

Statistique

Laurent Rouvière

Mars 2021

- **Preé-requis:** Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation

Présentation

- **Preé-requis:** Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation
- **Objectifs:** être capable de mettre en oeuvre une démarche statistique rigoureuse pour répondre à des problèmes standards
 - **estimation** : ponctuelle et par intervalles
 - **tests d'hypothèses**
 - **modèle linéaire**

- **Préé-requis:** Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation
- **Objectifs:** être capable de mettre en oeuvre une démarche statistique rigoureuse pour répondre à des problèmes standards
 - **estimation** : ponctuelle et par intervalles
 - **tests d'hypothèses**
 - **modèle linéaire**
- **Enseignant:** Laurent Rouvière, laurent.rouviere@univ-rennes2.fr
 - Thèmes de recherche : statistique non-paramétrique et apprentissage statistique
 - Enseignement: probabilités, statistique et logiciels (Universités et écoles)
 - Consulting: énergie (ERDF), finance, marketing.

- **Théorie** (modélisation statistique) et **pratique** sur machines (R).

- **Théorie** (modélisation statistique) et **pratique** sur machines (R).

1. Introduction à R

- Environnement Rstudio
- Objets R
- Manipulation et visualisation de données

2. “Rappels” de probabilités

3. Estimation ponctuelle et par intervalle

4. Introduction aux tests.

Quelques éléments de probabilité

Quelques éléments de probabilité

Introduction

Une problématique...

Exemple

Les iris de Fisher.

1. Quelle est la longueur de sépales moyenne des iris ?
2. Peut-on dire que cette longueur moyenne est égale à 5.6 ?
3. Les Setosa ont-elles des longueurs de sépales plus grandes que les autres espèces ? Avec quel niveau de confiance ?

Des données

Collecte de données

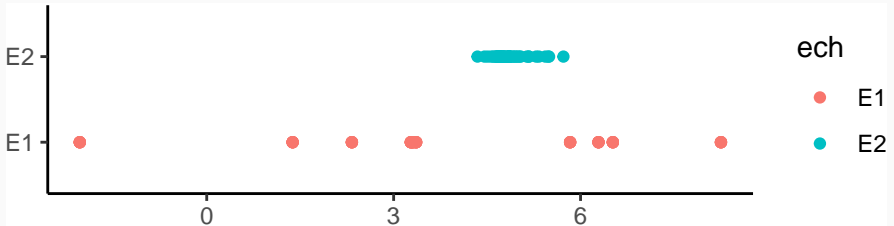
- Pour répondre à ces questions on réalise des expériences.
- **Exemple** : on mesure les longueurs et largeurs de sépales et pétales pour 150 iris (50 de chaque espèce).

```
> data(iris)
> summary(iris)

##      Sepal.Length      Sepal.Width      Petal.Length      Petal.Width
##  Min.       :4.300    Min.       :2.000    Min.       :1.000    Min.       :0.100
##  1st Qu.:5.100    1st Qu.:2.800    1st Qu.:1.600    1st Qu.:0.300
##  Median :5.800    Median :3.000    Median :4.350    Median :1.300
##  Mean   :5.843    Mean   :3.057    Mean   :3.758    Mean   :1.199
##  3rd Qu.:6.400    3rd Qu.:3.300    3rd Qu.:5.100    3rd Qu.:1.800
##  Max.   :7.900    Max.   :4.400    Max.   :6.900    Max.   :2.500
##
##      Species
##  setosa      :50
##  versicolor:50
##  virginica   :50
```

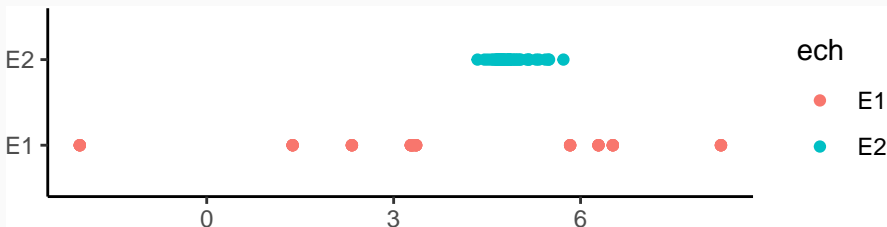
Autre exemple

- On considère deux échantillons **E1** et **E2**.
- **Question** : la moyenne est-elle égale à 5 ?



Autre exemple

- On considère deux échantillons **E1** et **E2**.
- **Question** : la moyenne est-elle égale à 5 ?



Remarque

Plus difficile de répondre pour **E1** car :

- Moins d'observations ;
- **Dispersion** plus importante.

Un autre exemple

- Deux candidats se présentent à une élection.
- On effectue un sondage, les résultats sont

```
> summary(election)
##   res
## A:488
## B:512
```

Un autre exemple

- Deux candidats se présentent à une élection.
- On effectue un sondage, les résultats sont

```
> summary(election)
##  res
##  A:488
##  B:512
```

- Problématique : qui va gagner ?
- Avec quel niveau de confiance peut-on répondre à cette question ?

Statistiques descriptives et visualisation

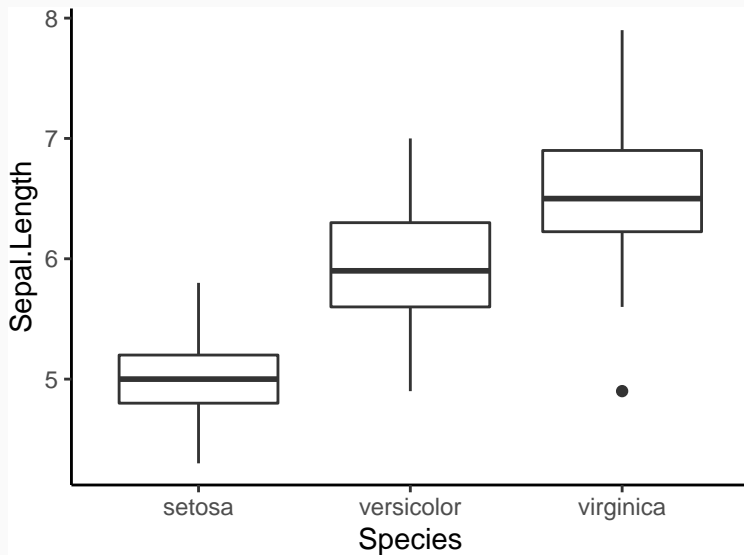
Ces approches peuvent donner une intuition pour répondre.

```
> iris %>% summarize(mean(Sepal.Length))  
##   mean(Sepal.Length)  
## 1           5.843333  
  
> iris %>% group_by(Species) %>% summarize(mean(Sepal.Length))  
## # A tibble: 3 x 2  
##   Species      `mean(Sepal.Length)`  
##   <fct>                <dbl>  
## 1 setosa                5.01  
## 2 versicolor           5.94  
## 3 virginica            6.59
```

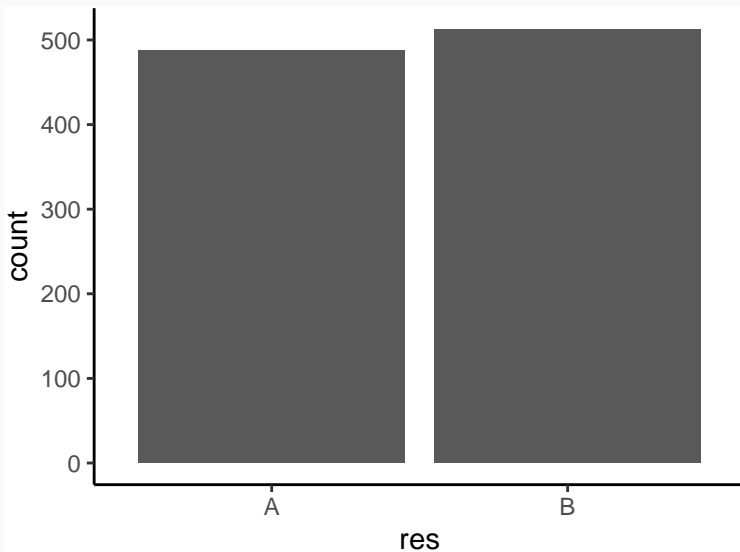
```
> election %>% mutate(res_A=res=="A") %>%  
+   summarize(Prop_A=mean(res_A))  
##   Prop_A  
## 1  0.488
```



```
> ggplot(iris)+aes(x=Species,y=Sepal.Length)+geom_boxplot()
```



```
> ggplot(election)+aes(x=res)+geom_bar()
```



Hasard, aléa. . .

- La réponse à ces questions peut paraître simple.

Première réponse

- Iris** : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 0.6, on répond **non**.
- Election** : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que **A gagne**.

Hasard, aléa. . .

- La réponse à ces questions peut paraître simple.

Première réponse

- Iris : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 0.6, on répond non.
- Election : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que A gagne.

Problème

- Ces réponses sont très (trop) liées aux données observées.
- Si je recommence l'expérience (sur d'autres iris ou d'autres électeurs), les conclusions peuvent changer.

Hasard, aléa. . .

- La réponse à ces questions peut paraître simple.

Première réponse

- Iris : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 0.6, on répond non.
- Election : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que A gagne.

Problème

- Ces réponses sont très (trop) liées aux données observées.
- Si je recommence l'expérience (sur d'autres iris ou d'autres électeurs), les conclusions peuvent changer.
- Conclusion : il faut prendre en compte cet aléa du au choix des individus ainsi que le nombre d'observations et la dispersion des mesures.

