# $\begin{array}{c} {\rm QCM} \\ {\rm Examen~du~08/11/2022} \end{array}$

### Instructions:

- Le sujet comprend 3 exercices pour 23 questions au total. Les questions faisant apparaître le symbole & peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Des points négatifs pourront être affectés à de mauvaises réponses.
- Seul le questionnaire à la 4ème feuille (page 7) est à rendre. Vous commencerez par renseigner votre nom et prénom dans la case prévue ainsi que votre numéro étudiant Rennes 2 (1 case à colorier par colonne).
- Il faut **colorier** les cases correspondants aux bonnes réponses (sur la page 7), mettre une croix dans la case n'est **pas suffisant**. Les cases devront être **coloriées avec un stylo noir** (pas de crayon papier, de stabilo...).
- Tous les sujets sont différents, si vous commettez une erreur en coloriant la case, vous pouvez demander un autre sujet complet, il faudra dans ce cas recommencer le devoir au début.
- Le barème sera effectué de la façon suivante :
  - Aucune case coloriée entrainera une note de 0 sur la question.
  - Pour les questions à une seule bonne réponse (sans le symbole ♣), un nombre de points sera affecté (par exemple +2) si la bonne case est cochée. Un nombre de points sera retranché (par exemple -1) si une mauvaise case est coloriée ou si plusieurs cases sont coloriées.
  - − Pour les questions avec plusieurs bonnes réponses (avec le symbole  $\clubsuit$ ), un nombre de points (par exemple +0.5) sera affecté pour chaque bonne réponse coloriée et pour chaque mauvaise réponse non coloriée. Un nombre de points (par exemple +0.5) sera retranché pour chaque mauvaise réponse coloriée et pour chaque bonne réponse non coloriée.
  - Les nombres de points ajoutés et retranchés ne sont pas forcément fixes et pourront dépendre de la réponse.
- La correction étant automatique, un non respect des consignes aura forcément un impact sur la note finale.

Durée : 1 heure 20 minutes.

Exercice 1. Les questions de cet exercice portent sur des "bases" des parties probabilités et estimation.

**Question 1** Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur VUMSB (de variance minimale parmi les estimateurs sans biais) d'un paramètre  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{\theta}$  un estimateur sans biais de  $\theta$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

$$A \mathbf{E}[\hat{\theta}] > \mathbf{E}[\tilde{\theta}]$$

$$\boxed{\mathbf{B}} \mathbf{V}[\hat{\theta}] \geq \mathbf{V}[\tilde{\theta}]$$

$$\mathbf{E}[\hat{ heta}] = \mathbf{E}[\tilde{ heta}]$$

$$\mathbf{V}[\hat{\theta}] \leq \mathbf{V}[\tilde{\theta}]$$

$$\mathbf{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

$$\mathbf{V}[\hat{\theta}] \geq 0$$

$$G \mathbf{E}[\tilde{\theta}] = 0$$

H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 2  $\clubsuit$  Soit X une variable aléatoire réelle de densité  $f_X$ , de fonction de répartition  $F_X$  et qui admet une variance finie. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \le x)$$

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\mathbf{C}} \mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) \, \mathrm{d}x$$

$$F_X(x) = 1 - \mathbf{P}(X > x)$$

$$F$$
  $F_X(x) = \mathbf{P}(x \le X)$ 

$$\mathbf{E}[X]$$
 est un nombre réel

H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 3 Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- La variance d'un estimateur est toujours positive ou nulle
- B Une densité de probabilité prend toujours des valeurs négatives
- Un estimateur est une variable aléatoire
- D Le biais d'un estimateur est toujours positif ou nul
- E L'espérance d'une variable aléatoire réelle est toujours positive ou nulle
- F Un estimateur est un nombre réel
- Le risque quadratique d'un estimateur est toujours positif ou nul
- H Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 4**  $\clubsuit$  Soit X une variable aléatoire réelle de loi  $\mathbf{P}_{\theta}$  et de vraisemblance  $L(x,\theta)$ . L'information de Fisher (si elle existe) associée à X est définie par :

