'intérêt

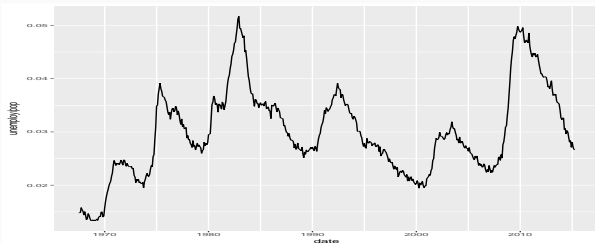
- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** de la durée de trajet domicile/travail.
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc **inconnue**.
- Le **travail statistique** va donc consister à essayer de reconstruire au mieux cette loi (continue) à partir des mesures effectuées.

- On s'intéresse au **taux de chômage** d'une population entre deux dates  $t_0$  et  $t_1$ . On souhaite prédire le taux de chômage futur.

# Séries temporelles

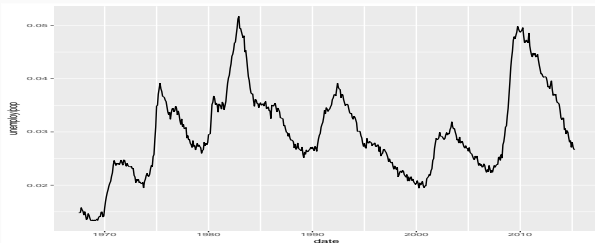
- On s'intéresse au **taux de chômage** d'une population entre deux dates  $t_0$  et  $t_1$ . On souhaite prédire le taux de chômage futur.
- **Expérience** : on mesure le taux de chômage entre les deux dates

```
> head(economics)
# A tibble: 6 x 6
  date      pce      pop psavert uempmed unemploy
  <date> <dbl> <int>   <dbl>   <dbl>   <int>
1 1967-07-01 507.4 198712    12.5     4.5    2944
2 1967-08-01 510.5 198911    12.5     4.7    2945
3 1967-09-01 516.3 199113    11.7     4.6    2958
4 1967-10-01 512.9 199311    12.5     4.9    3143
5 1967-11-01 518.1 199498    12.5     4.7    3066
6 1967-12-01 525.8 199657    12.1     4.8    3018
```



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour prédire le taux de chômage en 2012?

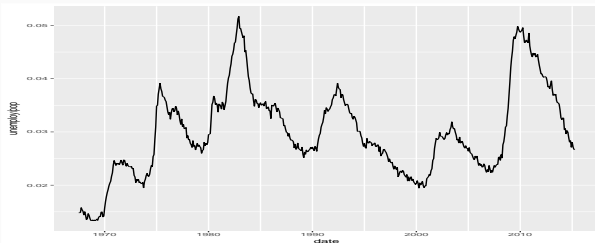


## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour prédire le taux de chômage en 2012 ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** du taux de chômage à l'instant  $t$  sachant le taux de chômage avant  $t$ .

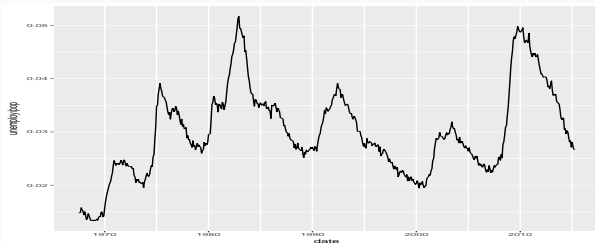


## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour prédire le taux de chômage en 2012 ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** du taux de chômage à l'instant  $t$  sachant le taux de chômage avant  $t$ .
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc **inconnue**.



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour prédire le taux de chômage en 2012 ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi de probabilité** du taux de chômage à l'instant  $t$  sachant le taux de chômage avant  $t$ .
- On dispose juste de mesures, cette loi est donc **inconnue**.
- Le **travail statistique** va donc consister à essayer de reconstruire au mieux cette loi (continue) à partir des mesures effectuées.

- On s'intéresse à la **prévision de la concentration en ozone** dans l'air.



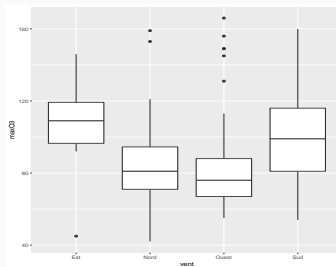
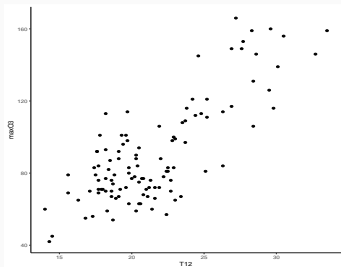
# Prévision ozone

- On s'intéresse à la **prévision de la concentration en ozone** dans l'air.
- **Expérience** : on mesure la **concentration en ozone** dans l'air ainsi d'**autres variable** (météo) qui pourraient potentiellement expliquer cette quantité.

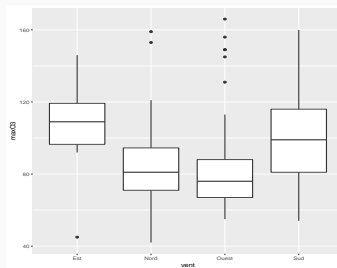
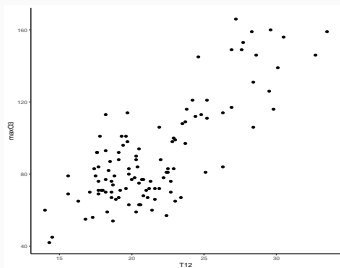
```
> head(ozone)
```

	maxO3	T9	T12	T15	Ne9	Ne12	Ne15	Vx9	Vx12	Vx15	maxO3v	vent	pluie
20010601	87	15.6	18.5	18.4	4	4	8	0.6946	-1.7101	-0.6946	84	Nord	Sec
20010602	82	17.0	18.4	17.7	5	5	7	-4.3301	-4.0000	-3.0000	87	Nord	Sec
20010603	92	15.3	17.6	19.5	2	5	4	2.9544	1.8794	0.5209	82	Est	Sec
20010604	114	16.2	19.7	22.5	1	1	0	0.9848	0.3473	-0.1736	92	Nord	Sec
20010605	94	17.4	20.5	20.4	8	8	7	-0.5000	-2.9544	-4.3301	114	Ouest	Sec
20010606	80	17.7	19.8	18.3	6	6	7	-5.6382	-5.0000	-6.0000	94	Ouest	Pluie

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=max03)+geom_point()  
> ggplot(ozone)+aes(x=vent,y=max03)+geom_boxplot()
```



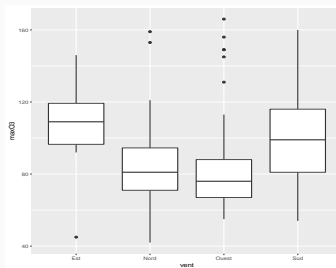
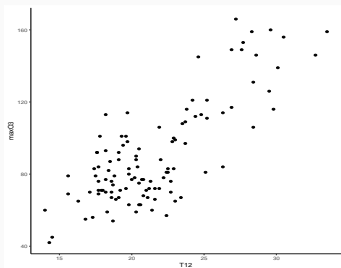
```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()  
> ggplot(ozone)+aes(x=vent,y=maxO3)+geom_boxplot()
```



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour prédire la concentration en ozone **sachant les variables météo** ?

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()  
> ggplot(ozone)+aes(x=vent,y=maxO3)+geom_boxplot()
```



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour prédire la concentration en ozone **sachant les variables météo** ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi conditionnelle de probabilité** de la concentration en ozone sachant les variables météo.

# Reconnaissance de la voix

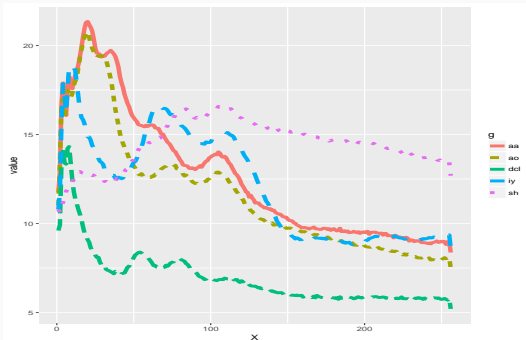
- On souhaite développer une procédure **automatique** permettant de reconnaître un son.

# Reconnaissance de la voix

- On souhaite développer une procédure **automatique** permettant de reconnaître un son.
- **Expérience** : on prononce 5 sons un certain nombre de fois et on considère la courbe temporelle associé au son dans la base de Fourier.

# Reconnaissance de la voix

- On souhaite développer une procédure **automatique** permettant de reconnaître un son.
- **Expérience** : on prononce 5 sons un certain nombre de fois et on considère la courbe temporelle associée au son dans la base de Fourier.
- On dispose de  $n = 4509$  courbes, chacune étant associée à un son.



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour identifier un son à partir d'une courbe ?



## Question

Comment **utiliser au mieux ces données** pour identifier un son à partir d'une courbe ?

## Quantité d'intérêt

- Il serait intéressant d'avoir de l'information sur la **loi conditionnelle de probabilité** de la variable son sachant la courbe.

- Pour chacun de ces problèmes on cherche à reconstruire (ou **estimer**) des probabilités (ou plus généralement des **lois de probabilité**).

- Pour chacun de ces problèmes on cherche à reconstruire (ou **estimer**) des probabilités (ou plus généralement des **lois de probabilité**).
- Les probabilités sont cependant **différentes** : la nature des quantités qui interviennent diffèrent
  - **discrètes** (voitures)
  - **continues** (durée de trajet)
  - **conditionnelles** (ozone, phonèmes)

- Pour chacun de ces problèmes on cherche à reconstruire (ou **estimer**) des probabilités (ou plus généralement des **lois de probabilité**).
- Les probabilités sont cependant **différentes** : la nature des quantités qui interviennent diffèrent
  - **discrètes** (voitures)
  - **continues** (durée de trajet)
  - **conditionnelles** (ozone, phonèmes)
- Les **objets mesurés** sont également de nature **différente** (entiers, réel, vecteurs, courbes...).

- Pour chacun de ces problèmes on cherche à reconstruire (ou **estimer**) des probabilités (ou plus généralement des **lois de probabilité**).
- Les probabilités sont cependant **différentes** : la nature des quantités qui interviennent diffèrent
  - **discrètes** (voitures)
  - **continues** (durée de trajet)
  - **conditionnelles** (ozone, phonèmes)
- Les **objets mesurés** sont également de nature **différente** (entiers, réel, vecteurs, courbes...).

## Conséquence importante

Il va être primordial d'introduire un formalisme (**mathématique**) précis pour représenter (**modéliser**) ces problèmes.

- Ces problèmes peuvent être appréhendés à l'aide d'un modèle statistique.

- Ces problèmes peuvent être appréhendés à l'aide d'un **modèle statistique**.

## **Modèle statistique**

- **Définition avec des mots** : vision simplifiée de la réalité.

- Ces problèmes peuvent être appréhendés à l'aide d'un **modèle statistique**.

## Modèle statistique

- **Définition avec des mots** : vision simplifiée de la réalité.
- **Définition mathématique** : triplet  $(F, \mathcal{H}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$  où
  - $F$  est un ensemble (l'espace des observations)
  - $\mathcal{H}$  est une tribu sur  $F$
  - $\{P, P \in \mathcal{P}\}$  est une famille de lois de probabilité.



- Ces problèmes peuvent être appréhendés à l'aide d'un **modèle statistique**.

## Modèle statistique

- **Définition avec des mots** : vision simplifiée de la réalité.
- **Définition mathématique** : triplet  $(F, \mathcal{H}, \{P, P \in \mathcal{P}\})$  où
  - $F$  est un ensemble (l'espace des observations)
  - $\mathcal{H}$  est une tribu sur  $F$
  - $\{P, P \in \mathcal{P}\}$  est une famille de lois de probabilité.

## Question importante

Quel est le **lien** entre ces deux définitions ?

Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

**Modèle statistique**

Quelques rappels de probabilités

Variable aléatoire réelle

Vecteurs aléatoires

Bibliographie

- On suppose que des données ont été collectées.

- On suppose que des données ont été collectées.
- Ces données sont le résultat d'une expérience répétée  $n$  fois.

- On suppose que des données ont été collectées.
- Ces données sont le résultat d'une expérience répétée  $n$  fois.
- On va les noter  $x_1, \dots, x_n$ .

- On suppose que des données ont été collectées.
- Ces données sont le résultat d'une expérience répétée  $n$  fois.
- On va les noter  $x_1, \dots, x_n$ .

### Exemple des durées de trajet

- Données :

20.87 22.12 20.90 21.33 17.73

- On suppose que des **données** ont été collectées.
- Ces données sont le résultat d'une **expérience répétée  $n$  fois**.
- On va les noter  $x_1, \dots, x_n$ .

### Exemple des durées de trajet

- Données :  
20.87 22.12 20.90 21.33 17.73
- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12 \dots$

## Question

- Sur les  $n = 100$  trajet, on obtient une **moyenne** de 20.02 minutes.
- Peut-on en **conclure** que le durée moyenne du trajet domicile/travail est de 20.02 minutes ?



## Question

- Sur les  $n = 100$  trajet, on obtient une **moyenne** de 20.02 minutes.
  - Peut-on en **conclure** que le durée moyenne du trajet domicile/travail est de 20.02 minutes ?
- 
- Le résultat dépend des **conditions** de l'expérience.

## Question

- Sur les  $n = 100$  trajet, on obtient une **moyenne** de 20.02 minutes.
  - Peut-on en **conclure** que le durée moyenne du trajet domicile/travail est de 20.02 minutes ?
- 
- Le résultat dépend des **conditions** de l'expérience.
  - Si on **re-mesure 100 fois le trajet**, il est fort possible qu'on n'obtienne **pas la même durée moyenne**.

# Hasard, aléa...

## Question

- Sur les  $n = 100$  trajet, on obtient une **moyenne** de 20.02 minutes.
- Peut-on en **conclure** que le durée moyenne du trajet domicile/travail est de 20.02 minutes ?
- Le résultat dépend des **conditions** de l'expérience.
- Si on **re-mesure 100 fois le trajet**, il est fort possible qu'on n'obtienne **pas la même durée moyenne**.

## Conséquence

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé **dépend des** conditions expérimentales.
- Ces dernières vont être **difficiles à caractériser précisément**.
- On dit souvent que le **hasard ou l'aléa** intervient dans ces conditions.

# Variable aléatoire

## Un outil spécifique

L'outil mathématique permettant de prendre en compte l'aléa dans l'expérience est la **variable aléatoire**.

# Variable aléatoire

## Un outil spécifique

L'outil mathématique permettant de prendre en compte l'aléa dans l'expérience est la **variable aléatoire**.

## Définition

Une **variable aléatoire réelle (v.a.r.)** est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et une **réalisation de  $X$**  est une valeur  $X(\omega)$  pour une éventualité  $\omega \in \Omega$ .

# Variable aléatoire

## Un outil spécifique

L'outil mathématique permettant de prendre en compte l'aléa dans l'expérience est la **variable aléatoire**.

## Définition

Une **variable aléatoire réelle (v.a.r.)** est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et une **réalisation de  $X$**  est une valeur  $X(\omega)$  pour une éventualité  $\omega \in \Omega$ .

- **Remarque** : la définition d'une v.a. est étrange et ne présente un intérêt que si on comprend son **utilité dans la modélisation**.

- $x_1, \dots, x_n$  représentent le résultat de l'expérience. On suppose que  $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .

- $x_1, \dots, x_n$  représentent le **résultat de l'expérience**. On suppose que  $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .
- Pour prendre en compte l'aléa de l'expérience, on va considérer des variables aléatoires **réelles** (v.a.r.).



- $x_1, \dots, x_n$  représentent le **résultat de l'expérience**. On suppose que  $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .
- Pour prendre en compte l'aléa de l'expérience, on va considérer des variables aléatoires **réelles** (v.a.r.).

### Lien observation/v.a.r.

Les  $x_i$  sont des réalisations de v.a.r.  $X_i$ . C'est-à-dire

$$\forall i = 1, \dots, n \exists \omega_i \in \Omega \quad \text{tel que } x_i = X_i(\omega_i).$$

- On suppose donc qu'il existe  $n$  v.a.r.  $X_1, \dots, X_n$  et des éléments  $\omega_1, \dots, \omega_n$  tels que

$$x_1 = X_1(\omega_1), \dots, x_n = X_n(\omega_n).$$

- On suppose donc qu'il existe  $n$  v.a.r.  $X_1, \dots, X_n$  et des éléments  $\omega_1, \dots, \omega_n$  tels que

$$x_1 = X_1(\omega_1), \dots, x_n = X_n(\omega_n).$$

### Question

Que représentent les  $\omega_i$  ?

- On suppose donc qu'il existe  $n$  v.a.r.  $X_1, \dots, X_n$  et des éléments  $\omega_1, \dots, \omega_n$  tels que

$$x_1 = X_1(\omega_1), \dots, x_n = X_n(\omega_n).$$

### Question

Que représentent les  $\omega_i$  ?

### Réponse

- $\omega_i$  représente les **conditions expérimentales** associées à la  $i^{\text{e}}$  mesure, c'est-à-dire toutes les conditions qui permettent "d'expliquer" qu'on a obtenu  $x_i$ .
- Cette quantité n'est généralement **pas caractérisable** (on sait qu'elle existe mais on ne peut pas en dire plus).

## Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

## Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

### Interprétation

- On dit que  $X_i$  est la v.a.r. représentant le  $i^{\text{e}}$  temps de trajet.

## Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

### Interprétation

- On dit que  $X_i$  est la v.a.r. représentant le  $i^{\text{e}}$  temps de trajet.
- L'ensemble  $\Omega$  contient toutes les conditions expérimentales possibles...  
C'est-à-dire tout ce qui peut se produire sur le trajet (feux, passant qui traverse, vitesse à laquelle on roule...).

## Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

### Interprétation

- On dit que  $X_i$  est la v.a.r. représentant le  $i^{\text{e}}$  temps de trajet.
- L'ensemble  $\Omega$  contient toutes les conditions expérimentales possibles...  
C'est-à-dire tout ce qui peut se produire sur le trajet (feux, passant qui traverse, vitesse à laquelle on roule...).
- $\omega_i$  correspondant à ce qui s'est produit sur le  $i^{\text{e}}$  trajet.



## Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

### Interprétation

- On dit que  $X_i$  est la v.a.r. représentant le  $i^{\text{e}}$  temps de trajet.
- L'ensemble  $\Omega$  contient toutes les conditions expérimentales possibles... C'est-à-dire tout ce qui peut se produire sur le trajet (feux, passant qui traverse, vitesse à laquelle on roule...).
- $\omega_i$  correspondant à ce qui s'est produit sur le  $i^{\text{e}}$  trajet.
- Par exemple  $\omega_1$  représente tout ce qui s'est passé sur le trajet permettant d'expliquer qu'on a mis 20.87 minutes.

## Exemple : durée de trajet

- $x_1 = 20.87, x_2 = 22.12, x_3 = 20.90, x_4 = 21.33, x_5 = 17.73, \dots$
- $X_1, \dots, X_n$  définies sur  $\Omega$ ,  $n$  v.a.r. telles que  $X_i(\omega_i) = x_i$ .

### Interprétation

- On dit que  $X_i$  est la v.a.r. représentant le  $i^{\text{e}}$  temps de trajet.
- L'ensemble  $\Omega$  contient toutes les conditions expérimentales possibles... C'est-à-dire tout ce qui peut se produire sur le trajet (feux, passant qui traverse, vitesse à laquelle on roule...).
- $\omega_i$  correspondant à ce qui s'est produit sur le  $i^{\text{e}}$  trajet.
- Par exemple  $\omega_1$  représente tout ce qui s'est passé sur le trajet permettant d'expliquer qu'on a mis 20.87 minutes.

### Remarque

On voit bien sur cet exemple qu'il est difficile de caractériser mathématiquement  $\Omega$  et les  $\omega_i, i = 1, \dots, n$ .

# Récapitulatif

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- Les  $n$  valeurs observées  $x_1, \dots, x_n$  sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

# Récapitulatif

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- Les  $n$  valeurs observées  $x_1, \dots, x_n$  sont des **réalisations de variables aléatoires**  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## Attention

$X_i$  est une **variable aléatoire**, c'est-à-dire une fonction, et  $x_i$  est une **réalisation** de cette variable, c'est-à-dire une quantité déterministe.

# Récapitulatif

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- Les  $n$  valeurs observées  $x_1, \dots, x_n$  sont des **réalisations de variables aléatoires**  $X_1, \dots, X_n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

## Attention

$X_i$  est une **variable aléatoire**, c'est-à-dire une fonction, et  $x_i$  est une **réalisation** de cette variable, c'est-à-dire une quantité déterministe.

## Remarque

- Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  n'ont **pas forcément un grand intérêt** dans la modélisation.
- La quantité qui va nous intéresser est la **loi de probabilité** associée à ces v.a.
- C'est cette loi qui nous permettra d'**apporter des réponses** au problème posé.

## Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une v.a.r. est représentée par les probabilités  $P(X \in [a, b])$  avec  $a \leq b$ .

## Loi de probabilité

La loi de probabilité d'une v.a.r. est représentée par les probabilités  $P(X \in [a, b])$  avec  $a \leq b$ .

## Intérêt

- La loi de probabilité permet de mesurer tous les évènements dans l'espace d'arrivé.
- C'est elle qui va nous intéresser pour comprendre le phénomène qui nous intéresse.

Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

Variable aléatoire réelle

Vecteurs aléatoires

Bibliographie



Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

Variable aléatoire réelle

Vecteurs aléatoires

Bibliographie

# Fonction de répartition

- La loi de probabilité telle qu'elle est définie précédemment n'est **pas facile à manipuler**.
- Nécessité de trouver des outils mathématiques qui permettent de la **caractériser ou de l'identifier**.

# Fonction de répartition

- La loi de probabilité telle qu'elle est définie précédemment n'est **pas facile à manipuler**.
- Nécessité de trouver des outils mathématiques qui permettent de la **caractériser ou de l'identifier**.

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r. On appelle **fonction de répartition** de  $X$  la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

## Propriété

La fonction de répartition  $F_X$  d'une v.a.r.  $X$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$  ;
2.  $F_X$  est une fonction croissante, continue à droite en tout point  $x \in \mathbb{R}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

## Propriété

La fonction de répartition  $F_X$  d'une v.a.r.  $X$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(x) \leq 1$  ;
2.  $F_X$  est une fonction croissante, continue à droite en tout point  $x \in \mathbb{R}$  ;
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

## Propriété

La fonction de répartition caractérise la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

- $F_X$  permet de caractériser la loi de n'importe quelle v.a.r.
- Il existe d'autres outils pour caractériser les lois qui peuvent dépendre de la nature de la variable.

- $F_X$  permet de caractériser la loi de n'importe quelle v.a.r.
- Il existe d'autres outils pour caractériser les lois qui peuvent dépendre de la nature de la variable.
  - Cas discret : fonction de masse.
  - Cas continu : densité.

## Définition

- On dit qu'une v.a.r  $X$  est **discrète** si son support  $\mathcal{S}_X$  est fini ou dénombrable.



## Définition

- On dit qu'une v.a.r  $X$  est **discrète** si son support  $\mathcal{S}_X$  est fini ou dénombrable.
- La **fonction de masse** définie par

$$\begin{aligned}\pi_X : \mathcal{S}_X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x)\end{aligned}$$

## Définition

- On dit qu'une v.a.r  $X$  est **discrète** si son support  $\mathcal{S}_X$  est fini ou dénombrable.
- La **fonction de masse** définie par

$$\begin{aligned}\pi_X : \mathcal{S}_X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x)\end{aligned}$$

- **Exemples** : Bernoulli, binomiale, Poisson...

## Définition

- On dit qu'une v.a.r  $X$  est **discrète** si son support  $\mathcal{S}_X$  est fini ou dénombrable.
- La **fonction de masse** définie par

$$\begin{aligned}\pi_X : \mathcal{S}_X &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X = x)\end{aligned}$$

- **Exemples** : Bernoulli, binomiale, Poisson...

## Propriété

La fonction de masse **caractérise la loi de probabilité d'une v.a.r discrète.**

- Généralement pour des v.a.r qui prennent leurs valeurs sur un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  ou une **réunion d'intervalles** de  $\mathbb{R}$ .

## Cas continu

- Généralement pour des v.a.r qui prennent leurs valeurs sur un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  ou une **réunion d'intervalles** de  $\mathbb{R}$ .

### Définition

Une v.a.r  $X$  est dite de **loi à densité** si il existe une **densité**  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tous  $a, b$  avec  $a \leq b$  on a

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

- Généralement pour des v.a.r qui prennent leurs valeurs sur un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  ou une **réunion d'intervalles** de  $\mathbb{R}$ .

### Définition

Une v.a.r  $X$  est dite de **loi à densité** si il existe une **densité**  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tous  $a, b$  avec  $a \leq b$  on a

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

- **Exemples** : Gaussienne, exponentielle...

## Cas continu

- Généralement pour des v.a.r qui prennent leurs valeurs sur un **intervalle** de  $\mathbb{R}$  ou une **réunion d'intervalles** de  $\mathbb{R}$ .

### Définition

Une v.a.r  $X$  est dite de **loi à densité** si il existe une **densité**  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tous  $a, b$  avec  $a \leq b$  on a

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

- **Exemples** : Gaussienne, exponentielle...

### Propriété

La densité **caractérise la loi de probabilité d'une v.a.r continue.**

## Quelques propriétés

- Toute fonction  $f$  positive, continue et qui intègre à 1 est une **densité**.
- Lien fonction de répartition densité :  $f_X = F'_X$  sur l'ensemble où  $F_X$  est dérivable.
- Une v.a.r n'est pas forcément discrète ou continue, ça peut aussi être un **mélange des deux**...



# Espérance d'un v.a.r.

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r.  $\mathbf{P}$ -intégrable. On appelle **espérance mathématique** de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$  l'intégrale de  $X$  par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{E}[X] = \int X \, d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

# Espérance d'un v.a.r.

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r.  $\mathbf{P}$ -intégrable. On appelle **espérance mathématique** de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$  l'intégrale de  $X$  par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{E}[X] = \int X \, d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

## Interprétation

- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r.  $X$**  pour chaque évènement  $\omega$  **pondéré** par la mesure de probabilité  $\mathbf{P}$ .

# Espérance d'un v.a.r.

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r.  $\mathbf{P}$ -intégrable. On appelle **espérance mathématique** de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$  l'intégrale de  $X$  par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{E}[X] = \int X \, d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

## Interprétation

- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r.  $X$**  pour chaque évènement  $\omega$  **pondéré** par la mesure de probabilité  $\mathbf{P}$ .
- D'où l'interprétation de **valeur moyenne** prise par  $X$ .