- **Idée** : répondre à ces questions en calculant (**estimant**) des probabilités.

- **Idée** : répondre à ces questions en calculant (**estimant**) des probabilités.
- **Notation** : x_1, \dots, x_n n observations.

- **Idée** : répondre à ces questions en calculant (**estimant**) des probabilités.
- **Notation** : x_1, \dots, x_n n observations.

Hypothèse

Les observations proviennent d'une certaine **loi de probabilité** (**inconnue**).

- **Idée** : répondre à ces questions en calculant (**estimant**) des probabilités.
- **Notation** : x_1, \dots, x_n n observations.

Hypothèse

Les observations proviennent d'une certaine **loi de probabilité** (**inconnue**).

Problème

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

"Définition"

- Une loi de probabilité est un objet qui permet de mesurer ou quantifier la chance qu'un évènement se produise.

"Définition"

- Une loi de probabilité est un objet qui permet de mesurer ou quantifier la chance qu'un évènement se produise.
- Mathématiquement, il s'agit d'une fonction $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que, pour un évènement $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\omega)$ mesure la "chance" que l'évènement ω se réalise.

"Définition"

- Une loi de probabilité est un objet qui permet de mesurer ou quantifier la chance qu'un évènement se produise.
- Mathématiquement, il s'agit d'une fonction $\mathbf{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que, pour un évènement $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\omega)$ mesure la "chance" que l'évènement ω se réalise.

Exemple

- Pile ou face : $\mathbf{P}(\text{pile}) = \mathbf{P}(\text{false}) = 1/2$.
- Dé équilibré : $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \dots = \mathbf{P}(6) = 1/6$.

Quelques éléments de probabilité

Quelques lois de probabilités

- Une loi de probabilité permet de visualiser/caractériser/mesurer les valeurs que peut prendre une variable.
- On distingue deux types de loi de probabilité que l'on caractérise en étudiant les valeurs possibles de la variable (et donc de l'expérience).

- Une loi de probabilité permet de **visualiser/caractériser/mesurer** les **valeurs** que peut prendre une variable.
- On distingue **deux types** de loi de probabilité que l'on caractérise en **étudiant les valeurs possibles** de la variable (et donc de l'expérience).

Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est **fini** ou **dénombrable**, la variable est **discrète**.

- Une loi de probabilité permet de **visualiser/caractériser/mesurer** les **valeurs** que peut prendre une variable.
- On distingue **deux types** de loi de probabilité que l'on caractérise en **étudiant les valeurs possibles** de la variable (et donc de l'expérience).

Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est **fini** ou **dénombrable**, la variable est **discrète**.
- pile ou face, nombre de voitures à un feu rouge, nombre d'aces dans un match de tennis...

- Une loi de probabilité permet de **visualiser/caractériser/mesurer** les **valeurs** que peut prendre une variable.
- On distingue **deux types** de loi de probabilité que l'on caractérise en **étudiant les valeurs possibles** de la variable (et donc de l'expérience).

Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est **fini** ou **dénombrable**, la variable est **discrète**.
- pile ou face, nombre de voitures à un feu rouge, nombre d'aces dans un match de tennis...

Variable continue

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est **infini** (\mathbb{R} ou un intervalle de \mathbb{R}) la variable est **continue**.
- Duret de trajet, taille, vitesse d'un service, longueur d'un saut...

Comment définir une loi discrète ?

Pour caractériser un loi discrète, il faudra donner :

1. l'ensemble des valeurs possibles de la variable ;
2. la probabilité associée à chacune de ses valeurs.

Comment définir une loi discrète ?

Pour caractériser un loi discrète, il faudra donner :

1. l'ensemble des valeurs possibles de la variable ;
2. la probabilité associée à chacune de ses valeurs.

Exemple

- Soit X la variable aléatoire qui représente le statut matrimonial d'une personne.
- X peut prendre 4 valeurs : célibataire, marié, divorcé, vœuf (4 valeurs donc loi discrète).
- On caractérise sa loi

$$P(X = \text{cel}) = 0.20, \quad P(X = \text{marié}) = 0.4, \quad P(X = \text{div}) = 0.3, \quad P(X = \text{vœuf}) = 0.1.$$

Comment définir une loi discrète ?

Pour caractériser un loi discrète, il faudra donner :

1. l'ensemble des valeurs possibles de la variable ;
2. la probabilité associée à chacune de ses valeurs.

Exemple

- Soit X la variable aléatoire qui représente le statut matrimonial d'une personne.
- X peut prendre 4 valeurs : célibataire, marié, divorcé, vœuf (4 valeurs donc loi discrète).
- On caractérise sa loi

$$P(X = \text{cel}) = 0.20, \quad P(X = \text{marié}) = 0.4, \quad P(X = \text{div}) = 0.3, \quad P(X = \text{vœuf}) = 0.1.$$

Remarque

La somme des probabilités doit toujours être égale à 1.

Définition

La loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ est définie par

- Valeurs possibles : 0 (échec) et 1 (succès)
- Proba : $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$.

Définition

La loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ est définie par

- Valeurs possibles : 0 (échec) et 1 (succès)
- Proba : $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$.

Exemple

- Modélisation de phénomènes à 2 issues.
- Pile ou face, ace/pas ace, acceptation/rejet, oui/non...

Le coin R

- Fonction **dbinom**

```
> dbinom(x,1,p)
```

- Loi de Bernoulli de paramètre 0.5

```
> dbinom(0,1,0.5)
```

```
## [1] 0.5
```

```
> dbinom(1,1,0.5)
```

```
## [1] 0.5
```

- Loi de Bernoulli de paramètre 0.8

```
> dbinom(0,1,0.8)
```

```
## [1] 0.2
```

```
> dbinom(1,1,0.8)
```

```
## [1] 0.8
```

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0, 1]$ de façon indépendante.
- On note X_1, \dots, X_n les n résultats.

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0, 1]$ de façon indépendante.
- On note X_1, \dots, X_n les n résultats.
- $\sum_{i=1}^n X_i$ (qui compte le nombre de 1) suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0, 1]$ de façon indépendante.
- On note X_1, \dots, X_n les n résultats.
- $\sum_{i=1}^n X_i$ (qui compte le nombre de 1) suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Loi binomiale

- Valeurs possibles : $\{0, 1, \dots, n\}$.
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomiale

- On répète n expériences de **Bernoulli** de paramètres $p \in [0, 1]$ de façon **indépendante**.
- On note X_1, \dots, X_n les n résultats.
- $\sum_{i=1}^n X_i$ (qui compte le nombre de 1) suit une loi **Binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$.

Loi binomiale

- Valeurs possibles : $\{0, 1, \dots, n\}$.
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple

Nombre de succès sur n épreuves : nombre de piles, nombre d'aces sur n services.

Le coin R

- Fonction **dbinom** :

```
> dbinom(x,n,p)
```

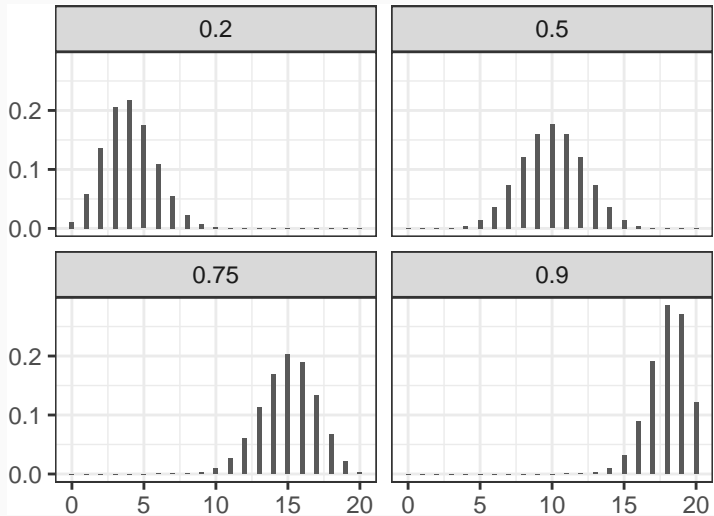
- Loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$

```
> dbinom(0,10,0.5);dbinom(5,10,0.5);dbinom(10,10,0.5)
## [1] 0.0009765625
## [1] 0.2460938
## [1] 0.0009765625
```

- Loi binomiale $\mathcal{B}(50, 0.8)$

```
> dbinom(0,50,0.8);dbinom(25,50,0.8);dbinom(50,50,0.8)
## [1] 1.1259e-35
## [1] 1.602445e-06
## [1] 1.427248e-05
```

Visualisation



Définition

- Valeurs possibles : \mathbb{N} .
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$$

où λ est un paramètre positif. On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

Définition

- Valeurs possibles : \mathbb{N} .
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k!}$$

où λ est un paramètre positif. On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple

- Données de **comptage**.
- Nombre de voitures à un feu rouge, nombre de personnes à une caisse, nombre d'admis à une épreuve...