- $\boxed{\mathbf{A}} \mathbf{E} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(L(X, \theta)) \right]$
- $\boxed{\mathbf{B}} \ \mathbf{E} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X,\theta)) \right]$
- $\boxed{\mathbb{C}} \mathbf{V} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right]$
- $\mathbf{V} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right]$

- $-\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\log(L(X,\theta))\right]$
- $\boxed{\mathbf{F}} \mathbf{E} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \log(L(X, \theta)) \right)^2 \right]$
- $\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\log(L(X,\theta))\right)^2\right]$
- H Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 5**  $\clubsuit$  Soit  $X_1, \ldots, X_n$  n v.a.r i.i.d. de loi  $\mathbf{P}_{\theta}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$  inconnu. Soit  $\hat{\theta}$  un estimateur de  $\theta$ . On note  $b(\theta) = \mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta$  son biais. Le risque quadratique de  $\hat{\theta}$  vaut (on cochera la (ou les) assertion(s) vraie(s)):

- $\mathbf{E}[(\hat{\theta}-\theta)^2]$
- $\boxed{\mathbf{B}} (b(\theta))^2 + (\mathbf{V}(\hat{\theta}))^2$
- $(\mathbf{E}[\hat{\theta}] \theta)^2 + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- $\boxed{\mathbf{D}} \ \mathbf{E}[(\hat{\theta} \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2]$
- $\boxed{\mathbf{E}} b(\theta) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$

- $b^2(\theta) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- $\boxed{\mathbf{G}} (b(\hat{\theta}))^2 + \mathbf{V}(\theta)$
- $\mathbf{H} \mathbf{E}[|\hat{\theta} \theta|]$
- I Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 6** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes qui admettent pour densités  $f_X$  et  $f_Y$  et pour fonctions de répartition  $F_X$  et  $F_Y$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- $\boxed{\mathbf{A}} \mathbf{V}[XY] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y]$
- $\boxed{\mathbf{B}} \ \mathbf{E}[2X 3Y] = 2\mathbf{E}[X] + 3\mathbf{E}[Y]$
- $\mathbf{V}[X 2Y] = \mathbf{V}[X] + 4\mathbf{V}[Y]$
- $\boxed{\mathbf{D}} \ \mathbf{V}[2X 3Y] = 2\mathbf{V}[X] + 3\mathbf{V}[Y]$
- $E F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) + F_Y(y)$
- $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

- $\boxed{G} \mathbf{V}[X Y] = \mathbf{V}[X] \mathbf{V}[Y]$
- H V[XY] = V[X]V[Y]
- $\mathbf{E}[X Y] = \mathbf{E}[X] \mathbf{E}[Y]$
- $\boxed{\mathbf{J}} \mathbf{V}[X Y] = \mathbf{V}[X] \mathbf{V}[-Y]$
- $\mathbf{E}[XY^2] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y^2]$
- L Aucune de ces réponses n'est correcte.

Dans les 5 questions suivantes, on considère  $X_1, \ldots, X_n$  n variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur  $[0, \theta]$  avec  $\theta \in \mathbb{R}^+$  inconnu.

Question 7 \( \bigcap \) Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- A  $f_{X_1}(\theta/3) = \theta$
- **P** $(X_1 > \theta/3) = 2/3$
- $f_{X_1}(\theta/3) = 1/\theta$
- $D F_{X_1}(\theta/3) = 1/\theta$
- $P(X_1 \ge \theta/3) = 2/3$