# Espérance d'un v.a.r.

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r.  $\mathbf{P}$ -intégrable. On appelle **espérance mathématique** de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$  l'intégrale de  $X$  par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{E}[X] = \int X \, d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

## Interprétation

- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r.  $X$**  pour chaque évènement  $\omega$  **pondéré** par la mesure de probabilité  $\mathbf{P}$ .
- D'où l'interprétation de **valeur moyenne** prise par  $X$ .
- **Problème** : l'espérance dépend de  $\Omega$  que l'on ne peut généralement pas caractériser !

# Espérance d'un v.a.r.

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r.  $\mathbf{P}$ -intégrable. On appelle **espérance mathématique** de  $X$ , notée  $\mathbf{E}[X]$  l'intégrale de  $X$  par rapport à  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{E}[X] = \int X \, d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

## Interprétation

- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r.  $X$**  pour chaque évènement  $\omega$  **pondéré** par la mesure de probabilité  $\mathbf{P}$ .
- D'où l'interprétation de **valeur moyenne** prise par  $X$ .
- **Problème** : l'espérance dépend de  $\Omega$  que l'on ne peut généralement pas caractériser !
- Le **théorème de transfert** permet de pallier à cette difficulté.

- On déduit du théorème de transfert un moyen "simple" pour calculer l'espérance dans les cas discret et continu.

- On déduit du théorème de transfert un moyen "simple" pour **calculer l'espérance** dans les cas **discret et continu**.

## Propriété

- **Cas discret** :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}_X} x \pi_x(x).$$

- **Cas continu** :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) d\lambda(x).$$

⇒ l'espérance s'obtient en calculant une **somme** ou une **intégrale**.

## Définition

- Le moment centré d'ordre 2 de  $X$  est appelé la **variance** de  $X$  et est noté  $\mathbf{V}[X]$  :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E} [(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive est appelée l'**écart-type** de  $X$ , noté  $\sigma[X]$ .



## Définition

- Le moment centré d'ordre 2 de  $X$  est appelé la **variance** de  $X$  et est noté  $\mathbf{V}[X]$  :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E} [(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive est appelée l'**écart-type** de  $X$ , noté  $\sigma[X]$ .

## Interprétation

- La variance est un réel **positif**.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par  $X$  et l'espérance (moyenne) de  $X$

# Variance

## Définition

- Le moment centré d'ordre 2 de  $X$  est appelé la **variance** de  $X$  et est noté  $V[X]$  :

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive est appelée l'**écart-type** de  $X$ , noté  $\sigma[X]$ .

## Interprétation

- La variance est un réel **positif**.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par  $X$  et l'espérance (moyenne) de  $X \implies$  interprétation en terme de **dispersion**.

# Exemples

1. Loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  :  $\mathbf{V}[X] = p(1 - p)$  ;
2. Loi uniforme sur  $[0, 1]$  :  $\mathbf{V}[X] = 1/12$  ;
3. Loi uniforme sur  $[1/4, 3/4]$  :  $\mathbf{V}[X] = 1/48$ .

# Quelques propriétés

## Espérance

1.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{E}[aX + b] = a\mathbf{E}[X] + b;$
2.  $\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$
3. **Jensen** : soit  $X$  à valeurs dans  $]a, b[$  et  $\varphi$  une fonction réelle convexe sur  $]a, b[$

$$\varphi(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[\varphi(X)].$$

# Quelques propriétés

## Espérance

1.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbf{E}[aX + b] = a\mathbf{E}[X] + b;$
2.  $\mathbf{E}[X_1 + X_2] = \mathbf{E}[X_1] + \mathbf{E}[X_2]$
3. **Jensen** : soit  $X$  à valeurs dans  $]a, b[$  et  $\varphi$  une fonction réelle convexe sur  $]a, b[$

$$\varphi(\mathbf{E}[X]) \leq \mathbf{E}[\varphi(X)].$$

## Variance

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{V}[\alpha X] = \alpha^2 \mathbf{V}[X];$
2.  $\forall a \in \mathbb{R}, \mathbf{V}[a + X] = \mathbf{V}[X];$
3.  $\mathbf{V}[X] = 0$  **si et seulement si**  $X$  est une v.a.r. presque sûrement constante ( $X = \mathbf{E}[X]$  p.s.).

## Markov

Si  $X$  est une v.a.r. positive, on a pour tout réel  $a > 0$

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

# Inégalités sur les moments

## Markov

Si  $X$  est une v.a.r. positive, on a pour tout réel  $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}.$$

## Bienaymé-Chebychev

Si  $E[X^2] < +\infty$ , alors on a pour tout réel  $a > 0$

$$P(|X - E[X]| > a) \leq \frac{V[X]}{a^2}.$$

Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

Variable aléatoire réelle

Vecteurs aléatoires

Bibliographie



- On se restreindra à la notion de **couple aléatoire**.

## Définitions

- Un **couple** de v.a.r. est une application :

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

- On se restreindra à la notion de **couple aléatoire**.

## Définitions

- Un **couple** de v.a.r. est une application :

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

- La **loi de  $(X, Y)$**  est représentée par les probabilités

$$\mathbf{P}((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]) = \mathbf{P}(X \in [a, b] \text{ et } Y \in [c, d])$$

pour tous  $a \leq b$  et  $c \leq d$ .

- On se restreindra à la notion de **couple aléatoire**.

## Définitions

- Un **couple** de v.a.r. est une application :

$$(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

- La **loi de  $(X, Y)$**  est représentée par les probabilités

$$\mathbf{P}((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]) = \mathbf{P}(X \in [a, b] \text{ et } Y \in [c, d])$$

pour tous  $a \leq b$  et  $c \leq d$ .

- Les v.a.r.  $X$  et  $Y$  sont les **marginale**s du couple  $(X, Y)$ .

- Les notions vues pour les v.a.r. se **généralisent** aux couples aléatoires.

- Les notions vues pour les v.a.r. se **généralisent** aux couples aléatoires.

## Exemple

- **Fonction de répartition** :

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

- **Densité** (si elle existe) : fonction  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\mathbf{P}((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx.$$

- Les notions vues pour les v.a.r. se **généralisent** aux couples aléatoires.

## Exemple

- **Fonction de répartition** :

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

- **Densité** (si elle existe) : fonction  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

$$\mathbf{P}((X, Y) \in [a, b] \times [c, d]) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y) \, dy \, dx.$$

- **Densités marginales** (si elles existent) :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) \, dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) \, dx.$$

- **Question** : étant donné un couple  $(X, Y)$  et une fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que vaut  $\mathbf{E}[g(X, Y)]$  ?

## Théorème de transfert

Si  $\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, y)| f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy < +\infty$  alors  $g(X, Y)$  est intégrable et

$$\mathbf{E}[g(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy.$$

# Calcul d'espérance

- **Question** : étant donné un couple  $(X, Y)$  et une fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que vaut  $\mathbf{E}[g(X, Y)]$  ?

## Théorème de transfert

Si  $\int_{\mathbb{R}^2} |g(x, y)| f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy < +\infty$  alors  $g(X, Y)$  est intégrable et

$$\mathbf{E}[g(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy.$$

- On déduit la **linéarité de l'espérance** : soient  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  alors

$$\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y].$$



## Définitions

- **Covariance** entre  $X$  et  $Y$  :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}([X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y].$$

- **Matrice de variance covariance** : matrice  $2 \times 2$

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}[X] & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \mathbf{V}[Y] \end{pmatrix}$$

# Covariance

## Définitions

- **Covariance** entre  $X$  et  $Y$  :

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbf{E}([X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y].$$

- **Matrice de variance covariance** : matrice  $2 \times 2$

$$\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}[X] & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \mathbf{V}[Y] \end{pmatrix}$$

## Propriétés

- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$  ;
- $\text{cov}(aX + b, Y) = a\text{cov}(X, Y)$  ;
- $\mathbf{V}[aX + bY] = a^2\mathbf{V}[X] + b^2\mathbf{V}[Y] + 2ab\text{cov}(X, Y)$ .

## Définition

Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire.  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si pour tous  $a \leq b$  et  $c \leq d$  on a

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)P(c \leq Y \leq d).$$

# Indépendance

## Définition

Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire.  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si pour tous  $a \leq b$  et  $c \leq d$  on a

$$\mathbf{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \mathbf{P}(a \leq X \leq b)\mathbf{P}(c \leq Y \leq d).$$

## En pratique

Si  $(X, Y)$  admet pour densité  $f_{X,Y}$  alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

## Propriété

Soient  $X$  et  $Y$  2 v.a.r indépendantes. Alors

1.  $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$  et donc  $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$
2.  $\mathbf{V}[X + Y] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y]$ .

- **Attention** : les réciproques sont fausses !

Un exemple de modèle

Quelques exemples de problèmes statistiques

Modèle statistique

Quelques rappels de probabilités

Variable aléatoire réelle


Vecteurs aléatoires

Bibliographie

 Jacod, J. and Protter, P. (2003).

*L'essentiel en théorie des probabilités.*

Cassini.

 Lejeune, M. (2004).

*Statistique. La théorie et ses applications.*

Springer.

 Rouvière, L. (2015).

**Probabilités générales.**

Polycopié de cours, [https ://perso.univ-rennes2.fr/laurent.rouviere](https://perso.univ-rennes2.fr/laurent.rouviere).

Deuxième partie II

## Théorie de l'estimation



Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

# Rappels

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$ .
- Ces observations sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$ .
- Ces observations sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n \implies \exists \omega_i$  tel que

$$X_i(\omega_i) = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

# Rappels

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$ .
- Ces observations sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n \implies \exists \omega_i$  tel que

$$X_i(\omega_i) = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

## Hypothèse

- On va supposer que les variables  $X_i$  sont indépendantes et de même loi de probabilité (inconnue)  $\mathbf{P}$ .

# Rappels

- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$ .
- Ces observations sont des réalisations de variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n \implies \exists \omega_i$  tel que

$$X_i(\omega_i) = x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

## Hypothèse

- On va supposer que les variables  $X_i$  sont indépendantes et de même loi de probabilité (inconnue)  $\mathbf{P}$ .

## Le problème de l'estimation

Il consiste à trouver (estimer) la loi  $\mathbf{P}$  à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

## Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

- Poser un **modèle** revient à **supposer** que la loi de probabilité **inconnue**  $P$  appartient à une famille de lois  $\mathcal{P}$ .

## Définition

On appelle **modèle statistique** tout **triplet**  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  où

- $\mathcal{H}$  est l'**espace des observations** (l'ensemble dans lequel les observations prennent valeurs) ;
- $\mathcal{A}$  est une **tribu** sur  $\mathcal{H}$  ;
- $\mathcal{P}$  est une **famille de probabilités** définies sur  $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ .

- Poser un **modèle** revient à **supposer** que la loi de probabilité **inconnue**  $P$  appartient à une famille de lois  $\mathcal{P}$ .

## Définition

On appelle **modèle statistique** tout **triplet**  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  où

- $\mathcal{H}$  est l'**espace des observations** (l'ensemble dans lequel les observations prennent valeurs) ;
- $\mathcal{A}$  est une **tribu** sur  $\mathcal{H}$  ;
- $\mathcal{P}$  est une **famille de probabilités** définies sur  $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ .

## Remarque

- $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}$  ne sont généralement pas difficile à caractériser.



- Poser un **modèle** revient à **supposer** que la loi de probabilité **inconnue**  $\mathbf{P}$  appartient à une famille de lois  $\mathcal{P}$ .

## Définition

On appelle **modèle statistique** tout **triplet**  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  où

- $\mathcal{H}$  est l'**espace des observations** (l'ensemble dans lequel les observations prennent valeurs) ;
- $\mathcal{A}$  est une **tribu** sur  $\mathcal{H}$  ;
- $\mathcal{P}$  est une **famille de probabilités** définies sur  $(\mathcal{H}, \mathcal{A})$ .

## Remarque

- $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}$  ne sont généralement pas difficile à caractériser.
- Le statisticien ou le praticien doit par contre **choisir une famille de loi de probabilité** susceptible de contenir la loi inconnue  $\mathbf{P}$ .

## Exemple

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite  $n = 100$  patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

# Exemple

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite  $n = 100$  patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

## Modélisation

- On note  $x_i = 1$  si le  $i^{\text{ème}}$  patient a guéri, 0 sinon.

## Exemple

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite  $n = 100$  patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

### Modélisation

- On note  $x_i = 1$  si le  $i^{\text{ème}}$  patient a guéri, 0 sinon.
- On suppose que  $x_i$  est la réalisation d'une variable aléatoire  $X_i$  de loi de bernoulli de paramètre **inconnu**  $p \in [0, 1]$ .

## Exemple

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement à l'aide d'un essai clinique.
- On traite  $n = 100$  patients atteints de la pathologie.
- A l'issue de l'étude, 72 patients sont guéris.

### Modélisation

- On note  $x_i = 1$  si le  $i^{\text{ème}}$  patient a guéri, 0 sinon.
- On suppose que  $x_i$  est la réalisation d'une variable aléatoire  $X_i$  de loi de bernoulli de paramètre **inconnu**  $p \in [0, 1]$ .
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de guérir (ce qui peut revenir à dire qu'ils en sont au même stade de la pathologie), il est alors raisonnable de supposer que les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont **indépendantes**.

# Spécification du triplet

## Le triplet pour l'exemple

- $\mathcal{H}$  : pas le choix  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .
- $\mathcal{A}$  : pas le choix  $\mathcal{A} =$  ensemble des parties de  $\{0, 1\}$ .

# Spécification du triplet

## Le triplet pour l'exemple

- $\mathcal{H}$  : pas le choix  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .
- $\mathcal{A}$  : pas le choix  $\mathcal{A} =$  ensemble des parties de  $\{0, 1\}$ .
- $\mathcal{P} = \{\text{lois de Bernoulli de paramètre } p \in [0, 1]\} = \{B(p) : p \in [0, 1]\}$ .

# Spécification du triplet

## Le triplet pour l'exemple

- $\mathcal{H}$  : pas le choix  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .
  - $\mathcal{A}$  : pas le choix  $\mathcal{A}$  = ensemble des parties de  $\{0, 1\}$ .
  - $\mathcal{P} = \{\text{lois de Bernoulli de paramètre } p \in [0, 1]\} = \{B(p) : p \in [0, 1]\}$ .
- 
- A travers ce **modèle**, on **suppose** que la variable aléatoire  $X_i$  qui représente la réaction du  $i^{\text{e}}$  patient au traitement suit une loi de Bernoulli de paramètre **inconnu**  $p \in [0, 1]$ .



# Spécification du triplet

## Le triplet pour l'exemple

- $\mathcal{H}$  : pas le choix  $\mathcal{H} = \{0, 1\}$ .
  - $\mathcal{A}$  : pas le choix  $\mathcal{A}$  = ensemble des parties de  $\{0, 1\}$ .
  - $\mathcal{P} = \{\text{lois de Bernoulli de paramètre } p \in [0, 1]\} = \{B(p) : p \in [0, 1]\}$ .
- 
- A travers ce **modèle**, on **suppose** que la variable aléatoire  $X_i$  qui représente la réaction du  $i^{\text{e}}$  patient au traitement suit une loi de Bernoulli de paramètre **inconnu**  $p \in [0, 1]$ .
  - **Le problème statistique** : reconstruire ou **estimer ce paramètre** à l'aide de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

## Autres exemples

- Exemple 1 : Traitement.
- Exemple 2 : Nombre de voitures au feu rouge.
- Exemple 3 : Durée de trajet domicile/travail.

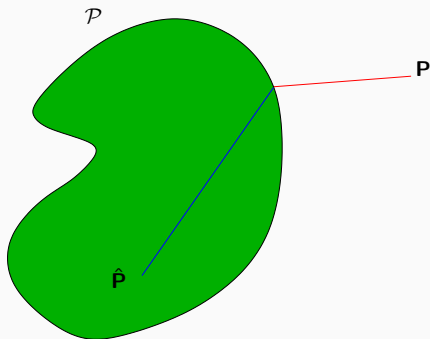
## Autres exemples

- Exemple 1 : Traitement.
- Exemple 2 : Nombre de voitures au feu rouge.
- Exemple 3 : Durée de trajet domicile/travail.

	$\mathcal{H}$	$\mathcal{A}$	$\mathcal{P}$
Exemple 1	$\{0, 1\}$	$\mathcal{P}(\{0, 1\})$	$\{B(p), p \in [0, 1]\}$
Exemple 2	$\mathbb{N}$	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	$\{\mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0\}$
Exemple 3	$\mathbb{R}$	$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	$\{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$

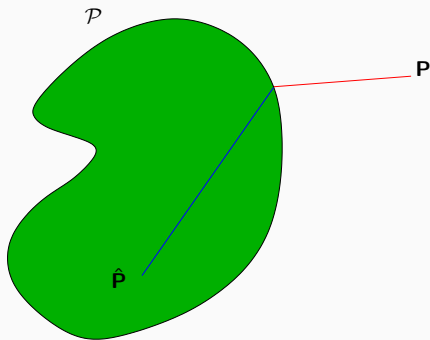
## 2 types d'erreur

- Poser un modèle = choisir une famille de lois  $\mathcal{P}$  candidates pour  $P$ .



## 2 types d'erreur

- Poser un modèle = choisir une famille de lois  $\mathcal{P}$  candidates pour  $P$ .



On distingue deux types d'erreurs :

- Erreur d'estimation : erreur commise par le choix d'une loi dans  $\mathcal{P}$  par rapport au meilleur choix.
- Erreur d'approximation : erreur commise par le choix de  $\mathcal{P}$ .

- Ces deux termes évoluent généralement en **sens inverse**.

- Ces deux termes évoluent généralement en **sens inverse**.

### Exemple des durées de trajet

- $\mathcal{M}_1 : \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ .
- $\mathcal{M}_2 : \mathcal{P} = \{\text{Lois à densités continues}\}$ .

- Ces deux termes évoluent généralement en **sens inverse**.

### Exemple des durées de trajet

- $\mathcal{M}_1 : \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ .
  - $\mathcal{M}_2 : \mathcal{P} = \{\text{Lois à densités continues}\}$ .
- 
- $\mathcal{M}_2$  est **plus flexible** que  $\mathcal{M}_1$ . On a même  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ .
  - La théorie montrera qu'il est **plus difficile de bien estimer** dans  $\mathcal{M}_2$  que dans  $\mathcal{M}_1$ .



- Ces deux termes évoluent généralement en **sens inverse**.

### Exemple des durées de trajet

- $\mathcal{M}_1 : \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ .
- $\mathcal{M}_2 : \mathcal{P} = \{\text{Lois à densités continues}\}$ .

- $\mathcal{M}_2$  est **plus flexible** que  $\mathcal{M}_1$ . On a même  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ .
- La théorie montrera qu'il est **plus difficile de bien estimer** dans  $\mathcal{M}_2$  que dans  $\mathcal{M}_1$ .

### Conséquence

- Le travail du statisticien consistera **toujours** à essayer de trouver le **meilleur compromis** entre ces deux erreurs.

- Ces deux termes évoluent généralement en **sens inverse**.

### Exemple des durées de trajet

- $\mathcal{M}_1 : \mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$ .
- $\mathcal{M}_2 : \mathcal{P} = \{\text{Lois à densités continues}\}$ .

- $\mathcal{M}_2$  est **plus flexible** que  $\mathcal{M}_1$ . On a même  $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ .
- La théorie montrera qu'il est **plus difficile de bien estimer** dans  $\mathcal{M}_2$  que dans  $\mathcal{M}_1$ .

### Conséquence

- Le travail du statisticien consistera **toujours** à essayer de trouver le **meilleur compromis** entre ces deux erreurs.
- Dans ce cours, nous étudierons essentiellement l'**erreur d'estimation** dans les **modèles paramétriques**.

# Paramétrique versus non paramétrique

## Définition

- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  où  $\Theta \in \mathbb{R}^d$  alors on parle de **modèle paramétrique** et  $\Theta$  est l'espace des paramètres.

# Paramétrique versus non paramétrique

## Définition

- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  où  $\Theta \in \mathbb{R}^d$  alors on parle de **modèle paramétrique** et  $\Theta$  est l'espace des paramètres.
- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$  où  $\mathcal{F}$  est de dimension infinie, on parle de **modèle non paramétrique**.

# Paramétrique versus non paramétrique

## Définition

- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  où  $\Theta \in \mathbb{R}^d$  alors on parle de **modèle paramétrique** et  $\Theta$  est l'espace des paramètres.
- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$  où  $\mathcal{F}$  est de dimension infinie, on parle de **modèle non paramétrique**.

## Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  est un modèle **paramétrique**.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$  est un modèle **non paramétrique**.

# Paramétrique versus non paramétrique

## Définition

- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  où  $\Theta \in \mathbb{R}^d$  alors on parle de **modèle paramétrique** et  $\Theta$  est l'espace des paramètres.
- Si  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}, \mathbf{P} \in \mathcal{F}\}$  où  $\mathcal{F}$  est de dimension infinie, on parle de **modèle non paramétrique**.

## Exemple : modèle de densité

- $\mathcal{P} = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$  est un modèle **paramétrique**.
- $\mathcal{P} = \{\text{densités } f \text{ 2 fois dérivables}\}$  est un modèle **non paramétrique**.

Le problème statistique sera d'**estimer**  $(\mu, \sigma^2)$  ou  $f$  à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .

# Le problème de régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .

# Le problème de régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des **réalisations de variables aléatoires**  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  telles qu'il existe une fonction **inconnue**  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .



# Le problème de régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des **réalisations de variables aléatoires**  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  telles qu'il existe une fonction **inconnue**  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

## Le problème statistique

Il consiste à estimer la **fonction inconnue**  $m$  à l'aide de l'échantillon  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

# Régression paramétrique vs non paramétrique

## Modèle linéaire (paramétrique)

- On **suppose**  $m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
- Le problème est d'**estimer**  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

# Régression paramétrique vs non paramétrique

## Modèle linéaire (paramétrique)

- On **suppose**  $m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
- Le problème est d'**estimer**  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de **dimension finie**  $\implies$  modèle **paramétrique**.

# Régression paramétrique vs non paramétrique

## Modèle linéaire (paramétrique)

- On **suppose**  $m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
- Le problème est d'**estimer**  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de **dimension finie**  $\implies$  modèle **paramétrique**.

## Un modèle non paramétrique

- On suppose que  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

# Régression paramétrique vs non paramétrique

## Modèle linéaire (paramétrique)

- On suppose  $m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
- Le problème est d'estimer  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de dimension finie  $\implies$  modèle paramétrique.

## Un modèle non paramétrique

- On suppose que  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.
- Le problème est d'estimer  $m$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .

# Régression paramétrique vs non paramétrique

## Modèle linéaire (paramétrique)

- On suppose  $m(x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
- Le problème est d'estimer  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de dimension finie  $\implies$  modèle paramétrique.

## Un modèle non paramétrique

- On suppose que  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.
- Le problème est d'estimer  $m$  à l'aide de  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ .
- Paramètre à estimer de dimension infinie  $\implies$  modèle non paramétrique.

## Estimer...

Etant donné un modèle  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  :

- Trouver des procédures (automatiques) permettant de sélectionner une loi  $\hat{\mathbf{P}}$  dans  $\mathcal{P}$  à partir d'un  $n$ -échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .
- Etudier les performances des lois choisies.

## Estimer...

Etant donné un modèle  $(\mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  :

- Trouver des procédures (automatiques) permettant de sélectionner une loi  $\hat{\mathbf{P}}$  dans  $\mathcal{P}$  à partir d'un  $n$ -échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .
- Etudier les performances des lois choisies.

## Paramétrique

- Dans la suite, on va considérer uniquement des modèles paramétriques  $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$  avec  $\Theta$  de dimension finie (typiquement  $\mathbb{R}^p$ ).
- Choisir une loi reviendra donc à choisir un paramètre  $\hat{\theta}$  à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ .



- Les modèles que nous allons considérer auront pour **espace d'observations** un ensemble dénombrable  $\Omega$  ou  $\mathbb{R}^d$  et seront munis des tribus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dans la suite, on se donne un modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ .

- Les modèles que nous allons considérer auront pour **espace d'observations** un ensemble dénombrable  $\Omega$  ou  $\mathbb{R}^d$  et seront munis des tribus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dans la suite, on se donne un modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ .

## Echantillon

Un **échantillon** de taille  $n$  est une suite  $X_1, \dots, X_n$  de  $n$  **variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$** , pour  $\theta \in \Theta$ .

- Les modèles que nous allons considérer auront pour **espace d'observations** un ensemble dénombrable  $\Omega$  ou  $\mathbb{R}^d$  et seront munis des tribus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dans la suite, on se donne un modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ .

## Echantillon

Un **échantillon** de taille  $n$  est une suite  $X_1, \dots, X_n$  de  $n$  **variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$** , pour  $\theta \in \Theta$ .

## Identifiabilité

- Si  $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$  est injective, le modèle est dit **identifiable**.

- Les modèles que nous allons considérer auront pour **espace d'observations** un ensemble dénombrable  $\Omega$  ou  $\mathbb{R}^d$  et seront munis des tribus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dans la suite, on se donne un modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ .

## Echantillon

Un **échantillon** de taille  $n$  est une suite  $X_1, \dots, X_n$  de  $n$  **variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$** , pour  $\theta \in \Theta$ .

## Identifiabilité

- Si  $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$  est injective, le modèle est dit **identifiable**.
- L'identifiabilité implique
  - 2 paramètres **différents** correspondent à deux lois **différentes**.
  - 2 lois **identiques** correspondent à deux paramètres **identiques**.

- Les modèles que nous allons considérer auront pour **espace d'observations** un ensemble dénombrable  $\Omega$  ou  $\mathbb{R}^d$  et seront munis des tribus  $\mathcal{P}(\Omega)$  ou  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .
- Dans la suite, on se donne un modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\})$ .

## Echantillon

Un **échantillon** de taille  $n$  est une suite  $X_1, \dots, X_n$  de  $n$  **variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$** , pour  $\theta \in \Theta$ .

## Identifiabilité

- Si  $\theta \mapsto \mathbf{P}_\theta$  est injective, le modèle est dit **identifiable**.
- L'identifiabilité implique
  - 2 paramètres **différents** correspondent à deux lois **différentes**.
  - 2 lois **identiques** correspondent à deux paramètres **identiques**.
- Elle permet donc d'identifier une loi à un **unique** paramètre et est **capitale** pour savoir ce que l'on doit estimer.

1. On récolte *n observations* (*n* valeurs)  $x_1, \dots, x_n$  qui sont les résultats de *n* expériences aléatoires indépendantes.

