Statistique

Laurent Rouvière

12 octobre 2023

Présentation

- Preé-requis : Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation

Présentation

- Preé-requis : Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation
- Objectifs : être capable de mettre en œuvre une démarche statistique rigoureuse pour répondre à des problèmes standards
  - Lois de probabilité et modèle
  - estimation : ponctuelle et par intervalles

Présentation

- Preé-requis : Bases de **R**, probabilités, statistique et programmation
- Objectifs : être capable de mettre en œuvre une démarche statistique rigoureuse pour répondre à des problèmes standards
  - Lois de probabilité et modèle
  - estimation : ponctuelle et par intervalles
- Enseignant : Laurent Rouvière, laurent.rouviere@univ-rennes2.fr
  - Thèmes de recherche : statistique non-paramétrique et apprentissage statistique
  - Enseignement: probabilités, statistique et logiciels (Universités et écoles)
  - Consulting: énergie (ERDF), finance, marketing.

Plan

- Théorie (modélisation statistique) et pratique sur machines (R).

Plan

- Théorie (modélisation statistique) et pratique sur machines (R).
  1. Introduction à R
     - Environnement Rstudio
     - Objets R
     - Manipulation et visualisation de données
  2. "Rappels" de probabilités
  3. Estimation ponctuelle et par intervalle
  4. Introduction aux tests.

Quelques éléments de probabilité

Quelques éléments de probabilité

Introduction

Une problématique...

Exemple

Les iris de Fisher.

1. Quelle est la longueur de sépales moyenne des iris ?
2. Peut-on dire que cette longueur moyenne est égale à 5.6 ?
3. Les Setosa ont-elles des longueurs de sépales plus petites que les autres espèces ? Avec quel niveau de confiance ?

Des données

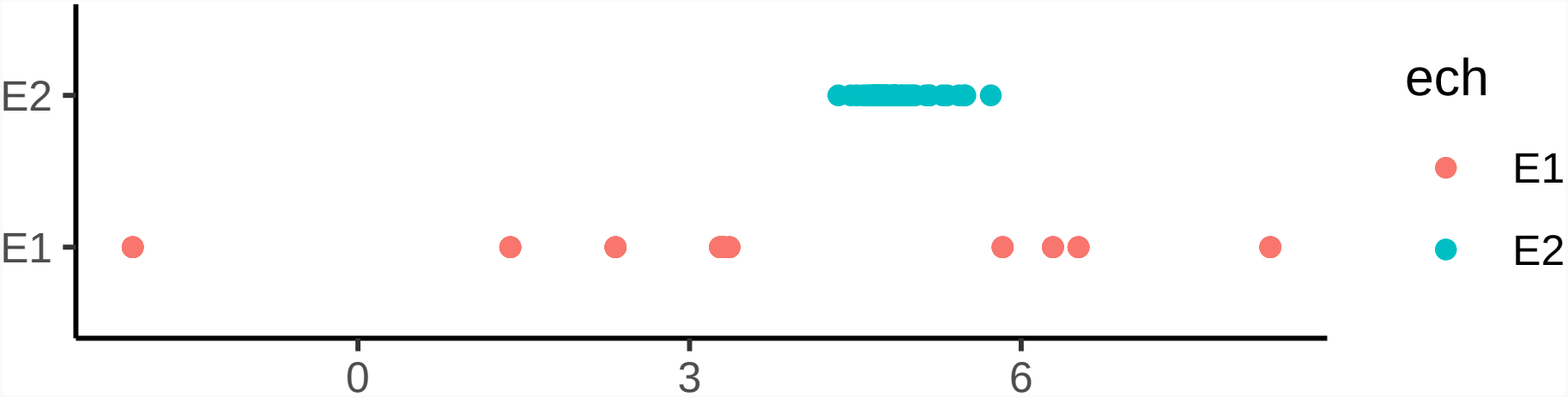
Collecte de données

- Pour répondre à ces questions on réalise des expériences.
- Exemple : on mesure les longueurs et largeurs de sépales et pétales pour 150 iris (50 de chaque espèce).

```
> data(iris)
> summary(iris)
  Sepal.Length    Sepal.Width     Petal.Length    Petal.Width
 Min.   :4.300   Min.   :2.000   Min.   :1.000   Min.   :0.100
 1st Qu.:5.100   1st Qu.:2.800   1st Qu.:1.600   1st Qu.:0.300
 Median :5.800   Median :3.000   Median :4.350   Median :1.300
 Mean   :5.843   Mean   :3.057   Mean   :3.758   Mean   :1.199
 3rd Qu.:6.400   3rd Qu.:3.300   3rd Qu.:5.100   3rd Qu.:1.800
 Max.   :7.900   Max.   :4.400   Max.   :6.900   Max.   :2.500
       Species
 setosa    :50
 versicolor:50
 virginica :50
```

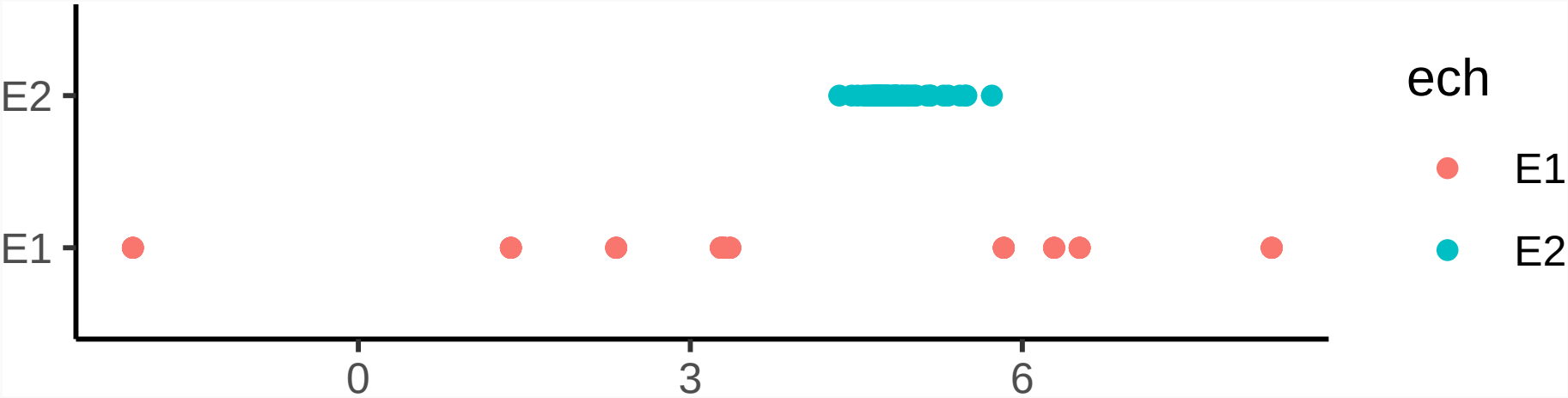
Autre exemple

- On considère deux échantillons **E1** et **E2**.
- Question : la moyenne est-elle égale à 5 ?



