

# Statistique

Laurent Rouvière

Décembre 2019

## Table des matières

<b>Quelques éléments de probabilité</b>	<b>2</b>
Introduction . . . . .	2
Quelques lois de probabilités . . . . .	5
Espérance et variance . . . . .	11
<b>Modèle et estimation</b>	<b>12</b>
Modèle statistique . . . . .	14
Quelques exemples . . . . .	15
<b>La moyenne empirique</b>	<b>16</b>
Cas gaussien . . . . .	16
Cas non gaussien . . . . .	17
<b>Intervalles de confiance</b>	<b>19</b>

## Présentation

- *Pré-requis* : Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation
- *Objectifs* : être capable de mettre en oeuvre une démarche statistique rigoureuse pour répondre à des problèmes standards
  - **estimation** : ponctuelle et par intervalles
  - **tests d'hypothèses**
  - **modèle linéaire**
- *Enseignant* : Laurent Rouvière, [laurent.rouviere@univ-rennes2.fr](mailto:laurent.rouviere@univ-rennes2.fr)
  - Thèmes de recherche : statistique non-paramétrique et apprentissage statistique
  - Enseignement : probabilités, statistique et logiciels (Universités et écoles)
  - Consulting : énergie (ERDF), finance, marketing.

## Plan

- *Théorie* (modélisation statistique) et **pratique** sur machines (R).
1. Introduction à R
    - Environnement Rstudio
    - Objets R

— Manipulation et visualisation de données

2. “Rappels” de probabilités
3. Estimation ponctuelle et par intervalle
4. Introduction aux tests.

## Quelques éléments de probabilité

### Introduction

#### Une problématique...

##### *Exemple*

Les iris de Fisher.

1. Quelle est la longueur de pétales moyenne des iris ?
2. Peut-on dire que la longueur moyenne est égale à 5.6 ?
3. Les Setosa ont-elles des longueurs de pétales plus longues que les autres espèces ? Avec quel niveau de confiance ?

#### Des données

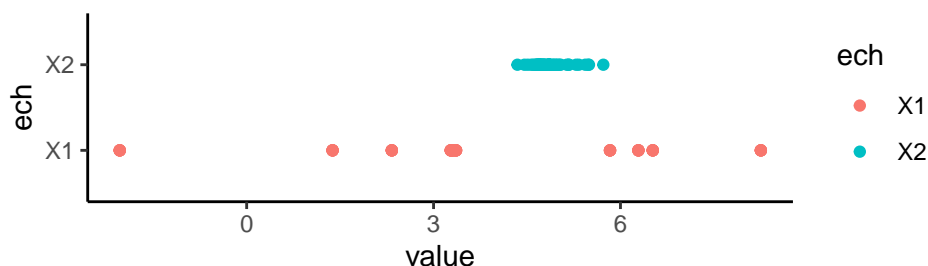
##### *Collecte de données*

- Pour répondre à ces questions on réalise des expériences.
- **Exemple** : on mesure les longueurs et largeurs de sépales et pétales pour 150 iris (50 de chaque espèce).

```
> data(iris)
> summary(iris)
##   Sepal.Length   Sepal.Width   Petal.Length   Petal.Width
##   Min.    :4.300   Min.    :2.000   Min.    :1.000   Min.    :0.100
##   1st Qu.:5.100   1st Qu.:2.800   1st Qu.:1.600   1st Qu.:0.300
##   Median :5.800   Median :3.000   Median :4.350   Median :1.300
##   Mean   :5.843   Mean   :3.057   Mean   :3.758   Mean   :1.199
##   3rd Qu.:6.400   3rd Qu.:3.300   3rd Qu.:5.100   3rd Qu.:1.800
##   Max.    :7.900   Max.    :4.400   Max.    :6.900   Max.    :2.500
##      Species
##   setosa    :50
##   versicolor:50
##   virginica :50
##
##
##
```

#### Autre exemple

- On considère deux échantillons  $X_1$  et  $X_2$ .
- *Question* : la moyenne est-elle égale à 5 ?



## Remarque

Plus difficile de répondre pour  $X_1$  car :

- Moins d'observations ;
- **Dispersion** plus importante.

## Un autre exemple

- Deux candidats se présentent à une élection.
- *Problématique* : qui va gagner ?
- Avec quel niveau de confiance peut-on répondre à cette question ?

```
> summary(election)
## res
## A:488
## B:512
```

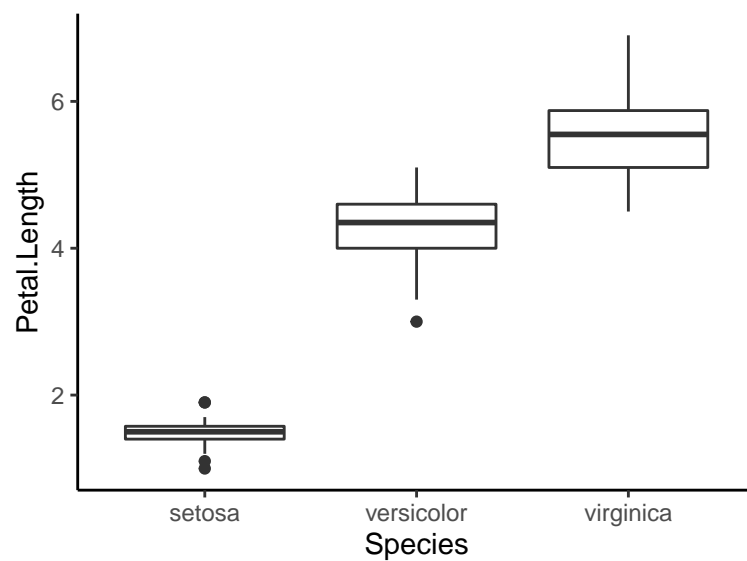
## Statistiques descriptives et visualisation

Ces approches peuvent donner une intuition pour répondre.