- F  $f_{X_1}(\theta/3) = 2\theta$
- $F_{X_1}(\theta/3) = 1/3$
- $|H| P(X_1 = \theta/3) = 1/3$
- **P** $(X_2 \ge \theta/3) = 2/3$
- J Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 8**  $\clubsuit$  On note  $\hat{\theta}_{MV}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$  et  $\hat{\theta}_m$  l'estimateur des moments de  $\theta$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

$$\widehat{\mathbf{A}} \ \widehat{\theta}_{MV} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$\hat{\theta}_m = \frac{\bar{X}_n}{2}$$

$$\hat{\mathbb{C}}$$
  $\hat{\theta}_m = \frac{X_1}{2}$ 

$$\widehat{\mathbf{D}} \ \hat{\theta}_m = \frac{\theta}{2}$$

$$\hat{\mathbf{E}} \hat{\theta}_{MV} = \frac{\bar{X}_n}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{F}} \ \hat{\theta}_{MV} = \frac{X_1}{2}$$

$$\hat{\theta}_{MV} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$\boxed{\mathbf{H}} \ \hat{\theta}_{MV} = \frac{n+1}{n} \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$\boxed{1} \hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}_m$$

J Aucune de ces réponses n'est correcte.

On pose  $Y = X_1^2$  et on désigne par  $F_Y$  la fonction de répartition de Y. Soit Question 9  $t \in ]0, \theta^2[. F_Y(t) \text{ est égal à}]$ 

$$\boxed{\mathbf{A}}$$
  $\sqrt{t}$ 

 $F \frac{t}{\sqrt{\theta}}$ 

**Question 10** On pose  $Y = X_1^2$  et on désigne par  $f_Y$  la densité de Y. Soit  $t \in ]0, \theta^2[.f_Y(t)]$  est

$$A \frac{\sqrt{t}}{\theta}$$

On pose  $Y = X_1^2$ .  $\mathbf{E}[Y]$  est égal à Question 11

$$\overline{A}$$
  $\frac{\sqrt{\theta}}{3}$ 

 $G = \frac{\theta}{2}$ 

 ${f Exercice~2.}$  Les questions suivantes portent sur la partie convergence stochastique. L'écriture  $\rightarrow 0$  signifie "tend vers 0 lorsque n tend vers  $+\infty$ ".

**Question 12**  $\clubsuit$  Soit  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0,1[$ . Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

$$\boxed{\mathbf{A}} \ 1/\bar{X}_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} 2/p$$

$$2\bar{X}_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} 2p$$

$$\boxed{\mathbf{C}} \ \overline{1}/X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} p$$

$$D$$
  $\bar{X}_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} p/2$ 

$$\bar{X}_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} p$$

$$1/\bar{X}_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} 1/p$$

$$G$$
  $\bar{X}_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} 1/2$ 

H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 13  $\clubsuit$  Soit  $(X_n)_n$  une suite de v.a.r. qui converge presque sûrement vers X. On a

$$\boxed{\mathbf{A}} \ X_n \stackrel{L_2}{\to} X$$

$$X_n^3 \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X^3$$
.

$$X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$$
.

$$2X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} 2X$$

$$E X_n - X \stackrel{L_2}{\to} 0$$

$$X_n - X \stackrel{p.s.}{\rightarrow} 0.$$

$$G X_n \stackrel{L_1}{\to} X$$

H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 14  $(X_n)$  converge vers X presque sûrement si et seulement si

$$\mathbf{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\}\right) = 0$$

$$\boxed{\mathbf{D}} \ \mathbf{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon) \to 0$$

$$\boxed{\mathbf{E}} \ \mathbf{P}(|X_n - X| \le \varepsilon) \to 0$$

$$\boxed{\mathbb{C}} \mathbf{P}(|X_n - X| \ge \varepsilon) \to +\infty$$

F Aucune de ces réponses n'est correcte.

Dans les deux questions suivantes (questions 15 et 16), on considère  $(X_n)_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X_n = n+2) = \frac{1}{n^3}$$
 et  $\mathbf{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{1}{n^3}$ ,  $n \ge 1$ .