Autre exemple

- On considère deux échantillons **E1** et **E2**.
- Question : la moyenne est-elle égale à 5 ?



Remarque

Plus difficile de répondre pour **E1** car :

- Moins d'observations ;
- Dispersion plus importante.

Un autre exemple

- Deux candidats se présentent à une élection.
- On effectue un sondage, les résultats sont

```
> summary(election)
 res
 A:488
 B:512
```

Un autre exemple

- Deux candidats se présentent à une élection.
- On effectue un sondage, les résultats sont

```
> summary(election)
 res
 A:488
 B:512
```

- Problématique : qui va gagner ?
- Avec quel niveau de confiance peut-on répondre à cette question ?

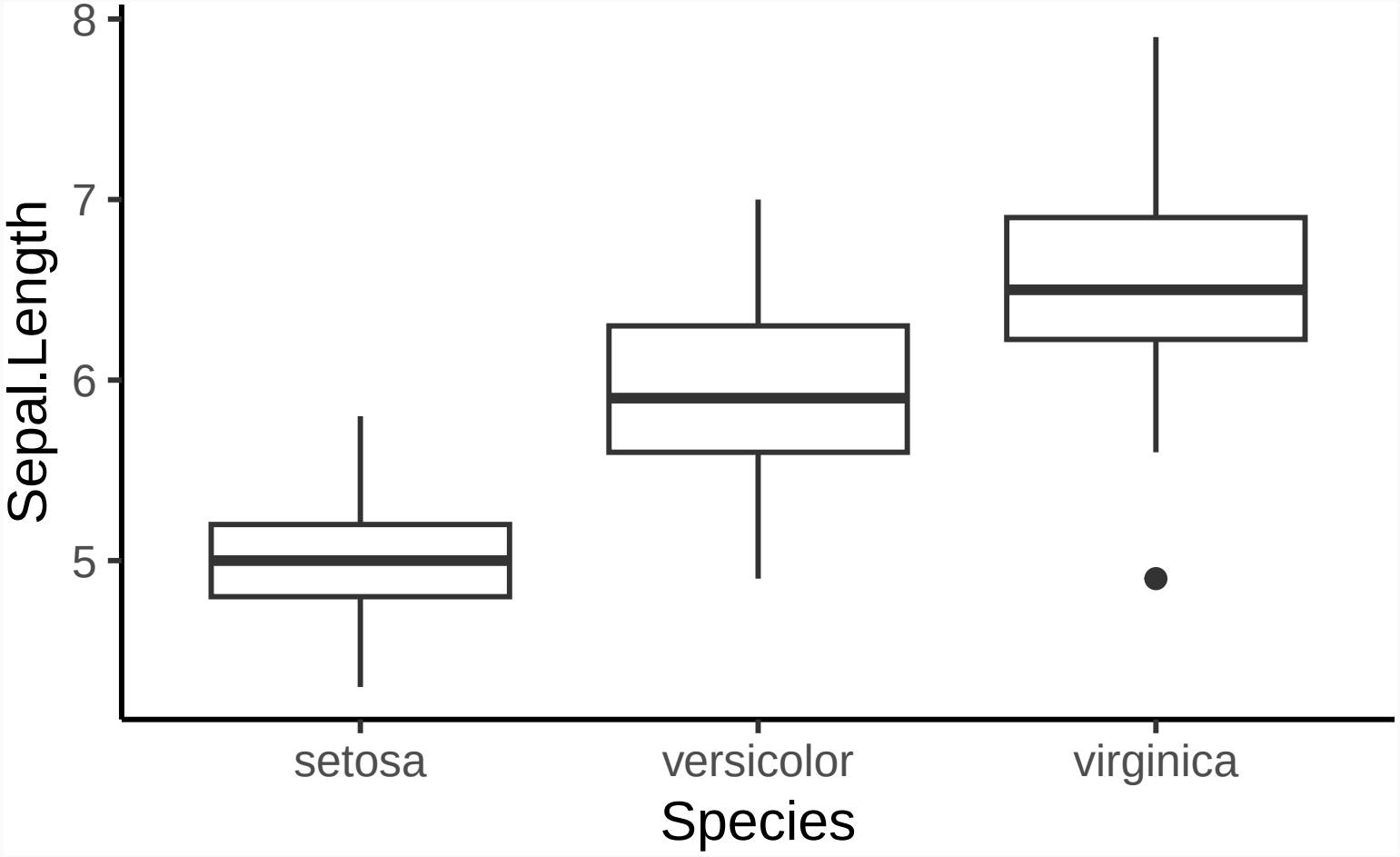
Statistiques descriptives et visualisation

Ces approches peuvent donner une intuition pour répondre.