Le coin R

- Fonction **dpois** :

```
> dpois(x,lambda)
```

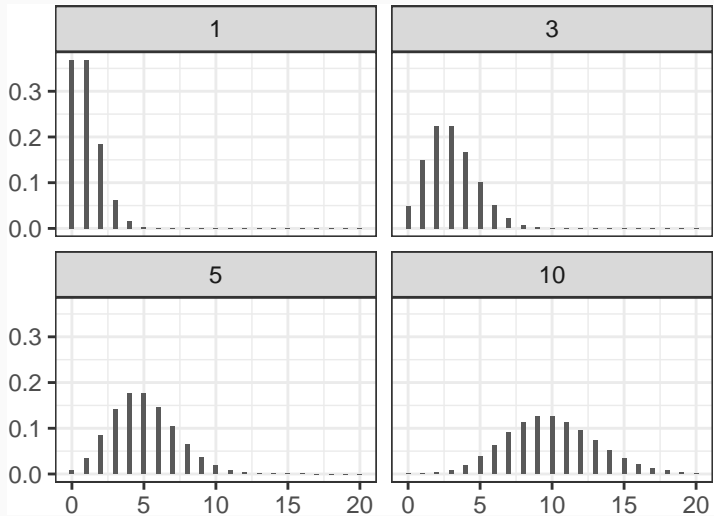
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

```
> dpois(0,1);dpois(5,1);dpois(10,1)
## [1] 0.3678794
## [1] 0.003065662
## [1] 1.013777e-07
```

- Loi binomiale $\mathcal{P}(10)$

```
> dpois(0,10);dpois(5,10);dpois(10,10)
## [1] 4.539993e-05
## [1] 0.03783327
## [1] 0.12511
```


Visualisation



Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une **infinité** de valeurs (sur un intervalle ou sur \mathbb{R} tout entier).

Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une **infinité** de valeurs (sur un intervalle ou sur \mathbb{R} tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une **fonction de densité** qui permettra de **mesurer la probabilité** que la variable appartienne à un intervalle.

Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une **infinité** de valeurs (sur un intervalle ou sur \mathbb{R} tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une **fonction de densité** qui permettra de **mesurer la probabilité** que la variable appartienne à un intervalle.
- Cette probabilité se déduit de l'**aire** sous la densité.

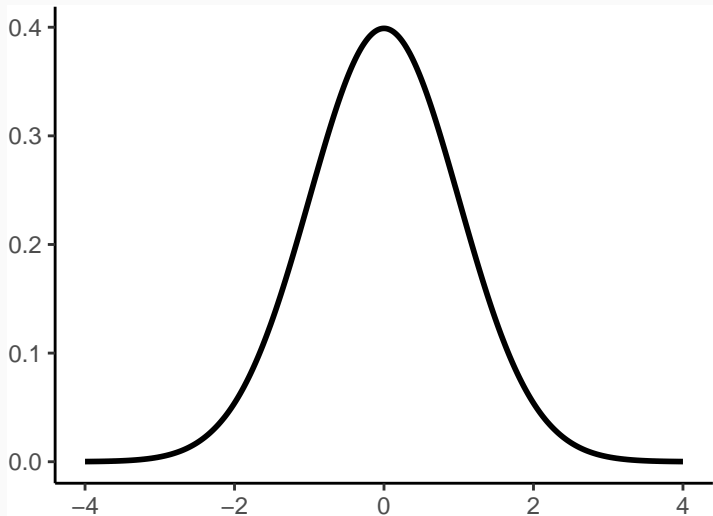
Comment définir une loi continue ?

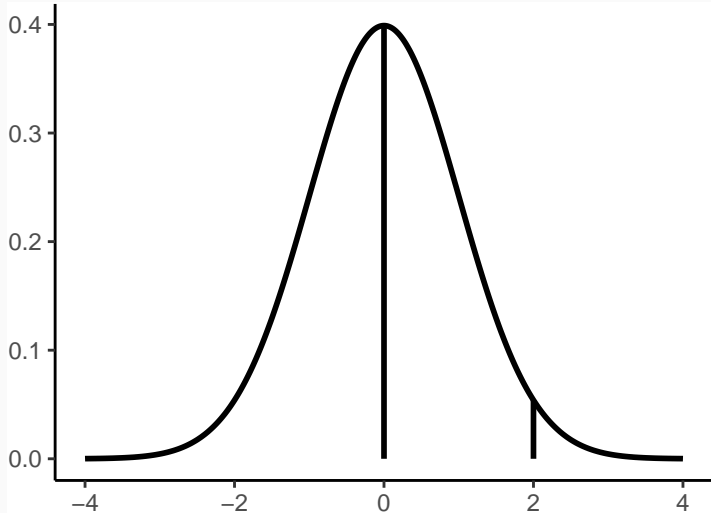
- Une loi continue prend une **infinité** de valeurs (sur un intervalle ou sur \mathbb{R} tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une **fonction de densité** qui permettra de **mesurer la probabilité** que la variable appartienne à un intervalle.
- Cette probabilité se déduit de l'**aire** sous la densité.

Exemple

Si X admet pour densité f , alors

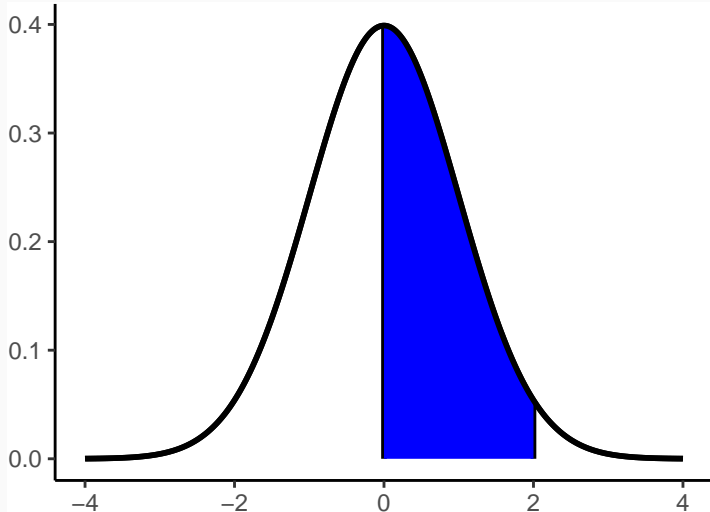
$$\mathbf{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) \, dx.$$





Question

$$P(X \in [0, 2]) = ???$$



Réponse

$$\mathbf{P}(X \in [0, 2]) = \int_0^2 f(x) \, dx \simeq 0.48.$$

Définition

Une densité de probabilité est donc une **fonction** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

Définition

Une densité de probabilité est donc une **fonction** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être **positive** : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

Définition

Une densité de probabilité est donc une **fonction** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être **positive** : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Elle doit être **intégrable**.

Définition

Une densité de probabilité est donc une **fonction** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être **positive** : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Elle doit être **intégrable**.
3. Son intégrale sur \mathbb{R} doit être égale à **un** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1.$$

- **Attention** : pour une variable continue X on a toujours

$$\mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(x) \, dx = 0.$$

- **Attention** : pour une variable continue X on a toujours

$$\mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(x) \, dx = 0.$$

- On s'intéresse à des probabilités pour **intervalles** ou des **réunions d'intervalles**.

- **Attention** : pour une variable continue X on a toujours

$$\mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(x) \, dx = 0.$$

- On s'intéresse à des probabilités pour **intervalles** ou des **réunions d'intervalles**.
- Ces probabilités se déduisent à partir d'**aires**, et donc d'**intégrales**.

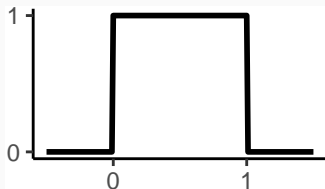
Loi uniforme

Définition

La loi **uniforme** sur un intervalle $[a, b]$ admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On la note $\mathcal{U}_{[a,b]}$.



Interprétation

Les valeurs de X sont réparties **uniformément** sur l'intervalle $[a, b]$.

- Densité : fonction `dunif`

```
> dunif(-1,0,1);dunif(0.5,0,1);dunif(2,0,1)
## [1] 0
## [1] 1
## [1] 0
```

- Densité : fonction **dunif**

```
> dunif(-1,0,1);dunif(0.5,0,1);dunif(2,0,1)
## [1] 0
## [1] 1
## [1] 0
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec **punif** :

```
> punif(0,0,1);punif(0.2,0,1);punif(0.5,0,1)
## [1] 0
## [1] 0.2
## [1] 0.5
```

- Densité : fonction **dunif**

```
> dunif(-1,0,1);dunif(0.5,0,1);dunif(2,0,1)
## [1] 0
## [1] 1
## [1] 0
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec **punif** :

```
> punif(0,0,1);punif(0.2,0,1);punif(0.5,0,1)
## [1] 0
## [1] 0.2
## [1] 0.5
```

- Calcul de probabilités :

$$\mathbf{P}(X \in [0.1, 0.4]) = \mathbf{P}(X \leq 0.4) - \mathbf{P}(X < 0.1).$$

```
> punif(0.4,0,1)-punif(0.1,0,1)
## [1] 0.3
```

La loi normale

Définition

La loi **normale** ou loi **gaussienne** de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x - \mu}{2\sigma^2}\right).$$

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La loi normale

Définition

La loi **normale** ou loi **gaussienne** de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x - \mu}{2\sigma^2}\right).$$

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Remarque

- μ représente le tendance centrale de la loi, on parle de valeur **moyenne**.
- σ^2 représente la **dispersion** de la loi autour de la valeur moyenne, on parle(ra) de **variance**.