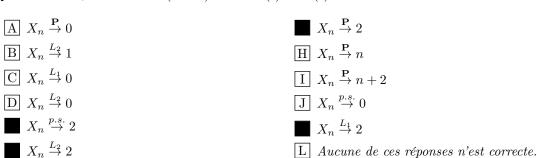
**Question 15** L'espérance  $\mathbf{E}[(X_n-2)^2]$  est égale à

A 
$$2/n^2$$
 B  $1/n^3$  C  $(n+2)/n^3$  D 2 E 0 F  $2/n^3$  J Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 16** Soit  $\varepsilon > 0$ . La probabilité  $\mathbf{P}(|X_n - 2| \ge \varepsilon)$  est égale à

$$oxed{A}$$
  $2/n^3$   $oxed{B}$   $(n+2)/n^3$   $oxed{C}$   $1-1/n^3$   $oxed{D}$   $1$   $oxed{I}$   $1/n^3$   $oxed{F}$   $2/n^3$   $oxed{G}$   $0$   $oxed{H}$   $1-1/n^2$   $oxed{I}$   $1/n^3$   $oxed{J}$  Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 17 \$\tag{\text{\chi}}\$ Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).



Exercice 3. Dans cet exercice on considère  $X_1, \ldots, X_n$  n variables aléatoires réelles i.i.d dont la loi admet pour densité

$$f_{\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda} x^{-(\frac{1}{\lambda} + 1)}$$
 avec  $x \ge 1$ ,  $\lambda > 0$ .

On cherche ici à estimer  $\lambda$ . On admettra dans toute cet exercice que  $\log(X_1)$  suit une loi exponentielle de paramètre  $1/\lambda$ .

**Question 18** L'espérance de  $X_1$  vaut

**Question 19** Soit  $x_1, \ldots, x_n$  tels que  $x_i \ge 1$ . La log-vraisemblance  $\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \theta)$  est égale à

$$\boxed{\mathbf{A}} - n \log(\lambda) - \left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^{-(1/\lambda+1)} \qquad \boxed{\mathbf{E}} - n\lambda + \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \\
\boxed{\mathbf{B}} - n\lambda - \left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i^{-(1/\lambda+1)} \qquad \boxed{\mathbf{F}} - n \log(\lambda) - \left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \\
\boxed{\mathbf{C}} - n\lambda - \left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \boxed{\mathbf{m}} - n \log(\lambda) - \left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \\
\boxed{\mathbf{D}} - n \log(\lambda) - \left(\frac{1}{\lambda+1}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \boxed{\mathbf{H}} \text{ Aucune de ces réponses n'est correcte.}$$

**Question 20** L'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\lambda}$  est donné par

$$\boxed{\mathbf{A}} \ \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

$$\boxed{\mathbf{B}} \ \frac{n-1}{n \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)}$$

$$\boxed{\mathbf{C}} \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(x_i)}$$

$$\boxed{\mathbf{D}} \ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

$$\boxed{\mathbf{F}} \ \frac{\lambda}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i)$$

$$\boxed{\mathbf{G}} \ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 21 La variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\lambda}$  est donnée par

$$\boxed{\mathbf{A}} \quad \frac{1}{\lambda^2 n^2}$$

$$\frac{\lambda}{n+1}$$

$$\boxed{\mathbf{C}} \frac{1}{\lambda n^2}$$

$$\boxed{\mathbf{D}} \ \frac{\lambda}{n-1}$$

$$\boxed{\mathrm{E}} \frac{1}{\lambda^2 n}$$

$$\frac{\lambda^2}{n}$$

$$G$$
  $\frac{\lambda-1}{n^2}$ 

$$\frac{\lambda}{n}$$

$$I$$
  $\frac{\lambda}{n^2}$ 

J Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 22 La borne de Cramer-Rao est égale à :

$$A \frac{\lambda}{n}$$

$$\boxed{\mathrm{B}} \frac{1}{\lambda n^2}$$

$$C$$
  $\frac{1}{\lambda^2 n^2}$ 

$$\boxed{\mathbf{D}} \ \frac{\lambda}{n^2}$$

$$\mathbb{E}^{\frac{n}{\lambda^2}}$$

$$F \frac{\lambda}{n-1}$$

 $G \frac{n}{\lambda}$ 

$$\boxed{\mathbf{H}} \frac{\lambda}{n+1}$$

$$\frac{\lambda^2}{n}$$

$$\int \int \frac{1}{\lambda^2 n}$$

$$K$$
  $\frac{\lambda-1}{n^2}$ 

L Aucune de ces réponses n'est correcte.