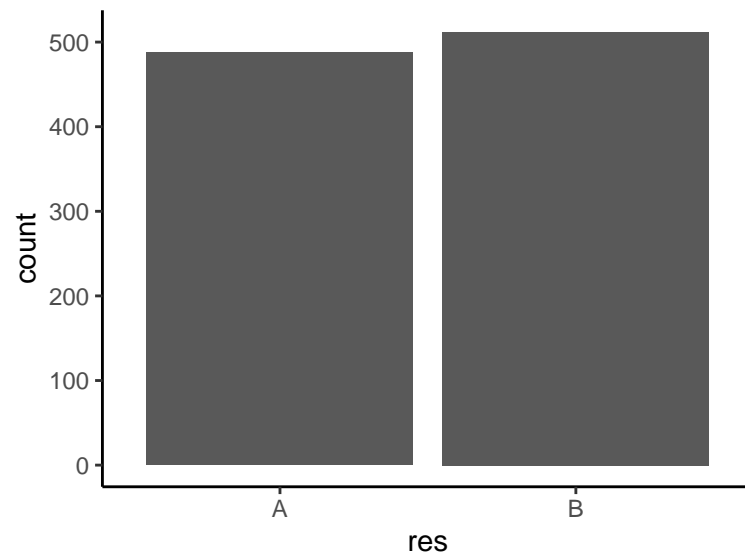
```
> iris %>% summarize(mean(Petal.Length))
## mean(Petal.Length)
## 1 3.758
> iris %>% group_by(Species) %>% summarize(mean(Petal.Length))
## # A tibble: 3 x 2
## Species mean(Petal.Length)
## <fct> <dbl>
## 1 setosa 1.46
## 2 versicolor 4.26
## 3 virginica 5.55
```

```
> election %>% mutate(res_A=res=="A") %>%
+ summarize(Prop_A=mean(res_A))
## Prop_A
## 1 0.488
```

```
> ggplot(iris)+aes(x=Species,y=Petal.Length)+geom_boxplot()
```



```
> ggplot(election)+aes(x=res)+geom_bar()
```



## Hasard, aléa...

- La réponse à ces questions peut *paraître* simple.

### Première réponse

- **Iris** : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 0.6, on répond **non**.
- **Election** : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que **A gagne**.

### Problème

- Ces réponses sont très (trop) *liées aux données observées*.
- Si je recommence l'expérience (sur d'autres iris ou d'autres électeurs), les *conclusions peuvent changer*.
- **Conclusion** : il faut prendre en compte cet aléa du au choix des individus ainsi que le *nombre d'observations* et la *dispersion des mesures*.

## Probabilités

- *Idée* : répondre à ces questions en calculant (**estimant**) des probabilités.
- *Notation* :  $x_1, \dots, x_n$   $n$  observations.

### Hypothèse

Les observations proviennent d'une certaine *loi de probabilité* (**inconnue**).

### Problème

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

### "Définition"

- Une **loi de probabilité** est un objet qui permet de mesurer la probabilité qu'un évènement se produise.
- *Mathématiquement*, il s'agit d'une fonction  $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  telle que, pour un évènement  $\omega \in \Omega$ ,  $\mathbf{P}(\omega)$  mesure la "chance" que l'évènement  $\omega$  se réalise.

### Exemple

- *Pile ou face* :  $\mathbf{P}(\text{pile}) = \mathbf{P}(\text{false}) = 1/2$ .
- *Dé équilibré* :  $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \dots = \mathbf{P}(6) = 1/6$ .

## Quelques lois de probabilités

- Une loi de probabilité permet de *visualiser/caractériser/mesurer* les **valeurs** que peut prendre une variable.
- On distingue *deux types* de loi de probabilité que l'on caractérise en **étudiant les valeurs possibles** de la variable (et donc de l'expérience).

### Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est **fini** ou **dénombrable**, la variable est **discrète**.
- pile ou face, nombre de voitures à un feu rouge, nombre d'aces dans un match de tennis...

### Variable continue

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est **infini** ( $\mathbb{R}$  ou un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) la variable est **continue**.
- Dureté de trajet, taille, vitesse d'un service, longueur d'un saut...

### Comment définir une loi discrète ?

Pour *caractériser une loi discrète*, il faudra donner :

1. l'ensemble des **valeurs possibles** de la variable ;
2. la **probabilité associée** à chacune de ses valeurs.

### Exemple

- Soit  $X$  la variable aléatoire qui représente le statut matrimonial d'une personne.
- $X$  peut prendre 4 valeurs : célibataire, marié, divorcé, vœuf (4 valeurs donc **loi discrète**).
- On caractérise sa **loi**

$$\mathbf{P}(X = \text{cel}) = 0.20, \mathbf{P}(X = \text{marié}) = 0.4, \mathbf{P}(X = \text{div}) = 0.3, \mathbf{P}(X = \text{vœuf}) = 0.1.$$

### Remarque

La somme des probabilités doit *toujours être égale à 1*.

## Bernoulli

### Définition

La loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$  est définie par

- Valeurs possibles : 0 et 1
- Proba :  $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$  et  $\mathbf{P}(X = 1) = p$ .

### Exemple

- Modélisation de phénomènes à 2 issues.
- Pile ou face, ace/pas ace, acceptation/rejet, oui/non...

## Binomiale

- On répète  $n$  expériences de *Bernoulli* de paramètres  $p \in [0, 1]$  de façon *indépendante*.
- On note  $X_1, \dots, X_n$  les  $n$  résultats.
- $\sum_{i=1}^n X_i$  (qui compte le nombre de 1) suit une loi *Binomiale*  $\mathcal{B}(n, p)$ .

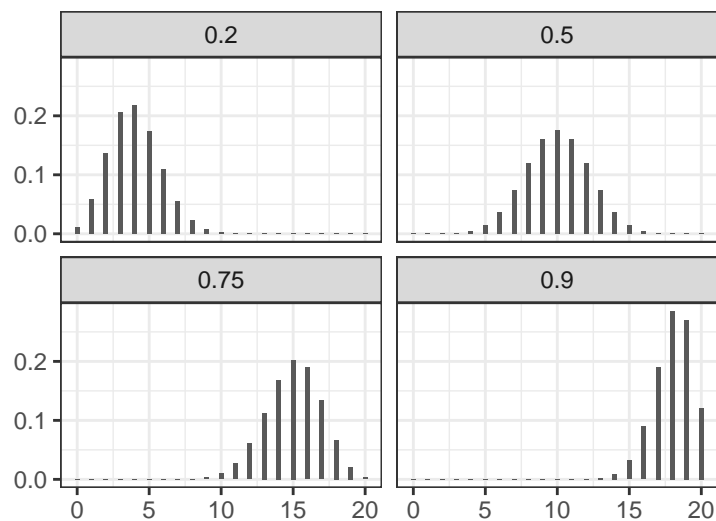
### Loi binomiale

- Valeurs possibles :  $\{0, 1, \dots, n\}$ .
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

### Exemple

- Nombre de succès sur  $n$  épreuves.
- Nombre de piles, nombre d'aces sur  $n$  services.