La loi normale

Définition

La loi **normale** ou loi **gaussienne** de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ admet pour densité

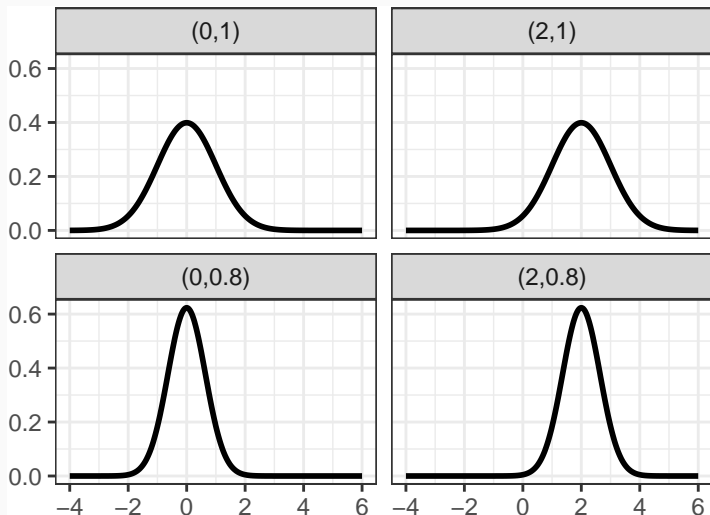
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x - \mu}{2\sigma^2}\right).$$

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Remarque

- μ représente le tendance centrale de la loi, on parle de valeur **moyenne**.
- σ^2 représente la **dispersion** de la loi autour de la valeur moyenne, on parle(ra) de **variance**.
- Elle permet de modéliser des phénomènes centrés en une valeur.
- C'est la loi limite du **théorème central limite**.

Exemples pour différents (μ, σ^2)



- Densité : fonction `dnorm`

```
> dnorm(0,0,1);dnorm(0.05,0,1);dnorm(0.95,0,1)
## [1] 0.3989423
## [1] 0.3984439
## [1] 0.2540591
```


- Densité : fonction **dnorm**

```
> dnorm(0,0,1);dnorm(0.05,0,1);dnorm(0.95,0,1)
## [1] 0.3989423
## [1] 0.3984439
## [1] 0.2540591
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec **pnorm** :

```
> pnorm(0,0,1);pnorm(2,0,1);pnorm(-2,0,1)
## [1] 0.5
## [1] 0.9772499
## [1] 0.02275013
```

Le coin R

- Densité : fonction **dnorm**

```
> dnorm(0,0,1);dnorm(0.05,0,1);dnorm(0.95,0,1)
## [1] 0.3989423
## [1] 0.3984439
## [1] 0.2540591
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec **pnorm** :

```
> pnorm(0,0,1);pnorm(2,0,1);pnorm(-2,0,1)
## [1] 0.5
## [1] 0.9772499
## [1] 0.02275013
```

- Calcul de probabilités :

$$\mathbf{P}(X \in [0, 1]) = \mathbf{P}(X \leq 1) - \mathbf{P}(X < 0).$$

```
> pnorm(1,0,1)-pnorm(0,0,1)
## [1] 0.3413447
```

Définition

La loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ admet pour densité

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

On la note $\mathcal{E}(\lambda)$.

Définition

La loi **exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ admet pour densité

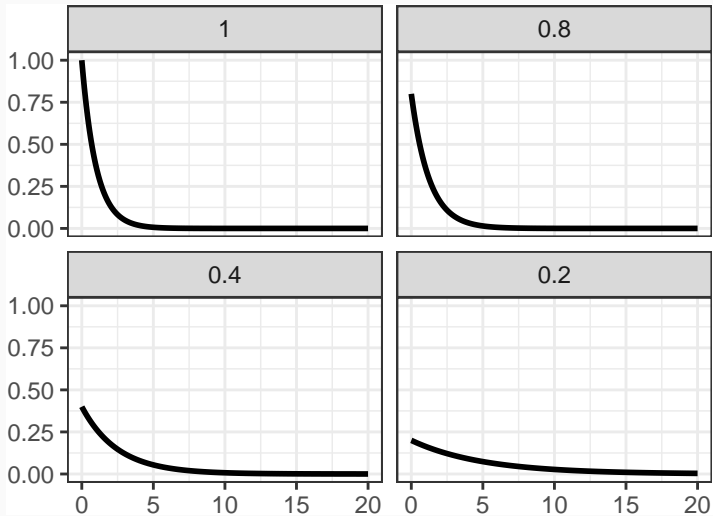
$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

On la note $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple

- Cette loi est souvent utilisée pour modéliser des **durées de vie** (composant électronique, patients atteint d'une pathologie...).

Visualisation



- Densité : fonction `dexp`

```
> dexp(1,1);dexp(3,1)
## [1] 0.3678794
## [1] 0.04978707
```

- Densité : fonction `dexp`

```
> dexp(1,1);dexp(3,1)
## [1] 0.3678794
## [1] 0.04978707
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec `pexp` :

```
> pexp(1,1);pexp(5,1)
## [1] 0.6321206
## [1] 0.9932621
```

Le coin R

- Densité : fonction **dexp**

```
> dexp(1,1);dexp(3,1)
## [1] 0.3678794
## [1] 0.04978707
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec **pexp** :

```
> pexp(1,1);pexp(5,1)
## [1] 0.6321206
## [1] 0.9932621
```

- Calcul de probabilités :

$$\mathbf{P}(X \in [2, 4]) = \mathbf{P}(X \leq 4) - \mathbf{P}(X < 2).$$

```
> pexp(4,1)-pexp(2,1)
## [1] 0.1170196
```


Quelques éléments de probabilité

Espérance et variance

Motivations

- Loi de probabilité : pas toujours facile à interpréter d'un point de vue pratique.

Motivations

- Loi de probabilité : pas toujours facile à interpréter d'un point de vue pratique.
- Objectif : définir des indicateurs (des nombres par exemple) qui permettent d'interpréter une loi de probabilité (tendance centrale, dispersion...).

Définition

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le **réel** défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

Définition

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le **réel** défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de **comprendre l'interprétation de l'espérance**.

Espérance

Définition

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le **réel** défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega).$$

Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de **comprendre l'interprétation de l'espérance**.
- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r. X** pour chaque évènement ω **pondéré** par la mesure de probabilité de chaque évènement.

Espérance

Définition

L'**espérance** d'une variable aléatoire X est le **réel** défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbf{P}(\omega).$$

Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de **comprendre l'interprétation de l'espérance**.
- L'espérance revient à **intégrer les valeurs de la v.a.r. X** pour chaque évènement ω **pondéré** par la mesure de probabilité de chaque évènement.
- Elle s'interprète ainsi en terme de **valeur moyenne** prise par X .

Calculs d'espérance

- Pour les calculs d'espérance, on distingue les cas discrets et continus.

Propriété

- Cas discret :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\text{valeurs possibles de } X} x \mathbf{P}(X = x).$$

Calculs d'espérance

- Pour les calculs d'espérance, on distingue les cas discrets et continus.

Propriété

- Cas discret :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\text{valeurs possibles de } X} x \mathbf{P}(X = x).$$

- Cas continu :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

où f est la densité de X .

Exemples

Loi	Espérance
$\mathcal{B}(p)$	p
$\mathcal{B}(n, p)$	np
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ

Variance

Définition

- La **variance** de X , notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E} \left[(X - \mathbf{E}[X])^2 \right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée **écart-type** de X .

Variance

Définition

- La **variance** de X , notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E} \left[(X - \mathbf{E}[X])^2 \right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée **écart-type** de X .

Interprétation

- La variance est un réel **positif**.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par X et l'espérance (moyenne) de X

Variance

Définition

- La **variance** de X , notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E} \left[(X - \mathbf{E}[X])^2 \right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée **écart-type** de X .

Interprétation

- La variance est un réel **positif**.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par X et l'espérance (moyenne) de $X \implies$ interprétation en terme de **dispersion**.

Variance

Définition

- La **variance** de X , notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E} \left[(X - \mathbf{E}[X])^2 \right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée **écart-type** de X .

Interprétation

- La variance est un réel **positif**.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par X et l'espérance (moyenne) de $X \implies$ interprétation en terme de **dispersion**.

Exemple

- Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $\mathbf{V}[X] = p(1 - p)$;
- Loi uniforme sur $[0, 1]$: $\mathbf{V}[X] = 1/12$;
- Loi uniforme sur $[1/4, 3/4]$: $\mathbf{V}[X] = 1/48$;

Espérance et variance de quelques lois classiques

X	$E[X]$	$V[X]$
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n, p)$	p	$np(1-p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

Lois discrètes

X	$E[X]$	$V[X]$
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ	σ^2
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Lois continues

Modèle et estimation

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathlons au cours de deux épreuves (jeux olympiques et décastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathloniens au cours de deux épreuves (jeux olympiques et decastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?
2. Les performances aux decastar et aux jeux olympiques sont-elles identiques ?

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathloniens au cours de deux épreuves (jeux olympiques et décastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?
2. Les performances aux décastar et aux jeux olympiques sont-elles identiques ?
3. Quelles sont les disciplines les plus influentes sur le classement ?

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathlons au cours de deux épreuves (jeux olympiques et décastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?
2. Les performances aux décastar et aux jeux olympiques sont-elles identiques ?
3. Quelles sont les disciplines les plus influentes sur le classement ?
4. Existe t-il un lien entre les performances au 100m et les autres disciplines ?
5. Si oui, peut-on le quantifier ?