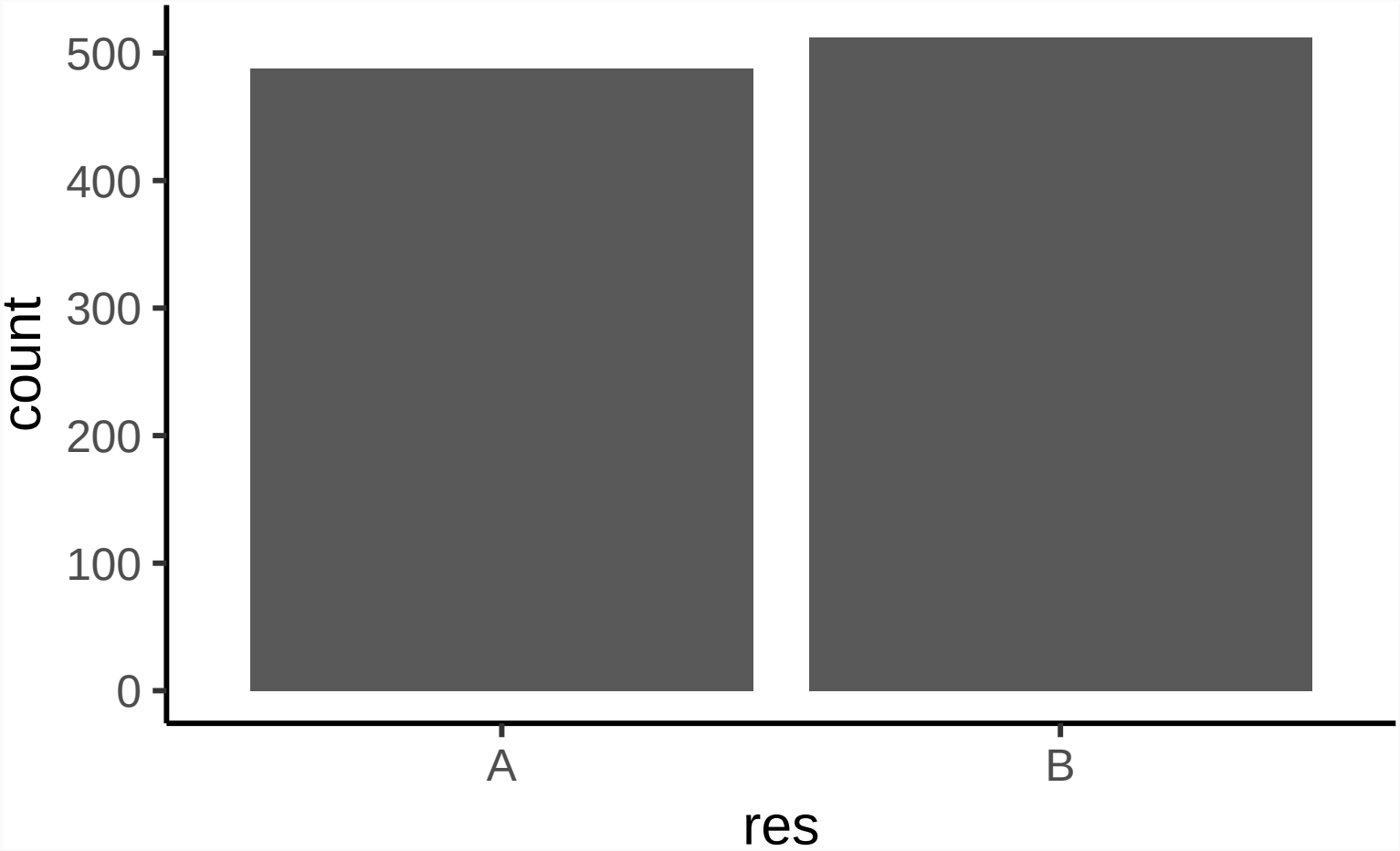
```
> iris |> summarize(mean(Sepal.Length))
  mean(Sepal.Length)
1           5.843333
> iris |> group_by(Species) |> summarize(mean(Sepal.Length))
# A tibble: 3 x 2
  Species    `mean(Sepal.Length)`
  <fct>                     <dbl>
1 setosa                     5.01
2 versicolor                 5.94
3 virginica                  6.59
```

```
> election |> mutate(res_A=res=="A") |>
+   summarize(Prop_A=mean(res_A))
  Prop_A
1  0.488
```

```
> ggplot(iris)+aes(x=Species,y=Sepal.Length)+geom_boxplot()
```



```
> ggplot(election)+aes(x=res)+geom_bar()
```



Hasard, aléa...

- La réponse à ces questions peut paraître simple.

Première réponse

- Iris : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 5.6, on répond non.
- Election : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que A gagne.

Hasard, aléa...

- La réponse à ces questions peut paraître simple.

Première réponse

- Iris : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 5.6, on répond non.
- Election : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que A gagne.

Problème

- Ces réponses sont très (trop) liées aux données observées.
- Si je recommence l'expérience (sur d'autres iris ou d'autres électeurs), les conclusions peuvent changer.

Hasard, aléa...

- La réponse à ces questions peut paraître simple.

Première réponse

- Iris : si la longueur moyenne des pétales mesurées est différente de 5.6, on répond non.
- Election : si la proportion de sondés votant pour A est supérieure à 0.5, on répond que A gagne.

Problème

- Ces réponses sont très (trop) liées aux données observées.
- Si je recommence l'expérience (sur d'autres iris ou d'autres électeurs), les conclusions peuvent changer.
- Conclusion : il faut prendre en compte cet aléa du au choix des individus ainsi que le nombre d'observations et la dispersion des mesures.

Probabilités

- Idée : répondre à ces questions en calculant (estimant) des probabilités.

Probabilités

- Idée : répondre à ces questions en calculant (estimant) des probabilités.
- Notation : $x_1, \ldots, x_n$ n observations.

Probabilités

- Idée : répondre à ces questions en calculant (estimant) des probabilités.
- Notation : $x_1, \ldots, x_n$ n observations.

Hypothèse

Les observations proviennent d'une certaine loi de probabilité (inconnue).

Probabilités

- Idée : répondre à ces questions en calculant (estimant) des probabilités.
- Notation : $x_1, \ldots, x_n$ n observations.

Hypothèse

Les observations proviennent d'une certaine loi de probabilité (inconnue).

Problème

Qu'est-ce qu'une loi de probabilité ?

"Définition"

- Une loi de probabilité est un objet qui permet de mesurer ou quantifier la chance qu'un évènement se produise.

"Définition"

- Une loi de probabilité est un objet qui permet de mesurer ou quantifier la chance qu'un évènement se produise.
- Mathématiquement, il s'agit d'une fonction $\mathbf{P} : \Omega \to [0, 1]$ telle que, pour un évènement $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\omega)$ mesure la "chance" que l'évènement ω se réalise.

"Définition"

- Une loi de probabilité est un objet qui permet de mesurer ou quantifier la chance qu'un évènement se produise.
- Mathématiquement, il s'agit d'une fonction $\mathbf{P} : \Omega \to [0, 1]$ telle que, pour un évènement $\omega \in \Omega$, $\mathbf{P}(\omega)$ mesure la "chance" que l'évènement ω se réalise.

Exemple

- Pile ou face : $\mathbf{P}(pile) = \mathbf{P}(false) = 1/2$.
- Dé équilibré : $\mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \cdots = \mathbf{P}(6) = 1/6$.

Quelques éléments de probabilité

Quelques lois de probabilités

- Une loi de probabilité permet de visualiser/caractériser/mesurer les valeurs que peut prendre une variable.
- On distingue deux types de loi de probabilité que l'on caractérise en étudiant les valeurs possibles de la variable (et donc de l'expérience).

- Une loi de probabilité permet de visualiser/caractériser/mesurer les valeurs que peut prendre une variable.
- On distingue deux types de loi de probabilité que l'on caractérise en étudiant les valeurs possibles de la variable (et donc de l'expérience).

Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est fini ou dénombrable, la variable est discrète.

- Une loi de probabilité permet de visualiser/caractériser/mesurer les valeurs que peut prendre une variable.
- On distingue deux types de loi de probabilité que l'on caractérise en étudiant les valeurs possibles de la variable (et donc de l'expérience).

Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est fini ou dénombrable, la variable est discrète.
- pile ou face, nombre de voitures à un feu rouge, nombre d'aces dans un match de tennis...

- Une loi de probabilité permet de visualiser/caractériser/mesurer les valeurs que peut prendre une variable.
- On distingue deux types de loi de probabilité que l'on caractérise en étudiant les valeurs possibles de la variable (et donc de l'expérience).

Variable discrète

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est fini ou dénombrable, la variable est discrète.
- pile ou face, nombre de voitures à un feu rouge, nombre d'aces dans un match de tennis...

Variable continue

- Si l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable est infini ($\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$) la variable est continue.
- Duret de trajet, taille, vitesse d'un service, longueur d'un saut...

Comment définir une loi discrète ?

Pour caractériser un loi discrète, il faudra donner :

1. l'ensemble des valeurs possibles de la variable ;
2. la probabilité associée à chacune de ses valeurs.