## Loi de Poisson

### Définition

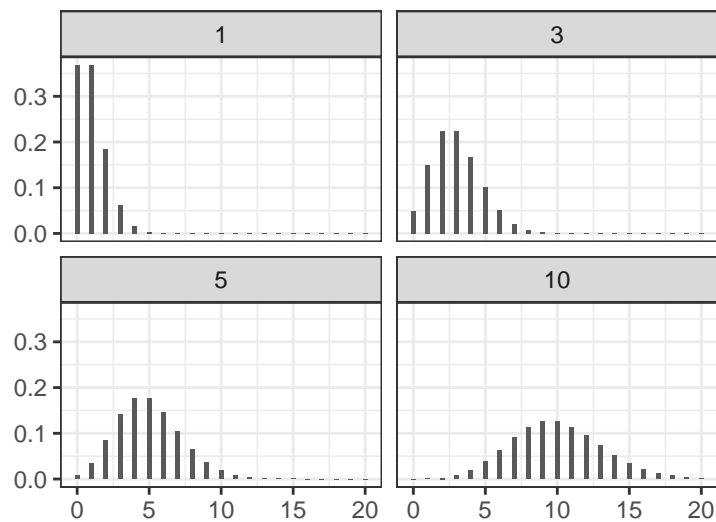
- Valeurs possibles :  $\mathbb{N}$ .
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$$

où  $\lambda$  est un paramètre positif. On la note  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

### Exemple

- Données de *comptage*.
- Nombre de voitures à un feu rouge, nombre de personnes à une caisse, nombre d'admis à une épreuve...



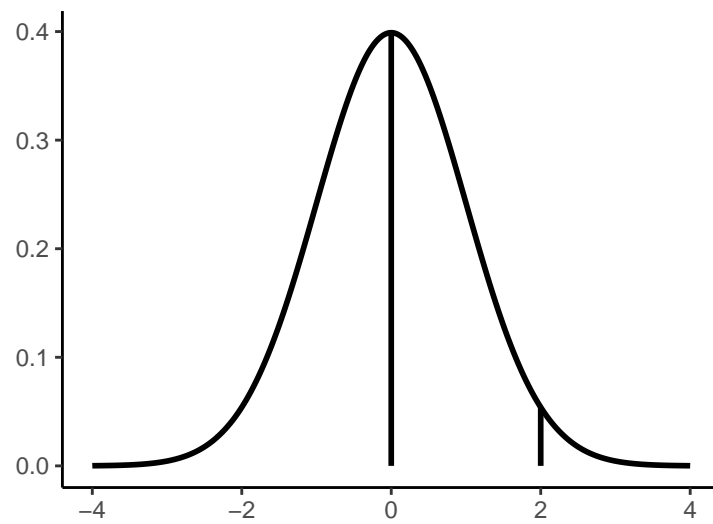
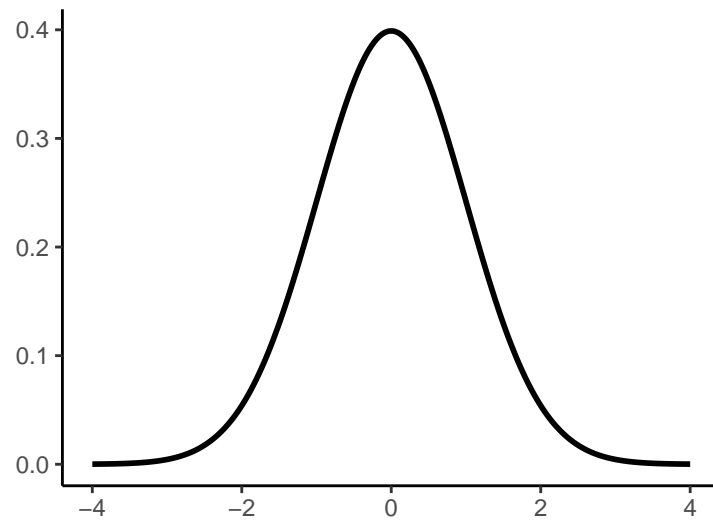
### Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une *infinité* de valeurs (sur un intervalle ou sur  $\mathbb{R}$  tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une *fonction de densité* qui permettra de *mesurer la probabilité* que la variable appartienne à un intervalle.
- Cette probabilité se déduit de l'*aire* sous la densité.

### Exemple

Si  $X$  admet pour densité  $f$ , alors

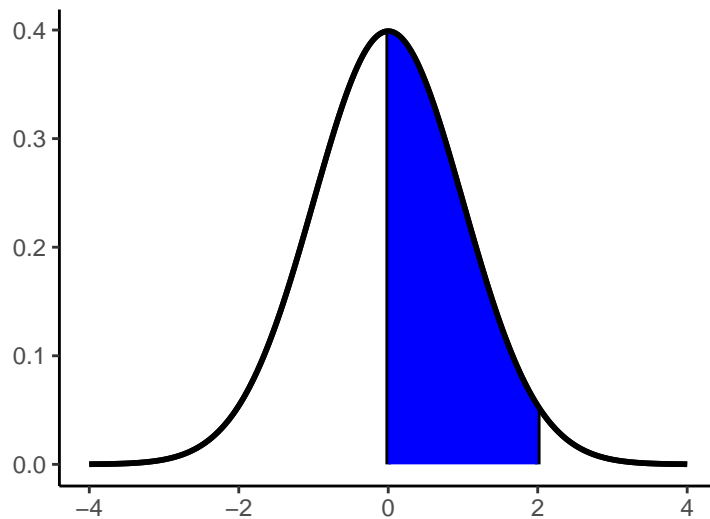
$$\mathbf{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) \, dx.$$



*Question*

$$\mathbf{P}(X \in [0, 2]) = ???$$





**Réponse**

$$\mathbf{P}(X \in [0, 2]) = \int_0^2 f(x) \, dx \simeq 0.48.$$

## Densité

### Définition

Une densité de probabilité est donc une *fonction*  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être **positive** :  $f(x) \geq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$  ;
2. Elle doit être **intégrable**.
3. Son intégrale sur  $\mathbb{R}$  doit être égale à **un** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1.$$

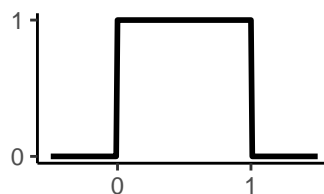
## Loi uniforme

### Définition

La loi **uniforme** sur un intervalle  $[a, b]$  admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On la note  $\mathcal{U}_{[a,b]}$ .



### Interprétation

Les valeurs de  $X$  sont réparties *uniformément* sur l'intervalle  $[a, b]$ .