Les données

- Pour tenter de répondre à ces questions, on dispose des performances d'une vingtaine de décathloniens au cours de deux épreuves :

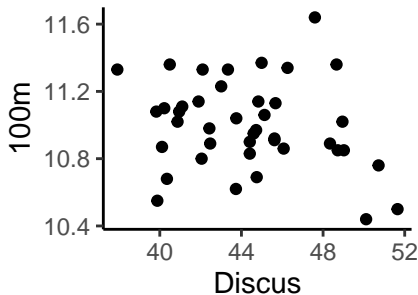
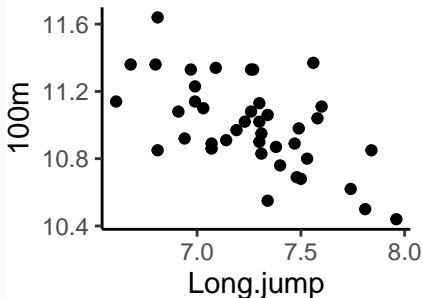
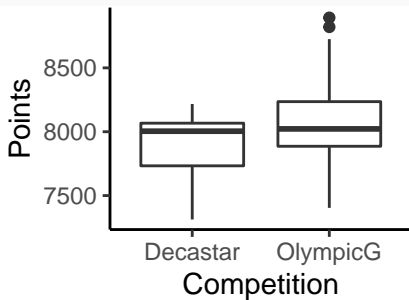
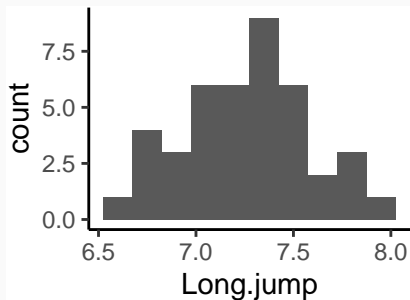
```
> head(decathlon)
```

##		100m	Long.jump	Shot.put	High.jump	400m	110m.hurdle	Discus	Pole.
##	SEBRLE	11.04	7.58	14.83	2.07	49.81	14.69	43.75	
##	CLAY	10.76	7.40	14.26	1.86	49.37	14.05	50.72	
##	KARPOV	11.02	7.30	14.77	2.04	48.37	14.09	48.95	
##	BERNARD	11.02	7.23	14.25	1.92	48.93	14.99	40.87	
##	YURKOV	11.34	7.09	15.19	2.10	50.42	15.31	46.26	
##	WARNERS	11.11	7.60	14.31	1.98	48.68	14.23	41.10	
##		Javeline	1500m	Rank	Points	Competition			
##	SEBRLE	63.19	291.7	1	8217	Decastar			
##	CLAY	60.15	301.5	2	8122	Decastar			
##	KARPOV	50.31	300.2	3	8099	Decastar			
##	BERNARD	62.77	280.1	4	8067	Decastar			
##	YURKOV	63.44	276.4	5	8036	Decastar			
##	WARNERS	51.77	278.1	6	8030	Decastar			

Statistiques descriptives (capital)

```
> p1 <- ggplot(decathlon)+aes(x=Long.jump)+geom_histogram(bins=10)
> p2 <- ggplot(decathlon)+aes(x=Competition,y=Points)+geom_boxplot()
> p3 <- ggplot(decathlon)+aes_(x=as.name("Long.jump"),
+                               y=as.name("100m"))+geom_point()
> p4 <- ggplot(decathlon)+aes_(x=as.name("Discus"),
+                               y=as.name("100m"))+geom_point()
```

```
> library(gridExtra)
> grid.arrange(p1,p2,p3,p4,nrow=2)
```



Modèle et estimation

Modèle statistique

- On s'intéresse d'abord uniquement à la variable 100m.
- On dispose de $n = 41$ observations x_1, \dots, x_n

```
> decathlon %>% summarize(moy=mean(`100m`),var=var(`100m`),  
+                           min=min(`100m`),max=max(`100m`))  
##           moy           var      min      max  
## 1 10.99805 0.0691811 10.44 11.64
```

- On s'intéresse d'abord uniquement à la variable 100m.
- On dispose de $n = 41$ observations x_1, \dots, x_n

```
> decathlon %>% summarize(moy=mean(`100m`),var=var(`100m`),  
+                           min=min(`100m`),max=max(`100m`))  
##           moy           var      min      max  
## 1 10.99805 0.0691811 10.44 11.64
```

Question

Peut-on dire que le temps moyen au 100m pour les décathlioniens est de 10.99 ?

Hazard, aléa. . .

- Le résultat de 10.99 dépend des **conditions** dans lesquelles l'expérience a été réalisée.

Hazard, aléa. . .

- Le résultat de 10.99 dépend des **conditions** dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on **re-mesure les performances de nouvelles compétitions**, il est fort possible qu'on n'obtienne **pas la même durée moyenne**.

Hazard, aléa. . .

- Le résultat de 10.99 dépend des **conditions** dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on **re-mesure les performances de nouvelles compétitions**, il est fort possible qu'on n'obtienne **pas la même durée moyenne**.

Remarque

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé **dépend des** conditions expérimentales.
- Ces conditions expérimentales vont cependant être **difficiles à caractériser précisément**.
- On dit souvent que le **hasard ou l'aléa** intervient dans ces conditions.

Hazard, aléa. . .

- Le résultat de 10.99 dépend des **conditions** dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on **re-mesure les performances de nouvelles compétitions**, il est fort possible qu'on n'obtienne **pas la même durée moyenne**.

Remarque

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé **dépend des** conditions expérimentales.
- Ces conditions expérimentales vont cependant être **difficiles à caractériser précisément**.
- On dit souvent que le **hasard ou l'aléa** intervient dans ces conditions.
- L'approche **statistique** prend en compte le **nombre** et la **dispersion** des observations pour apporter une réponse.

- Pour prendre en compte cet aléa, on fait l'hypothèse que les observations x_i sont issues d'une loi de probabilité \mathbf{P}_i (inconnue).

- Pour prendre en compte cet aléa, on fait l'hypothèse que les observations x_i sont issues d'une loi de probabilité \mathbf{P}_i (inconnue).

Echantillon i.i.d

- Si les mesures x_i sont faites de façons indépendantes et dans des conditions identiques, on dit que x_1, \dots, x_n sont n observations indépendantes et de même loi \mathbf{P} .
- On emploie souvent le terme échantillon i.i.d (indépendant et identiquement distribué).

Le problème statistique

Estimer

- La loi P ainsi que toutes ses quantités dérivées (espérance, variance) est et sera **toujours inconnue**.
- Le travail du statisticien sera d'essayer de retrouver, ou plutôt d'**estimer**, cette loi ou les quantités d'intérêt qui dépendent de cette loi.

Modèle et estimation

Quelques exemples

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Modélisation

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ athlète a amélioré, 0 sinon.

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Modélisation

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ athlète a amélioré, 0 sinon.
- Les x_i sont issues d'une loi de Bernoulli de paramètre **inconnu** $p \in [0, 1]$.

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Modélisation

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ athlète a amélioré, 0 sinon.
- Les x_i sont issues d'une loi de Bernoulli de paramètre **inconnu** $p \in [0, 1]$.
- Si les individus sont choisis de manière **indépendante** et ont tous la même probabilité de progresser (ce qui peut revenir à dire qu'ils sont au **même niveau**), il est alors raisonnable de supposer que l'échantillon est **i.i.d.**

Le problème statistique

Estimer le paramètre p :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

Le problème statistique

Estimer le paramètre p :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

Exemple d'estimateur

- Il paraît naturel d'estimer p par la **proportion d'athlètes** dans l'échantillon qui ont **amélioré** leur performance.

Le problème statistique

Estimer le paramètre p :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

Exemple d'estimateur

- Il paraît naturel d'estimer p par la **proportion d'athlètes** dans l'échantillon qui ont **amélioré** leur performance.
- Cela revient à estimer p par la **moyenne (empirique) des x_i** :

$$\hat{p} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- On s'intéresse à la **durée de trajet moyenne** “domicile/travail”.

Durée de trajet

- On s'intéresse à la **durée de trajet moyenne** "domicile/travail".
- **Expérience** : je mesure la durée de trajet domicile/travail pendant plusieurs jours.
- Je récolte $n = 100$ observations :

```
> summary(duree_ht)
```

##	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
##	10.62	16.42	18.46	19.37	21.88	30.20

Modélisation

Les données sont issues d'une loi **inconnue** P .

Modélisation

Les données sont issues d'une loi **inconnue** **P**.

Le problème statistique

Estimer l'**espérance** (moyenne) μ de la loi **P**.

Modélisation

Les données sont issues d'une loi **inconnue** \mathbf{P} .

Le problème statistique

Estimer l'**espérance** (moyenne) μ de la loi \mathbf{P} .

Exemple d'estimateur

Là encore, un estimateur naturel de μ est donné par la **moyenne empirique**

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Le modèle gaussien

Cadre

- x_1, \dots, x_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Le problème : estimer $\mu = \mathbf{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$.

Le modèle gaussien

Cadre

- x_1, \dots, x_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- **Le problème** : estimer $\mu = \mathbf{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$.

Exemple d'estimateurs

- **Moyenne empirique** :

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Le modèle gaussien

Cadre

- x_1, \dots, x_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- **Le problème** : estimer $\mu = \mathbf{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$.