1. On récolte  $n$  observations ( $n$  valeurs)  $x_1, \dots, x_n$  qui sont les résultats de  $n$  expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation** : on suppose que les  $n$  valeurs sont des réalisations de  $n$  variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$ . Ce qui nous amène à définir le modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta\}, \theta \in \Theta)$ .

# La démarche statistique

1. On récolte  $n$  observations ( $n$  valeurs)  $x_1, \dots, x_n$  qui sont les résultats de  $n$  expériences aléatoires indépendantes.
2. **Modélisation** : on suppose que les  $n$  valeurs sont des réalisations de  $n$  variables aléatoires indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  et de même loi  $\mathbf{P}_\theta$ . Ce qui nous amène à définir le modèle  $\mathcal{M} = (\mathcal{H}, \{\mathbf{P}_\theta\}, \theta \in \Theta)$ .
3. **Estimation** : chercher dans le modèle une loi  $\mathbf{P}_{\hat{\theta}}$  qui soit la plus proche possible de  $\mathbf{P}_\theta \implies$  chercher un estimateur  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ .



## Définitions

- Une **statistique** est une application (mesurable) définie sur  $\mathcal{H}^n$ .
- Un **estimateur** (de  $\theta$ ) est une fonction (mesurable) de  $(X_1, \dots, X_n)$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans un sur-ensemble de  $\Theta$ .

## Définitions

- Une **statistique** est une application (mesurable) définie sur  $\mathcal{H}^n$ .
- Un **estimateur** (de  $\theta$ ) est une fonction (mesurable) de  $(X_1, \dots, X_n)$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans un sur-ensemble de  $\Theta$ .

## Exemple 1 (modèle de Bernoulli)

Les variables aléatoires  $\hat{p}_1 = X_1$  et  $\hat{p}_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  sont des estimateurs de  $p$ .

## Définitions

- Une **statistique** est une application (mesurable) définie sur  $\mathcal{H}^n$ .
- Un **estimateur** (de  $\theta$ ) est une fonction (mesurable) de  $(X_1, \dots, X_n)$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans un sur-ensemble de  $\Theta$ .

## Exemple 1 (modèle de Bernoulli)

Les variables aléatoires  $\hat{p}_1 = X_1$  et  $\hat{p}_2 = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  sont des estimateurs de  $p$ .

## Remarque

- Un estimateur  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  : c'est une **variable aléatoire**.
- **Démarche** :
  1. Chercher le "meilleur" **estimateur**  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
  2. A la fin, calculer **l'estimation**  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  (renvoyé par le logiciel).

## Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre **abstrait**.

## Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre **abstrait**.
- On cherche alors la **meilleure** fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  vis à vis de **critères** à définir.

## Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre **abstrait**.
- On cherche alors la **meilleure** fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  vis à vis de **critères** à définir.
- Une fois cette fonction trouvée, il faut donner une **réponse** (qui ne doit pas être abstraite!)

## Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre **abstrait**.
- On cherche alors la **meilleure** fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  vis à vis de **critères** à définir.
- Une fois cette fonction trouvée, il faut donner une **réponse** (qui ne doit pas être abstraite!)... On applique la fonction trouvée aux données observées  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ .

## Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre **abstrait**.
- On cherche alors la **meilleure** fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  vis à vis de **critères** à définir.
- Une fois cette fonction trouvée, il faut donner une **réponse** (qui ne doit pas être abstraite!)... On applique la fonction trouvée aux données observées  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ .

### Abus de notation

**Malheureusement** on note souvent de la **même façon** l'estimateur et l'estimation :

- on écrit  $\hat{\theta}$  pour **l'estimateur**  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ;
- on écrit  $\hat{\theta}$  pour **l'estimation**  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  ;



# Estimateurs vs estimation...

- Donner une bonne réponse au problème posé nécessite de se placer dans un premier temps dans un cadre **abstrait**.
- On cherche alors la **meilleure** fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  vis à vis de **critères** à définir.
- Une fois cette fonction trouvée, il faut donner une **réponse** (qui ne doit pas être abstraite!)... On applique la fonction trouvée aux données observées  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ .

## Abus de notation

**Malheureusement** on note souvent de la **même façon** l'estimateur et l'estimation :

- on écrit  $\hat{\theta}$  pour **l'estimateur**  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  ;
- on écrit  $\hat{\theta}$  pour **l'estimation**  $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$  ;
- Il est donc nécessaire de faire soi-même la **distinction entre ces deux objets** lorsque on lit ou écrit  $\hat{\theta}$

## Exemple : réponse à un traitement

- Les données

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	0	0	0	1	0	1	0

## Exemple : réponse à un traitement

- Les données

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	0	0	0	1	0	1	0

- Modèle** : les  $x_i$  sont des réalisations de v.a.  $X_i$  indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (inconnu).

## Exemple : réponse à un traitement

- Les données

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	0	0	0	1	0	1	0

- Modèle** : les  $x_i$  sont des réalisations de v.a.  $X_i$  indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (inconnu).
- Problème statistique** : estimer  $p$ .

## Exemple : réponse à un traitement

- Les données

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	0	0	0	1	0	1	0

- Modèle** : les  $x_i$  sont des réalisations de v.a.  $X_i$  indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (inconnu).
- Problème statistique** : estimer  $p$ .
- Estimateur** :

$$\hat{p} = \hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

## Exemple : réponse à un traitement

- Les données

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$
1	0	0	0	1	0	1	0

- Modèle** : les  $x_i$  sont des réalisations de v.a.  $X_i$  indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (inconnu).
- Problème statistique** : estimer  $p$ .
- Estimateur** :

$$\hat{p} = \hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Estimation** :

$$\hat{p} = \hat{p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{3}{8}.$$

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

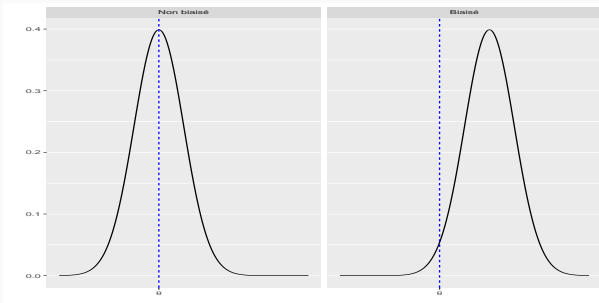
- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.
- On cherche un **estimateur**  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .



- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.
- On cherche un **estimateur**  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Un estimateur est donc une **variable aléatoire**. Il va donc (le plus souvent) posséder
  - une loi de probabilité
  - une espérance
  - une variance...

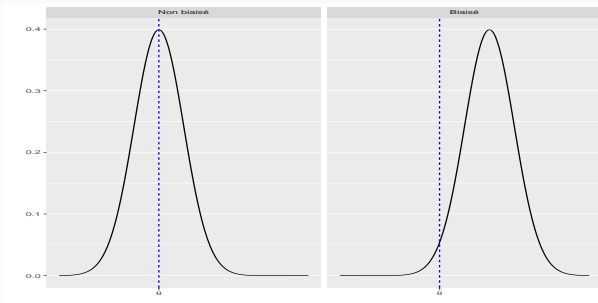
# Espérance d'un estimateur

- On représente ci-dessous les lois de probabilité de 2 estimateurs de  $\theta$ .



# Espérance d'un estimateur

- On représente ci-dessous les lois de probabilité de 2 estimateurs de  $\theta$ .



## Commentaires

- L'estimateur de gauche semble être **préférable** à celui de droite.
- Sa loi de probabilité est en effet **centrée sur le paramètre inconnu**  $\implies E[\hat{\theta}] \approx \theta$ .

# Biais d'un estimateur

- Dans la suite, pour un modèle de famille de loi  $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ , on désigne par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{V}$  les variables sous la loi  $\mathbf{P}_\theta$ .

## Définition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'ordre 1 (l'espérance existe).

1. Le **biais** de  $\hat{\theta}$  en  $\theta$  est  $\mathbf{E}(\hat{\theta}) - \theta$ .
2.  $\hat{\theta}$  est **sans biais** lorsque son biais est nul.
3.  $\hat{\theta}$  est **asymptotiquement sans biais** si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\hat{\theta}) = \theta$ .

# Biais d'un estimateur

- Dans la suite, pour un modèle de famille de loi  $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ , on désigne par  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{V}$  les variables sous la loi  $\mathbf{P}_\theta$ .

## Définition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'ordre 1 (l'espérance existe).

1. Le **biais** de  $\hat{\theta}$  en  $\theta$  est  $\mathbf{E}(\hat{\theta}) - \theta$ .
2.  $\hat{\theta}$  est **sans biais** lorsque son biais est nul.
3.  $\hat{\theta}$  est **asymptotiquement sans biais** si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\hat{\theta}) = \theta$ .

## Exemple 1

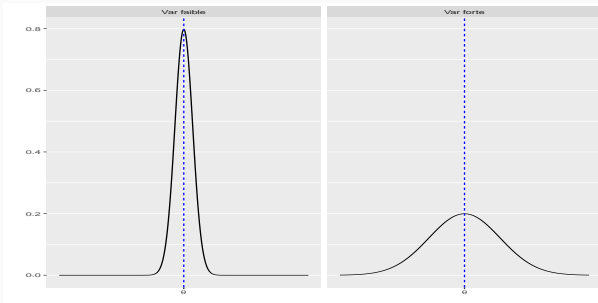
Les estimateurs  $\hat{p}_1$  et  $\hat{p}_2$  sont **sans biais**.

## Variance d'un estimateur

- Mesurer le biais n'est pas suffisant

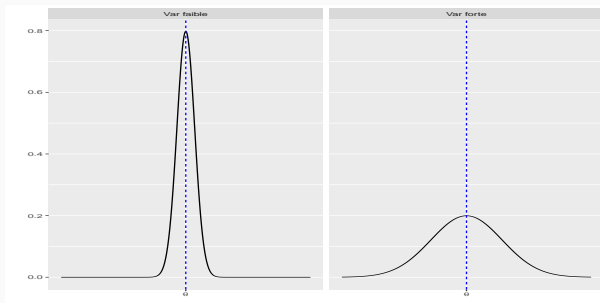
# Variance d'un estimateur

- Mesurer le biais n'est **pas suffisant**, il faut également mesurer la **dispersion** des estimateurs.



# Variance d'un estimateur

- Mesurer le biais n'est **pas suffisant**, il faut également mesurer la **dispersion** des estimateurs.



- Les deux estimateurs sont **sans biais**.
- L'estimateur de gauche semble être **préférable** à celui de droite.
- Sa variance est plus faible :  $\Rightarrow \mathbf{V}[\hat{\theta}_1] \leq \mathbf{V}[\hat{\theta}_2]$ .



# Risque quadratique

- **Objectif** : trouver des estimateurs ayant un **biais** et une **variance faibles**.
- Le **risque quadratique** prend en compte simultanément ces deux critères.

# Risque quadratique

- **Objectif** : trouver des estimateurs ayant un **biais** et une **variance faibles**.
- Le **risque quadratique** prend en compte simultanément ces deux critères.

## Définition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'ordre 2.

1. Le **risque quadratique** de  $\hat{\theta}$  de  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$$

2. Soit  $\hat{\theta}'$  un autre estimateur d'ordre 2. On dit que  $\hat{\theta}$  est **préférable** à  $\hat{\theta}'$  si

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) \leq \mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}') \quad \forall \theta \in \Theta.$$

# Risque quadratique

- **Objectif** : trouver des estimateurs ayant un **biais** et une **variance faibles**.
- Le **risque quadratique** prend en compte simultanément ces deux critères.

## Définition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur d'ordre 2.

1. Le **risque quadratique** de  $\hat{\theta}$  de  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}(\hat{\theta} - \theta)^2$$

2. Soit  $\hat{\theta}'$  un autre estimateur d'ordre 2. On dit que  $\hat{\theta}$  est **préférable** à  $\hat{\theta}'$  si

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) \leq \mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}') \quad \forall \theta \in \Theta.$$

## Exemple (Bernoulli)

$\hat{p}_2$  est **préférable** à  $\hat{p}_1$ .

## Propriété décomposition biais variance

Si  $\hat{\theta}$  est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = (\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 + \mathbf{E}(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2 = b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}[\hat{\theta}].$$

## Propriété décomposition biais variance

Si  $\hat{\theta}$  est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = (\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 + \mathbf{E}(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2 = b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}[\hat{\theta}].$$

## Définition

Si  $\hat{\theta}$  est sans biais, on dit qu'il est de **variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB)** si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2 :

# Estimateur VUMSB

## Propriété décomposition biais variance

Si  $\hat{\theta}$  est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = (\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 + \mathbf{E}(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2 = b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}[\hat{\theta}].$$

## Définition

Si  $\hat{\theta}$  est sans biais, on dit qu'il est de **variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB)** si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2 :

$$\hat{\theta} \text{ VUMSB} \iff \begin{cases} \mathbf{E}[\hat{\theta}] = \theta \\ \forall \tilde{\theta} \text{ tel que } \mathbf{E}[\tilde{\theta}] = \theta, \mathbf{V}[\hat{\theta}] \leq \mathbf{V}[\tilde{\theta}] \end{cases}$$

# Estimateur VUMSB

## Propriété décomposition biais variance

Si  $\hat{\theta}$  est d'ordre 2, on a la décomposition

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = (\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta)^2 + \mathbf{E}(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2 = b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}[\hat{\theta}].$$

## Définition

Si  $\hat{\theta}$  est sans biais, on dit qu'il est de **variance uniformément minimum parmi les estimateurs sans biais (VUMSB)** si il est préférable à tout autre estimateur sans biais d'ordre 2 :

$$\hat{\theta} \text{ VUMSB} \iff \begin{cases} \mathbf{E}[\hat{\theta}] = \theta \\ \forall \tilde{\theta} \text{ tel que } \mathbf{E}[\tilde{\theta}] = \theta, \mathbf{V}[\hat{\theta}] \leq \mathbf{V}[\tilde{\theta}] \end{cases}$$

## Exemple

Dans le modèle de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  nous montrerons que  $\hat{p}_2$  est **VUMSB**.

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie



- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.
- Le **biais** et la **variance** permettent de mesurer la performance d'un estimateur  $\hat{\theta}$ .

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.
- Le **biais** et la **variance** permettent de mesurer la performance d'un estimateur  $\hat{\theta}$ .

### Question

Comment construire un estimateur (que l'on espère) **performant** ?

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.
- Le **biais** et la **variance** permettent de mesurer la performance d'un estimateur  $\hat{\theta}$ .

## Question

Comment construire un estimateur (que l'on espère) **performant** ?

## Construction d'estimateurs

- Il existe des procédures **automatiques** qui permettent de construire des estimateurs.
- Nous présentons dans cette partie la méthode des **moments** et du **maximum de vraisemblance**.

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

- C'est une approche **intuitive** qui repose sur le fait que pour de nombreux modèles les moments **empiriques** doivent être **proches** des moments **théoriques**.

- C'est une approche **intuitive** qui repose sur le fait que pour de nombreux modèles les moments **empiriques** doivent être **proches** des moments **théoriques**.
- En effet, on a d'après la **LFGN** que pour de nombreux modèles :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx \mathbf{E}[X_1].$$

- C'est une approche **intuitive** qui repose sur le fait que pour de nombreux modèles les moments **empiriques** doivent être **proches** des moments **théoriques**.
- En effet, on a d'après la **LFGN** que pour de nombreux modèles :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \approx \mathbf{E}[X_1].$$

## Définition

L'**estimateur des moments**  $\hat{\theta}_m$ , si il existe, est la solution en  $\theta$  de l'équation

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \mathbf{E}[X_1].$$

Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\hat{p}_m = \bar{X}_n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_m = \bar{X}_n$
Uniforme $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	$\hat{\theta}_m = 2\bar{X}_n$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_m = 1/\bar{X}_n$



Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\hat{p}_m = \bar{X}_n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_m = \bar{X}_n$
Uniforme $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	$\hat{\theta}_m = 2\bar{X}_n$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_m = 1/\bar{X}_n$

## Remarque

- L'estimateur des moments **n'existe pas toujours**.
- Même lorsqu'il existe, il n'est **pas toujours performant** (voir TD).

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

## Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ .
- $x_1, \dots, x_n$  réalisations de  $X_1, \dots, X_n$ .

## Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ .
- $x_1, \dots, x_n$  réalisations de  $X_1, \dots, X_n$ .

### Idée

1. La quantité  $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  peut être vue comme une mesure de la probabilité d'observer les données observées.

## Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ .
- $x_1, \dots, x_n$  réalisations de  $X_1, \dots, X_n$ .

### Idée

1. La quantité  $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  peut être vue comme une mesure de la probabilité d'observer les données observées.
2. Choisir le paramètre  $p$  qui maximise cette probabilité.

## Retour à l'exemple 1

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ .
- $x_1, \dots, x_n$  réalisations de  $X_1, \dots, X_n$ .

### Idée

1. La quantité  $L(x_1, \dots, x_n; p) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  peut être vue comme une mesure de la **probabilité d'observer les données observées**.
2. Choisir le paramètre  $p$  qui **maximise** cette probabilité.

### Notion de vraisemblance

- $L(x_1, \dots, x_n; p)$  est appelée **vraisemblance** (elle mesure la vraisemblance des réalisations  $x_1, \dots, x_n$  sous la loi  $\mathbf{P}_p$ ).
- L'approche consiste à choisir  $p$  qui "rend ces réalisations **les plus vraisemblables possible**".

# Vraisemblance

## Cas discret

La **vraisemblance** du paramètre  $\theta$  pour la réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'application  $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$  définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

# Vraisemblance

## Cas discret

La **vraisemblance** du paramètre  $\theta$  pour la réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'application  $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$  définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \mathbf{P}(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i).$$

## Cas absolument continu

Soit  $f(., \theta)$  la densité associé à  $\mathbf{P}_\theta$ . La **vraisemblance** du paramètre  $\theta$  pour la réalisation  $(x_1, \dots, x_n)$  est l'application  $L : \mathcal{H}^n \times \Theta$  définie par

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$



# L'estimateur du maximum de vraisemblance

## Définition

Un **estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)** est une statistique  $g$  qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$$

$$L(x_1, \dots, x_n; g(x_1, \dots, x_n)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

L'EMV s'écrit alors  $\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$ .

# L'estimateur du maximum de vraisemblance

## Définition

Un **estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)** est une statistique  $g$  qui maximise la vraisemblance, c'est-à-dire

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{H}^n$$

$$L(x_1, \dots, x_n; g(x_1, \dots, x_n)) = \sup_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

L'EMV s'écrit alors  $\hat{\theta} = g(X_1, \dots, X_n)$ .

## Exemples

Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\hat{p}_{MV} = \bar{X}_n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\hat{\lambda}_{MV} = \bar{X}_n$
Uniforme $\mathcal{U}_{[0, \theta]}$	$\hat{\theta}_{MV} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\mathbb{R}$ .

## Objectif

Montrer que sous certaines hypothèses de régularité l'EMV est **asymptotiquement VUMSB** :

1.  $\hat{\theta}$  est asymptotiquement **sans biais**.
2. il existe une fonction  $r(n, \theta)$  telle que pour tout estimateur  $T$  sans biais de  $\theta$ , on a  $\mathbf{V}(T) \geq r(n, \theta)$ .
3. la **variance asymptotique** de l'EMV vaut  $r(n, \theta)$ .

- Considérons pour l'instant 1 seule observation  $X$  de loi  $\mathbf{P}_\theta$ .
- On désigne par  $L_1(.; \theta)$  la vraisemblance associée.

# Information de Fisher

- Considérons pour l'instant 1 seule observation  $X$  de loi  $\mathbf{P}_\theta$ .
- On désigne par  $L_1(\cdot; \theta)$  la vraisemblance associée.

## Définition

Si elle existe (c'est-à-dire si la dérivée par rapport à  $\theta$  de la log-vraisemblance est de carré intégrable), l'**information de Fisher** associée à l'observation  $X$  est définie par :

$$I : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \theta \mapsto \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right]$$

## Interprétation

L'information de Fisher peut s'interpréter comme :

- la quantité d'information apportée par l'observation  $X$  pour estimer le paramètre inconnu.

## Interprétation

L'information de Fisher peut s'interpréter comme :

- la quantité d'information apportée par l'observation  $X$  pour estimer le paramètre inconnu.
- une mesure du pouvoir de discrimination du modèle entre deux valeurs proches du paramètre  $\theta$  :
  - $I(\theta)$  grand : il sera "facile" d'identifier quel paramètre est le meilleur.
  - $I(\theta)$  petit : l'identification sera plus difficile.



## Interprétation

L'information de Fisher peut s'interpréter comme :

- la quantité d'information apportée par l'observation  $X$  pour estimer le paramètre inconnu.
- une mesure du pouvoir de discrimination du modèle entre deux valeurs proches du paramètre  $\theta$  :
  - $I(\theta)$  grand : il sera "facile" d'identifier quel paramètre est le meilleur.
  - $I(\theta)$  petit : l'identification sera plus difficile.

## Propriété

- Si elle existe, l'information de Fisher vérifie

$$I(\theta) = -\mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(L(X, \theta)) \right] = \mathbf{V} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right].$$

- On a de plus

$$I(\theta) \geq 0 \text{ et } I(\theta) = 0 \Leftrightarrow f(x, \theta) = f(x).$$

## Exemple

- On considère le modèle de **Bernoulli** :  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .
- On a alors

$$L(x, p) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log(L(x, p)) = -\frac{x}{p^2} - \frac{1-x}{(1-p)^2}.$$

## Exemple

- On considère le modèle de **Bernoulli** :  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .
- On a alors

$$L(x, p) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} \log(L(x, p)) = -\frac{x}{p^2} - \frac{1-x}{(1-p)^2}.$$

- D'où

$$I(p) = -\mathbf{E} \left[ -\frac{X}{p^2} - \frac{1-X}{(1-p)^2} \right] = \frac{1}{p(1-p)}.$$

## Fisher pour $n$ observations

- On considère maintenant  $n$  observations  $X_1, \dots, X_n$  de loi  $\mathbf{P}_\theta$ .
- On désigne par  $L_1(\cdot; \theta)$  la **vraisemblance** associée.

### Définition

Si elle existe (c'est-à-dire si la dérivée par rapport à  $\theta$  de la log-vraisemblance est de carré intégrable), l'**information de Fisher** associée à l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  est définie par :

$$I_n : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\theta \mapsto \mathbf{E}_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X_1, \dots, X_n, \theta)) \right)^2 \right]$$

## Propriété d'additivité

L'information de Fisher est **additive** :

$$I_n(\theta) = nI(\theta).$$

## Propriété d'additivité

L'information de Fisher est **additive** :

$$I_n(\theta) = nI(\theta).$$

## Modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a

$$I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}.$$

## Proposition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$  de biais  $b(\theta) = \mathbf{E}_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta$ . Alors sous certaines hypothèses de régularité (voir [Guyader, 2017]), on a

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq b(\theta)^2 + \frac{(1 + b'(\theta))^2}{I_n(\theta)}.$$

## Proposition

Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$  de biais  $b(\theta) = \mathbf{E}_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta$ . Alors sous certaines hypothèses de régularité (voir [Guyader, 2017]), on a

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2] \geq b(\theta)^2 + \frac{(1 + b'(\theta))^2}{I_n(\theta)}.$$

## Corollaire : Inégalité de Cramér-Rao

On déduit que si  $\hat{\theta}$  est un estimateur **sans biais** de  $\theta$  alors

$$\mathbf{V}[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$$



- La quantité  $\frac{1}{I_n(\theta)}$  est appelée **borne de Cramer-Rao**.
- Si un estimateur sans biais  $\hat{\theta}$  atteint la borne de Cramer-Rao, il est **VUMSB**. On dit aussi qu'il est **efficace**.

- La quantité  $\frac{1}{I_n(\theta)}$  est appelée **borne de Cramer-Rao**.
- Si un estimateur sans biais  $\hat{\theta}$  atteint la borne de Cramer-Rao, il est **VUMSB**. On dit aussi qu'il est **efficace**.

### Exemple : modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a vu que  $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$ . La **borne de Cramér-Rao** vaut donc  $\frac{p(1-p)}{n}$ .

- La quantité  $\frac{1}{I_n(\theta)}$  est appelée **borne de Cramer-Rao**.
- Si un estimateur sans biais  $\hat{\theta}$  atteint la borne de Cramer-Rao, il est **VUMSB**. On dit aussi qu'il est **efficace**.

### Exemple : modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a vu que  $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$ . La **borne de Cramér-Rao** vaut donc  $\frac{p(1-p)}{n}$ .
- On considère l'**estimateur**  $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

- La quantité  $\frac{1}{I_n(\theta)}$  est appelée **borne de Cramer-Rao**.
- Si un estimateur sans biais  $\hat{\theta}$  atteint la borne de Cramer-Rao, il est **VUMSB**. On dit aussi qu'il est **efficace**.

### Exemple : modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a vu que  $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$ . La **borne de Cramér-Rao** vaut donc  $\frac{p(1-p)}{n}$ .
- On considère l'**estimateur**  $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[\hat{p}] = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

- La quantité  $\frac{1}{I_n(\theta)}$  est appelée **borne de Cramer-Rao**.
- Si un estimateur sans biais  $\hat{\theta}$  atteint la borne de Cramer-Rao, il est **VUMSB**. On dit aussi qu'il est **efficace**.

### Exemple : modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$ .
- On a vu que  $I_n(p) = \frac{n}{p(1-p)}$ . La **borne de Cramér-Rao** vaut donc  $\frac{p(1-p)}{n}$ .
- On considère l'**estimateur**  $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[\hat{p}] = p \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

- On conclut donc que  $\hat{p}$  est **VUMSB** ou **efficace**.

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

Bibliographie

# La classe exponentielle

## Définition

Soit une famille de lois admettant des densités (cas continu) ou des fonctions de masse (cas discret)  $\{f(x, \theta), \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$ . On dit qu'elle appartient à la famille ou classe exponentielle de lois si  $f(x, \theta)$  peut s'écrire

$$f(x, \theta) = a(\theta)b(x) \exp(c(\theta)d(x))$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

- La plupart des lois standards appartiennent à la famille exponentielle.

- Loi de **Bernoulli**  $\mathcal{B}(p)$  :

$$f(x, p) = p^x(1 - p)^{1-x} = (1 - p) \exp \left( x \log \frac{p}{1 - p} \right).$$



- Loi de **Bernoulli**  $\mathcal{B}(p)$  :

$$f(x, p) = p^x (1 - p)^{1-x} = (1 - p) \exp \left( x \log \frac{p}{1 - p} \right).$$

- Loi de **Poisson**  $\mathcal{P}(\lambda)$  :

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \exp(-\lambda) \frac{1}{x!} \exp(x \log \lambda).$$

## Exemples

- Loi de **Bernoulli**  $\mathcal{B}(p)$  :

$$f(x, p) = p^x (1 - p)^{1-x} = (1 - p) \exp \left( x \log \frac{p}{1 - p} \right).$$

- Loi de **Poisson**  $\mathcal{P}(\lambda)$  :

$$f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} = \exp(-\lambda) \frac{1}{x!} \exp(x \log \lambda).$$

**Mais aussi**

Lois exponentielle, normale, gamma...