Comment définir une loi discrète ?

Pour caractériser un loi discrète, il faudra donner :

1. l'ensemble des valeurs possibles de la variable ;
2. la probabilité associée à chacune de ses valeurs.

Exemple

- Soit X la variable aléatoire qui représente le statut matrimonial d'une personne.
- X peut prendre 4 valeurs : célibataire, marié, divorcé, vœuf (4 valeurs donc loi discrète).
- On caractérise sa loi

$$\mathbf{P}(X = \text{cel}) = 0.20,\ \mathbf{P}(X = \text{marié}) = 0.4,\ \mathbf{P}(X = \text{div}) = 0.3,\ \mathbf{P}(X = \text{vœuf}) = 0.1.$$

Comment définir une loi discrète ?

Pour caractériser un loi discrète, il faudra donner :

1. l'ensemble des valeurs possibles de la variable ;
2. la probabilité associée à chacune de ses valeurs.

Exemple

- Soit X la variable aléatoire qui représente le statut matrimonial d'une personne.
- X peut prendre 4 valeurs : célibataire, marié, divorcé, vœuf (4 valeurs donc loi discrète).
- On caractérise sa loi

$$\mathbf{P}(X = \text{cel}) = 0.20,\ \mathbf{P}(X = \text{marié}) = 0.4,\ \mathbf{P}(X = \text{div}) = 0.3,\ \mathbf{P}(X = \text{vœuf}) = 0.1.$$

Remarque

La somme des probabilités doit toujours être égale à 1.

Bernoulli

Définition

La loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ est définie par

- Valeurs possibles : 0 (échec) et 1 (succés)
- Proba : $\mathbf{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbf{P}(X=1) = p$.

Bernoulli

Définition

La loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ est définie par

- Valeurs possibles : 0 (échec) et 1 (succés)
- Proba : $\mathbf{P}(X=0) = 1-p$ et $\mathbf{P}(X=1) = p$.

Exemple

- Modélisation de phénomènes à 2 issues.
- Pile ou face, ace/pas ace, acceptation/rejet, oui/non...

Le coin R

- Fonction dbinom

```
> dbinom(x,1,p)
```

- Loi de Bernoulli de paramètre 0.5

```
> dbinom(0,1,0.5)
[1] 0.5
> dbinom(1,1,0.5)
[1] 0.5
```

- Loi de Bernoulli de paramètre 0.8

```
> dbinom(0,1,0.8)
[1] 0.2
> dbinom(1,1,0.8)
[1] 0.8
```

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0, 1]$ de façon indépendante.
- On note $X_1, \ldots, X_n$ les n résultats.

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0, 1]$ de façon indépendante.
- On note $X_1, \dots, X_n$ les n résultats.
- $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (qui compte le nombre de 1) suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0,1]$ de façon indépendante.
- On note $X_1, \dots, X_n$ les n résultats.
- $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (qui compte le nombre de 1) suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Loi binomiale

- Valeurs possibles : $\{0, 1, \dots, n\}$.
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Binomiale

- On répète n expériences de Bernoulli de paramètres $p \in [0,1]$ de façon indépendante.
- On note $X_1, \dots, X_n$ les n résultats.
- $\sum_{i=1}^{n} X_i$ (qui compte le nombre de 1) suit une loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Loi binomiale

- Valeurs possibles : $\{0, 1, \dots, n\}$.
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exemple

Nombre de succès sur n épreuves : nombre de piles, nombre d'aces sur n services.

Le coin R

- Fonction dbinom :

```
> dinom(x,n,p)
```

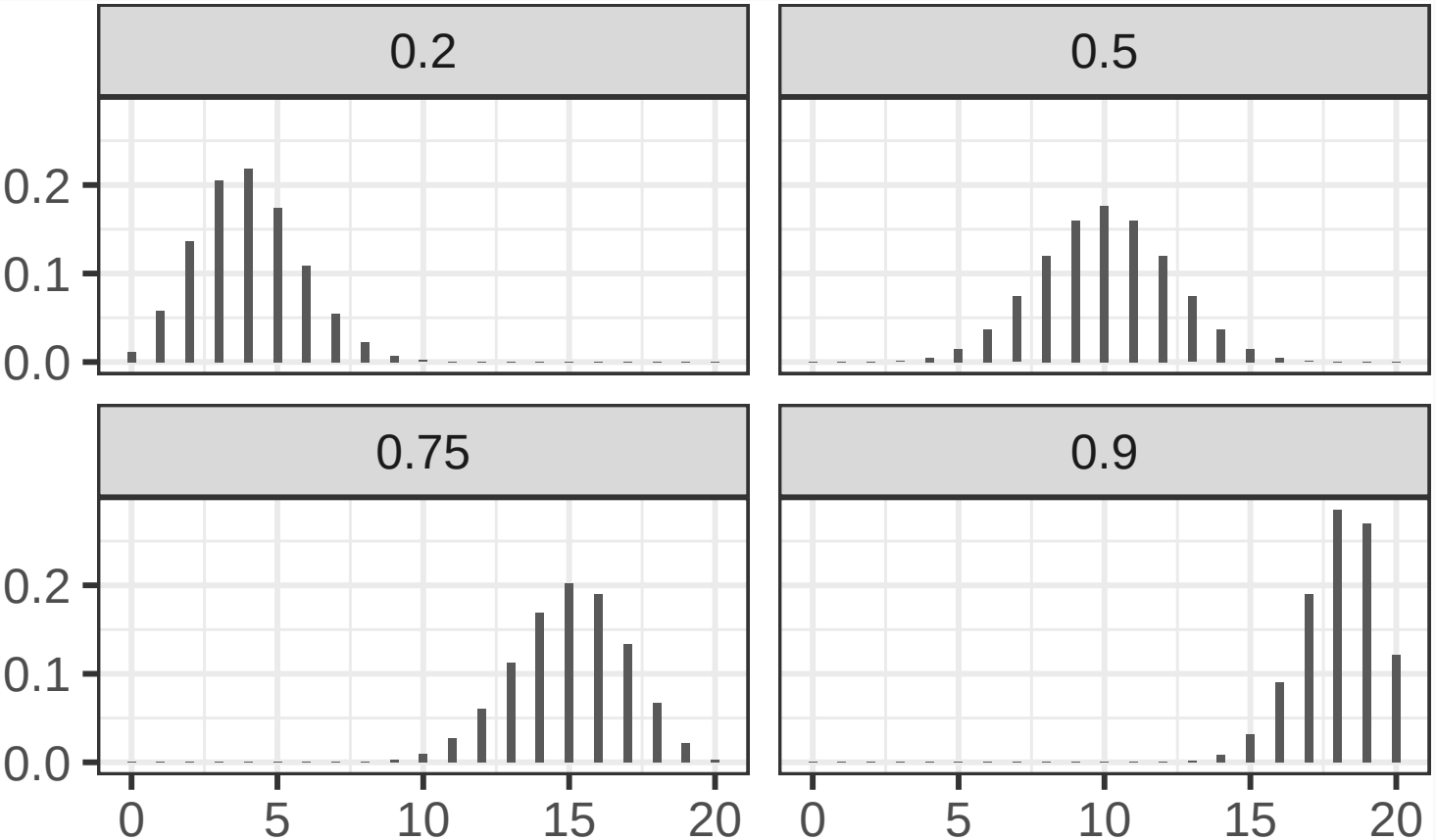
- Loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$

```
> dbinom(0,10,0.5);dbinom(5,10,0.5);dbinom(10,10,0.5)
[1] 0.0009765625
[1] 0.2460938
[1] 0.0009765625
```