Exemple d'estimateurs

- **Moyenne empirique** :

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

- **Variance empirique** :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Autres exemples

X	Paramètre	Estimateur
$\mathcal{B}(p)$	p	\bar{x}_n
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	\bar{x}_n
$\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	θ	$2\bar{x}_n$
$\mathcal{E}(\lambda)$	λ	$1/\bar{x}_n$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ et σ^2	\bar{x}_n $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$

Autres exemples

X	Paramètre	Estimateur
$\mathcal{B}(p)$	p	\bar{x}_n
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	\bar{x}_n
$\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	θ	$2\bar{x}_n$
$\mathcal{E}(\lambda)$	λ	$1/\bar{x}_n$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ et σ^2	\bar{x}_n $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2$

Conclusion

De nombreux estimateurs sont construits à partir de la **moyenne empirique** \bar{x}_n .

La moyenne empirique

Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la **moyenne empirique**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la **moyenne empirique**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- La moyenne empirique est une **variable aléatoire**.

Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la **moyenne empirique**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

- La moyenne empirique est une **variable aléatoire**.
- Elle va donc posséder une **loi**, une **espérance**, une **variance**...

La moyenne empirique

Cas gaussien

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une loi gaussienne.
- On considère alors X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une loi gaussienne.
- On considère alors X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Propriété

- Dans le cas gaussien, la moyenne empirique \bar{X}_n suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- On a ainsi

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une loi gaussienne.
- On considère alors X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

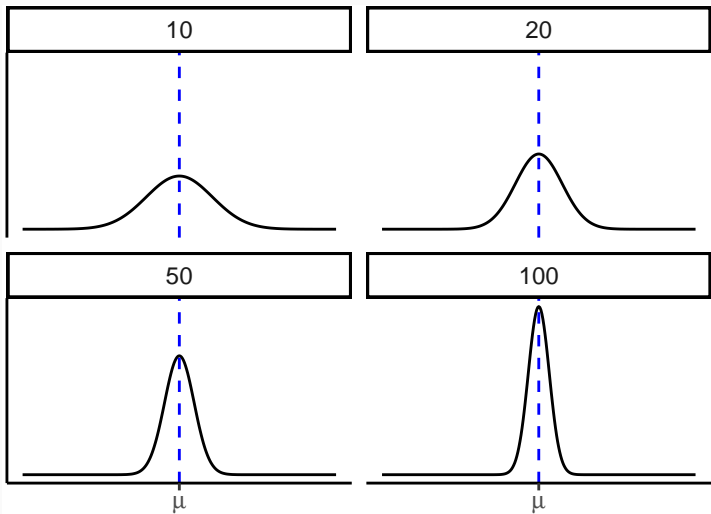
Propriété

- Dans le cas gaussien, la moyenne empirique \bar{X}_n suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- On a ainsi

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Conclusion

- \bar{X}_n est centrée autour de μ .
- Sa dispersion dépend de σ^2 et n .



Biais et variance

- \bar{X}_n tombe toujours en moyenne sur μ . On dit que c'est un **estimateur sans biais** de μ .

Biais et variance

- \bar{X}_n tombe toujours en moyenne sur μ . On dit que c'est un **estimateur sans biais** de μ .
- Sa **précision** augmente lorsque :
 - σ^2 diminue (difficile à contrôler) ;
 - n augmente (lorsqu'on **augmente le nombre de mesures**).

La moyenne empirique

Cas non gaussien

- On dispose ici d'un échantillon X_1, \dots, X_n i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

- On dispose ici d'un échantillon X_1, \dots, X_n i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- On dispose ici d'un échantillon X_1, \dots, X_n i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Commentaires

- L'espérance et la variance de \bar{X}_n sont identiques au cas gaussien.

- On dispose ici d'un échantillon X_1, \dots, X_n i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Commentaires

- L'espérance et la variance de \bar{X}_n sont identiques au cas gaussien.
- Les remarques faites dans le cas gaussien restent donc valables.

- On dispose ici d'un échantillon X_1, \dots, X_n i.i.d. (de **même loi**).
- La loi est **quelconque** (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Commentaires

- L'espérance et la variance de \bar{X}_n sont **identiques au cas gaussien**.
- Les remarques faites dans le cas gaussien restent donc **valables**.
- **Seul changement** : on ne connaît pas ici la loi de \bar{X}_n (juste son espérance et sa variance).

- Dans de nombreuses applications (**intervalles de confiance**, **tests statistiques**), on a besoin de connaître la loi de \bar{X}_n .
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- Dans de nombreuses applications (**intervalles de confiance**, **tests statistiques**), on a besoin de connaître la loi de \bar{X}_n .
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- **Interprétation** : $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

- Dans de nombreuses applications (**intervalles de confiance**, **tests statistiques**), on a besoin de connaître la loi de \bar{X}_n .
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- **Interprétation** : $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

La puissance du TCL

- Le **théorème central limite** stipule que, sous des **hypothèses très faibles**, on peut étendre ce résultat (pour n grand) à "**n'importe quelle**" suite de **variables aléatoires indépendantes**.

- Dans de nombreuses applications (**intervalles de confiance**, **tests statistiques**), on a besoin de connaître la loi de \bar{X}_n .
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

- **Interprétation** : $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

La puissance du TCL

- Le **théorème central limite** stipule que, sous des **hypothèses très faibles**, on peut étendre ce résultat (pour n grand) à "**n'importe quelle**" **suite de variables aléatoires indépendantes**.
- C'est l'un des résultats les plus **impressionnants et les plus utilisés** en probabilités et statistique.

Théorème Central Limite (TCL)

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Théorème Central Limite (TCL)

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont **faibles** : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.

Théorème Central Limite (TCL)

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont **faibles** : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- **Conséquence** : si n est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de \bar{X}_n par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

Théorème Central Limite (TCL)

Soit X_1, \dots, X_n un n -échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. On a alors

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- Les hypothèses sont **faibles** : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- **Conséquence** : si n est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de \bar{X}_n par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- On pourra écrire $\mathcal{L}(\bar{X}_n) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ mais **pas**

$$\mathcal{L}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

TCL pour modèle de Bernoulli

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- On a donc $\mathbf{E}[X_1] = p$ et $\mathbf{V}[X_1] = p(1 - p)$.

TCL pour modèle de Bernoulli

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- On a donc $\mathbf{E}[X_1] = p$ et $\mathbf{V}[X_1] = p(1 - p)$.

TCL

On a d'après le TCL

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

TCL pour modèle de Bernoulli

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- On a donc $\mathbf{E}[X_1] = p$ et $\mathbf{V}[X_1] = p(1 - p)$.

TCL

On a d'après le **TCL**

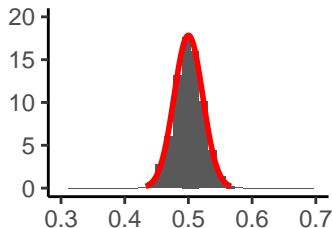
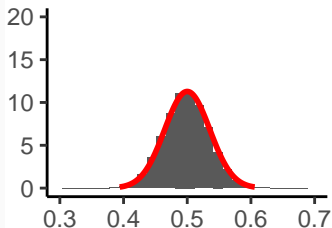
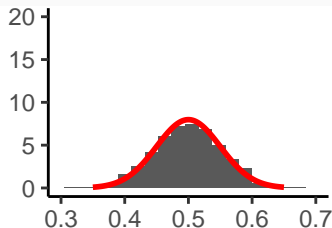
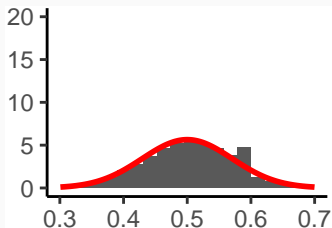
$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1 - p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Conséquence

On peut donc **approcher la loi** de la moyenne empirique \bar{X}_n par la loi

$$\mathcal{N}\left(p, \frac{p(1 - p)}{n}\right).$$

- Approximation TCL pour le modèle de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ avec $n = 50, 100, 200, 500$.

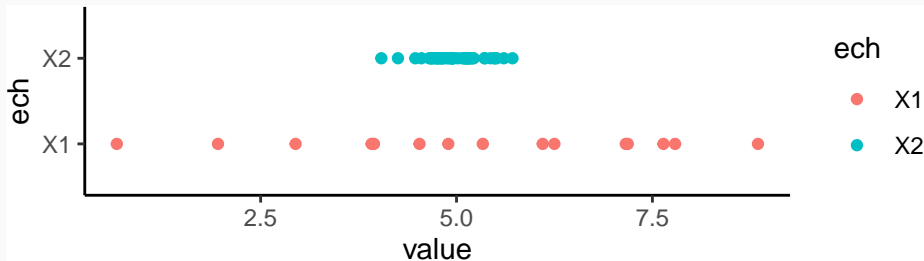


Intervalles de confiance

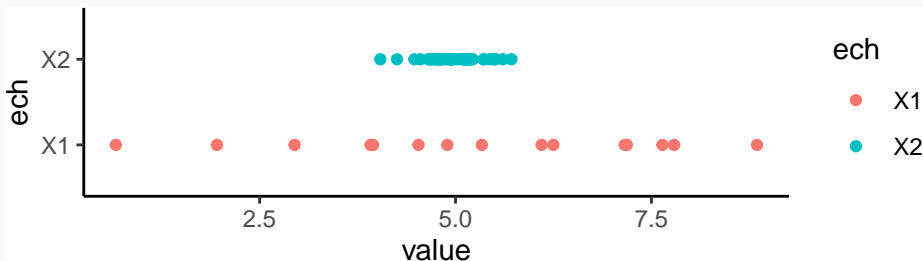
- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.

- Donner une **seule valeur** pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- **Exemple** : la performance est de 72% lorsque on prend le traitement (alors qu'on ne l'a **testé que sur 100 athlètes**).
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, la performance se trouve dans l'**intervalle** [70%, 74%] avec une **confiance** de 90%.