## La loi normale

### Définition

La loi **normale** ou loi **gaussienne** de paramètre  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$  admet pour densité

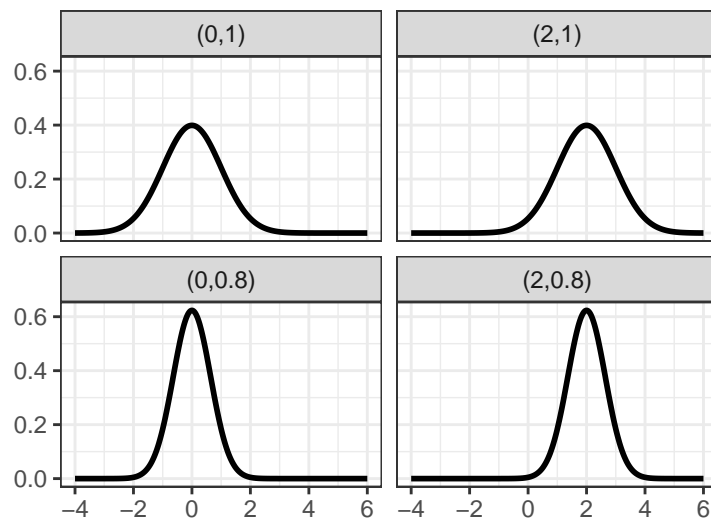
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}\right).$$

On la note  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

### Remarque

- $\mu$  représente le tendance centrale de la loi, on parle de valeur *moyenne*.
- $\sigma^2$  représente la *dispersion* de la loi autour de la valeur moyenne, on parle(ra) de *variance*.
- Elle permet de modéliser des phénomènes centrés en une valeur.
- C'est la loi limite du *théorème central limite*.

### Exemples pour différents $(\mu, \sigma^2)$



## Loi exponentielle

### Définition

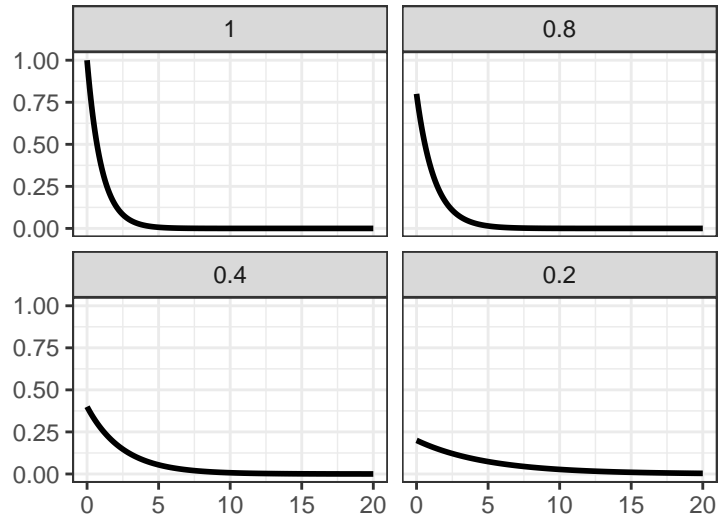
La loi **exponentielle** de paramètre  $\lambda > 0$  admet pour densité

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

On la note  $\mathcal{E}(\lambda)$ .

### Exemple

- Cette loi est souvent utilisée pour modéliser des *durées de vie* (composant électronique, patients atteint d'une pathologie...).



## Espérance et variance

### Motivations

- Loi de probabilité : *pas toujours facile à interpréter* d'un point de vue pratique.
- *Objectif* : définir des **indicateurs** (des nombres par exemple) qui permettent d'interpréter une loi de probabilité (tendance centrale, dispersion...).

### Espérance

#### Définition

L'*espérance* d'une variable aléatoire  $X$  est le *réel* défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega).$$

#### Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de *comprendre l'interprétation de l'espérance*.
- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r.  $X$**  pour chaque événement  $\omega$  **pondéré** par la mesure de probabilité de chaque événement.
- Elle s'interprète ainsi en terme de **valeur moyenne** prise par  $X$ .

### Calculs d'espérance

- Pour les *calculs d'espérance*, on distingue les cas **discrets** et **continus**.

#### Propriété

- **Cas discret** :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\text{valeurs possibles de } X} x \mathbf{P}(X = x).$$

- **Cas continu** :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

où  $f$  est la densité de  $X$ .

## Exemples

Loi	Espérance
$\mathcal{B}(p)$	$p$
$\mathcal{B}(n, p)$	$np$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu$

## Variance

### Définition

- La *variance* de  $X$ , notée  $\mathbf{V}[X]$ , est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive  $\sigma[X]$  est appelée *écart-type* de  $X$ .

### Interprétation

- La variance est un réel **positif**.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par  $X$  et l'espérance (moyenne) de  $X \implies$  interprétation en terme de **dispersion**.

### Exemple

1. Loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(p)$  :  $\mathbf{V}[X] = p(1 - p)$  ;
2. Loi uniforme sur  $[0, 1]$  :  $\mathbf{V}[X] = 1/12$  ;
3. Loi uniforme sur  $[1/4, 3/4]$  :  $\mathbf{V}[X] = 1/48$  ;

\end{frame}

## Espérance et variance de quelques lois classiques

$X$	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{V}[X]$
$\mathcal{B}(p)$	$p$	$p(1 - p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	$p$	$np(1 - p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$	$\lambda$

Lois discrètes

$X$	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{V}[X]$
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu$	$\sigma^2$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Lois continues

## Modèle et estimation

### L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux *performances de décathlons* au cours de deux épreuves (jeux olympiques et décastar)

### Quelques problèmes

1. Quelle est la *distribution* de la variable vitesse au 100m ?
2. Les *performances* aux decastar et aux jeux olympiques sont-elles *identiques* ?
3. Quelles sont les disciplines les plus *influentes* sur le classement ?
4. Existe t-il un *lien* entre les performances au 100m et les autres disciplines ?
5. Si oui, peut-on le *quantifier* ?