- Loi binomiale $\mathcal{B}(50, 0.8)$

```
> dbinom(0,50,0.8);dbinom(25,50,0.8);dbinom(50,50,0.8)
[1] 1.1259e-35
[1] 1.602445e-06
[1] 1.427248e-05
```

Visualisation



Loi de Poisson

Définition

- Valeurs possibles : $\mathbb{N}$.
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k\,!}$$

où λ est un paramètre positif. On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

Loi de Poisson

Définition

- Valeurs possibles : $\mathbb{N}$.
- Proba :

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k \exp(-\lambda)}{k\,!}$$

où λ est un paramètre positif. On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple

- Données de comptage.
- Nombre de voitures à un feu rouge, nombre de personnes à une caisse, nombre d'admis à une épreuve...

Le coin R

- Fonction dpois :

```
> dpois(x,lambda)
```

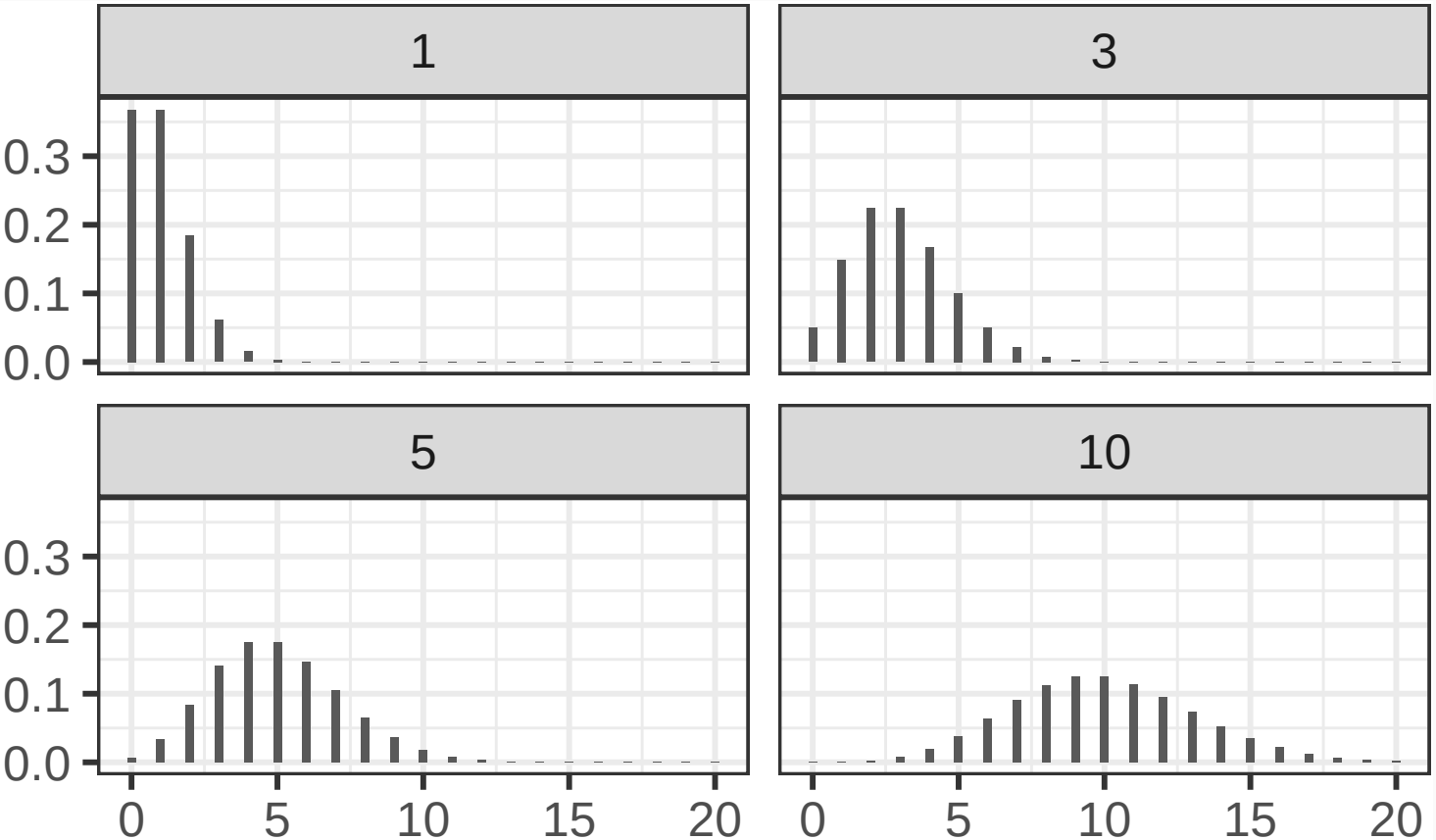
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$

```
> dpois(0,1);dpois(5,1);dpois(10,1)
[1] 0.3678794
[1] 0.003065662
[1] 1.013777e-07
```

- Loi binomiale $\mathcal{P}(10)$

```
> dpois(0,10);dpois(5,10);dpois(10,10)
[1] 4.539993e-05
[1] 0.03783327
[1] 0.12511
```

Visualisation



Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une infinité de valeurs (sur un intervalle ou sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une infinité de valeurs (sur un intervalle ou sur $\mathbb{R}$ tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une fonction de densité qui permettra de mesurer la probabilité que la variable appartienne à un intervalle.

Comment définir une loi continue ?

- Une loi continue prend une infinité de valeurs (sur un intervalle ou sur $\mathbb{R}$ tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une fonction de densité qui permettra de mesurer la probabilité que la variable appartienne à un intervalle.
- Cette probabilité se déduit de l'aire sous la densité.