- Il est possible de montrer que les lois de la famille exponentielle possèdent de bonnes propriétés.
- Notamment pour l'estimateur du maximum de vraisemblance.
- Ces propriétés seront étudiées au S2, on pourra aussi consulter [Lejeune, 2004].

Modèle - estimateur

Biais, variance, risque quadratique

Quelques méthodes d'estimation

- La méthode des moments

- La méthode du maximum de vraisemblance

Information de Fisher

Annexe : La famille exponentielle

**Bibliographie**

 Cadre, B. and Vial, C. (2012).

***Statistique mathématique, cours et exercices corrigés.***

Ellipses.

 Guyader, A. (2017).

**Statistique mathématique.**

Polycopié de cours, [http ://www.lsta.upmc.fr/guyader/index.html](http://www.lsta.upmc.fr/guyader/index.html).

 Lejeune, M. (2004).

***Statistique. La théorie et ses applications.***

Springer.

Troisième partie III

## Convergences stochastiques

## Les différents modes de convergence

- Convergence presque sûre ou convergence forte

- La convergence en probabilité

- La convergence en moyenne d'ordre  $p$

- La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

- Lois des grands nombres

- Le théorème central limite

## Bibliographie

# Motivations

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\Theta$ .
- **Un estimateur** : une fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .



# Motivations

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\Theta$ .
- **Un estimateur** : une fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Le paramètre  $n$  représente souvent le **nombre de mesures** que l'on peut voir d'une certaine façon comme une **quantité d'information** à disposition pour **bien estimer**  $\theta$ .

# Motivations

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\Theta$ .
- **Un estimateur** : une fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Le paramètre  $n$  représente souvent le **nombre de mesures** que l'on peut voir d'une certaine façon comme une **quantité d'information** à disposition pour **bien estimer**  $\theta$ .

## Conséquence

- Plus on a d'information, plus on doit être **précis**.

# Motivations

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\Theta$ .
- **Un estimateur** : une fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Le paramètre  $n$  représente souvent le **nombre de mesures** que l'on peut voir d'une certaine façon comme une **quantité d'information** à disposition pour **bien estimer**  $\theta$ .

## Conséquence

- Plus on a d'information, plus on doit être **précis**.
- Plus  $n$  est grand, plus  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  doit être **proche** de  $\theta$ .
- On a donc envie de traduire cela par  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta$ .

# Motivations

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta$  **inconnu** dans  $\Theta$ .
- **Un estimateur** : une fonction  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ .
- Le paramètre  $n$  représente souvent le **nombre de mesures** que l'on peut voir d'une certaine façon comme une **quantité d'information** à disposition pour **bien estimer**  $\theta$ .

## Conséquence

- Plus on a d'information, plus on doit être **précis**.
- Plus  $n$  est grand, plus  $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$  doit être **proche** de  $\theta$ .
- On a donc envie de traduire cela par  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \theta$ .

## Problème

Que signifie cette **notion de limite** ?

## Retour vers les probabilités

- **Cadre** :  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle.
- On cherche à définir la **notion de limite** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ .

## Retour vers les probabilités

- **Cadre** :  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle.
- On cherche à définir la **notion de limite** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ .

### Première idée

- Une variable aléatoire réelle est une **fonction** qui va de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Utiliser les **modes de convergence** réservés aux fonctions.

# Retour vers les probabilités

- **Cadre** :  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle.
- On cherche à définir la **notion de limite** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ .

## Première idée

- Une variable aléatoire réelle est une **fonction** qui va de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .
- Utiliser les **modes de convergence** réservés aux fonctions.

## Exemple

On pourrait dire que  $(X_n)_n$  **converge simplement vers**  $X$  si pour tout  $\omega \in \Omega$  la **suite réelle**  $(X_n(\omega))_n$  converge vers  $X(\omega)$  :

$$\forall \omega \in \Omega, \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près inutile en probabilités.



- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près inutile en probabilités.

### Exemple du pile ou face

- On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.
- $X_i$  : v.a.r. qui vaut 1 si face au  $i^{\text{e}}$  jet, 0 sinon.

- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près inutile en probabilités.

### Exemple du pile ou face

- On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.
- $X_i$  : v.a.r. qui vaut 1 si face au  $i^{\text{e}}$  jet, 0 sinon.  $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ .

- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près inutile en probabilités.

### Exemple du pile ou face

- On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.
- $X_i$  : v.a.r. qui vaut 1 si face au  $i^{\text{e}}$  jet, 0 sinon.  $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ .
- Lorsque  $n$  est grand, la proportion de faces après  $n$  lancers "doit" tendre vers  $1/2$ . On a donc envie d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}.$$

- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près inutile en probabilités.

## Exemple du pile ou face

- On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.
- $X_i$  : v.a.r. qui vaut 1 si face au  $i^{\text{e}}$  jet, 0 sinon.  $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ .
- Lorsque  $n$  est grand, la proportion de faces après  $n$  lancers "doit" tendre vers  $1/2$ . On a donc envie d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}.$$

- Ceci est pourtant faux, si on utilise la définition précédente : il suffit de considérer l'évènement  $\omega_0 = \{f, f, f, f, f, \dots\}$  (obtenir que des faces)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega_0) + \dots + X_n(\omega_0)}{n} = 1.$$

- Bien que naturelle, cette définition est, de manière surprenante, à peu près inutile en probabilités.

## Exemple du pile ou face

- On joue  $n$  fois à pile ou face avec une pièce équilibrée.
- $X_i$  : v.a.r. qui vaut 1 si face au  $i^{\text{e}}$  jet, 0 sinon.  $X_i \sim \mathcal{B}(1/2)$ .
- Lorsque  $n$  est grand, la proportion de faces après  $n$  lancers "doit" tendre vers  $1/2$ . On a donc envie d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = \frac{1}{2}.$$

- Ceci est pourtant faux, si on utilise la définition précédente : il suffit de considérer l'évènement  $\omega_0 = \{f, f, f, f, f, \dots\}$  (obtenir que des faces)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega_0) + \dots + X_n(\omega_0)}{n} = 1.$$

## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

## Exemple du pile ou face (retour)

- Il est facile de voir que l'évènement  $\omega_0$  est assez invraisemblable lorsque  $n$  est grand. En effet  $\mathbf{P}(\{\omega_0\}) = 1/2^n$ .
- On peut même montrer qu'il en est de même pour tous les évènements où on n'a pas convergence, on a donc

$$\mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \frac{1}{2} \right\} \right) = 1.$$



## Exemple du pile ou face (retour)

- Il est facile de voir que l'évènement  $\omega_0$  est assez **invraisemblable** lorsque  $n$  est grand. En effet  $\mathbf{P}(\{\omega_0\}) = 1/2^n$ .
- On peut même montrer qu'il en est de même pour **tous les évènements où on n'a pas convergence**, on a donc

$$\mathbf{P} \left( \left\{ \omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) = \frac{1}{2} \right\} \right) = 1.$$

- **Conclusion** : l'ensemble des évènements où la convergence ne se produit pas est de **probabilité nulle**. On parle de convergence **presque sûre**.

## Définition

On dit que  $(X_n)_n$  converge **presque sûrement** vers une variable aléatoire  $X$  si l'ensemble  $N$  des  $\omega$  tels que la suite numérique  $(X_n(\omega))_n$  ne converge pas vers  $X(\omega)$  est négligeable (c'est-à-dire vérifie  $\mathbf{P}(N) = 0$ ). On note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{p.s.} \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X.$$

## Définition

On dit que  $(X_n)_n$  converge **presque sûrement** vers une variable aléatoire  $X$  si l'ensemble  $N$  des  $\omega$  tels que la suite numérique  $(X_n(\omega))_n$  ne converge pas vers  $X(\omega)$  est négligeable (c'est-à-dire vérifie  $\mathbf{P}(N) = 0$ ). On note

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{p.s.} \quad \text{ou} \quad X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X.$$

## Remarque

On peut aussi dire que  $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$  si et seulement si

$$\mathbf{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega) \right\} \right) = 0$$

ou encore

$$\mathbf{P} \left( \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\} \right) = 1.$$

## Proposition : opérations sur la cv ps

1. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi(X)$ .

## Proposition : opérations sur la cv ps

1. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi(X)$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et  $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$  alors
  - pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX_n + bY_n \xrightarrow{p.s.} aX + bY$  ;
  - $X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY$ .
  - $X_n / Y_n \xrightarrow{p.s.} X / Y$  si  $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$ .

## Proposition : opérations sur la cv ps

1. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{p.s.} \varphi(X)$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  et  $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$  alors
  - pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX_n + bY_n \xrightarrow{p.s.} aX + bY$  ;
  - $X_n Y_n \xrightarrow{p.s.} XY$ .
  - $X_n / Y_n \xrightarrow{p.s.} X / Y$  si  $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$ .

## Conclusion

Les opérations classiques sur les limites sont conservées par la convergence presque sûre.

## Comment montrer une convergence ps

- On utilise **rarement la définition** pour montrer la convergence presque sûre. On a souvent recourt à l'un des **critères** suivants.

# Comment montrer une convergence ps

- On utilise **rarement la définition** pour montrer la convergence presque sûre. On a souvent recourt à l'un des **critères** suivants.

## Théorème

La suite de v.a.r.  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers  $X$  **si et seulement si** pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sup_{m \geq n} |X_m - X| > \varepsilon) = 0.$$



# Comment montrer une convergence ps

- On utilise **rarement la définition** pour montrer la convergence presque sûre. On a souvent recourt à l'un des **critères** suivants.

## Théorème

La suite de v.a.r.  $(X_n)_n$  converge presque sûrement vers  $X$  **si et seulement si** pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\sup_{m \geq n} |X_m - X| > \varepsilon) = 0.$$

## Lemme de Borel-Cantelli

Si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$$

alors  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ .

## Exemple

- $(X_n)_n$  suite de v.a.r. i.i.d telle que  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ .
- **Question** : est-ce que

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0 ?$$

## Exemple

- $(X_n)_n$  suite de v.a.r. i.i.d telle que  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ .
- **Question** : est-ce que

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0 ?$$

- On a d'après **B.T.**

$$\mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n^3 \varepsilon^2}.$$

## Exemple

- $(X_n)_n$  suite de v.a.r. i.i.d telle que  $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ .
- **Question** : est-ce que

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0 ?$$

- On a d'après **B.T.**

$$\mathbf{P} \left( \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n^3 \varepsilon^2}.$$

- On a donc

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} 0.$$

## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

## Définition

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en probabilité** vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

## Définition

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en probabilité** vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

## Exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$  des v.a.r. indépendantes telles que  $\mathbf{E}[X_n] = 0$  et  $\mathbf{V}(X_n) = \sigma^2$ . On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

## Définition

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en probabilité** vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

## Exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$  des v.a.r. indépendantes telles que  $\mathbf{E}[X_n] = 0$  et  $\mathbf{V}(X_n) = \sigma^2$ . On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- D'après **Bienaymé-Tchebychev**, on a

$$\mathbf{P}(|\bar{X}_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \mathbf{V} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}.$$



## Définition

On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en probabilité** vers  $X$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

## Exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$  des v.a.r. indépendantes telles que  $\mathbf{E}[X_n] = 0$  et  $\mathbf{V}(X_n) = \sigma^2$ . On note  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .
- D'après **Bienaymé-Tchebychev**, on a

$$\mathbf{P}(|\bar{X}_n| > \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \mathbf{V} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}.$$

- On a donc  $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ .

## Exemple

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

## Exemple

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

- On a pour  $\varepsilon > 0$  fixé,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}) + \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = 0) \\ &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}).\end{aligned}$$

## Exemple

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

- On a pour  $\varepsilon > 0$  fixé,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}) + \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = 0) \\ &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}).\end{aligned}$$

- Or, pour  $n$  assez grand,  $\{|X_n| > \varepsilon\} = \{X_n = \sqrt{n}\}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0.$$

## Exemple

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

- On a pour  $\varepsilon > 0$  fixé,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}) + \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = 0) \\ &= \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon \cap X_n = \sqrt{n}).\end{aligned}$$

- Or, pour  $n$  assez grand,  $\{|X_n| > \varepsilon\} = \{X_n = \sqrt{n}\}$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0.$$

- On déduit  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ .

- Les opérations sur les limites présentées pour la convergence presque sûre sont également vraies pour la convergence en probabilité.

- Les opérations sur les limites présentées pour la convergence presque sûre sont également vraies pour la convergence en probabilité.

### Proposition : opérations sur la cv en proba

1. Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \varphi(X)$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$  alors
  - pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbf{P}} aX + bY$  ;
  - $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$ .
  - $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X/Y$  si  $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$ .

- Les opérations sur les limites présentées pour la convergence presque sûre sont également vraies pour la convergence en probabilité.

### Proposition : opérations sur la cv en proba

1. Si  $X_n \xrightarrow{P} X$  et si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  alors  $\varphi(X_n) \xrightarrow{P} \varphi(X)$ .
2. Si  $X_n \xrightarrow{P} X$  et  $Y_n \xrightarrow{P} Y$  alors
  - pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} aX + bY$  ;
  - $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ .
  - $X_n / Y_n \xrightarrow{P} X / Y$  si  $\mathbf{P}(Y = 0) = 0$ .

### Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{p.s.} X$  alors  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

- **Attention** : la réciproque est fausse ! Un contre exemple est donné dans [Jacod and Protter, 2003], page 152.



## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

## Définition

Soit  $p > 0$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en moyenne d'ordre  $p$**  (ou dans  $L_p$ ) vers  $X$  si les  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L_p$  ( $\mathbf{E}[|X_n|^p] < +\infty$  et  $\mathbf{E}[|X|^p] < +\infty$ ), et si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{L_p} X$ .

## Définition

Soit  $p > 0$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en moyenne d'ordre  $p$  (ou dans  $L_p$ ) vers  $X$  si les  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L_p$  ( $\mathbf{E}[|X_n|^p] < +\infty$  et  $\mathbf{E}[|X|^p] < +\infty$ ), et si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{L_p} X$ .

- Les cas les plus importants sont  $p = 1$  (convergence en moyenne) et  $p = 2$  (convergence en moyenne quadratique).

## Définition

Soit  $p > 0$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en moyenne d'ordre  $p$  (ou dans  $L_p$ ) vers  $X$  si les  $X_n$  et  $X$  sont dans  $L_p$  ( $\mathbf{E}[|X_n|^p] < +\infty$  et  $\mathbf{E}[|X|^p] < +\infty$ ), et si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^p] = 0.$$

On note  $X_n \xrightarrow{L_p} X$ .

- Les cas les plus importants sont  $p = 1$  (convergence en moyenne) et  $p = 2$  (convergence en moyenne quadratique).
- Convergence en moyenne (dans  $L_1$ ) : si  $X_n \xrightarrow{L_1} X$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X] \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[|X_n|] = \mathbf{E}[|X|].$$

- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[(X_n - a)^2] = (\mathbf{E}[X_n] - a)^2 + \mathbf{V}[X_n].$$

- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[(X_n - a)^2] = (\mathbf{E}[X_n] - a)^2 + \mathbf{V}[X_n].$$

- On déduit

$$X_n \xrightarrow{L_2} a \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}[X_n] = 0 \end{cases}$$

## Convergence dans $L_2$

- Il est facile de voir que

$$\mathbf{E}[(X_n - a)^2] = (\mathbf{E}[X_n] - a)^2 + \mathbf{V}[X_n].$$

- On déduit

$$X_n \xrightarrow{L_2} a \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[X_n] = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{V}[X_n] = 0 \end{cases}$$

### Application en statistique

Si  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{L_2} \theta$  alors

- le **biais** de  $\hat{\theta}_n$  tend vers 0.
- la **variance** tend vers 0.

- On a d'après l'inégalité de Jensen

$$\mathbf{E}|X_n - X| = \mathbf{E}\sqrt{(X_n - X)^2} \leq \sqrt{\mathbf{E}|X_n - X|^2}.$$

- On déduit la propriété suivante.

### Propriété

$$X_n \xrightarrow{L_2} X \implies X_n \xrightarrow{L_1} X.$$



- On a d'après l'inégalité de Jensen

$$\mathbf{E}|X_n - X| = \mathbf{E}\sqrt{(X_n - X)^2} \leq \sqrt{\mathbf{E}|X_n - X|^2}.$$

- On déduit la propriété suivante.

### Propriété

$$X_n \xrightarrow{L_2} X \implies X_n \xrightarrow{L_1} X.$$

### Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{L_p} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

- On a d'après l'inégalité de Jensen

$$\mathbf{E}|X_n - X| = \mathbf{E}\sqrt{(X_n - X)^2} \leq \sqrt{\mathbf{E}|X_n - X|^2}.$$

- On déduit la propriété suivante.

### Propriété

$$X_n \xrightarrow{L_2} X \implies X_n \xrightarrow{L_1} X.$$

### Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{L_p} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ .

- Attention** : la réciproque est **fausse** !
- On peut comme **contre-exemple** utiliser pour  $p = 2$  la suite de v.a.r. de loi

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

- Bien que différent, les trois modes de convergence vus précédemment sont de même nature et peuvent être abordés comme des variantes de la convergence habituelle.
- Il existe un autre mode de convergence, différent des précédents mais très utile en probabilité : la convergence en loi, ou convergence faible ou encore convergence étroite.
- Dans cette partie, nous donnons la définition ainsi que les principales propriétés de ce nouveau mode de convergence. Pour plus de détails, ainsi que pour les preuves des résultats, on pourra consulter [Jacod and Protter, 2003].

## L'idée

- La loi de  $X_n$  se rapproche de la loi de  $X$  lorsque  $n$  est grand.

## L'idée

- La loi de  $X_n$  se rapproche de la loi de  $X$  lorsque  $n$  est grand.
- Définir la convergence en loi par quelque chose du genre

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n \text{ grand } \mathcal{L}(X_n) \approx \mathcal{L}(X) \\ \text{ou} \\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A) \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

## L'idée

- La loi de  $X_n$  se **rapproche de la loi** de  $X$  lorsque  $n$  est grand.
- Définir la **convergence en loi** par quelque chose du genre

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n \text{ grand } \mathcal{L}(X_n) \approx \mathcal{L}(X) \\ \text{ou} \\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in A) = \mathbf{P}(X \in A) \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \end{array} \right. \quad (1)$$

## Mais...

Cette définition n'est cependant **pas totalement satisfaisante**.

## (Contre) exemple

- $(X_n)_n$  de loi uniforme sur  $] -1/n; 1/n[$  et  $X = 0$  p.s.



## (Contre) exemple

- $(X_n)_n$  de loi uniforme sur  $] -1/n; 1/n[$  et  $X = 0$  p.s.

Cv p.s., proba,  $L_p$

- On a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= 1 - \mathbf{P}(-\varepsilon < X_n < \varepsilon) \\ &= 1 - \frac{n}{2} \left[ \min\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) - \max\left(-\frac{1}{n}, -\varepsilon\right) \right] \\ &= 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}\end{aligned}$$

## (Contre) exemple

- $(X_n)_n$  de loi uniforme sur  $] -1/n; 1/n[$  et  $X = 0$  p.s.

Cv p.s., proba,  $L_p$

- On a pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X_n| > \varepsilon) &= 1 - \mathbf{P}(-\varepsilon < X_n < \varepsilon) \\ &= 1 - \frac{n}{2} \left[ \min\left(\frac{1}{n}, \varepsilon\right) - \max\left(-\frac{1}{n}, -\varepsilon\right) \right] \\ &= 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.}\end{aligned}$$

- **Conclusion** :  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  (mais aussi p.s. et dans  $L_p$ ).

- Cependant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_n \leq 0) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mathbf{P}(X \leq 0) \\ \mathbf{P}(X_n > 0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mathbf{P}(X > 0) \end{cases}$$

- Cependant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_n \leq 0) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mathbf{P}(X \leq 0) \\ \mathbf{P}(X_n > 0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mathbf{P}(X > 0) \end{cases}$$

- Conséquence :  $(X_n)_n$  ne converge pas en loi vers  $X$  au sens de la définition (1).

## Remarque

- Cependant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_n \leq 0) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mathbf{P}(X \leq 0) \\ \mathbf{P}(X_n > 0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mathbf{P}(X > 0) \end{cases}$$

- Conséquence :  $(X_n)_n$  ne converge pas en loi vers  $X$  au sens de la définition (1).

## Remarque

- Pour tout intervalle  $[a, b]$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in [a, b]) = \mathbf{P}(X \in [a, b]).$$

- On a également pour  $x \neq 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ .

## Remarque

- Cependant

$$\begin{cases} \mathbf{P}(X_n \leq 0) = \frac{1}{2} \neq 1 = \mathbf{P}(X \leq 0) \\ \mathbf{P}(X_n > 0) = \frac{1}{2} \neq 0 = \mathbf{P}(X > 0) \end{cases}$$

- **Conséquence** :  $(X_n)_n$  ne converge pas en loi vers  $X$  au sens de la définition (1).

## Remarque

- Pour tout intervalle  $[a, b]$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n \in [a, b]) = \mathbf{P}(X \in [a, b]).$$

- On a également pour  $x \neq 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ .
- Les problèmes de la définition (1) se situent lorsque  $x = 0$ , c'est-à-dire en l'**unique point de discontinuité** de la fonction de répartition de  $F_X$ .

# Convergence en loi

## Définition

On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  si, en tout point de continuité de  $F_X$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ . On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

# Convergence en loi

## Définition

On dit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge en loi** vers  $X$  si, **en tout point de continuité** de  $F_X$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ . On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

## Exemple

- Sur l'exemple précédent on a

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1/n \\ n/2(x + 1/n) & \text{si } -1/n < x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } x > 1/n. \end{cases}$$

- Ainsi,

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Comme  $F_X$  est **discontinue en 0**, on conclut que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .



## Remarque

- Les opérations conservées par les cv en probabilités et presque sure ne le sont **pas** forcément par la **convergence en loi** !
- Par exemple,  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  **n'implique pas**
  - $\mathbf{P}(X_n \in A) \rightarrow \mathbf{P}(X \in A), \forall A$  (déjà vu) ;

## Remarque

- Les opérations conservées par les cv en probabilités et presque sure ne le sont **pas** forcément par la **convergence en loi** !
- Par exemple,  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  **n'implique pas**
  - $\mathbf{P}(X_n \in A) \rightarrow \mathbf{P}(X \in A), \forall A$  (déjà vu) ;
  - $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \mathbf{E}[X]$ . Il suffit de prendre  $\mathcal{L}(X_n) = \frac{1}{n}\delta_{\{n\}} + (1 - 1/n)\delta_{\{0\}}$  ;

## Remarque

- Les opérations conservées par les cv en probabilités et presque sure ne le sont **pas** forcément par la **convergence en loi** !
- Par exemple,  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  **n'implique pas**
  - $\mathbf{P}(X_n \in A) \rightarrow \mathbf{P}(X \in A), \forall A$  (déjà vu) ;
  - $\mathbf{E}[X_n] \rightarrow \mathbf{E}[X]$ . Il suffit de prendre  $\mathcal{L}(X_n) = \frac{1}{n}\delta_{\{n\}} + (1 - 1/n)\delta_{\{0\}}$  ;
  - $X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ . Il suffit de prendre  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$ .

# Fonctions caractéristiques

- Très souvent utilisées pour montrer des convergences en loi.

## Définition

On appelle **fonction caractéristique** de  $X$  la fonction  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie comme la transformée de Fourier de sa loi de probabilité

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[e^{itX}].$$

# Fonctions caractéristiques

- Très souvent utilisées pour montrer des convergences en loi.

## Définition

On appelle **fonction caractéristique** de  $X$  la fonction  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie comme la transformée de Fourier de sa loi de probabilité

$$\varphi_X(t) = \mathbf{E}[e^{itX}].$$

## Calcul en pratique

- Si  $X$  est **discrète** de support  $\mathcal{S}$  et de fonction de masse  $\pi_X$  alors

$$\varphi_X(t) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_X(x) e^{itx}.$$

- Si  $X$  est **absolument continue** de densité  $f_X$  alors

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx$$

## Exemple

Loi	Fonction caractéristique
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$pe^{it} + (1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$(pe^{it} + (1 - p))^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$pe^{it}/(1 - (1 - p)e^{it})$
Uniforme $\mathcal{U}([-a, a])$	$\sin(at)/(at)$
Exponentielle $\xi(\lambda)$	$\lambda/(\lambda - it)$
Gaussienne $(m, \sigma^2)$	$e^{im}e^{-\sigma^2 t^2/2}$

## Proposition

1.  $\varphi_X$  est définie et continue pour tout nombre réel  $t$  ;
2.  $\varphi_X$  est bornée et  $\forall t \ |\varphi_X(t)| \leq 1$  ;
3.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$  ;

## Proposition

1.  $\varphi_X$  est définie et continue pour tout nombre réel  $t$  ;
2.  $\varphi_X$  est bornée et  $\forall t \ |\varphi_X(t)| \leq 1$  ;
3.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$  ;
4. Si la loi de  $X$  est **symétrique** alors  $\varphi_X$  est une fonction **réelle paire** ;
5.  $\varphi_X$  **caractérise** la loi de  $X$ .



## Proposition

1.  $\varphi_X$  est définie et continue pour tout nombre réel  $t$  ;
2.  $\varphi_X$  est bornée et  $\forall t \ |\varphi_X(t)| \leq 1$  ;
3.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$  ;
4. Si la loi de  $X$  est **symétrique** alors  $\varphi_X$  est une fonction **réelle paire** ;
5.  $\varphi_X$  **caractérise** la loi de  $X$ .

## Proposition

Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. **indépendantes** alors on a pour tout  $t$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t).$$

## Proposition

1.  $\varphi_X$  est définie et continue pour tout nombre réel  $t$  ;
2.  $\varphi_X$  est bornée et  $\forall t \ |\varphi_X(t)| \leq 1$  ;
3.  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$  ;
4. Si la loi de  $X$  est **symétrique** alors  $\varphi_X$  est une fonction **réelle paire** ;
5.  $\varphi_X$  **caractérise** la loi de  $X$ .

## Proposition

Si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a.r. **indépendantes** alors on a pour tout  $t$

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t).$$

- **Exercice** : calculer la fonction caractéristique de la loi Binomiale  $B(n, p)$  en utilisant la propriété précédente.

# Fonction caractéristique et moments

- En plus de caractériser la loi, la fonction caractéristique permet de **calculer les moments** d'une v.a.r. (lorsqu'ils existent).