## Les données

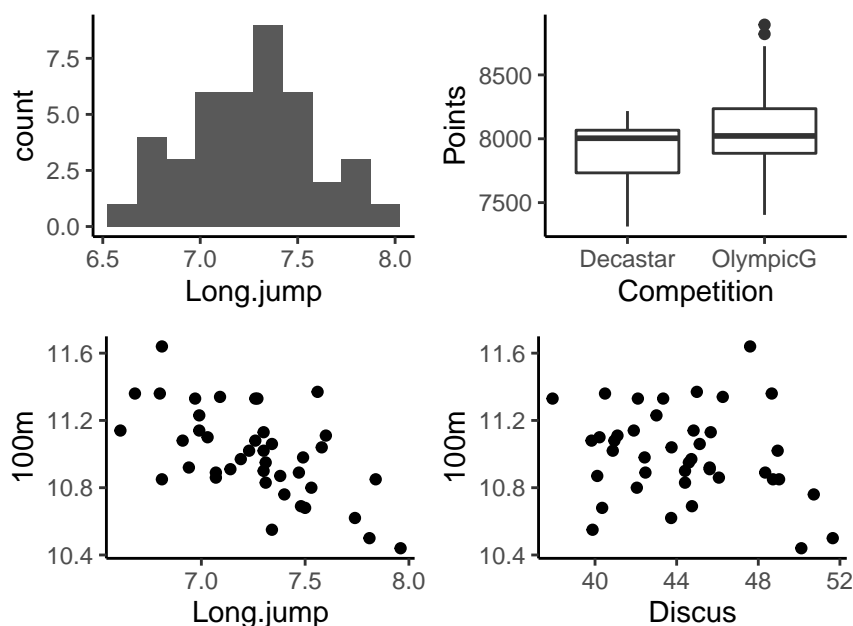
— Pour tenter de répondre à ces questions, on dispose des performances d'une vingtaine de décathlons au cours de deux épreuves :

```
> head(decathlon)
##      100m Long.jump Shot.put High.jump 400m 110m.hurdle Discus
## SEBRLE 11.04      7.58    14.83     2.07 49.81      14.69 43.75
## CLAY   10.76      7.40    14.26     1.86 49.37      14.05 50.72
## KARPOV 11.02      7.30    14.77     2.04 48.37      14.09 48.95
## BERNARD 11.02      7.23    14.25     1.92 48.93      14.99 40.87
## YURKOV 11.34      7.09    15.19     2.10 50.42      15.31 46.26
## WARNERS 11.11      7.60    14.31     1.98 48.68      14.23 41.10
##      Pole.vault Javeline 1500m Rank Points Competition
## SEBRLE      5.02    63.19 291.7     1   8217   Decastar
## CLAY        4.92    60.15 301.5     2   8122   Decastar
## KARPOV      4.92    50.31 300.2     3   8099   Decastar
## BERNARD      5.32    62.77 280.1     4   8067   Decastar
## YURKOV      4.72    63.44 276.4     5   8036   Decastar
## WARNERS      4.92    51.77 278.1     6   8030   Decastar
```

## Statistiques descriptives (capital)

```
> p1 <- ggplot(decathlon)+aes(x=Long.jump)+geom_histogram(bins=10)
> p2 <- ggplot(decathlon)+aes(x=Competition,y=Points)+geom_boxplot()
> p3 <- ggplot(decathlon)+aes_(x=as.name("Long.jump"),
+                               y=as.name("100m"))+geom_point()
> p4 <- ggplot(decathlon)+aes_(x=as.name("Discus"),
+                               y=as.name("100m"))+geom_point()
```

```
> library(gridExtra)
> grid.arrange(p1,p2,p3,p4,nrow=2)
```



## Modèle statistique

- On s'intéresse d'abord uniquement à la variable 100m.
- On dispose de  $n = 41$  observations  $x_1, \dots, x_n$

```
> decathlon %>% summarize(moy=mean('100m'),var=var('100m'),
+                           min=min('100m'),max=max('100m'))
##           moy           var      min      max
## 1 10.99805 0.0691811 10.44 11.64
```

### Question

Peut-on dire que le temps moyen au 100m pour les décathlons est de 10.99 ?

### Hazard, aléa...

- Le résultat de 10.99 dépend des *conditions* dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on *re-mesure les performances de nouvelles compétitions*, il est fort possible qu'on n'obtienne *pas la même durée moyenne*.

### Remarque

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé **dépend des** conditions expérimentales.
- Ces conditions expérimentales vont cependant être **difficiles à caractériser précisément**.
- On dit souvent que le **hasard ou l'aléa** intervient dans ces conditions.
- L'approche *statistique* prend en compte le **nombre** et la **dispersion** des observations pour apporter une réponse.

## Modèle statistique

- Pour prendre en compte cet aléa, on fait l'hypothèse que les observations  $x_i$  sont issues d'une loi de probabilité  $\mathbf{P}_i$  (**inconnue**).

### Echantillon *i.i.d*

- Si les mesures  $x_i$  sont faites de façons **indépendantes** et dans des conditions **identiques**, on dit que  $x_1, \dots, x_n$  sont  $n$  observations indépendantes et de même loi  $\mathbf{P}$ .
- On emploie souvent le terme *échantillon i.i.d* (indépendant et identiquement distribué).

## Le problème statistique

### Estimer

- La loi  $\mathbf{P}$  ainsi que toutes ses quantités dérivées (espérance, variance) est et sera **toujours inconnue**.
- Le travail du statisticien sera d'essayer de retrouver, ou plutôt d'*estimer*, cette loi ou les quantités d'intérêt qui dépendent de cette loi.

## Quelques exemples

### Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite  $n = 100$  patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

#### Modélisation

- On note  $x_i = 1$  si le  $i^{\text{ème}}$  athlète a amélioré, 0 sinon.
- Les  $x_i$  sont issues d'une loi de Bernoulli de paramètre **inconnu**  $p \in [0, 1]$ .
- Si les individus sont choisis de manière **indépendante** et ont tous la même probabilité de progresser (ce qui peut revenir à dire qu'ils sont au **même niveau**), il est alors raisonnable de supposer que l'échantillon est *i.i.d.*

#### Le problème statistique

Estimer le paramètre  $p$  :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

#### Exemple d'estimateur

- Il paraît naturel d'estimer  $p$  par la **proportion d'athlètes** dans l'échantillon qui ont **amélioré** leur performance.
- Cela revient à estimer  $p$  par la **moyenne (empirique) des  $x_i$**  :

$$\hat{p} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

### Durée de trajet

- On s'intéresse à la *durée de trajet moyenne* "domicile/travail".
- *Expérience* : je mesure la durée de trajet domicile/travail pendant plusieurs jours.
- Je récolte  $n = 100$  observations :

```
> summary(duree_ht)
##      Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
##   10.62   16.42   18.46   19.37   21.88   30.20
```

#### Modélisation

Les données sont issues d'une loi **inconnue**  $\mathbf{P}$ .

#### Le problème statistique

Estimer l'**espérance** (moyenne)  $\mu$  de la loi  $\mathbf{P}$ .

#### Exemple d'estimateur

Là encore, un estimateur naturel de  $\mu$  est donné par la **moyenne empirique**

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

$X$	Paramètre	Estimateur
$\mathcal{B}(p)$	$p$	$\bar{x}_n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda$	$\bar{x}_n$
$\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	$\theta$	$2\bar{x}_n$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda$	$1/\bar{x}_n$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu$ et $\sigma^2$	$\bar{x}_n$  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$

## Le modèle gaussien

### Cadre

- $x_1, \dots, x_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- **Le problème** : estimer  $\mu = \mathbf{E}[X]$  et  $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$ .

### Exemple d'estimateurs

- *Moyenne empirique* :

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- *Variance empirique* :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

## Autres exemples

### Conclusion

De nombreux estimateurs sont construits à partir de la **moyenne empirique**  $\bar{x}_n$ .

## La moyenne empirique

### Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la **moyenne empirique**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- La moyenne empirique est une **variable aléatoire**.
- Elle va donc posséder une **loi**, une **espérance**, une **variance**...