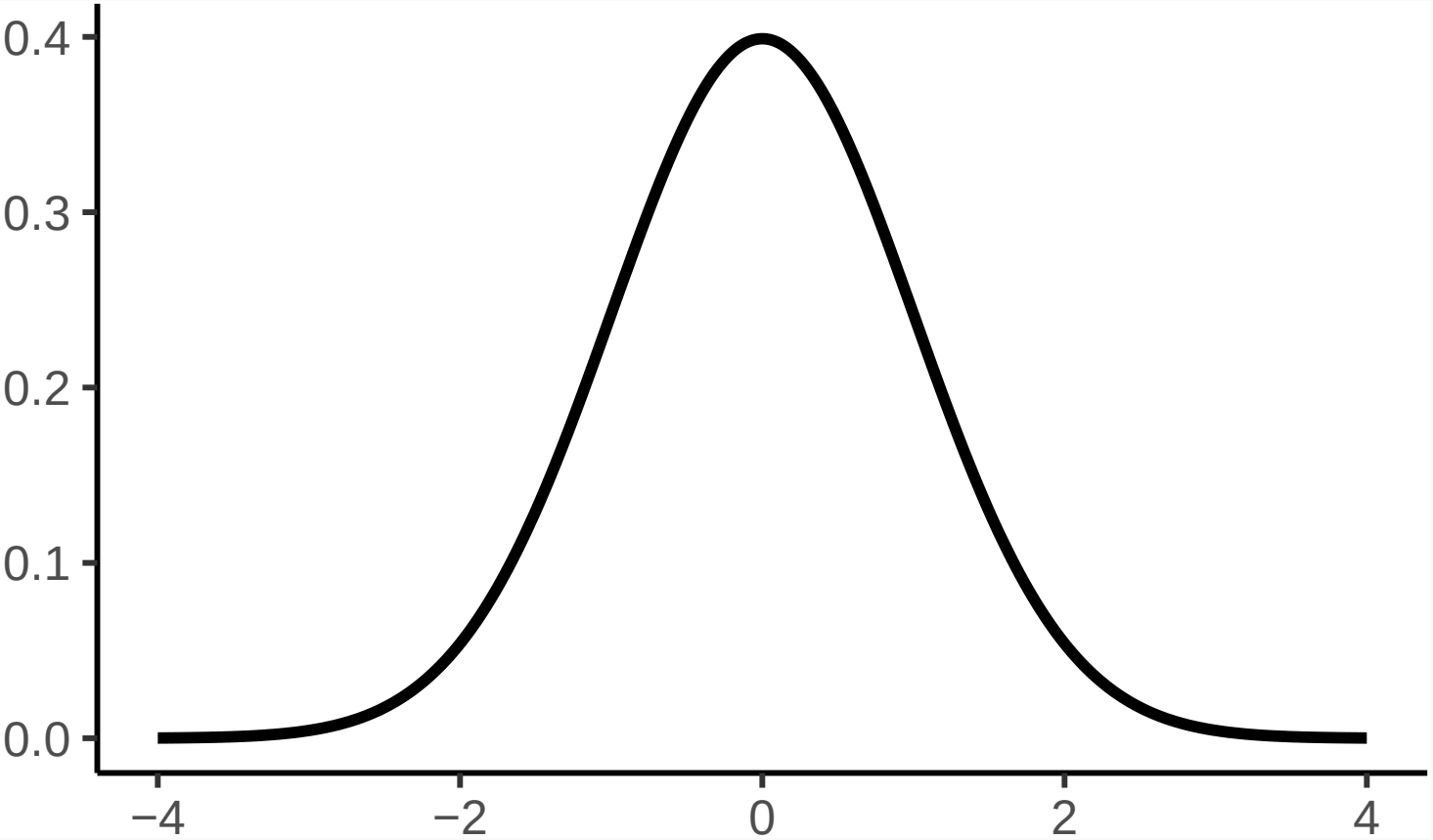
Comment définir une loi continue ?

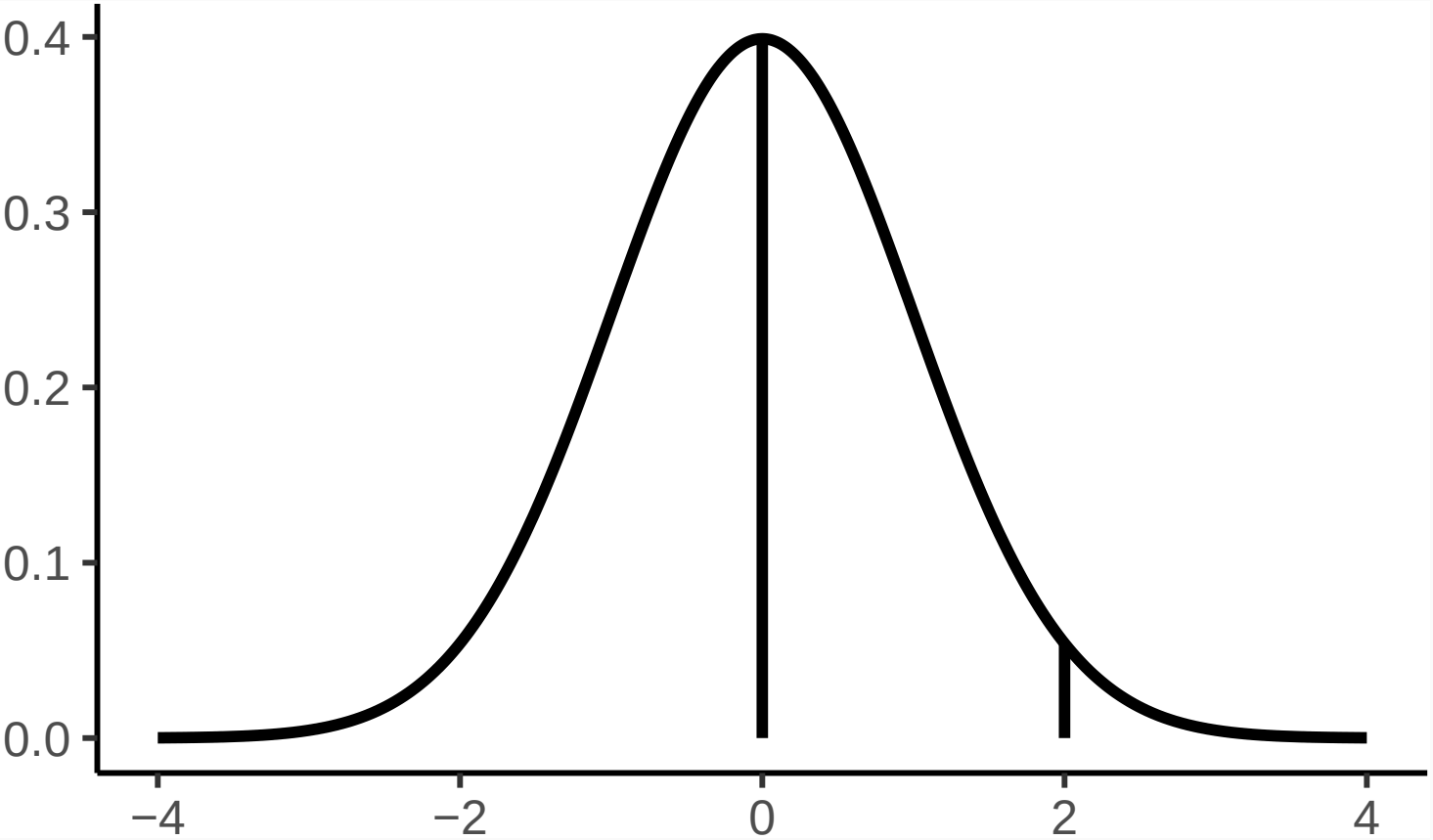
- Une loi continue prend une infinité de valeurs (sur un intervalle ou sur $\mathbb{R}$ tout entier).
- Pour la caractériser on utilisera une fonction de densité qui permettra de mesurer la probabilité que la variable appartienne à un intervalle.
- Cette probabilité se déduit de l'aire sous la densité.