## Théorème

Si il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathbf{E}[|X|^n] < \infty$ , alors

1.  $\varphi_X$  est continument dérivable jusqu'à l'ordre  $n$  inclu ;
2.  $\forall k = 0, 1, \dots, n, \varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbf{E}[X^k]$ .
3. On a le développement

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} \mathbf{E}[X^k] + o(|t|^n)$$

lorsque  $t \rightarrow 0$ .

## Retour à la convergence en loi

- La fonction caractéristique est très souvent utilisée pour **montrer des convergences en loi** grâce au théorème suivant.

### Théorème

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X ;$

## Retour à la convergence en loi

- La fonction caractéristique est très souvent utilisée pour **montrer des convergences en loi** grâce au théorème suivant.

### Théorème

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  ;
- Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)]$ .

## Retour à la convergence en loi

- La fonction caractéristique est très souvent utilisée pour **montrer des convergences en loi** grâce au théorème suivant.

### Théorème

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  ;
- Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)]$ .
- Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ .

# Retour à la convergence en loi

- La fonction caractéristique est très souvent utilisée pour **montrer des convergences en loi** grâce au théorème suivant.

## Théorème

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  ;
2. Pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)]$ .
3. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$ .

- La dernière assertion est une conséquence directe du **théorème de Paul Levy** (voir [Jacod and Protter, 2003]).

## Binomiale vers Poisson

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$  telle  $np_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .



## Binomiale vers Poisson

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$  telle  $np_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On a lorsque  $n \rightarrow \infty$  (faire un DL)

$$\varphi_{X_n}(t) = [p_n e^{it} + (1 - p_n)]^n \sim [1 + (e^{it} - 1)p_n]^n \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

## Binomiale vers Poisson

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$  telle  $np_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On a lorsque  $n \rightarrow \infty$  (faire un DL)

$$\varphi_{X_n}(t) = [p_n e^{it} + (1 - p_n)]^n \sim [1 + (e^{it} - 1)p_n]^n \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

2. On déduit  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  avec  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ .

# Exemples

## Binomiale vers Poisson

1. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variable aléatoire de loi  $\mathcal{B}(n, p_n)$  telle  $np_n \rightarrow \lambda$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On a lorsque  $n \rightarrow \infty$  (faire un DL)

$$\varphi_{X_n}(t) = [p_n e^{it} + (1 - p_n)]^n \sim [1 + (e^{it} - 1)p_n]^n \rightarrow e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

2. On déduit  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  avec  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$ .

## Poisson vers normale

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre  $\lambda_n$  avec  $\lambda_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .
- De la même manière que dans l'exemple précédent on montre que

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## Convergence en loi et densités

- Dans les cas discret et absolument continue, la convergence en loi peut également se montrer à partir des fonctions de masse et de densité.

# Convergence en loi et densités

- Dans les cas discret et absolument continue, la convergence en loi peut également se montrer à partir des **fonctions de masse et de densité**.

## Théorème

1. Soit  $X_n$  et  $X$  des v.a.r. à valeurs dans un espace  $E$  **fini ou dénombrable**. Alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  si et seulement si

$$\forall j \in E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X = j).$$

# Convergence en loi et densités

- Dans les cas discret et absolument continue, la convergence en loi peut également se montrer à partir des **fonctions de masse et de densité**.

## Théorème

1. Soit  $X_n$  et  $X$  des v.a.r. à valeurs dans un espace  $E$  **fini ou dénombrable**. Alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  si et seulement si

$$\forall j \in E, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = j) = \mathbf{P}(X = j).$$

2. Soit  $X_n$  et  $X$  des v.a.r. dont les lois admettent pour densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)  $f_n$  et  $f$ . Si pour (presque) tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

- La convergence en loi est préservée par certaines opérations arithmétiques.

- La convergence en loi est préservée par **certaines opérations arithmétiques**.

### **Théorème (Slutsky)**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de v.a.r.,  $X$  une v.a.r. et  $a$  un **réel**.  
On a :

1. Si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$  alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a, \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX \quad \text{et} \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{a} \quad (\text{si } a \neq 0).$$

2. Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue** en tout point de  $\mathbb{R}$  alors  $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$ .



- La convergence en loi est préservée par **certaines opérations arithmétiques**.

### **Théorème (Slutsky)**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de v.a.r.,  $X$  une v.a.r. et  $a$  un **réel**.  
On a :

1. Si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$  et  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a$  alors

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a, \quad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX \quad \text{et} \quad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{a} \quad (\text{si } a \neq 0).$$

2. Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est **continue** en tout point de  $\mathbb{R}$  alors  $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} g(X)$ .

- **Attention** : les résultats ne sont plus vraies si  $Y_n$  converge vers une **variable aléatoire**  $Y$ .

# Relation entre les convergences

## Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

# Relation entre les convergences

## Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

- **Réciproque fausse** : il suffit de prendre  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$ .

# Relation entre les convergences

## Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

- **Réciproque fausse** : il suffit de prendre  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$ .
- La réciproque devient vraie lorsque  $X_n$  converge en loi vers une **variable constante**  $a$ . On a

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a \iff X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a.$$

# Relation entre les convergences

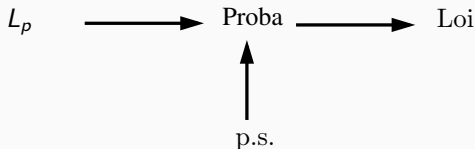
## Théorème

Si  $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$  alors  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ .

- **Réciproque fausse** : il suffit de prendre  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $X_n = (-1)^n X$ .
- La réciproque devient vraie lorsque  $X_n$  converge en loi vers une **variable constante**  $a$ . On a

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a \iff X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} a.$$

- On peut résumer les **relations entre les différents modes de convergence** par le diagramme suivant :



## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. admettant une espérance  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ .

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. admettant une espérance  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ .
- Intuitivement, lorsque  $n$  augmente la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

doit se "rapprocher" de  $\mu$ .



- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. admettant une espérance  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ .
- Intuitivement, lorsque  $n$  augmente la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

doit se "rapprocher" de  $\mu$ .

- Les lois des grands nombres et le théorème central limite permettent de préciser rigoureusement ce rapprochement.

## Les différents modes de convergence

- Convergence presque sûre ou convergence forte

- La convergence en probabilité

- La convergence en moyenne d'ordre  $p$

- La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

- Lois des grands nombres

- Le théorème central limite

## Bibliographie

## Un exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre  $p$ .
- Question : est-ce que  $\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $p$  ?

## Un exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre  $p$ .
- **Question** : est-ce que  $\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $p$  ?
- On a d'après **Bienaymé-Chebychev**  $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} (|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- **Réponse** :  $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} p$ .

## Un exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre  $p$ .
- **Question** : est-ce que  $\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $p$  ?
- On a d'après **Bienaymé-Chebychev**  $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} (|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- **Réponse** :  $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} p$ .

## Lois faibles et fortes

- Les lois des grands nombres permettent de généraliser ce type de résultats à d'autres lois que la loi de Bernoulli.

## Un exemple

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  v.a.r. indépendantes de loi Bernoulli de paramètre  $p$ .
- **Question** : est-ce que  $\bar{X}_n$  converge en probabilité vers  $p$  ?
- On a d'après **Bienaymé-Chebychev**  $\forall \varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\bar{X}_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- **Réponse** :  $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} p$ .

## Lois faibles et fortes

- Les lois des grands nombres permettent de généraliser ce type de résultats à d'autres lois que la loi de Bernoulli.
- On parle de lois **faibles** des grands nombres pour des convergences en probabilité. Pour des convergences presque sûre, on parlera de lois **fortes** des grands nombres.

## 2 lois faibles des grands nombres

### Loi faible dans $L_1$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. 2 à 2 indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_1} \mu.$$

## 2 lois faibles des grands nombres

### Loi faible dans $L_1$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. 2 à 2 indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_1} \mu.$$

### Loi faible dans $L_2$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. 2 à 2 non corrélées, de même loi et qui admettent une variance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_2} \mu.$$



## 2 lois faibles des grands nombres

### Loi faible dans $L_1$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. 2 à 2 indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_1} \mu.$$

### Loi faible dans $L_2$

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. 2 à 2 non corrélées, de même loi et qui admettent une variance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{L_2} \mu.$$

- On pourra consulter [Foata and Fuchs, 2003], chapitre 17, pour la

# Loi forte des grands nombres

- Elle s'obtient en supposant l'indépendance mutuelle.

## Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

# Loi forte des grands nombres

- Elle s'obtient en supposant l'**indépendance mutuelle**.

## Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. **indépendantes**, de **même loi** et qui admettent une **espérance**. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

## Application

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  (**inconnu**).

# Loi forte des grands nombres

- Elle s'obtient en supposant l'**indépendance mutuelle**.

## Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. **indépendantes**, de **même loi** et qui admettent une **espérance**. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

## Application

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  (**inconnu**).
- **LFGN**  $\implies \bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} 1/\lambda$ .

# Loi forte des grands nombres

- Elle s'obtient en supposant l'**indépendance mutuelle**.

## Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. **indépendantes**, de **même loi** et qui admettent une **espérance**. On note  $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ . On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

## Application

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$  (**inconnu**).
- **LFGN**  $\implies \bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} 1/\lambda$ .
- **Opérations sur les convergences p.s.** :  $1/\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \lambda$ .

- Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. On cherche à **approcher**  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .

# Méthode de Monte-Carlo

- Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. On cherche à **approcher**  $I = \int_0^1 f(x) \, dx$ .
- Pour  $X$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on a

$$I = \int_0^1 f(x) \, dx = \mathbf{E}[f(X)].$$

# Méthode de Monte-Carlo

- Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. On cherche à **approcher**  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .
- Pour  $X$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on a

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \mathbf{E}[f(X)].$$

- **LFGN** : Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r i.i.d de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .  
Alors  $(f(X_n))_n$  une suite de v.a.r i.i.d et on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}[f(X)] = I.$$



# Méthode de Monte-Carlo

- Soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. On cherche à **approcher**  $I = \int_0^1 f(x) dx$ .
- Pour  $X$  de loi uniforme sur  $[0, 1]$ , on a

$$I = \int_0^1 f(x) dx = \mathbf{E}[f(X)].$$

- **LFGN** : Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r i.i.d de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .  
Alors  $(f(X_n))_n$  une suite de v.a.r i.i.d et on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{p.s.} \mathbf{E}[f(X)] = I.$$

## Algorithme de Monte-Carlo

1. Générer  $n$  (grand) observations suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$  ;
2. Approcher  $I$  par  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ .

## Les différents modes de convergence

Convergence presque sûre ou convergence forte

La convergence en probabilité

La convergence en moyenne d'ordre  $p$

La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

Lois des grands nombres

Le théorème central limite

## Bibliographie

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On rappelle que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

# Présentation

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On rappelle que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- **Interprétation** :  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .

## Approche TCL

- Le théorème central limite stipule que, sous des hypothèses très faibles, on peut étendre ce résultat (pour  $n$  grand) à "n'importe quelle" suite de variables aléatoires indépendantes.

# Présentation

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On rappelle que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- **Interprétation** :  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .

## Approche TCL

- Le théorème central limite stipule que, sous des hypothèses très faibles, on peut étendre ce résultat (pour  $n$  grand) à "n'importe quelle" suite de variables aléatoires indépendantes.
- C'est l'un des résultats les plus impressionnants et les plus utilisés en probabilités et statistique.

## Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que  $\mathbf{E}[X_i^2] < +\infty$ . On note  $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ ,  $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

## Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que  $\mathbf{E}[X_i^2] < +\infty$ . On note  $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ ,  $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont **faibles** : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.

## Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que  $\mathbf{E}[X_i^2] < +\infty$ . On note  $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ ,  $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont **faibles** : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- **Conséquence** : si  $n$  est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de  $\bar{X}_n$  par la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .



## Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et telles que  $\mathbf{E}[X_i^2] < +\infty$ . On note  $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ ,  $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont **faibles** : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- **Conséquence** : si  $n$  est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de  $\bar{X}_n$  par la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .
- On pourra écrire  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$  mais **pas**

$$\mathcal{L}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

- Bien que ce résultat soit impressionnant, on peut voir la preuve comme un "simple" exercice sur les **fonctions caractéristiques** (voir [Jacod and Protter, 2003] pour des compléments).
- On note  $\varphi$  la fonction caractéristique des variables aléatoires  $X_i - \mu$  et

$$Y_n = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}.$$

- On obtient des propriétés de la fonction caractéristique

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left( \varphi \left( \frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \right) \right)^n.$$

- De plus

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\sigma^2.$$

- On déduit

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(u^2)$$

et

$$\varphi_{Y_n}(t) = \exp \left( n \log(1 - t^2/2n + o(1/n)) \right) .$$

- On déduit

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(u^2)$$

et

$$\varphi_{Y_n}(t) = \exp \left( n \log(1 - t^2/2n + o(1/n)) \right).$$

- Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp(-t^2/2)$$

et  $t \mapsto \exp(-t^2/2)$  est la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- On déduit

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + o(u^2)$$

et

$$\varphi_{Y_n}(t) = \exp \left( n \log(1 - t^2/2n + o(1/n)) \right).$$

- Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) = \exp(-t^2/2)$$

et  $t \mapsto \exp(-t^2/2)$  est la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

- D'après le théorème de Paul Levy, on conclut  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ .

## Exemple : loi de Bernoulli

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

## Exemple : loi de Bernoulli

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .
- On a d'après la loi forte des grands nombres

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} p \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

## Exemple : loi de Bernoulli

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .
- On a d'après la loi forte des grands nombres

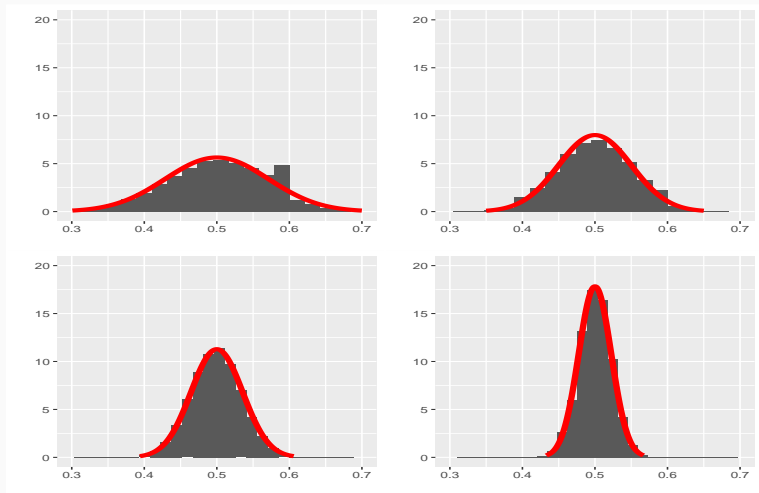
$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} p \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et d'après le théorème central limite

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$



# Illustration



**Figure 1** – Approximation TCL pour le modèle de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/2)$  avec  $n = 50, 100, 200, 500$ .

- Par **continuité**, on a

$$\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \sqrt{p(1 - p)},$$

et donc

$$\frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1.$$

- Par **continuité**, on a

$$\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \sqrt{p(1 - p)},$$

et donc

$$\frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1.$$

- On obtient donc d'après **Slutsky**

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}} \times \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

- Par **continuité**, on a

$$\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} \sqrt{p(1 - p)},$$

et donc

$$\frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1.$$

- On obtient donc d'après **Slutsky**

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}} \times \frac{\sqrt{p(1 - p)}}{\sqrt{(\bar{X}_n)(1 - \bar{X}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## Remarque importante

Ce type de raisonnement est très souvent utilisé pour trouver des intervalles de confiance asymptotique.

## Exemple : loi exponentielle

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

## Exemple : loi exponentielle

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .
- On a d'après la **loi forte des grands nombres**

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow{p.s.} \lambda \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et d'après le **théorème central limite**

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{1/\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

### Problème

- Comment obtenir un TCL pour  $1/\bar{X}_n$  ?

## Exemple : loi exponentielle

- Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .
- On a d'après la **loi forte des grands nombres**

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{X}_n} \xrightarrow{p.s.} \lambda \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

et d'après le **théorème central limite**

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{1/\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

### Problème

- Comment obtenir un TCL pour  $1/\bar{X}_n$  ?
- La **delta méthode** permet d'y parvenir.

## Delta méthode

- Elle permet (notamment) d'étendre le TCL à des estimateurs  $g(\bar{X}_n)$  qui s'écrivent comme une fonction de la moyenne empirique.



# Delta méthode

- Elle permet (notamment) d'**étendre le TCL** à des estimateurs  $g(\bar{X}_n)$  qui s'écrivent comme une **fonction de la moyenne empirique**.

## Théorème (Delta méthode)

Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r. et  $(v_n)$  une suite de réels qui tend vers  $+\infty$ .  
On suppose qu'il existe un réel  $a$  et une variable  $X$  tels que

$$v_n(X_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Si  $g$  est une **fonction dérivable au point  $a$** , alors

$$v_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g'(a)X.$$

# Delta méthode

- Elle permet (notamment) d'étendre le TCL à des estimateurs  $g(\bar{X}_n)$  qui s'écrivent comme une fonction de la moyenne empirique.

## Théorème (Delta méthode)

Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r. et  $(v_n)$  une suite de réels qui tend vers  $+\infty$ . On suppose qu'il existe un réel  $a$  et une variable  $X$  tels que

$$v_n(X_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} X.$$

Si  $g$  est une fonction dérivable au point  $a$ , alors

$$v_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} g'(a)X.$$

En particulier, si  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  et  $g'(a) \neq 0$ , alors

$$v_n(g(X_n) - g(a)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, (\sigma g'(a))^2).$$

## Application : loi exponentielle

- Pour le modèle exponentiel, on a montré grâce au **TCL**

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

## Application : loi exponentielle

- Pour le modèle exponentiel, on a montré grâce au **TCL**

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- On applique la **delta méthode** avec  $g(u) = 1/u$  :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

ou encore

$$\frac{\sqrt{n}}{\lambda}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Donc, en note  $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}_n$ , d'après **Slutsky**,

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\lambda}}\left(\hat{\lambda} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

## Les différents modes de convergence

- Convergence presque sûre ou convergence forte

- La convergence en probabilité

- La convergence en moyenne d'ordre  $p$

- La convergence en loi

## Lois des grands nombres et Théorème Central Limite

- Lois des grands nombres

- Le théorème central limite

## Bibliographie

 Foata, D. and Fuchs, A. (2003).


***Calcul des probabilités.***

Dunod, 2<sup>e</sup> edition.

 Jacod, J. and Protter, P. (2003).

***L'essentiel en théorie des probabilités.***

Cassini.

 Rouvière, L. (2015).

**Probabilités générales.**

Polycopié de cours, [https ://perso.univ-rennes2.fr/laurent.rouviere](https://perso.univ-rennes2.fr/laurent.rouviere).

## Quatrième partie IV

Critères de performance  
asymptotiques, intervalles de  
confiance et estimation multivariée

Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao



- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **univarié**.
- $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  un **estimateur** de  $\theta$ .

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **univarié**.
- $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  un **estimateur** de  $\theta$ .
- **Critère de performance** pour  $\hat{\theta}_n$  : biais, variance, risque quadratique, VUMSB...

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **univarié**.
- $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  un **estimateur** de  $\theta$ .
- **Critère de performance** pour  $\hat{\theta}_n$  : biais, variance, risque quadratique, VUMSB...

## Dans cette partie

- Critères de performance **asymptotiques** ;

# Rappel

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **univarié**.
- $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  un **estimateur** de  $\theta$ .
- **Critère de performance** pour  $\hat{\theta}_n$  : biais, variance, risque quadratique, VUMSB...

## Dans cette partie

- Critères de performance **asymptotiques** ;
- Estimation par **intervalles** ;

# Rappel

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **univarié**.
- $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \hat{\theta}_n$  un **estimateur** de  $\theta$ .
- **Critère de performance** pour  $\hat{\theta}_n$  : biais, variance, risque quadratique, VUMSB...

## Dans cette partie

- Critères de performance **asymptotiques** ;
- Estimation par **intervalles** ;
- Estimation **multivariée** ( $\theta \in \mathbb{R}^p$ ).

## Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao

# Pourquoi ?

## Postulat

On veut définir des estimateurs qui soient de **plus en plus précis** lorsque la **quantité d'information augmente**.

# Pourquoi ?

## Postulat

On veut définir des estimateurs qui soient de **plus en plus précis** lorsque la **quantité d'information augmente**.

- La **quantité d'information** à disposition du statisticien peut être représentée par le **nombre d'observations  $n$** .



# Pourquoi ?

## Postulat

On veut définir des estimateurs qui soient de **plus en plus précis** lorsque la **quantité d'information augmente**.

- La **quantité d'information** à disposition du statisticien peut être représentée par le **nombre d'observations  $n$** .
- On cherche donc des estimateurs **de plus en plus précis lorsque  $n$  augmente**.

# Pourquoi ?

## Postulat

On veut définir des estimateurs qui soient de **plus en plus précis** lorsque la **quantité d'information augmente**.

- La **quantité d'information** à disposition du statisticien peut être représentée par le **nombre d'observations  $n$** .
- On cherche donc des estimateurs **de plus en plus précis lorsque  $n$  augmente**.
- Mathématiquement, on va donc **chercher des estimateurs  $\hat{\theta}_n$  qui convergent** (en probabilité, presque sûrement, en loi...) vers  $\theta$ .

## Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est **consistant** (ou **convergent**) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ ,  
c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0.$$

## Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est **consistant** (ou **convergent**) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0.$$

## Définition

Soit  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs telle que  $v_n \rightarrow \infty$ . On dit que  $\hat{\theta}_n$  est **asymptotiquement normal**, de vitesse  $v_n$  si

$$v_n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\theta})$$

où  $\sigma_{\theta}$  est positif.

- Bienaymé-Tchebychev.
- Loi forte des grands nombres.
- Opérations sur les convergences en probabilité.

- Bienaymé-Tchebychev.
- Loi forte des grands nombres.
- Opérations sur les convergences en probabilité.

## Exemple

- **Modèle de Bernoulli** :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$  est consistant.
- **Modèle exponentiel** :  $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$  est consistant.

# Outils normalité asymptotique

- Théorème central limite.
- Delta méthode.

# Outils normalité asymptotique

- Théorème central limite.
- Delta méthode.

## Exemple

- **Modèle de Bernoulli** :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$  est asymptotiquement normal à la vitesse  $\sqrt{n}$  :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1 - p)).$$

- **Modèle exponentiel** :  $\hat{\lambda}_n = 1/\bar{X}_n$  est asymptotiquement normal à la vitesse  $\sqrt{n}$  :

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2).$$



Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- Exemple : on traite 100 patients à l'aide d'un traitement. 72 guérissent. Affirmer que la performance est de 72% lorsque on prend le traitement (alors qu'on ne l'a testé que sur 100 athlètes) est un peu fort.

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- Exemple : on traite 100 patients à l'aide d'un traitement. 72 guérissent. Affirmer que la performance est de 72% lorsque on prend le traitement (alors qu'on ne l'a testé que sur 100 athlètes) est un peu fort.
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, la performance se trouve dans l'intervalle [70%, 74%] avec une confiance de 90%.

## Intervalle de confiance

- $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.

# Intervalle de confiance

- $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.

## Définition

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On appelle **intervalle de confiance** pour  $\theta$  tout intervalle de la forme  $[A_n, B_n]$ , où  $A_n$  et  $B_n$  sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

# Intervalle de confiance

- $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.

## Définition

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On appelle **intervalle de confiance** pour  $\theta$  tout intervalle de la forme  $[A_n, B_n]$ , où  $A_n$  et  $B_n$  sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$ , on dit que  $[A_n, B_n]$  est un **intervalle de confiance asymptotique** pour  $\theta$  au niveau  $1 - \alpha$ .

# Intervalle de confiance

- $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \Theta$  **inconnu**.

## Définition

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On appelle **intervalle de confiance** pour  $\theta$  tout intervalle de la forme  $[A_n, B_n]$ , où  $A_n$  et  $B_n$  sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$ , on dit que  $[A_n, B_n]$  est un **intervalle de confiance asymptotique** pour  $\theta$  au niveau  $1 - \alpha$ .

## Remarque importante

- $A_n = A_n(X_1, \dots, X_n)$  et  $B_n = B_n(X_1, \dots, X_n)$  sont **aléatoires** !
- Les logiciels renverront les **réels**  $a_n = A_n(x_1, \dots, x_n)$  et  $b_n = B_n(x_1, \dots, x_n)$ .



- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (intervalle de confiance par excès) :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) \geq 1 - \alpha.$$

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (intervalle de confiance par excès) :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) \geq 1 - \alpha.$$

- Utilisation d'une **fonction pivotable pour le paramètre  $\theta$**  : fonction mesurable des observations et du paramètre inconnu mais dont la loi ne dépend pas de  $\theta$ .

# Construction d'un IC

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (intervalle de confiance par excès) :

$$P(\theta \in [A_n, B_n]) \geq 1 - \alpha.$$

- Utilisation d'une **fonction pivotable pour le paramètre  $\theta$**  : fonction mesurable des observations et du paramètre inconnu mais dont la loi ne dépend pas de  $\theta$ .

## Méthode

1. se donner un niveau  $1 - \alpha$ .
2. trouver un **estimateur  $\hat{\theta}_n$**  de  $\theta$  dont **on connaît la loi** afin de construire une fonction pivotable.

- Un **intervalle de confiance** pour un paramètre inconnu  $\theta$  se construit généralement à partir d'un **estimateur de  $\theta$  dont on connaît la loi**.

- Un **intervalle de confiance** pour un paramètre inconnu  $\theta$  se construit généralement à partir d'un **estimateur de  $\theta$  dont on connaît la loi**.
- A partir de la loi de  $\hat{\theta}$ , on cherche deux bornes  $A_n$  et  $B_n$  telles que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

- Un **intervalle de confiance** pour un paramètre inconnu  $\theta$  se construit généralement à partir d'un **estimateur de  $\theta$  dont on connaît la loi**.
- A partir de la loi de  $\hat{\theta}$ , on cherche deux bornes  $A_n$  et  $B_n$  telles que

$$P(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

## Remarque

A priori, plus  $\alpha$  est **petit**, plus l'intervalle aura un **grande amplitude**.

## Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- On suppose la variance connue et on cherche un IC pour  $\mu$ .

## Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- On suppose la variance connue et on cherche un IC pour  $\mu$ .

### Construction de l'IC

- Estimateur :  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .



## Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- On suppose la variance connue et on cherche un IC pour  $\mu$ .

### Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .
- **Loi de l'estimateur** :  $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$ .

## Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- On suppose la variance connue et on cherche un IC pour  $\mu$ .

### Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .
- **Loi de l'estimateur** :  $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$ .
- On déduit

$$\mathbf{P} \left( \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

## Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- On suppose la variance connue et on cherche un IC pour  $\mu$ .

### Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .
- **Loi de l'estimateur** :  $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$ .
- On déduit

$$\mathbf{P} \left( \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

- Un **intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$**  est donc donné par

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

# Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$  désigne le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  défini par

$$\mathbf{P} \left( X \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

# Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$  désigne le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  défini par

$$\mathbf{P} \left( X \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

## Définition

Plus généralement, le quantile d'ordre  $\alpha$  d'une variable aléatoire  $X$  est défini par le réel  $q_\alpha$  vérifiant

$$q_\alpha = \inf_x \{x : F(x) \geq \alpha\}.$$

# Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$  désigne le **quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$**  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  défini par

$$\mathbf{P} \left( X \leq q_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

## Définition

Plus généralement, le **quantile d'ordre  $\alpha$**  d'une variable aléatoire  $X$  est défini par le **réel**  $q_\alpha$  vérifiant

$$q_\alpha = \inf_x \{x : F(x) \geq \alpha\}.$$

- Les quantiles sont généralement renvoyés par les **logiciels statistique** :

```
> c(qnorm(0.975), qnorm(0.95), qnorm(0.5))  
[1] 1.959964    1.644854    0
```

## Exemple

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, 1)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

# Exemple

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, 1)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

- Estimation de  $\mu$  :

```
> mean(X)
[1] 4.55
```

- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.269766 4.824128
```



## Intervalle de confiance pour une proportion

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- On cherche un **intervalle de confiance asymptotique** pour  $p$ .

# Intervalle de confiance pour une proportion

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- On cherche un **intervalle de confiance asymptotique** pour  $p$ .

## Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ .

# Intervalle de confiance pour une proportion

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- On cherche un **intervalle de confiance asymptotique** pour  $p$ .

## Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ .
- **Loi asymptotique de l'estimateur** :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1 - p)).$$

# Intervalle de confiance pour une proportion

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- On cherche un **intervalle de confiance asymptotique** pour  $p$ .

## Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{p}_n = \bar{X}_n$ .
- **Loi asymptotique de l'estimateur** :

$$\sqrt{n}(\hat{p}_n - p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, p(1-p)).$$

- On déduit

$$\mathbf{P} \left( \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq \mu \leq \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \rightarrow 1 - \alpha.$$

- Un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  est donc donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

- Un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  est donc donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

- Problème** : l'IC dépend de  $p$  qui est inconnu !

- Un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  est donc donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

- Problème** : l'IC dépend de  $p$  qui est inconnu !
- Solution** : Slutsky  $\Rightarrow$

$$\sqrt{n} \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## Première version de l'IC

- Un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  est donc donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

- Problème** : l'IC dépend de  $p$  qui est inconnu !
- Solution** : Slutsky  $\Rightarrow$

$$\sqrt{n} \frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

## Conclusion

Un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  est donné par

$$\left[ \hat{p}_n - q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}{n}}, \hat{p}_n + q_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_n(1 - \hat{p}_n)}{n}} \right].$$



- $n = 500$  observations issues d'une loi  $\mathcal{B}(p)$ .

- $n = 500$  observations issues d'une loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- Estimation de  $p$  :

```
> phat <- mean(X)
> phat
[1] 0.756
```

- Intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% :

```
> binf <- phat - qnorm(0.975) * sqrt(phat * (1 - phat) / n)
> bsup <- phat + qnorm(0.975) * sqrt(phat * (1 - phat) / n)
> c(binf, bsup)
[1] 0.718354 0.793646
```

- $n = 500$  observations issues d'une loi  $\mathcal{B}(p)$ .
- **Estimation** de  $p$  :

```
> phat <- mean(X)
> phat
[1] 0.756
```

- **Intervalle de confiance asymptotique** de niveau 95% :

```
> binf <- phat - qnorm(0.975) * sqrt(phat * (1 - phat) / n)
> bsup <- phat + qnorm(0.975) * sqrt(phat * (1 - phat) / n)
> c(binf, bsup)
[1] 0.718354 0.793646
```

## Fonction **prop.test**

On peut récupérer un IC plus précis à l'aide de la fonction **prop.test** :

```
> prop.test(sum(X), n, correct=FALSE)$conf.int
[1] 0.7164952 0.7916011
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

## Loi normale (cas réel)

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On a vu qu'un IC pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

## Loi normale (cas réel)

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On a vu qu'un IC pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

### Problème

- Dans la vraie vie,  $\sigma$  est **inconnu** !
- L'intervalle de confiance **n'est donc pas calculable**.

1. Estimer  $\sigma^2$  par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

1. Estimer  $\sigma^2$  par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2)$$

## Idée

1. Estimer  $\sigma^2$  par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2)$$

## Problème

- On a bien

$$\mathcal{L} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) = \mathcal{N}(0, 1)$$



## Idée

1. Estimer  $\sigma^2$  par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (2)$$

## Problème

- On a bien

$$\mathcal{L} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \right) = \mathcal{N}(0, 1)$$

- mais

$$\mathcal{L} \left( \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\widehat{\sigma}} \right) \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

- Pour avoir la loi de

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

avec

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- il faut définir d'autres lois de probabilité.

# La loi normale (Rappel)

## Définition

- Une v.a.r  $X$  suit une loi **normale** de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$  admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

# La loi normale (Rappel)

## Définition

- Une v.a.r  $X$  suit une loi **normale** de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$  admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

## Propriétés

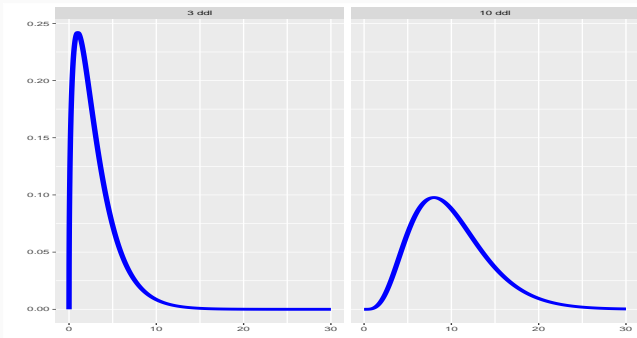
- $\mathbf{E}[X] = \mu$  et  $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$ .
- Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  alors

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

# Loi du $\chi^2$

## Définition

- Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La variable  $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$  suit une loi du **Chi-Deux à  $n$  degrés de liberté**. Elle est notée  $\chi^2(n)$ .
- $E[Y] = n$  et  $V[Y] = 2n$ .



## Définition

- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. **indépendantes** de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une **loi de student** à  $n$  degrés de liberté. On note  $\mathcal{T}(n)$ .

## Définition

- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. **indépendantes** de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une **loi de student à  $n$  degrés de liberté**. On note  $\mathcal{T}(n)$ .

- $\mathbf{E}[T] = 0$  et  $\mathbf{V}[T] = n/(n - 2)$ .

## Définition

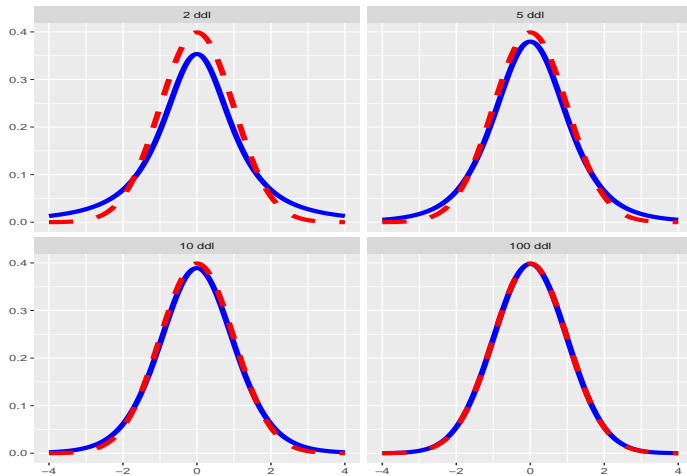
- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. **indépendantes** de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une **loi de student à  $n$  degrés de liberté**. On note  $\mathcal{T}(n)$ .

- $\mathbf{E}[T] = 0$  et  $\mathbf{V}[T] = n/(n - 2)$ .
- Lorsque  **$n$  est grand** la loi de student à  $n$  degrés de liberté peut être **approchée par la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$** .





## Légende

Densités des lois de student à 2, 5, 10 et 100 degrés de liberté (bleu) et densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  (rouge).

## Définition

- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r indépendantes de lois  $\chi^2(m)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

suit une loi de Fisher à  $m$  et  $n$  degrés de liberté. On note  $\mathcal{F}(m, n)$ .

## Définition

- Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r **indépendantes** de lois  $\chi^2(m)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

suit une **loi de Fisher à  $m$  et  $n$  degrés de liberté**. On note  $\mathcal{F}(m, n)$ .

- Si  $F \sim \mathcal{F}(m, n)$  alors  $1/F \sim \mathcal{F}(n, m)$ .

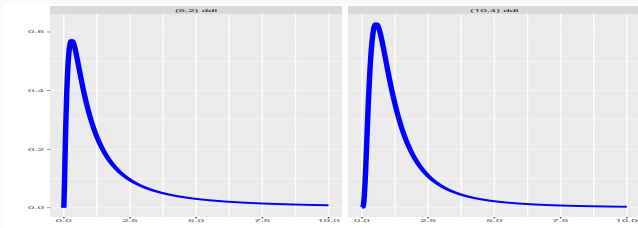


Figure 2 – Densités  $\mathcal{F}(5, 2)$  et  $\mathcal{F}(10, 4)$

# Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

## Théorème de Cochran

On a alors

1.  $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$

# Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

## Théorème de Cochran

On a alors

1.  $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .
2.  $\bar{X}_n$  et  $S^2$  sont indépendantes.

# Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

## Théorème de Cochran

On a alors

1.  $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .
2.  $\bar{X}_n$  et  $S^2$  sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

# Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

## Théorème de Cochran

On a alors

1.  $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .
2.  $\bar{X}_n$  et  $S^2$  sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

## Remarque

Les résultats 1 et 3 sont très importants pour construire des IC.

# IC pour la loi gaussienne

## IC pour $\mu$

On déduit du résultat précédent qu'un IC de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

où  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $n - 1$  ddl.



# IC pour la loi gaussienne

## IC pour $\mu$

On déduit du résultat précédent qu'un IC de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

où  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $n - 1$  ddl.

## IC pour $\sigma^2$

Un IC de niveau  $1 - \alpha$  pour  $\sigma^2$  est donné par

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

où  $\chi_{1-\alpha/2}$  et  $\chi_{\alpha/2}$  sont les quantiles d'ordre  $1 - \alpha/2$  et  $\alpha/2$  de loi  $\chi^2(n-1)$ .

## Exemple : modèle Gaussien - IC pour $\mu$

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

## Exemple : modèle Gaussien - IC pour $\mu$

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

- Estimation de  $\mu$  :

```
> mean(X)
[1] 4.55
```

## Exemple : modèle Gaussien - IC pour $\mu$

- $n = 50$  observations issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :

```
> head(X)
[1] 3.79 5.28 6.08 2.65 5.43 5.51
```

- Estimation de  $\mu$  :

```
> mean(X)
[1] 4.55
```

- Estimation de  $\sigma^2$  :

```
> S <- var(X)
> S
[1] 0.783302
```

- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.295420 4.798474
```

- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.295420 4.798474
```

- On peut obtenir directement l'intervalle de confiance à l'aide de la fonction `t.test`

```
> t.test(X)$conf.int
[1] 4.295420 4.798474
attr("conf.level")
[1] 0.95
```

## Exemple : modèle gaussien - IC pour $\sigma^2$

- On obtient l'IC pour  $\sigma^2$  à l'aide de la formule

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

## Exemple : modèle gaussien - IC pour $\sigma^2$

- On obtient l'IC pour  $\sigma^2$  à l'aide de la formule

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

- On peut donc le calculer sur R :

```
> binf <- 49*S/qchisq(0.975,49)
> bsup <- 49*S/qchisq(0.025,49)
> c(binf,bsup)
[1] 0.5465748 1.2163492
```



Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- La loi  $\mathbf{P}_\theta$  dépend donc d'un **seul paramètre (à estimer)**.

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- La loi  $\mathbf{P}_\theta$  dépend donc d'un **seul paramètre (à estimer)**.
- Dans de nombreux problèmes **concrets**, les choses sont plus **complexes**.

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .
- La loi  $\mathbf{P}_\theta$  dépend donc d'un **seul paramètre** (à estimer).
- Dans de nombreux problèmes **concrets**, les choses sont plus **complexes**.
- Il faut donc envisager le cas où on dispose de **plus d'un paramètre**.

- Pour simplifier on se place dans le cas d'un paramètre bivarié.
- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  inconnu dans  $\mathbb{R}^2$ .

- Pour simplifier on se place dans le cas d'un paramètre bivarié.
- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  inconnu dans  $\mathbb{R}^2$ .

## Estimateur

Un estimateur  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est une fonction mesurable de  $X_1, \dots, X_n$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

- Pour simplifier on se place dans le cas d'un paramètre bivarié.
- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  inconnu dans  $\mathbb{R}^2$ .

## Estimateur

Un estimateur  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est une fonction mesurable de  $X_1, \dots, X_n$  indépendante de  $\theta$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ .

## Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, S^2)$  tels que

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao



- Pour le **biais**, on travaille composante par composante :

$$\mathbf{E}[\hat{\theta}] = \begin{pmatrix} \mathbf{E}[\hat{\theta}_1] \\ \mathbf{E}[\hat{\theta}_2] \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(\hat{\theta}) = \mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta = \begin{pmatrix} b(\hat{\theta}_1) \\ b(\hat{\theta}_2) \end{pmatrix}.$$

- $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est un **vecteur** aléatoire ! Il ne va donc pas posséder de variance mais une **matrice de variance covariance** :

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}[\hat{\theta}_1] & \text{cov}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \\ \text{cov}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) & \mathbf{V}[\hat{\theta}_2] \end{pmatrix}.$$

## Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$  et  $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S^2)$ .

## Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$  et  $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S^2)$ .
- On a  $b(\hat{\theta}) = (0, 0)$ .

## Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$  et  $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S^2)$ .
- On a  $b(\hat{\theta}) = (0, 0)$ .
- D'après Cochran, on déduit

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Il existe également un **risque quadratique** en **estimation multivariée**.

## Définition

On appelle **risque quadratique** de  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  le réel positif

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \theta\|^2$$

# Risque quadratique

- Il existe également un **risque quadratique** en **estimation multivariée**.

## Définition

On appelle **risque quadratique** de  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  le réel positif

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \theta\|^2$$

## Propriété

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \|\mathbf{E}_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta\|^2 + \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \mathbf{E}_{\theta} \hat{\theta}\|^2.$$

# Risque quadratique

- Il existe également un **risque quadratique** en **estimation multivariée**.

## Définition

On appelle **risque quadratique** de  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  le réel positif

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \theta\|^2$$

## Propriété

$$\mathcal{R}(\theta, \hat{\theta}) = \|\mathbf{E}_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta\|^2 + \mathbf{E}_{\theta} \|\hat{\theta} - \mathbf{E}_{\theta} \hat{\theta}\|^2.$$

- On a toujours une **décomposition "biais/variance"**.

Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao



## Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est **consistant** (ou **convergent**) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ ,  
c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(\|\hat{\theta} - \theta\| \geq \varepsilon) = 0.$$

## Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est **consistant** (ou **convergent**) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(\|\hat{\theta} - \theta\| \geq \varepsilon) = 0.$$

- La valeur absolue est juste remplacée par la **norme euclidienne**.

## Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est **consistant** (ou **convergent**) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(\|\hat{\theta} - \theta\| \geq \varepsilon) = 0.$$

- La valeur absolue est juste remplacée par la **norme euclidienne**.
- En pratique, ce n'est pas difficile : en effet  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$  si et seulement si  $\hat{\theta}_1 \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta_1$  **et**  $\hat{\theta}_2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta_2$ .

## Définition

On dit que l'estimateur  $\hat{\theta}$  est **consistant** (ou **convergent**) si  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\theta}(\|\hat{\theta} - \theta\| \geq \varepsilon) = 0.$$

- La valeur absolue est juste remplacée par la **norme euclidienne**.
- En pratique, ce n'est pas difficile : en effet  $\hat{\theta} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$  si et seulement si  $\hat{\theta}_1 \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta_1$  **et**  $\hat{\theta}_2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta_2$ .

## Exemple : le modèle gaussien

$\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S^2)$  est consistant.

## Définition

Soit  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs telle que  $v_n \rightarrow \infty$ . On dit que  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est **asymptotiquement normal**, de vitesse  $v_n$  si

$$v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\theta)$$

où  $\Sigma_\theta$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  définie positive.

## Définition

Soit  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs telle que  $v_n \rightarrow \infty$ . On dit que  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est **asymptotiquement normal**, de vitesse  $v_n$  si

$$v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\theta)$$

où  $\Sigma_\theta$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  définie positive.

- La loi limite est une loi gaussienne **multivariée**.

# Normalité asymptotique

## Définition

Soit  $(v_n)_n$  une suite de réels positifs telle que  $v_n \rightarrow \infty$ . On dit que  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$  est **asymptotiquement normal**, de vitesse  $v_n$  si

$$v_n(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\theta)$$

où  $\Sigma_\theta$  est une matrice symétrique  $2 \times 2$  définie positive.

- La loi limite est une loi gaussienne **multivariée**.
- Il existe une version **multivariée** du **TCL** et de la **delta méthode**. Ce sont les principaux outils pour montrer la normalité asymptotique d'estimateurs multivariés.

# Vecteurs gaussiens (rappels)

## Définition

- $X = (X_1, X_2)$  est un **vecteur aléatoire gaussien** si toute combinaison linéaire de ses marginales  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$  est une variable aléatoire réelle gaussienne.



# Vecteurs gaussiens (rappels)

## Définition

- $X = (X_1, X_2)$  est un **vecteur aléatoire gaussien** si toute combinaison linéaire de ses marginales  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$  est une variable aléatoire réelle gaussienne.
- On note  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  où  $\mu \in \mathbb{R}^2$  est l'**espérance** de  $X$  et  $\Sigma$  est la matrice  $(2 \times 2)$  de **variance covariance** de  $X$ .

# Vecteurs gaussiens (rappels)

## Définition

- $X = (X_1, X_2)$  est un **vecteur aléatoire gaussien** si toute combinaison linéaire de ses marginales  $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$  est une variable aléatoire réelle gaussienne.
- On note  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  où  $\mu \in \mathbb{R}^2$  est l'**espérance** de  $X$  et  $\Sigma$  est la matrice  $(2 \times 2)$  de **variance covariance** de  $X$ .

## Propriété

Soit  $X$  un vecteur gaussien de loi  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ . Alors  $X$  admet une **densité** si et seulement si  $\det(\Sigma) \neq 0$ . Elle est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)' \Sigma^{-1}(x - \mu)\right).$$

## TCL

Soit  $(X_n)_n$  une suite de **vecteurs aléatoires** i.i.d. d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}^2$  et de matrice de variance covariance  $(2 \times 2)$   $\Sigma$ , alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

## TCL

Soit  $(X_n)_n$  une suite de **vecteurs aléatoires** i.i.d. d'espérance  $\mu \in \mathbb{R}^2$  et de matrice de variance covariance  $(2 \times 2)$   $\Sigma$ , alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

## Delta méthode

Si  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$  et si  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  admet des dérivées partielles au point  $\theta$ , alors

$$\sqrt{n}(h(\hat{\theta}) - h(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} Dh_{\theta}X$$

où  $Dh_{\theta}$  est la matrice  $m \times d$  de terme  $(Dh_{\theta})_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \theta_j}(\theta)$ .

Critères asymptotiques

Estimation par intervalles

Estimation multivariée

Biais, variance, risque quadratique

Critères asymptotiques

Borne de Cramer-Rao

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .

### Inégalité de Cramér-Rao

Si  $\hat{\theta}$  est un estimateur **sans biais** de  $\theta$  alors

$$\mathbf{V}_\theta[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

où

$$I(\theta) = \mathbf{E}_\theta \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right].$$

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .
- On désigne par  $L(x, \theta)$  la vraisemblance de  $\theta$  pour une observation  $x$ .



## Retour au cas multivarié

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .
- On désigne par  $L(x, \theta)$  la vraisemblance de  $\theta$  pour une observation  $x$ .

### Exemple : le modèle gaussien

- $\theta = (\mu, \sigma^2)$ .
- La vraisemblance est

$$L(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

# Matrice d'information de Fisher

## Définition

La **matrice d'information de Fisher** (si elle existe) au point  $\theta$  est la matrice de dimension  $2 \times 2$  de terme général

$$\begin{aligned} I(\theta)_{i,j} &= \mathbf{E}_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(L(X, \theta)) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log(L(X, \theta)) \right] \\ &= - \mathbf{E}_{\theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log(L(X, \theta)) \right] \end{aligned}$$

avec  $1 \leq i, j \leq 2$ .

# Matrice d'information de Fisher

## Définition

La **matrice d'information de Fisher** (si elle existe) au point  $\theta$  est la matrice de dimension  $2 \times 2$  de terme général

$$\begin{aligned} I(\theta)_{i,j} &= \mathbf{E}_{\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_i} \log(L(X, \theta)) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \log(L(X, \theta)) \right] \\ &= - \mathbf{E}_{\theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \log(L(X, \theta)) \right] \end{aligned}$$

avec  $1 \leq i, j \leq 2$ .

## Exemple

Pour le modèle gaussien, la **matrice d'information de Fisher** est donnée par

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta = (\mu, \sigma^2).$$

## Borne de Cramer Rao

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .

### Théorème

Si elle existe, la **borne de Cramer-Rao** du modèle précédent est  $\frac{1}{n}I(\theta)^{-1}$ .  
C'est-à-dire que **pour tout estimateur sans biais**  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , on a

$$\Sigma_{\hat{\theta}} \geq_{sdp} \frac{1}{n}I(\theta)^{-1}.$$

# Borne de Cramer Rao

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .

## Théorème

Si elle existe, la **borne de Cramer-Rao** du modèle précédent est  $\frac{1}{n}I(\theta)^{-1}$ .  
C'est-à-dire que **pour tout estimateur sans biais**  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , on a

$$\Sigma_{\hat{\theta}} \geq_{sdp} \frac{1}{n}I(\theta)^{-1}.$$

## Remarques

- L'inégalité est à prendre au sens des **matrices semi définies positives** :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad u' \Sigma_{\hat{\theta}} u \geq u' \left( \frac{1}{n} I(\theta)^{-1} \right) u.$$

# Borne de Cramer Rao

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathbf{P}_\theta$  avec  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ .

## Théorème

Si elle existe, la **borne de Cramer-Rao** du modèle précédent est  $\frac{1}{n}I(\theta)^{-1}$ .  
C'est-à-dire que **pour tout estimateur sans biais**  $\hat{\theta}$  de  $\theta$ , on a

$$\Sigma_{\hat{\theta}} \geq_{sdp} \frac{1}{n}I(\theta)^{-1}.$$

## Remarques

- L'inégalité est à prendre au sens des **matrices semi définies positives** :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad u' \Sigma_{\hat{\theta}} u \geq u' \left( \frac{1}{n} I(\theta)^{-1} \right) u.$$

- Interprétation **similaire au cas univarié** : la BCR vue comme une **matrice de variance covariance optimale** pour un estimateur **sans biais**.

## Retour au modèle gaussien

- $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S_n^2)$  est **sans biais**.
- Sa matrice de **variance covariance** est donnée par

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{pmatrix}.$$

- La **BCR** vaut

$$\frac{1}{n} I(\theta)^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}.$$

## Retour au modèle gaussien

- $\hat{\theta} = (\bar{X}_n, S_n^2)$  est **sans biais**.
- Sa matrice de **variance covariance** est donnée par

$$\Sigma_{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n-1} \end{pmatrix}.$$

- La **BCR** vaut

$$\frac{1}{n} I(\theta)^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}.$$

- **Conclusion** :  $\hat{\theta}$  n'est pas **VUMSB** (mais il n'est pas loin).



- L'emv possède, sous certaines hypothèses, de bonnes propriétés.

### "Propriété"

Sous certaines hypothèses de régularité sur la loi  $\mathbf{P}_\theta$ , l'emv  $\hat{\theta}_{MV}$  de  $\theta$  est

- consistant ;
- asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

## Retour à l'emv

- L'emv possède, sous certaines hypothèses, de bonnes propriétés.

### "Propriété"

Sous certaines hypothèses de régularité sur la loi  $\mathbf{P}_\theta$ , l'emv  $\hat{\theta}_{MV}$  de  $\theta$  est

- consistant ;
- asymptotiquement normal :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{MV} - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I(\theta)^{-1}).$$

### En pratique...

- Les hypothèses de ce résultat sont techniques et généralement difficiles à vérifier.
- Il est souvent plus simple d'obtenir ce résultat en travaillant sur l'emv (c'est ce qu'il faudra faire).

## Cinquième partie V

# Approche paramétrique vs non paramétrique pour les modèles de densité et de régression

## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

- Nous étudions deux problèmes classiques de la théorie de l'estimation : la densité et la régression.

- Nous étudions deux problèmes classiques de la **théorie de l'estimation** : la **densité** et la **régression**.
- A travers ces deux problèmes, nous étudions le compromis entre les erreurs d'**estimation** et d'**approximation**.

- Nous étudions deux problèmes classiques de la **théorie de l'estimation** : la **densité** et la **régression**.
- A travers ces deux problèmes, nous étudions le compromis entre les erreurs d'**estimation** et d'**approximation**.
- Ce compromis sera notamment étudié en confrontant l'approche **paramétrique** à l'approche **non paramétrique**.

## L'estimation de densité.

- Les données  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- L'échantillon :  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}$  **inconnue**.
- On suppose que  $\mathbf{P}$  admet une densité  $f$  (qui est donc **inconnue**).



# L'estimation de densité.

- Les données  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- L'échantillon :  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathbf{P}$  **inconnue**.
- On suppose que  $\mathbf{P}$  admet une densité  $f$  (qui est donc **inconnue**).

## Le problème

Estimer  $f$ .

# L'estimation de densité.

- Les données  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_i \in \mathbb{R}$ .
- L'échantillon :  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi **P inconnue**.
- On suppose que **P** admet une densité  $f$  (qui est donc **inconnue**).