## Cas gaussien

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une *loi gaussienne*.
- On considère alors  $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .



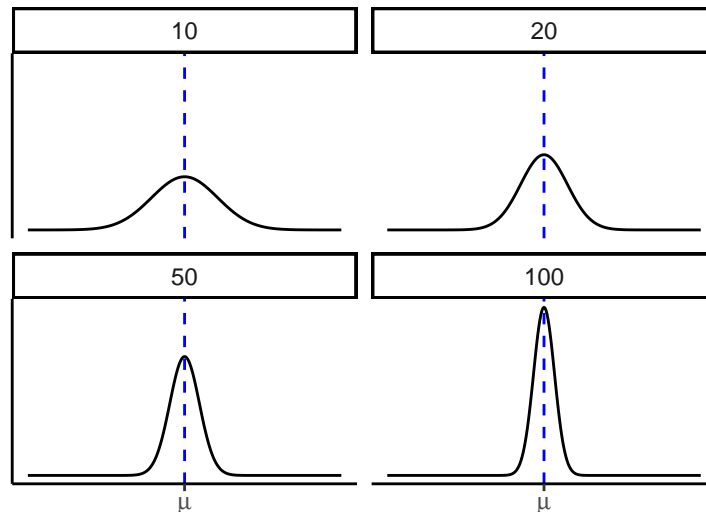
### Propriété

- Dans le cas gaussien, la moyenne empirique  $\bar{X}_n$  suit une **loi normale**  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .
- On a ainsi

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

### Conclusion

- $\bar{X}_n$  est **centrée** autour de  $\mu$ .
- Sa **dispersion** dépend de  $\sigma^2$  et  $n$ .



### Biais et variance

- $\bar{X}_n$  tombe toujours en moyenne sur  $\mu$ . On dit que c'est un **estimateur sans biais** de  $\mu$ .
- Sa **précision** augmente lorsque :
  - $\sigma^2$  diminue (difficile à contrôler);
  - $n$  augmente (lorsqu'on **augmente le nombre de mesures**).

## Cas non gaussien

- On dispose ici d'un échantillon  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. (de *même loi*).
- La loi est *quelconque* (discrète, continue...). On note  $\mu = \mathbf{E}[X_1]$  et  $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$ .

### Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

### Commentaires

- L'espérance et la variance de  $\bar{X}_n$  sont **identiques au cas gaussien**.
- Les remarques faites dans le cas gaussien restent donc **valables**.
- **Seul changement** : on ne connaît pas ici la loi de  $\bar{X}_n$  (juste son espérance et sa variance).

- Dans de nombreuses applications (*intervalles de confiance, tests statistiques*), on a besoin de connaître la loi de  $\bar{X}_n$ .
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- *Interprétation* :  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .

### La puissance du TCL

- Le *théorème central limite* stipule que, sous des **hypothèses très faibles**, on peut étendre ce résultat (pour  $n$  grand) à **"n'importe quelle" suite de variables aléatoires indépendantes**.
- C'est l'un des résultats les plus **impressionnants et les plus utilisés** en probabilités et statistique.

### Le TCL

#### Théorème Central Limite (TCL)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon i.i.d. On note  $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ ,  $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$  et  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont *faibles* : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- **Conséquence** : si  $n$  est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de  $\bar{X}_n$  par la loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ .
- On pourra écrire  $\mathcal{L}(\bar{X}_n) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$  mais *pas*

$$\mathcal{L}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

### TCL pour modèle de Bernoulli

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .
- On a donc  $\mathbf{E}[X_1] = p$  et  $\mathbf{V}[X_1] = p(1 - p)$ .

#### TCL

On a d'après le **TCL**

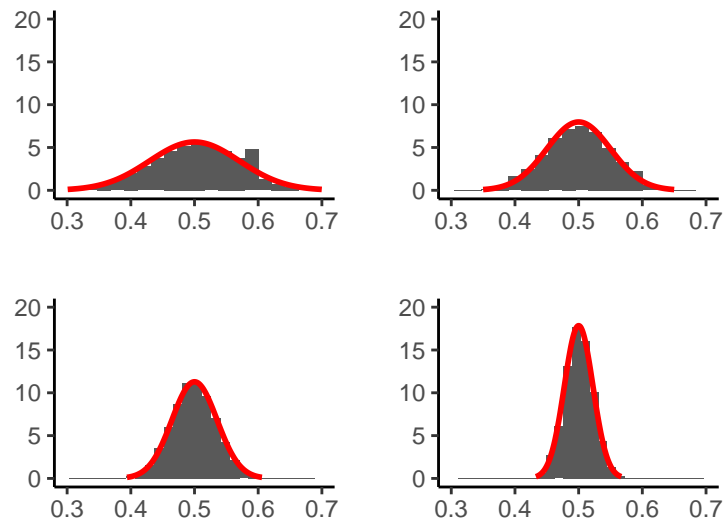
$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

#### Conséquence

On peut donc *approcher la loi* de la moyenne empirique  $\bar{X}_n$  par la loi

$$\mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

- Approximation TCL pour le modèle de Bernoulli  $\mathcal{B}(1/2)$  avec  $n = 50, 100, 200, 500$ .

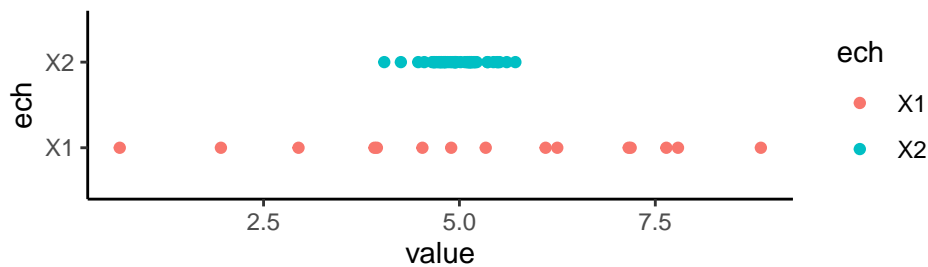


## Intervalle de confiance

### Motivations

- Donner une *seule valeur* pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- *Exemple* : la performance est de 72% lorsque on prend le traitement (alors qu'on ne l'a *testé que sur 100 athlètes*).
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, la performance se trouve dans l'*intervalle*  $[70\%, 74\%]$  avec une *confiance* de 90%.

### Un exemple



### Remarque

- Ces deux échantillons semblent avoir (à peu près) la **même moyenne**.
- Cependant, l'échantillon 2 semble être **plus précis** pour estimer cette moyenne.
- $X_1, \dots, X_n$  un échantillon i.i.d. de loi  $\mathbf{P}$  inconnue.
- Soit  $\theta$  un paramètre **inconnu**, par exemple  $\theta = \mathbf{E}[X]$ .