**Question 23** On se pose la question de savoir si  $\hat{\lambda}$  est VUMSB. Cochez la bonne réponse

- $\boxed{\mathbf{A}} \ \hat{\lambda}/n$  est VUMSB
- $\boxed{\mathbf{B}}$   $\hat{\lambda}$ est (presque) VUMSB : sa variance est égale à la BCR mais il a un petit biais qui tend vers 0 lorsque  $n\to\infty$
- $\hat{\lambda}$  est VUMSB

- $\boxed{\mathbf{D}} \ n\hat{\lambda}/(n+1) \text{ est VUMSB}$
- $\boxed{\mathrm{E}} \ n\hat{\lambda}/(n-1) \ \mathrm{est} \ \mathrm{VUMSB}$
- F On ne peut pas conclure au vu des éléments de l'exercice
- G Aucune de ces réponses n'est correcte.

# CORRECTION

### CORRECTION

Feuille de réponses :	
	← codez votre numéro d'étudiant ci-
	contre, et inscrivez votre nom et prénom
	ci-dessous.
4     4     4     4     4     4     4     4       5     5     5     5     5     5     5     5	Nom et prénom :
6 6 6 6 6 6 6	
7 7 7 7 7 7 7 7	
8 8 8 8 8 8 8	
9 9 9 9 9 9 9	
Les rénonses aux auestions sont à do	nner exclusivement sur cette feuille : les
	cédentes ne seront pas prises en compte.
QUESTION 1: A B G G	$\overline{\mathrm{H}}$
	$\overline{\Pi}$
	H
	$\overline{\Pi}$
	 H []
	H I I I L
	— — — — — H ■ J
QUESTION 9: A B C D F G	
QUESTION 10: A B C D E F G	■ I
QUESTION 11: $A B \blacksquare D E F G$	H I
Question 12 : $\boxed{\mathbf{A}}$ $\boxed{\mathbf{C}}$ $\boxed{\mathbf{D}}$ $\boxed{\mathbf{G}}$	H
Question 13 : $\boxed{\mathbf{A}}$ $\boxed{\blacksquare}$ $\boxed{\blacksquare}$ $\boxed{\mathbf{E}}$ $\boxed{\mathbf{G}}$	H
QUESTION 14: BCDEF	
Question 15 : $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{C}$ $\overline{D}$ $\overline{E}$ $\overline{F}$	HIJ
Question 16 : $\begin{tabular}{lll} A & B & C & D & \hline & F & G \end{tabular}$	HIJ
Question 17 : $\boxed{\mathbf{A}}$ $\boxed{\mathbf{B}}$ $\boxed{\mathbf{C}}$ $\boxed{\mathbf{D}}$ $\boxed{\blacksquare}$ $\boxed{\blacksquare}$	H I J 🖪 L
Question 18 : $\begin{tabular}{lll} A & B & C & D & E & \hline \end{tabular}$	
Question 19 : $\  \   \   \   \   \   \   \  $	H
Question 20 : A B C D $\blacksquare$ F G	H
Question 21 : $\begin{tabular}{lll} A & B & C & D & E & G \end{tabular}$	HIJ
QUESTION 22 : A B C D E F G	H J K L
Question 23 : $\begin{tabular}{lll} A & B & \blacksquare \end{tabular} \begin{tabular}{lll} D & E & F & G \end{tabular}$	

# CORRECTION