Exemple

Si X admet pour densité f, alors

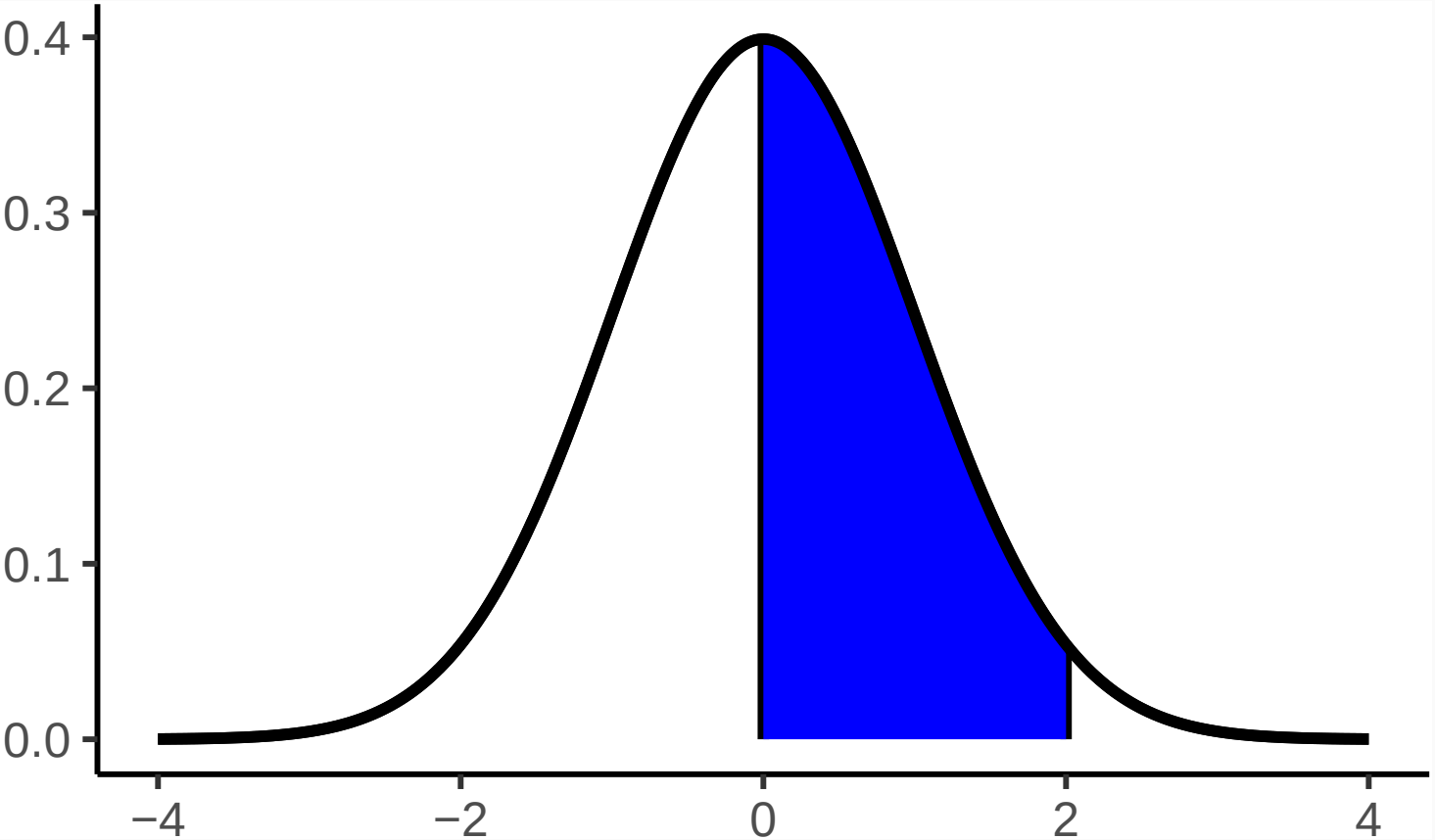
$$\mathbf{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$


0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
−4
−2
0
2
4



Question

$$\mathbf{P}(X \in [0, 2]) = ???$$



Réponse

$$\mathbf{P}(X \in [0,2]) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \simeq 0.48.$$

Densité

Définition

Une densité de probabilité est donc une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

Densité

Définition

Une densité de probabilité est donc une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être positive : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

Densité

Définition

Une densité de probabilité est donc une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être positive : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Elle doit être intégrable.

Densité

Définition

Une densité de probabilité est donc une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui doit vérifier les trois propriétés suivantes :

1. Elle doit être positive : $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
2. Elle doit être intégrable.
3. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ doit être égale à un :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Remarques

- Attention : pour une variable continue X on a toujours

$$\mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Remarques

- Attention : pour une variable continue X on a toujours

$$\mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- On s'intéresse à des probabilités pour intervalles ou des réunions d'intervalles.

Remarques

- Attention : pour une variable continue X on a toujours

$$\mathbf{P}(X = x) = \int_x^x f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- On s'intéresse à des probabilités pour intervalles ou des réunions d'intervalles.
- Ces probabilités se déduisent à partir d'aires, et donc d'intégrales.

Loi uniforme

Définition

La loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On la note $\mathcal{U}_{[a,b]}$.

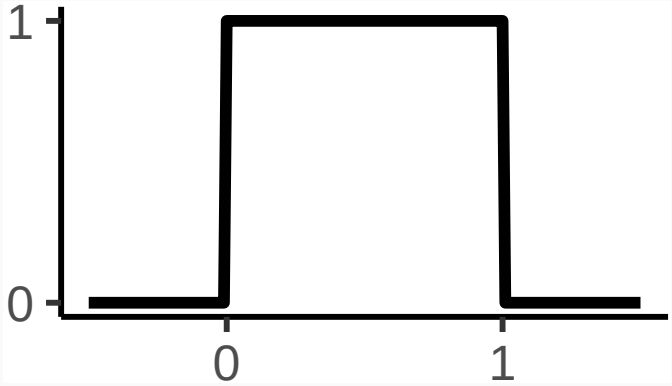
Loi uniforme

Définition

La loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On la note $\mathcal{U}_{[a,b]}$.



Interprétation

Les valeurs de X sont réparties uniformément sur l'intervalle $[a, b]$.