### Définition

Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On appelle **intervalle de confiance** pour  $\theta$  tout intervalle de la forme  $[A_n, B_n]$ , où  $A_n$  et  $B_n$  sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

### Définition

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$ , on dit que  $[A_n, B_n]$  est un *intervalle de confiance asymptotique* pour  $\theta$  au niveau  $1 - \alpha$ .

### Construction d'IC

- Un *intervalle de confiance* pour un paramètre inconnu  $\theta$  se construit généralement à partir d'un **estimateur de  $\theta$  dont on connaît la loi**.
- A partir de la loi de  $\hat{\theta}$ , on cherche deux bornes  $A_n$  et  $B_n$  telle que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

### Remarque

A priori, plus  $\alpha$  est *petit*, plus l'intervalle aura une *grande amplitude*.

### Exemple

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ .
- *Question* : IC de niveau 0.95 pour  $\mu$  ?

### Construction de l'IC

- **Estimateur** :  $\hat{\mu} = \bar{X}_n$ .
- **Loi de l'estimateur** :  $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$ .
- On déduit

$$\mathbf{P}\left(\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- Un **intervalle de confiance de niveau  $1 - \alpha$**  est donc donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

### Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$  désigne le *quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$*  de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Il est défini par

$$\mathbf{P}(X \leq q_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

### Définition

Plus généralement, le *quantile d'ordre  $\alpha$*  d'une variable aléatoire  $X$  est défini par le réel  $q_\alpha$  vérifiant

$$\mathbf{P}(X \leq q_\alpha) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

- Les quantiles sont généralement renvoyés par les *logiciels statistique* :

```
> c(qnorm(0.975),qnorm(0.95),qnorm(0.5))
## [1] 1.959964 1.644854 0.000000
```

## Une exemple à la main

—  $n = 50$  observation issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, 1)$  :

```
> head(X)
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

— Estimation de  $\mu$  :

```
> mean(X)
## [1] 4.546947
```

— Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
## [1] 4.269766 4.824128
```

## Loi normale (cas réel)

- $X_1, \dots, X_n$  i.i.d de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .
- On a vu qu'un IC pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

### Problème

- Dans la vraie vie,  $\sigma$  est **inconnu** !
- L'intervalle de confiance **n'est donc pas calculable**.

### Idée

1. Estimer  $\sigma^2$  par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[ \hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (1)$$

### Problème

- On a bien

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

- mais

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\widehat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

— Pour avoir la loi de

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

avec

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

— il faut définir d'autres *lois de probabilité*.

## La loi normale (Rappel)

### Définition

— Une v.a.r  $X$  suit une loi *normale* de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma^2 > 0$  admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

### Propriétés

—  $\mathbf{E}[X] = \mu$  et  $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$ .

— Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  alors

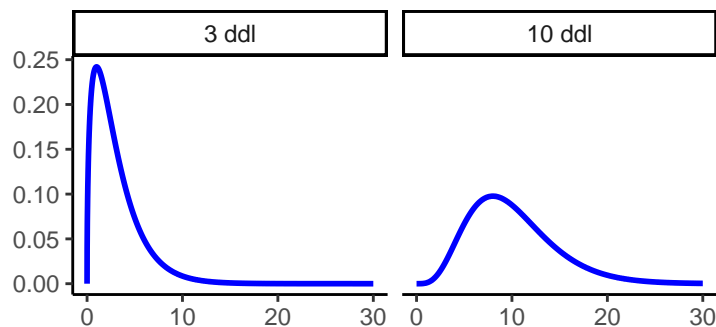
$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

## Loi du $\chi^2$

### Définition

— Soit  $X_1, \dots, X_n$   $n$  variables aléatoires réelles indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . La variable  $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$  suit une loi du *Chi-Deux* à  $n$  degrés de liberté. Elle est notée  $\chi^2(n)$ .

—  $\mathbf{E}[Y] = n$  et  $\mathbf{V}[Y] = 2n$ .



## Loi de Student

### Définition

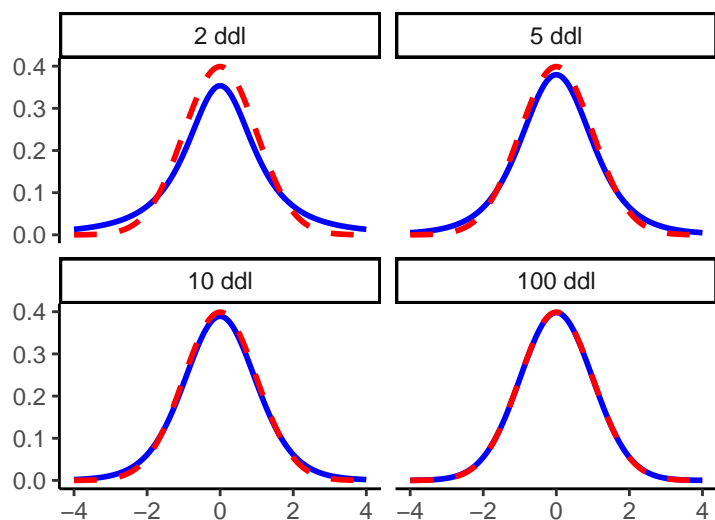
— Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r. *indépendantes* de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une *loi de student* à  $n$  degrés de liberté. On note  $\mathcal{T}(n)$ .

—  $\mathbf{E}[T] = 0$  et  $\mathbf{V}[T] = n/(n-2)$ .

— Lorsque  $n$  est grand la loi de student à  $n$  degrés de liberté peut être *approchée* par la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .



### Légende

Densités des lois de student à 2, 5, 10 et 100 degrés de liberté (bleu) et densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  (rouge).

### Loi de Fisher

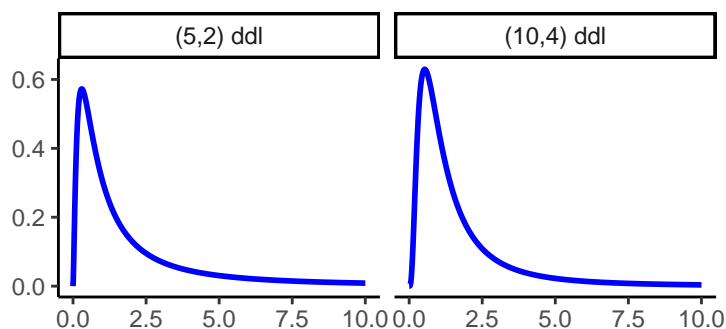
#### Définition

— Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.r *indépendantes* de lois  $\chi^2(m)$  et  $\chi^2(n)$ . Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

suit une *loi de Fisher* à  $m$  et  $n$  degrés de liberté. On note  $\mathcal{F}(m, n)$ .