## Le problème

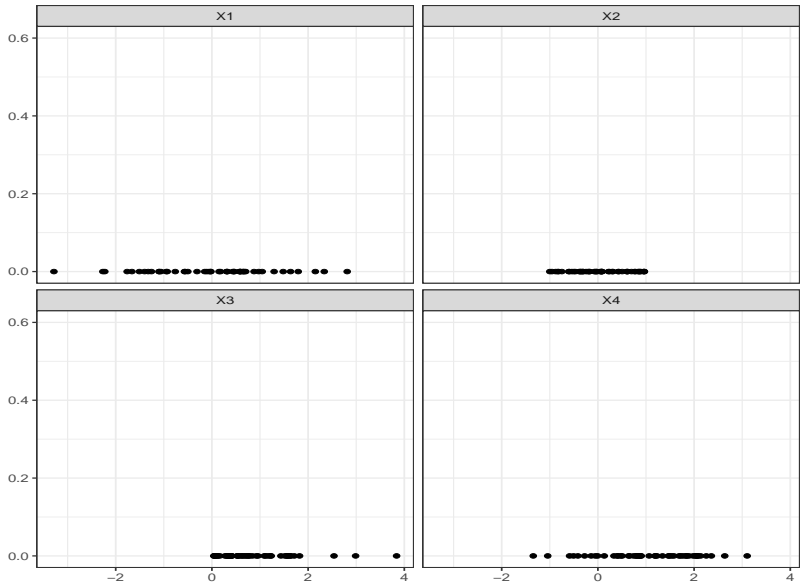
Estimer  $f$ .

## Performance d'un estimateur

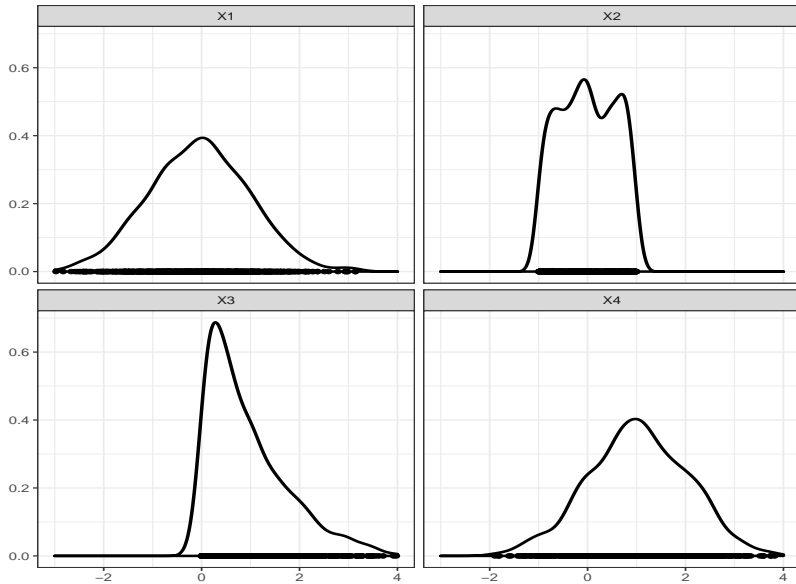
On mesurera la performance d'un estimateur  $\hat{f}(\cdot) = \hat{f}(\cdot, X_1, \dots, X_n)$  par son **risque quadratique ponctuel** :

$$\mathcal{R}(\hat{f}(x)) = \mathbf{E}((\hat{f}(x) - f(x))^2) = b^2(\hat{f}(x)) + \mathbf{V}(\hat{f}(x)).$$

# Exemple



# Exemple



# Le problème de la régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .

# Le problème de la régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des **réalisations de v.a.**  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  i.i.d. telles qu'il existe une fonction **inconnue**  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

# Le problème de la régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des **réalisations de v.a.**  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  i.i.d. telles qu'il existe une fonction **inconnue**  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

## Le problème

Estimer  $m$ .

# Le problème de la régression

- **Données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . On veut expliquer les sorties  $y_i \in \mathbb{R}$  par les entrées  $x_i \in \mathbb{R}^p$ .
- Les données sont des **réalisations de v.a.**  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  i.i.d. telles qu'il existe une fonction **inconnue**  $m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$Y_i = m(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

## Le problème

Estimer  $m$ .

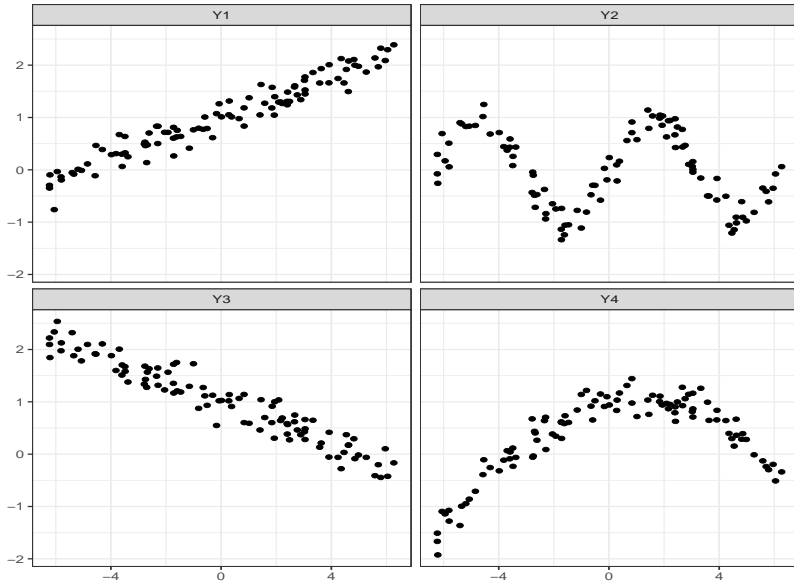
## Performance d'un estimateur

On mesurera la performance d'un estimateur  $\hat{m}(\cdot) = \hat{m}(\cdot, X_1, \dots, X_n)$  par son **risque quadratique ponctuel** :

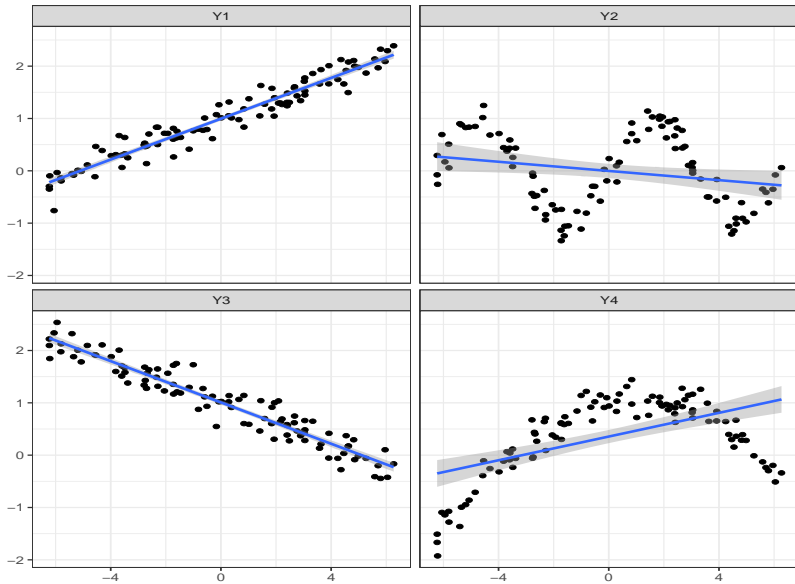
$$\mathcal{R}(\hat{m}(x)) = \mathbf{E}((\hat{m}(x) - m(x))^2) = b^2(\hat{m}(x)) + \mathbf{V}(\hat{m}(x)).$$



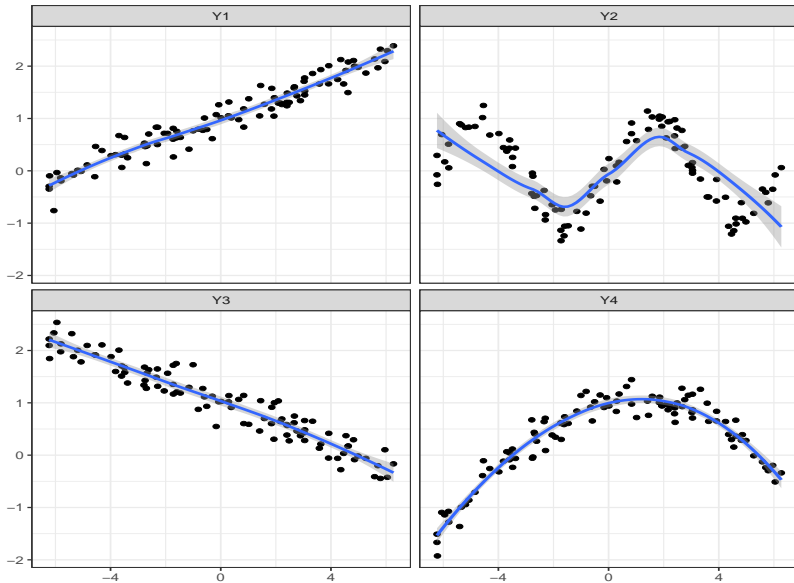
# Exemple



# Exemple



# Exemple



- Dans les deux cas, le problème est d'estimer une fonction.

- Dans les deux cas, le problème est d'estimer une **fonction**.
- Poser un **modèle** revient à supposer que cette fonction appartient à un certain espace  $\mathcal{F}$ .

- Dans les deux cas, le problème est d'estimer une **fonction**.
- Poser un **modèle** revient à supposer que cette fonction appartient à un certain espace  $\mathcal{F}$ .

## Définition

- Si  $\mathcal{F}$  est de dimension **finie**, le modèle est **paramétrique**.
- Si  $\mathcal{F}$  est de dimension **infinie**, le modèle est **non paramétrique**.

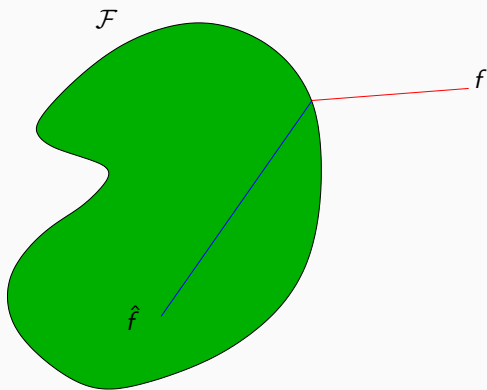
- Dans les deux cas, le problème est d'estimer une **fonction**.
- Poser un **modèle** revient à supposer que cette fonction appartient à un certain espace  $\mathcal{F}$ .

## Définition

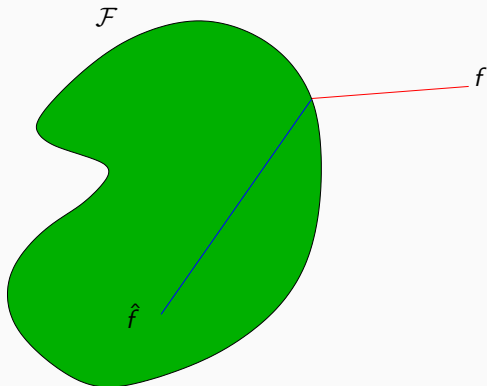
- Si  $\mathcal{F}$  est de dimension **finie**, le modèle est **paramétrique**.
- Si  $\mathcal{F}$  est de dimension **infinie**, le modèle est **non paramétrique**.

## A priori

- **Non paramétrique** : plus flexible mais précision d'estimation plus faible.
- **Paramétrique** : meilleure précision d'estimation mais plus rigide.







- **Erreur d'estimation** : erreur commise par le choix d'une loi dans  $\mathcal{P}$  par rapport au meilleur choix.
- **Erreur d'approximation** : erreur commise par le choix de  $\mathcal{P}$ .

### Commentaire

Ces deux termes varient généralement **en sens inverse**.

## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de densité  $f$  **inconnue**.
- On suppose que  $f \in \mathcal{F} = \{f_\theta, \theta \in \Theta\}$  avec  $\Theta$  de dimension **finie**.

### Exemple : le modèle Gaussien

- On suppose  $f \in \mathcal{F} = \{f_{\mu, \sigma^2}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ .
- **Le problème** : estimer  $\mu$  et  $\sigma^2$ .

- On peut estimer ces paramètres par **maximum de vraisemblance** :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- On peut estimer ces paramètres par **maximum de vraisemblance** :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- On montre "facilement" que

$$\mathbf{E}[(\hat{\mu} - \mu)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

- On peut estimer ces paramètres par **maximum de vraisemblance** :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- On montre "facilement" que

$$\mathbf{E}[(\hat{\mu} - \mu)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

- En notant  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , on déduit

$$\mathbf{E}[\|\hat{\theta} - \theta\|^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

- On peut estimer ces paramètres par **maximum de vraisemblance** :

$$\hat{\mu} = \bar{X}_n \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

- On montre "facilement" que

$$\mathbf{E}[(\hat{\mu} - \mu)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

- En notant  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , on déduit

$$\mathbf{E}[\|\hat{\theta} - \theta\|^2] = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

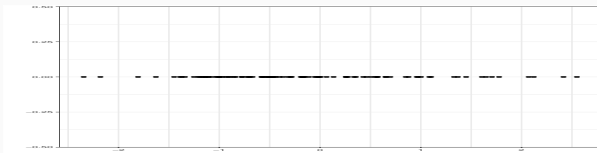
### Remarque

$1/n$  est la **vitesse paramétrique** classique pour l'erreur quadratique.



# Exemple

```
> df <- data.frame(X=rnorm(100))  
> ggplot(df)+aes(x=X,y=0)+geom_point()+theme_bw()
```

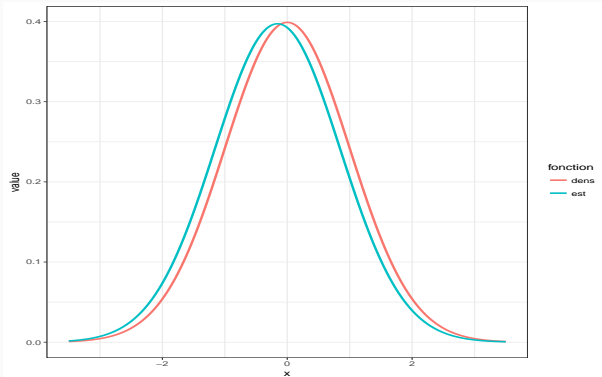


- On **estime**  $\mu$  et  $\sigma^2$  :

```
> theta <- c(mean(df$X),var(X))  
> theta  
[1] -0.1567617  1.0088300
```

- On trace l'estimateur et on le compare à la densité à estimer :

```
> x <- seq(-3.5,3.5,by=0.01); dens <- dnorm(x,mean=0,sd=1)
> est <- dnorm(x,mean=theta[1],sd=sqrt(theta[2]))
> df1 <- data.frame(x,dens,est); df2 <- melt(df1,id.vars="x")
> names(df2)[2] <- "fonction"
> ggplot(df2)+aes(x=x,y=value,color=fonction)+geom_line(size=1)+theme_bw()
```



## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

- En l'absence d'hypothèse paramétrique forte, on se base sur ce qui se passe au **voisinage de  $x$**  pour estimer  $f(x)$ .

## Des moyennes locales

- En l'absence d'hypothèse paramétrique forte, on se base sur ce qui se passe au **voisinage de  $x$**  pour estimer  $f(x)$ .
- L'**histogramme** est un estimateur non paramétrique bien connu.

# Des moyennes locales

- En l'absence d'hypothèse paramétrique forte, on se base sur ce qui se passe au **voisinage de  $x$**  pour estimer  $f(x)$ .
- L'**histogramme** est un estimateur non paramétrique bien connu.

## L'histogramme

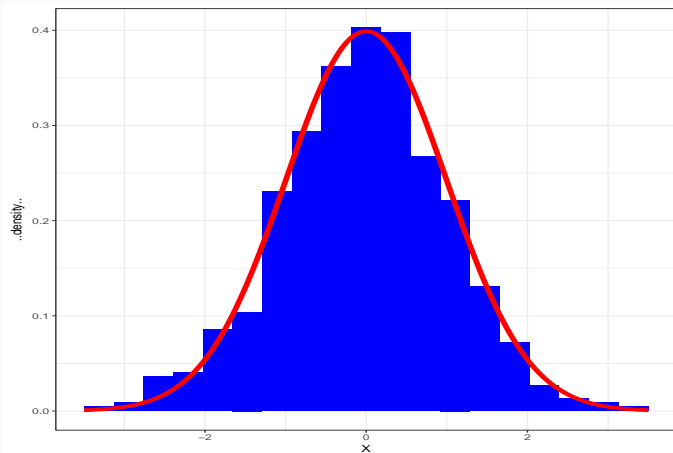
- $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_K\}$  une **partition** de  $\mathbb{R}$  en  $K$  intervalles.
- L'**histogramme** est défini par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n\lambda(I(x))} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in I(x)},$$

où  $I(x)$  désigne l'intervalle qui contient  $x$  et  $\lambda(I)$  la longueur de l'intervalle  $I$ .

# Exemple

```
> ggplot(df)+aes(x=X,y=..density..)+geom_histogram(bins=20,fill="blue")+  
  geom_line(data=df1,aes(x=x,y=dens),color="red",size=2)+theme_bw()
```



- L'histogramme n'est pas continu.



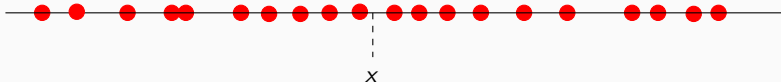
- L'histogramme n'est pas continu.
- L'estimateur à noyau permet de pallier à ce problème en ne fixant pas de partition.

- L'histogramme n'est pas continu.
- L'estimateur à noyau permet de pallier à ce problème en ne fixant pas de partition.
- L'idée est d'utiliser une fenêtre glissante.

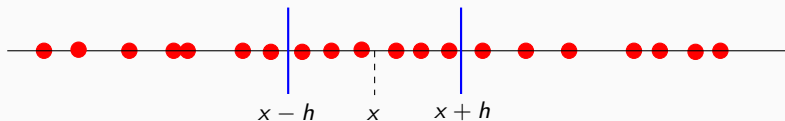
- $n = 20$  observations.



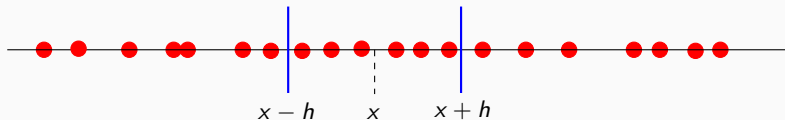
- $n = 20$  observations.
- On veut estimer la densité en  $x$ .



- $n = 20$  observations.
- On veut estimer la densité en  $x$ .
- On considère une fenêtre  $[x - h, x + h]$ .



- $n = 20$  observations.
- On veut estimer la densité en  $x$ .



- On fait comme pour l'histogramme

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in [x-h, x+h]}.$$

- On peut réécrire cet **estimateur**

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{X_i \in [x-h, x+h]} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{1}_{-1 \leq \frac{x-X_i}{h} \leq 1} \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\end{aligned}$$

avec  $K(u) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u)$ .

## Définition [Parzen, 1962]

Etant donné  $h > 0$  et  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et tel que  $\int K(u) du = 1$ , l'estimateur à noyau de la densité est défini par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right).$$



# Estimateur à noyau de la densité

## Définition [Parzen, 1962]

Etant donné  $h > 0$  et  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable et tel que  $\int K(u) du = 1$ , l'estimateur à noyau de la densité est défini par

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right).$$

## Remarque

L'utilisateur doit choisir deux paramètres : un réel positif  $h$  et un noyau  $K$

Les noyaux suivants sont les plus utilisés :

- Uniforme :

$$K(u) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(u).$$

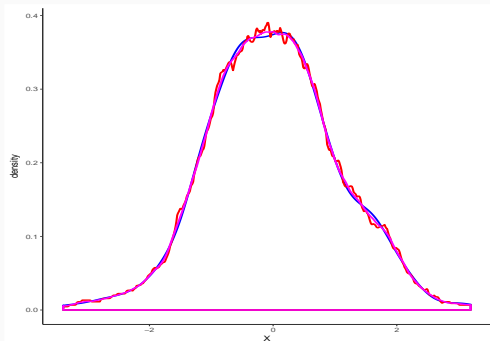
- Gaussien :

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right).$$

- Epanechnikov :

$$K(u) = \frac{3}{4}(1 - u^2) \mathbf{1}_{[-1,1]}(u).$$

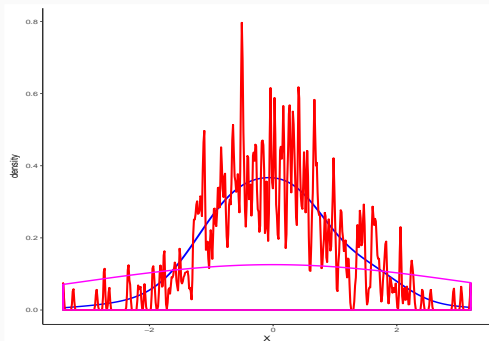
```
> X <- rnorm(500)
> df <- data.frame(X)
> ggplot(df)+aes(X)+geom_density(kernel=c("gaussian"),color="blue",size=1)+
  geom_density(kernel=c("rectangular"),color="red",size=1)+
  geom_density(kernel=c("epanechnikov"),color="black",size=1)+theme_classic()
```



## Conclusion

Le choix du noyau n'est généralement **pas primordial** sur la performance de l'estimateur.

```
> X <- rnorm(500)
> df <- data.frame(X)
> ggplot(df)+aes(X)+geom_density(bw=0.4,color="blue",size=1)+
  geom_density(bw=0.01,color="red",size=1)+
  geom_density(bw=3,color="magenta",size=1)+theme_classic()
```



## Conclusion

Le choix de la fenêtre  $h$  est crucial sur la performance de l'estimateur.

- $h$  grand : fenêtre grande  $\implies$  beaucoup d'observations dans les fenêtres  
 $\implies$  densités proches  $\forall x \implies$  biais fort, variance faible.

- $h$  **grand** : fenêtre grande  $\implies$  beaucoup d'observations dans les fenêtres  $\implies$  densités proches  $\forall x \implies$  **biais fort**, **variance faible**.
- $h$  **petit** : fenêtre petite  $\implies$  peu d'observations dans les fenêtres  $\implies$  densités instables  $\forall x \implies$  **biais faible**, **variance forte**.

# Choix de $h$

- $h$  grand : fenêtre grande  $\implies$  beaucoup d'observations dans les fenêtres  $\implies$  densités proches  $\forall x \implies$  biais fort, variance faible.
- $h$  petit : fenêtre petite  $\implies$  peu d'observations dans les fenêtres  $\implies$  densités instables  $\forall x \implies$  biais faible, variance forte.

## Conclusion

- Le paramètre  $h$  régule le compromis biais/variance de l'estimateur à noyau.
- On sait le quantifier mathématiquement.

## Théorème

On suppose que :

- $f$  est bornée.
- $K$  est tel que  $\int K(u) \, du = 1$ ,  $\int uK(u) \, du = 0$  et  $\int K(u)^2 \, du < +\infty$ .

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$  et  $\forall n \geq 1$

$$\mathbf{V}[\hat{f}(x)] = O\left(\frac{1}{nh}\right).$$



# Contrôle de la variance

## Théorème

On suppose que :

- $f$  est bornée.
- $K$  est tel que  $\int K(u) du = 1$ ,  $\int uK(u) du = 0$  et  $\int K(u)^2 du < +\infty$ .

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0$  et  $\forall n \geq 1$

$$\mathbf{V}[\hat{f}(x)] = O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

## Remarque

On retrouve bien que la **variance** est **faible** lorsque  $h$  est **grand** et réciproquement.

# Contrôle du biais

- Pour le terme de biais, il faut supposer un peu de **régularité** sur la densité à estimer.

## Théorème

On suppose que

- la densité  $f$  est **dérivable** et que sa dérivée est **Lipschitzienne** :

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} ;$$

- $K$  est tel que  $\int u^2 K(u) du < +\infty$ .

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|b(\hat{f}(x))| = O(h^2).$$

# Contrôle du biais

- Pour le terme de biais, il faut supposer un peu de **régularité** sur la densité à estimer.

## Théorème

On suppose que

- la densité  $f$  est **dérivable** et que sa dérivée est **Lipschitzienne** :

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} ;$$

- $K$  est tel que  $\int u^2 K(u) du < +\infty$ .

On a alors  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|b(\hat{f}(x))| = O(h^2).$$

## Remarque

On retrouve bien le **biais** est **faible** lorsque  $h$  est **petit** et réciproquement. 243

## Corollaire (convergence $L_2$ )

Sous les hypothèses des deux théorèmes précédents, on déduit que si  $h \rightarrow 0$  et  $nh \rightarrow +\infty$  alors le risque quadratique de  $\hat{f}(x)$  tend vers 0 (convergence en moyenne d'ordre 2).

# Risque quadratique

## Corollaire (convergence $L_2$ )

Sous les hypothèses des deux théorèmes précédents, on déduit que si  $h \rightarrow 0$  et  $nh \rightarrow +\infty$  alors le risque quadratique de  $\hat{f}(x)$  tend vers 0 (convergence en moyenne d'ordre 2).

## Corollaire (choix de $h$ )

Le  $h^*$  qui minimise l'erreur quadratique vérifie

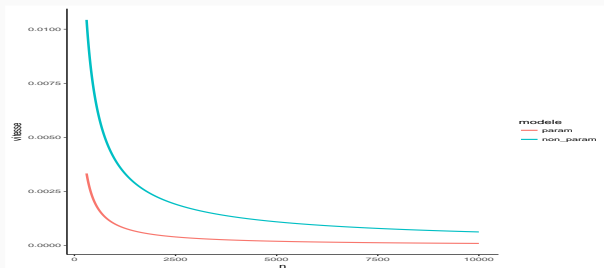
$$h^* = Cn^{-\frac{1}{5}}.$$

Pour cette valeur de  $h$ , on a

$$\mathcal{R}(\hat{f}(x)) = \mathbf{E}[(\hat{f}(x) - f(x))^2] = O\left(n^{-\frac{4}{5}}\right).$$

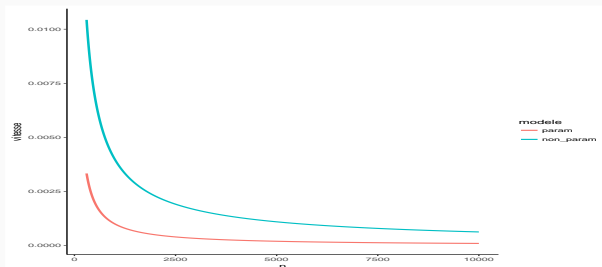
## Remarque importante

Modèle	param	non-param
Vitesse	$n^{-1}$	$n^{-\frac{4}{5}}$



## Remarque importante

Modèle	param	non-param
Vitesse	$n^{-1}$	$n^{-\frac{4}{5}}$



## Conclusion

- La convergence est **moins rapide** dans les modèles **non-paramétrique**.
- C'est le **prix à payer** pour **plus de flexibilité**.