Un exemple



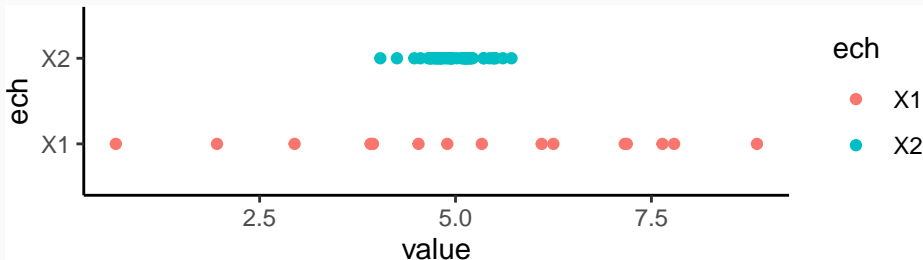
Un exemple



Remarque

- Ces deux échantillons semblent avoir (à peu près) la même moyenne.
- Cependant,

Un exemple



Remarque

- Ces deux échantillons semblent avoir (à peu près) la même moyenne.
- Cependant, l'échantillon 2 semble être plus précis pour estimer cette moyenne.

- X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi \mathbf{P} inconnue.
- Soit θ un paramètre **inconnu**, par exemple $\theta = \mathbf{E}[X]$.

- X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi \mathbf{P} inconnue.
- Soit θ un paramètre **inconnu**, par exemple $\theta = \mathbf{E}[X]$.

Définition

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle **intervalle de confiance** pour θ tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

- X_1, \dots, X_n un échantillon i.i.d. de loi \mathbf{P} inconnue.
- Soit θ un paramètre **inconnu**, par exemple $\theta = \mathbf{E}[X]$.

Définition

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On appelle **intervalle de confiance** pour θ tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Définition

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$, on dit que $[A_n, B_n]$ est un **intervalle de confiance asymptotique** pour θ au niveau $1 - \alpha$.

- Un **intervalle de confiance** pour un paramètre inconnu θ se construit généralement à partir d'un **estimateur de θ dont on connaît la loi**.

- Un **intervalle de confiance** pour un paramètre inconnu θ se construit généralement à partir d'un **estimateur de θ dont on connaît la loi**.
- A partir de la loi de $\hat{\theta}$, on cherche deux bornes A_n et B_n telle que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

- Un **intervalle de confiance** pour un paramètre inconnu θ se construit généralement à partir d'un **estimateur de θ dont on connaît la loi**.
- A partir de la loi de $\hat{\theta}$, on cherche deux bornes A_n et B_n telle que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Remarque

A priori, plus α est **petit**, plus l'intervalle aura un **grande amplitude**.

Exemple

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- **Question:** IC de niveau 0.95 pour μ ?

Exemple

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.

Exemple

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.
- Loi de l'estimateur : $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.

Exemple

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.
- Loi de l'estimateur : $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.
- On déduit

$$\mathbf{P} \left(\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

Exemple

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.
- Loi de l'estimateur : $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.
- On déduit

$$\mathbf{P} \left(\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$

- Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ est donc donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Il est défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Il est défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Définition

Plus généralement, le quantile d'ordre α d'une variable aléatoire X est défini par le réel q_α vérifiant

$$\mathbf{P}(X \leq q_\alpha) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le **quantile d'ordre $1 - \alpha/2$** de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Il est défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Définition

Plus généralement, le **quantile d'ordre α** d'une variable aléatoire X est défini par le réel q_α vérifiant

$$\mathbf{P}(X \leq q_\alpha) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geq q_\alpha) \geq 1 - \alpha.$$

- Les quantiles sont généralement renvoyés par les **logiciels statistique** :

```
> c(qnorm(0.975),qnorm(0.95),qnorm(0.5))  
## [1] 1.959964 1.644854 0.000000
```

Une exemple à la main

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$:

```
> head(X)
```

```
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

Une exemple à la main

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$:

```
> head(X)
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

- Estimation de μ :

```
> mean(X)
## [1] 4.546947
```

- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
## [1] 4.269766 4.824128
```

Loi normale (cas réel)

- X_1, \dots, X_n i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On a vu qu'un IC pour μ est donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Loi normale (cas réel)

- X_1, \dots, X_n i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On a vu qu'un IC pour μ est donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Problème

- Dans la vraie vie, σ est **inconnu** !
- L'intervalle de confiance **n'est donc pas calculable**.

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (1)$$

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (1)$$

Problème

■ On a bien

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]. \quad (1)$$

Problème

■ On a bien

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

■ mais

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

- Pour avoir la loi de

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0, 1)$$

avec

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

- il faut définir d'autres lois de probabilité.

La loi normale (Rappel)

Définition

- Une v.a.r X suit une loi **normale** de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

La loi normale (Rappel)

Définition

- Une v.a.r X suit une loi **normale** de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Propriétés

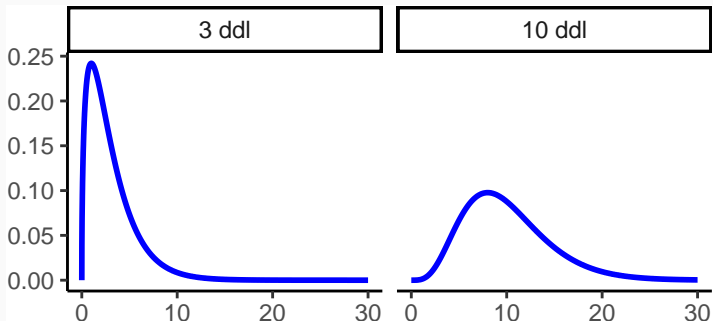
- $\mathbf{E}[X] = \mu$ et $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Loi du χ^2

Définition

- Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. La variable $Y = X_1^2 + \dots + X_n^2$ suit une loi du **Chi-Deux à n degrés de liberté**. Elle est notée $\chi^2(n)$.
- $\mathbf{E}[Y] = n$ et $\mathbf{V}[Y] = 2n$.



Définition

- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une loi de student à n degrés de liberté. On note $\mathcal{T}(n)$.

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r. **indépendantes** de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une **loi de student à n degrés de liberté**. On note $\mathcal{T}(n)$.

- $\mathbf{E}[T] = 0$ et $\mathbf{V}[T] = n/(n - 2)$.

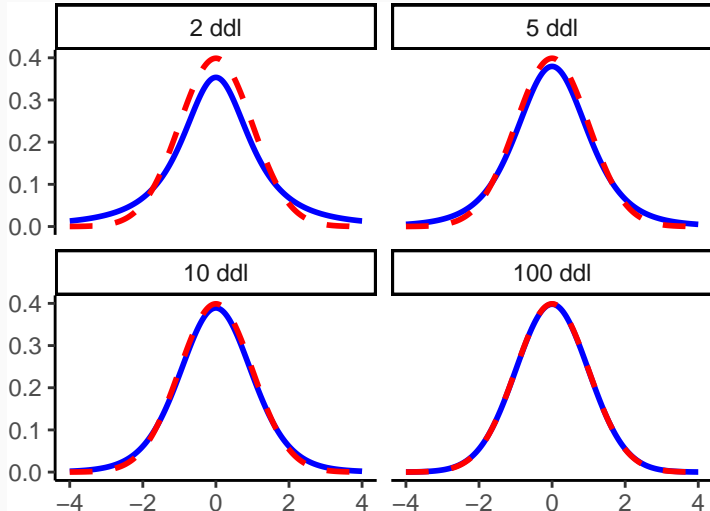
Définition

- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une loi de student à n degrés de liberté. On note $\mathcal{T}(n)$.

- $\mathbf{E}[T] = 0$ et $\mathbf{V}[T] = n/(n - 2)$.
- Lorsque n est grand la loi de student à n degrés de liberté peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.



Légende

Densités des lois de student à 2, 5, 10 et 100 degrés de liberté (bleu) et densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (rouge).

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r indépendantes de lois $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

suit une loi de Fisher à m et n degrés de liberté. On note $\mathcal{F}(m, n)$.

Loi de Fisher

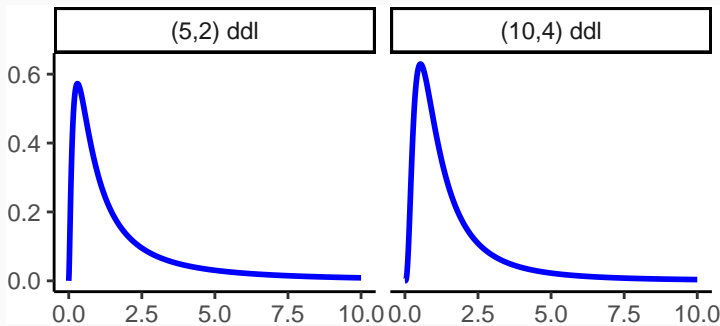
Définition

- Soient X et Y deux v.a.r **indépendantes** de lois $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

suit une **loi de Fisher à m et n degrés de liberté**. On note $\mathcal{F}(m, n)$.

- Si $F \sim \mathcal{F}(m, n)$ alors $1/F \sim \mathcal{F}(n, m)$.



Théorème de Cochran

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$

Théorème de Cochran

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
2. \bar{X}_n et S^2 sont indépendantes.

Théorème de Cochran

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
2. \bar{X}_n et S^2 sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

Théorème de Cochran

- X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
2. \bar{X}_n et S^2 sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

Remarque

1 et 3 sont très importants pour construire des intervalles de confiance.

IC pour la loi gaussienne

IC pour μ

On déduit du résultat précédent qu'un IC de niveau $1 - \alpha$ pour μ est donné par

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à $n - 1$ ddl.

IC pour la loi gaussienne

IC pour μ

On déduit du résultat précédent qu'un IC de niveau $1 - \alpha$ pour μ est donné par

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi de Student à $n - 1$ ddl.

IC pour σ^2

Un IC de niveau $1 - \alpha$ pour σ^2 est donné par

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

où $\chi_{1-\alpha/2}$ et $\chi_{\alpha/2}$ sont les quantiles d'ordre $1 - \alpha/2$ et $\alpha/2$ de loi $\chi^2(n-1)$.

Exemple (IC pour μ)

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