— Si  $F \sim \mathcal{F}(m, n)$  alors  $1/F \sim \mathcal{F}(n, m)$ .



### Théorème de Cochran

—  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

— On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

### Théorème de Cochran

On a alors

1.  $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ .
2.  $\bar{X}_n$  et  $S^2$  sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

### Remarque

1 et 3 sont très importants pour construire des *intervalles de confiance*.

### IC pour la loi gaussienne

#### IC pour $\mu$

On déduit du résultat précédent qu'un **IC de niveau  $1 - \alpha$**  pour  $\mu$  est donné par

$$\left[ \bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

où  $t_{1-\alpha/2}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha/2$  de la loi de Student à  $n - 1$  ddl.

#### IC pour $\sigma^2$

Un **IC de niveau  $1 - \alpha$**  pour  $\sigma^2$  est donné par

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

où  $\chi_{1-\alpha/2}$  et  $\chi_{\alpha/2}$  sont les quantiles d'ordre  $1 - \alpha/2$  et  $\alpha/2$  de loi  $\chi^2(n-1)$ .

### Exemple (IC pour $\mu$ )

—  $n = 50$  observation issues d'une loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  :

```
> head(X)
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

— Estimation de  $\mu$  :

```
> mean(X)
## [1] 4.546947
```

— Estimation de  $\sigma^2$  :

```
> S <- var(X)
> S
## [1] 0.783302
```

— *Intervalle de confiance* de niveau 95% :

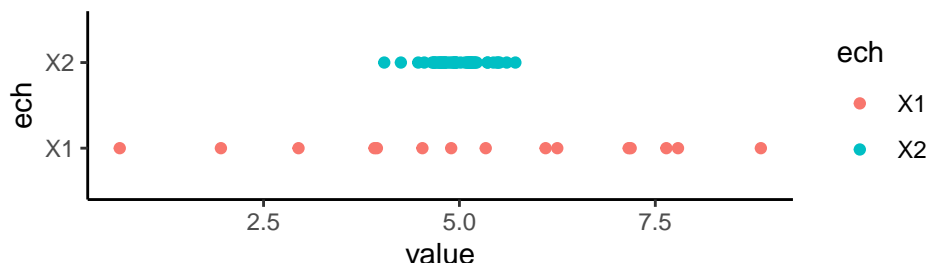
```
> binf <- mean(X) - qt(0.975, 49) * sqrt(S) / sqrt(50)
> bsup <- mean(X) + qt(0.975, 49) * sqrt(S) / sqrt(50)
> c(binf, bsup)
## [1] 4.295420 4.798474
```

— On peut obtenir directement l'intervalle de confiance à l'aide de la fonction *t.test* :



```
> t.test(X)$conf.int
## [1] 4.295420 4.798474
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.95
```

## Autre exemple



```
> t.test(df1$value)$conf.int[1:2]
## [1] 3.990982 6.563659
> t.test(df2$value)$conf.int[1:2]
## [1] 4.887045 5.074667
```

## Conclusion

Sans surprise, on retrouve bien qu'on est *plus précis* avec l'échantillon 2.

## Exemple (IC pour $\sigma^2$ )

— On obtient l'IC pour  $\sigma^2$  à l'aide de la formule

$$\left[ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

— On peut donc le calculer sur  $R$  :

```
> binf <- 49*S/qchisq(0.975,49)
> bsup <- 49*S/qchisq(0.025,49)
> c(binf,bsup)
## [1] 0.5465748 1.2163492
```

## Application décathlon

— IC de niveau 95% pour la longueur moyenne en saut en longueur :

```
> t.test(decathlon$Long.jump)$conf.int
## [1] 7.160131 7.359869
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.95
```

— IC de niveau 95% pour la temps moyen au 1500m :

```
> t.test(decathlon$`1500m`)$conf.int
## [1] 275.3403 282.7094
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.95
```

— IC de niveau 90% pour la temps moyen au 1500m :

```
> t.test(decathlon$`1500m`,conf.level=0.90)$conf.int
## [1] 275.9551 282.0946
## attr(,"conf.level")
## [1] 0.9
```

### Remarque

L'IC à 95% a une amplitude plus grande que celui à 90% (c'est *normal*).

### Comparer des moyennes

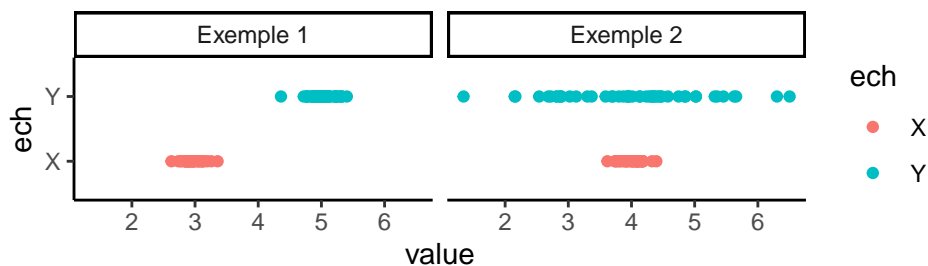
#### Question (fréquente)

- Peut-on dire que deux populations ont les **mêmes caractéristiques** ?
- Ou plus simplement que deux caractéristiques ont la **même moyenne** ?

#### Observations

- $X_1, \dots, X_{n_1}$  observations pour la population 1.
- $Y_1, \dots, Y_{n_2}$  observations pour la population 2.

### Exemple



### Idée

Utiliser des IC pour décider.

### Comparer des moyennes.

- *Approche* : construire un IV pour  $\mu_X - \mu_Y$  et regarder si 0 est à l'intérieur de l'IC
- *Méthode* : trouver la loi de  $\bar{X} - \bar{Y}$ .
- *Résultat* : cette loi est proche d'une loi Gaussienne. On peut montrer plus précisément que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}}$$

suit une loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté ( $\nu$  par de forme explicite pour  $\nu$ ).

- On déduit de ces résultats des *IC* pour  $\mu_X - \mu_Y$ .

### Exemple

- On reprend les deux échantillons des diapos précédentes.

```
> t.test(df1$value,df2$value)
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: df1$value and df2$value
## t = -55.526, df = 81.644, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -2.134079 -1.986443
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 2.965286 5.025547
```

### Conclusion

0 n'étant pas dans l'intervalle de confiance, on peut penser que les moyennes sont différentes.

— On reprend les deux échantillons des diapos précédentes.

```
> t.test(df1$value,df2$value)
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: df1$value and df2$value
## t = -55.526, df = 81.644, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -2.134079 -1.986443
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 2.965286 5.025547
```

### Conclusion

0 étant dans l'intervalle de confiance, on peut penser que les moyennes sont proches.

— Les procédures de **test statistique** permettront de préciser cette méthodologie.