- La théorie nous dit que le  $h$  optimal est

$$h^* = Cn^{-\frac{1}{5}}.$$



- La théorie nous dit que le  $h$  optimal est

$$h^* = Cn^{-\frac{1}{5}}.$$

- Ce résultat n'est quasiment d'**aucune utilité pratique**.

- La théorie nous dit que le  $h$  optimal est

$$h^* = Cn^{-\frac{1}{5}}.$$

- Ce résultat n'est quasiment d'**aucune utilité pratique**.
- En pratique, il existe un grand nombre de **procédures automatiques** (plus ou moins performantes selon les cas) permettant de sélectionner  $h$ .

## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

# Présentation du modèle

- **Les données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  où  $y_i \in \mathbb{R}$  et  $x_i \in \mathbb{R}$  (pour simplifier).
- **L'échantillon**  $(x_1, Y_1) \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d. (on suppose que les  $x_i$  sont déterministes).
- **Le problème** : expliquer les sorties  $Y_i$  par les entrées  $X_i$ .

# Présentation du modèle

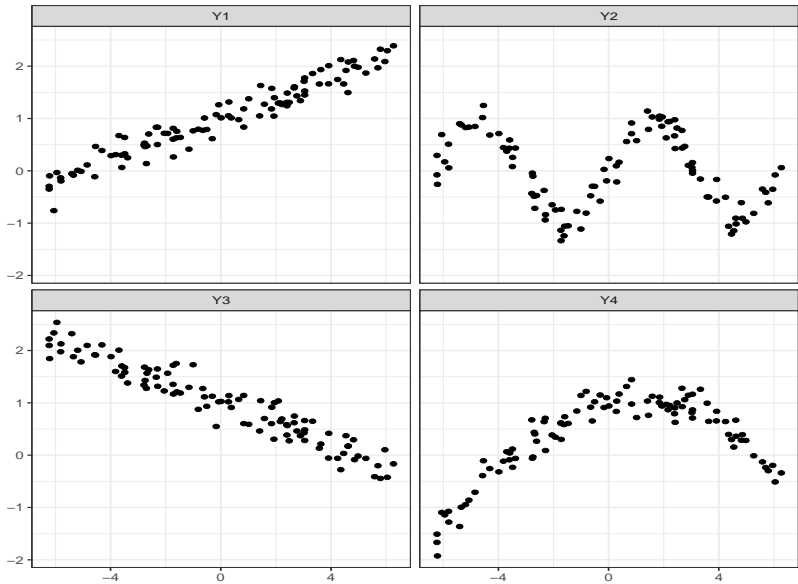
- **Les données** :  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  où  $y_i \in \mathbb{R}$  et  $x_i \in \mathbb{R}$  (pour simplifier).
- **L'échantillon**  $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d. (on suppose que les  $x_i$  sont déterministes).
- **Le problème** : expliquer les sorties  $Y_i$  par les entrées  $X_i$ .
- **La fonction de régression** : c'est la fonction  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$Y_i = m(x_i) + \varepsilon_i$$

où les termes d'erreurs  $\varepsilon_i$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

- **Le problème statistique** : estimer  $m$ .

# Examples



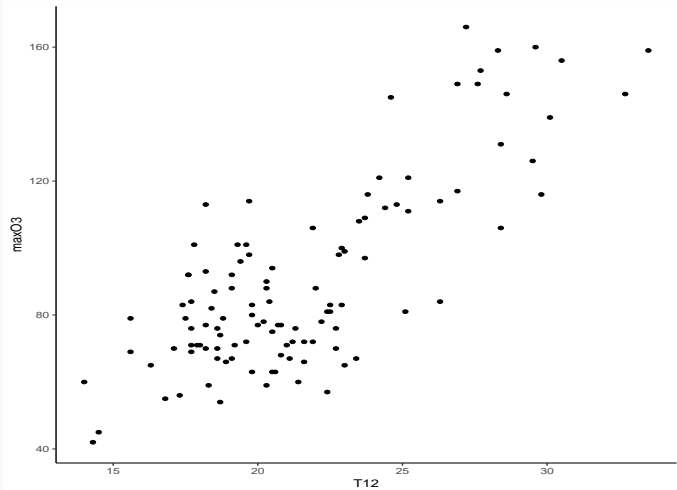
# Un exemple concret

- On souhaite expliquer la **concentration en ozone** par la température à **12h**.
- $n = 112$  observations :

```
> ozone %>% select(maxO3,T12) %>% head()
      maxO3  T12
20010601    87 18.5
20010602    82 18.4
20010603    92 17.6
20010604   114 19.7
20010605    94 20.5
20010606    80 19.8
```

# Représentation du nuage

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()+theme_classic()
```





## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

## Le modèle linéaire

- On fait l'hypothèse que la fonction de régression est linéaire :

$$m(x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \beta_0 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

## Le modèle linéaire

- On fait l'hypothèse que la fonction de régression est linéaire :

$$m(x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \beta_0 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

- Paramètres inconnus à estimer :  $\beta = (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2$

## Le modèle linéaire

- On fait l'hypothèse que la fonction de régression est linéaire :

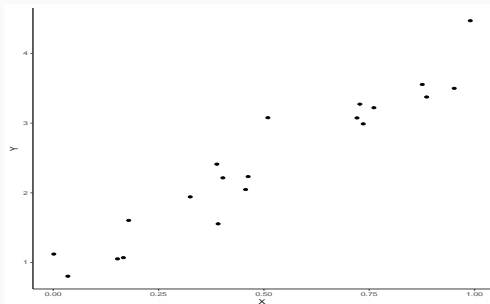
$$m(x) = \beta_0 + \beta_1 x, \quad \beta_0 \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

- Paramètres inconnus à estimer :  $\beta = (\beta_0, \beta_1) \in \mathbb{R}^2 \implies$  modèle paramétrique.

# Ajustement linéaire d'un nuage de points

## Notations

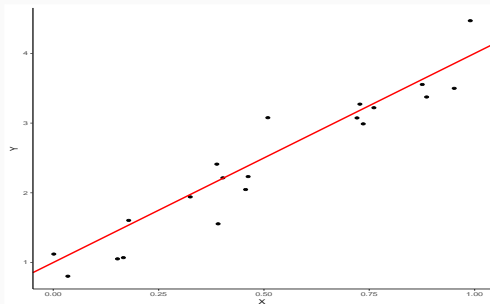
- $n$  observations  $y_1, \dots, y_n$  de la variable à expliquer (maxO3).
- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  de la variable explicative (T12).



# Ajustement linéaire d'un nuage de points

## Notations

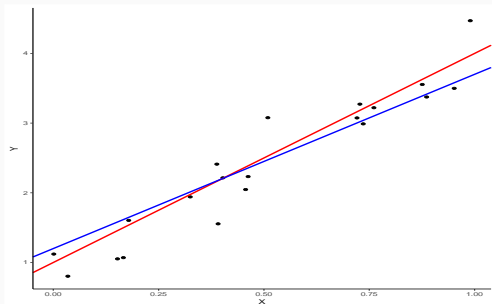
- $n$  observations  $y_1, \dots, y_n$  de la variable à expliquer (maxO3).
- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  de la variable explicative (T12).



# Ajustement linéaire d'un nuage de points

## Notations

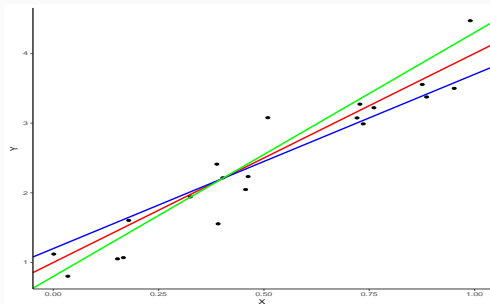
- $n$  observations  $y_1, \dots, y_n$  de la **variable à expliquer** (maxO3).
- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  de la **variable explicative** (T12).



# Ajustement linéaire d'un nuage de points

## Notations

- $n$  observations  $y_1, \dots, y_n$  de la **variable à expliquer** (maxO3).
- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  de la **variable explicative** (T12).

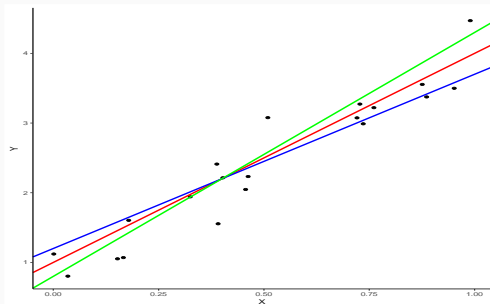




# Ajustement linéaire d'un nuage de points

## Notations

- $n$  observations  $y_1, \dots, y_n$  de la **variable à expliquer** (maxO3).
- $n$  observations  $x_1, \dots, x_n$  de la **variable explicative** (T12).



## Le problème

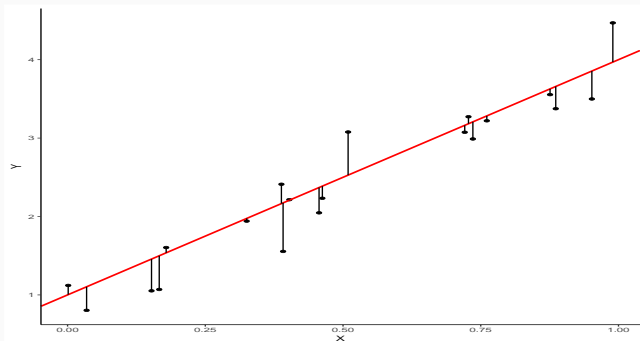
Trouver la droite qui ajuste **au mieux** le nuage de points.

- On cherche  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  qui **ajuste au mieux le nuage des points**.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent **pas sur une droite** :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

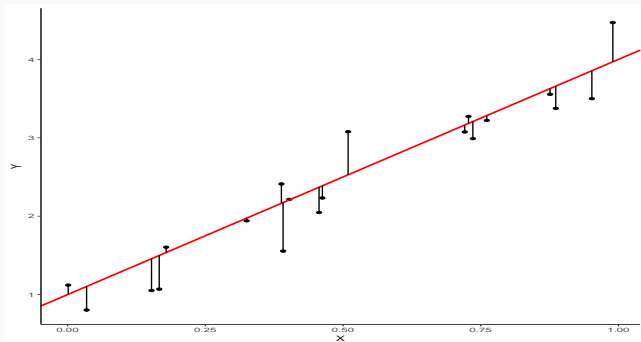
- On cherche  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  qui **ajuste au mieux le nuage des points**.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent **pas sur une droite** :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$



- On cherche  $y = \beta_0 + \beta_1 x$  qui **ajuste au mieux le nuage des points**.
- Toutes les observations mesurées ne se trouvent **pas sur une droite** :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$



## Idée

Chercher à minimiser les **erreurs** ou les **bruits**  $\varepsilon_i$ .

# Le critère des moindres carrés

## Critère des MC

On cherche  $\beta = (\beta_0, \beta_1)$  qui minimise

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

# Le critère des moindres carrés

## Critère des MC

On cherche  $\beta = (\beta_0, \beta_1)$  qui minimise

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

## Solution

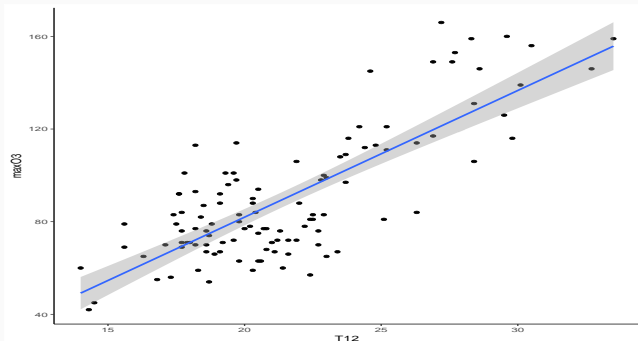
La solution est donnée par :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

à condition que tous les  $x_i$  ne soient pas égaux.

# Application à l'ozone

```
> modele.lin <- lm(maxO3~T12,data=ozone)
> modele.lin
Coefficients:
(Intercept)      T12
    -27.420      5.469
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+geom_point()+theme_classic()+
  geom_smooth(method="lm")
```



## Rappels

- Le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

- Les estimateurs des MCO :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$



# Les estimateurs des MCO

## Rappels

- Le modèle

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

où les  $\varepsilon_i$  sont i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

- Les estimateurs des MCO :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

## Propriétés

- Biais :  $\mathbf{E}[\hat{\beta}_0] = \beta_0$  et  $\mathbf{E}[\hat{\beta}_1] = \beta_1$ .
- Variance :

$$\mathbf{V}(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

## Quelques remarques

- Les estimateurs des MCO sont **sans biais**.
- Sous des hypothèses peu contraignantes, on montre que leur **variance est en  $1/n$** . On déduit

$$\mathcal{R}(\hat{\beta}_0) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\hat{\beta}_1) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

## Quelques remarques

- Les estimateurs des MCO sont **sans biais**.
- Sous des hypothèses peu contraignantes, on montre que leur **variance est en  $1/n$** . On déduit

$$\mathcal{R}(\hat{\beta}_0) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\hat{\beta}_1) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

### Conclusion

Les estimateurs des MCO atteignent la **vitesse paramétrique** classique en  $1/n$ .

## Quelques remarques

- Les estimateurs des MCO sont **sans biais**.
- Sous des hypothèses peu contraignantes, on montre que leur **variance est en  $1/n$** . On déduit

$$\mathcal{R}(\hat{\beta}_0) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\hat{\beta}_1) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

### Conclusion

Les estimateurs des MCO atteignent la **vitesse paramétrique** classique en  $1/n$ .

- On peut également obtenir la **loi** des estimateurs  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$ .
- On déduit de cette loi des **intervalles de confiance** et des procédures de tests statistiques.

- Intervalles de confiance :

```
> confint(modele.lin)
              2.5 %    97.5 %
(Intercept) -45.321901 -9.517371
T12          4.651219  6.286151
```

- Intervalles de confiance :

```
> confint(modele.lin)
                2.5 %    97.5 %
(Intercept) -45.321901 -9.517371
T12           4.651219  6.286151
```

- Tests statistique :

```
> summary(modele.lin)$coefficients
              Estimate Std. Error  t value    Pr(>|t|)
(Intercept) -27.419636  9.0334940 -3.03533 2.999431e-03
T12           5.468685  0.4124939 13.25761 1.512025e-24
```

## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie

- En l'absence d'hypothèse paramétrique (forte), on regarde ce qui se passe au voisinage du point où on cherche à estimer la fonction de régression.



- En l'absence d'hypothèse paramétrique (forte), on regarde ce qui se passe au voisinage du point où on cherche à estimer la fonction de régression.
- Les méthodes non paramétriques consistent donc à définir des voisinages et à faire des moyennes locales à l'intérieur des voisinages :

$$\hat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) Y_i$$

où  $W_{ni}(x)$  représente le poids à accorder à la  $i$ ème observation pour estimer  $m$  en  $x$ .

- En l'absence d'hypothèse paramétrique (forte), on regarde ce qui se passe au voisinage du point où on cherche à estimer la fonction de régression.
- Les méthodes non paramétriques consistent donc à définir des voisinages et à faire des moyennes locales à l'intérieur des voisinages :

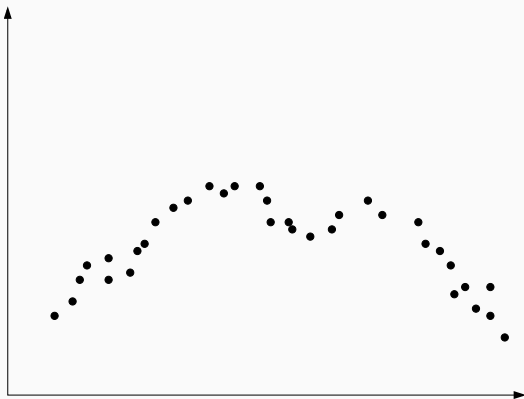
$$\hat{m}_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) Y_i$$

où  $W_{ni}(x)$  représente le poids à accorder à la  $i$ ème observation pour estimer  $m$  en  $x$ .

- Nous illustrons ce principe à travers l'estimateur de Nadaraya Watson [Nadaraya, 1964, Watson, 1964] (on aurait aussi pu faire l'algorithme des plus proches voisins).

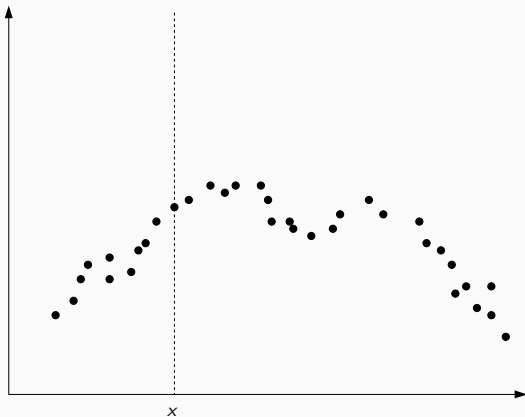
# La méthode

- $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d.
- **But** : estimer  $m$  tel que  $Y = m(x) + \varepsilon$ .



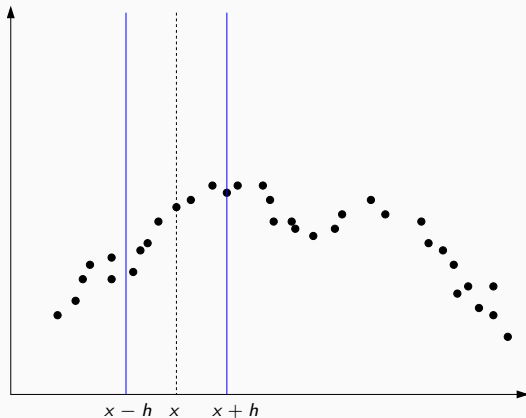
# La méthode

- $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d.
- **But** : estimer  $m$  tel que  $Y = m(x) + \varepsilon$ .



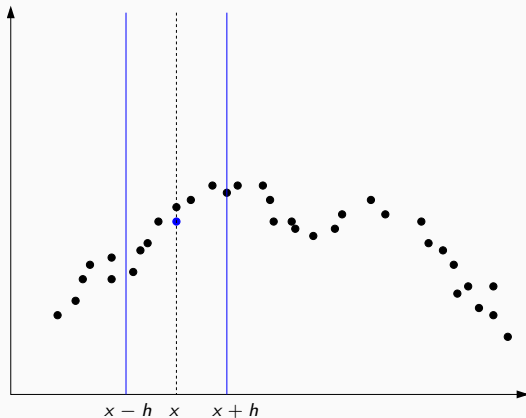
# La méthode

- $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d.
- **But** : estimer  $m$  tel que  $Y = m(x) + \varepsilon$ .



# La méthode

- $(x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$  i.i.d.
- **But** : estimer  $m$  tel que  $Y = m(x) + \varepsilon$ .



- L'estimateur s'écrit

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x-h \leq X_i \leq x+h} Y_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x-h \leq X_i \leq x+h}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left| \frac{X_i - x}{h} \right| \leq 1} Y_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left| \frac{X_i - x}{h} \right| \leq 1}}.$$

- L'estimateur s'écrit

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x-h \leq X_i \leq x+h} Y_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{x-h \leq X_i \leq x+h}} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left| \frac{X_i - x}{h} \right| \leq 1} Y_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left| \frac{X_i - x}{h} \right| \leq 1}}.$$

## Définition

Soit  $h > 0$  et  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . L'estimateur à noyau de **fenêtre**  $h$  et de **noyau**  $K$  est défini par

$$\hat{m}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right) Y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right)}.$$



- Noyau usuel :

1. Uniforme :  $K(x) = \mathbf{1}_{|x| \leq 1}$  ;
2. Gaussien :  $K(x) = \exp(-|x|^2)$  ;
3. Epanechnikov :  $K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{|x| \leq 1}$ .

- Noyau usuel :

1. Uniforme :  $K(x) = \mathbf{1}_{|x| \leq 1}$  ;
2. Gaussien :  $K(x) = \exp(-|x|^2)$  ;
3. Epanechnikov :  $K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{|x| \leq 1}$ .

- Le choix de  $h$  est crucial pour la qualité de l'estimation :

1.  $h$  grand : estimateur « constant », variance faible, biais fort ;
2.  $h$  petit : « interpolation », variance forte, biais faible ;

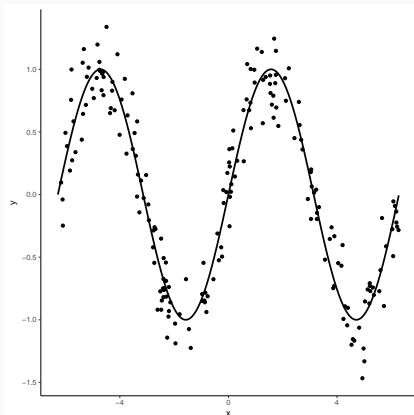
# Un exemple

- On génère un échantillon  $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n = 200$  selon

$$Y_i = \sin(X_i) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

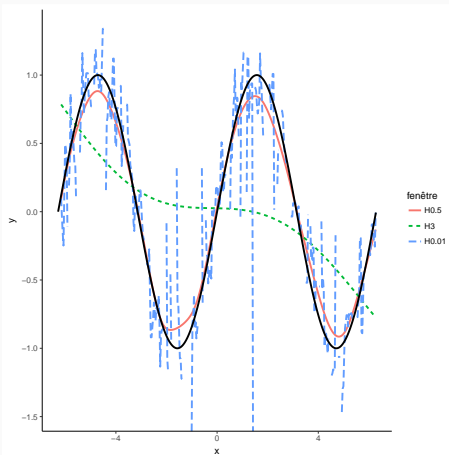
avec  $X_i$  uniforme sur  $[-2\pi, 2\pi]$ ,  $\varepsilon_i$  de loi gaussienne  $\mathcal{N}(0, 0.2^2)$ .

```
> n <- 200; set.seed(1234)
> X <- runif(n, -2*pi, 2*pi)
> set.seed(5678)
> eps <- rnorm(n, 0, 0.2)
> Y <- sin(X) + eps
> df <- data.frame(X=X, Y=Y)
> x <- seq(-2*pi, 2*pi, by=0.01)
> df1 <- data.frame(x=x, y=sin(x))
> ggplot(df1) + aes(x=x, y=y) +
  geom_line(size=1) +
  geom_point(data=df, aes(x=X, y=Y))
```



- La fonction **locpoly** du package **kernSmooth** permet de construire des estimateurs à noyau.

```
> h1 <- 0.5; h2 <- 3; h3 <- 0.01
> fx1 <- locpoly(X,Y,bandwidth=h1)
> fx2 <- locpoly(X,Y,bandwidth=h2)
> fx3 <- locpoly(X,Y,bandwidth=h3)
> df1 <- data.frame(x=x,y=sin(x))
> df2 <- data.frame(x=fx1$x,
  "H0.5"=fx1$y, "H3"=fx2$y,
  "H0.01"=fx3$y)
> df22 <- melt(df2,id.vars=1)
> names(df22)[2:3] <- c("fenêtre",
  "y")
> ggplot(df22)+aes(x=x,y=y)+
  geom_line(aes(color=fenêtre,
    lty=fenêtre))+geom_line
  (data=df1,aes(x=x,y=y),size=1)
```



- Là encore, on peut quantifier le compromis biais/variance.

- Là encore, on peut quantifier le **compromis biais/variance**.
- On considère le noyau uniforme et on suppose que  $m$  est dérivable et que sa dérivée est Lipschitzienne :

$$|m'(x) - m'(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}.$$

## Théorème

Sous les hypothèses ci-dessus, on a

$$|b(\hat{m}_n(x))| = O(h^2) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\hat{m}_n(x)] = O\left(\frac{1}{nh}\right).$$

- Toutes les remarques faites pour l'estimateur à noyau de la densité sont valables pour l'estimateur de Nadaraya Watson.

- Toutes les remarques faites pour l'estimateur à noyau de la densité sont valables pour l'estimateur de Nadaraya Watson.
- Le  $h$  optimal est de l'ordre de  $n^{-1/5}$ . Pour cette valeur de  $h$ , le risque quadratique est de l'ordre de  $n^{-4/5}$ .



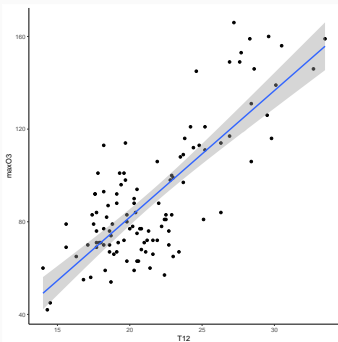
- Toutes les remarques faites pour l'estimateur à noyau de la densité sont valables pour l'estimateur de Nadaraya Watson.
- Le  $h$  optimal est de l'ordre de  $n^{-1/5}$ . Pour cette valeur de  $h$ , le risque quadratique est de l'ordre de  $n^{-4/5}$ .
- On obtient donc une vitesse de convergence plus lente que pour les estimateurs paramétriques.

- Toutes les remarques faites pour l'estimateur à noyau de la densité sont valables pour l'estimateur de Nadaraya Watson.
- Le  $h$  optimal est de l'ordre de  $n^{-1/5}$ . Pour cette valeur de  $h$ , le risque quadratique est de l'ordre de  $n^{-4/5}$ .
- On obtient donc une vitesse de convergence plus lente que pour les estimateurs paramétriques.
- C'est le prix à payer pour un modèle plus flexible.

# Retour à l'ozone

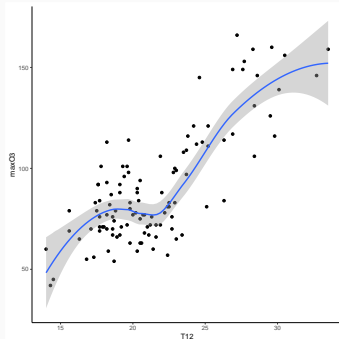
## Paramétrique (linéaire)

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+  
geom_point()+  
geom_smooth(method="lm",size=1)+  
theme_classic()
```



## Non paramétrique

```
> ggplot(ozone)+aes(x=T12,y=maxO3)+  
geom_point()+  
geom_smooth(size=1)+  
theme_classic()
```



## Le modèle de densité

Approche paramétrique : le modèle Gaussien

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Le modèle de régression

Approche paramétrique : le modèle de régression linéaire

Approche non paramétrique : l'estimateur à noyau

## Bibliographie



Nadaraya, E. A. (1964).

**On estimating regression.**

*Theory of Probability and its Applications*, 9.



Parzen, E. (1962).

**On estimation of a probability density function and mode.**

*Ann. Math. Stat.*, 33 :1065–1076.



Watson, G. S. (1964).

**Smooth regression analysis.**

*Sankhya : The Indian Journal of Statistics, Series A*, 26 :359–372.