```
> head(X)
```

```
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

Exemple (IC pour μ)

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

```
> head(X)
```

```
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

- Estimation de μ :

```
> mean(X)
```

```
## [1] 4.546947
```

Exemple (IC pour μ)

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

```
> head(X)
## [1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

- Estimation de μ :

```
> mean(X)
## [1] 4.546947
```

- Estimation de σ^2 :

```
> S <- var(X)
> S
## [1] 0.783302
```


- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
## [1] 4.295420 4.798474
```

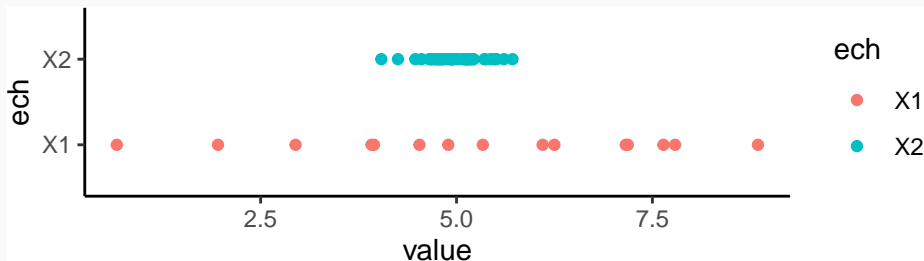
- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
## [1] 4.295420 4.798474
```

- On peut obtenir directement l'intervalle de confiance à l'aide de la fonction `t.test` :

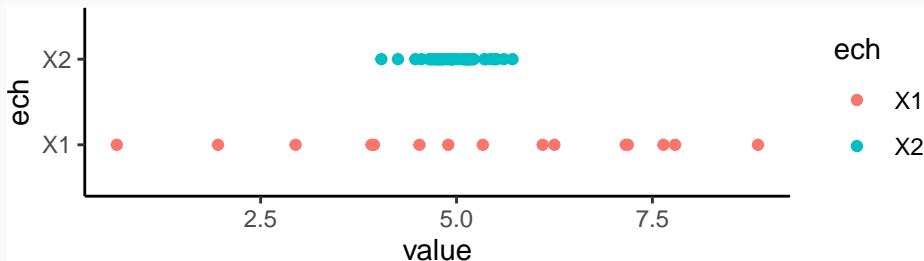
```
> t.test(X)$conf.int
## [1] 4.295420 4.798474
## attr("conf.level")
## [1] 0.95
```

Autre exemple



```
> t.test(df1$value)$conf.int[1:2]
## [1] 3.990982 6.563659
> t.test(df2$value)$conf.int[1:2]
## [1] 4.887045 5.074667
```

Autre exemple



```
> t.test(df1$value)$conf.int[1:2]
## [1] 3.990982 6.563659
> t.test(df2$value)$conf.int[1:2]
## [1] 4.887045 5.074667
```

Conclusion

Sans surprise, on retrouve bien qu'on est **plus précis** avec **l'échantillon 2**.

Exemple (IC pour σ^2)

- On obtient l'IC pour σ^2 à l'aide de la formule

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

Exemple (IC pour σ^2)

- On obtient l'IC pour σ^2 à l'aide de la formule

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}} \right]$$

- On peut donc le calculer sur R :

```
> binf <- 49*S/qchisq(0.975,49)
> bsup <- 49*S/qchisq(0.025,49)
> c(binf,bsup)
## [1] 0.5465748 1.2163492
```

Application décathlon

- IC de niveau 95% pour la longueur moyenne en saut en longueur :

```
> t.test(decathlon$Long.jump)$conf.int
## [1] 7.160131 7.359869
## attr("conf.level")
## [1] 0.95
```

- IC de niveau 95% pour la temps moyen au 1500m :

```
> t.test(decathlon$`1500m`)$conf.int
## [1] 275.3403 282.7094
## attr("conf.level")
## [1] 0.95
```

- IC de niveau 90% pour la temps moyen au 1500m :

```
> t.test(decathlon$`1500m`, conf.level=0.90)$conf.int
## [1] 275.9551 282.0946
## attr("conf.level")
## [1] 0.9
```

Remarque

L'IC à 95% a une amplitude plus grande que celui à 90% (c'est **normal**).

Comparer des moyennes

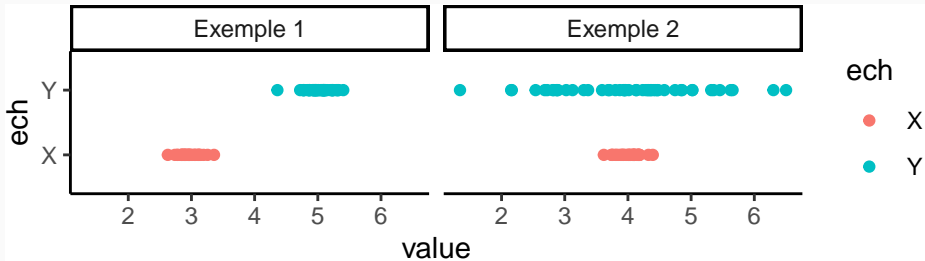
Question (fréquente)

- Peut-on dire que deux populations ont les **mêmes caractéristiques** ?
- Ou plus simplement que deux caractéristiques ont la **même moyenne** ?

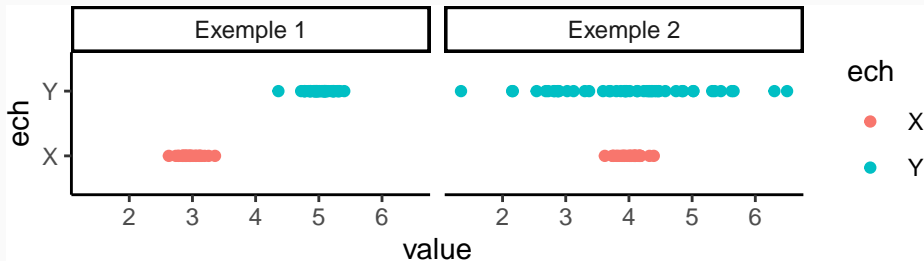
Observations

- X_1, \dots, X_{n_1} observations pour la population 1.
- Y_1, \dots, Y_{n_2} observations pour la population 2.

Exemple



Exemple



Idée

Utiliser des IC pour décider.

Comparer des moyennes.

- **Approche** : construire un IV pour $\mu_X - \mu_Y$ et regarder si 0 est à l'intérieur de l'IC

Comparer des moyennes.

- **Approche** : construire un IV pour $\mu_X - \mu_Y$ et regarder si 0 est à l'intérieur de l'IC
- **Méthode** : trouver la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$.

Comparer des moyennes.

- **Approche** : construire un IV pour $\mu_X - \mu_Y$ et regarder si 0 est à l'intérieur de l'IC
- **Méthode** : trouver la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$.
- **Résultat** : cette loi est proche d'une loi Gaussienne. On peut montrer plus précisément que

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}}$$

suit une loi de Student à ν degrés de liberté (ν par de forme explicite pour ν).

- On déduit de ces résultats des **IC** pour $\mu_X - \mu_Y$.

- On reprend les deux échantillons des diapos précédentes.

```
> t.test(df1$value,df2$value)
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  df1$value and df2$value
## t = -55.526, df = 81.644, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -2.134079 -1.986443
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  2.965286  5.025547
```

- On reprend les deux échantillons des diapos précédentes.

```
> t.test(df1$value,df2$value)
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: df1$value and df2$value
## t = -55.526, df = 81.644, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -2.134079 -1.986443
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 2.965286 5.025547
```

Conclusion

0 n'étant pas dans l'intervalle de confiance, on peut penser que les moyennes sont proches.


```
> t.test(df3$value,df4$value)
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  df3$value and df4$value
## t = 0.05457, df = 52.455, p-value = 0.9567
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -0.3040912  0.3210965
## sample estimates:
## mean of x mean of y
##  4.015909  4.007406
```

```
> t.test(df3$value, df4$value)
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: df3$value and df4$value
## t = 0.05457, df = 52.455, p-value = 0.9567
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -0.3040912 0.3210965
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 4.015909 4.007406
```

Conclusion

0 étant dans l'intervalle de confiance, on peut penser que les moyennes sont proches.

```
> t.test(df3$value, df4$value)
##
## Welch Two Sample t-test
##
## data: df3$value and df4$value
## t = 0.05457, df = 52.455, p-value = 0.9567
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -0.3040912 0.3210965
## sample estimates:
## mean of x mean of y
## 4.015909 4.007406
```

Conclusion

0 étant dans l'intervalle de confiance, on peut penser que les moyennes sont proches.

- Les procédures de **test statistique** permettront de préciser cette méthodologie.