Le coin R

- Densité : fonction dunif

```
> dunif(-1,0,1);dunif(0.5,0,1);dunif(2,0,1)
[1] 0
[1] 1
[1] 0
```

Le coin R

- Densité : fonction dunif

```
> dunif(-1,0,1);dunif(0.5,0,1);dunif(2,0,1)
[1] 0
[1] 1
[1] 0
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec punif :

```
> punif(0,0,1);punif(0.2,0,1);punif(0.5,0,1)
[1] 0
[1] 0.2
[1] 0.5
```

Le coin R

- Densité : fonction dunif

```
> dunif(-1,0,1);dunif(0.5,0,1);dunif(2,0,1)
[1] 0
[1] 1
[1] 0
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec punif :

```
> punif(0,0,1);punif(0.2,0,1);punif(0.5,0,1)
[1] 0
[1] 0.2
[1] 0.5
```

- Calcul de probabilités :

$$\mathbf{P}(X \in [0.1, 0.4]) = \mathbf{P}(X \leq 0.4) - \mathbf{P}(X < 0.1).$$

```
> punif(0.4,0,1)-punif(0.1,0,1)
[1] 0.3
```

La loi normale

Définition

La loi normale ou loi gaussienne de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La loi normale

Définition

La loi normale ou loi gaussienne de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Remarque

- μ représente le tendance centrale de la loi, on parle de valeur moyenne.
- σ^2 représente la dispersion de la loi autour de la valeur moyenne, on parle(ra) de variance.

La loi normale

Définition

La loi normale ou loi gaussienne de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ admet pour densité

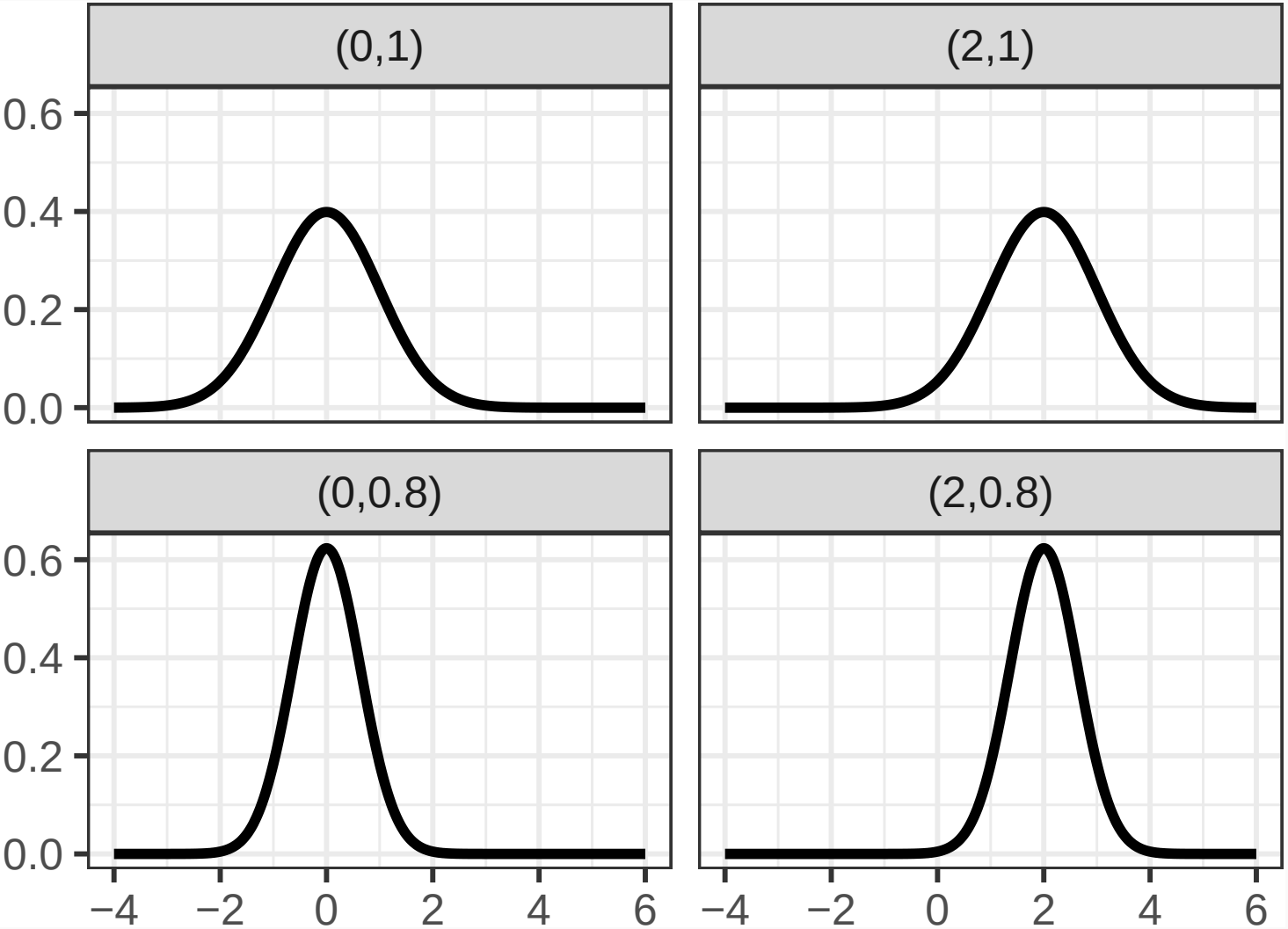
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

On la note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Remarque

- μ représente le tendance centrale de la loi, on parle de valeur moyenne.
- σ^2 représente la dispersion de la loi autour de la valeur moyenne, on parle(ra) de variance.
- Elle permet de modéliser des phénomènes centrés en une valeur.
- C'est la loi limite du théorème central limite.

Exemples pour différents (μ, σ^2)



Le coin R

- Densité : fonction dnorm

```
> dnorm(0,0,1);dnorm(0.05,0,1);dnorm(0.95,0,1)
[1] 0.3989423
[1] 0.3984439
[1] 0.2540591
```

Le coin R

- Densité : fonction dnorm

```
> dnorm(0,0,1);dnorm(0.05,0,1);dnorm(0.95,0,1)
[1] 0.3989423
[1] 0.3984439
[1] 0.2540591
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec pnorm :

```
> pnorm(0,0,1);pnorm(2,0,1);pnorm(-2,0,1)
[1] 0.5
[1] 0.9772499
[1] 0.02275013
```

Le coin R

- Densité : fonction dnorm

```
> dnorm(0,0,1);dnorm(0.05,0,1);dnorm(0.95,0,1)
[1] 0.3989423
[1] 0.3984439
[1] 0.2540591
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec pnorm :

```
> pnorm(0,0,1);pnorm(2,0,1);pnorm(-2,0,1)
[1] 0.5
[1] 0.9772499
[1] 0.02275013
```

- Calcul de probabilités :

$$\mathbf{P}(X \in [0,1]) = \mathbf{P}(X \leq 1) - \mathbf{P}(X < 0).$$

```
> pnorm(1,0,1)-pnorm(0,0,1)
[1] 0.3413447
```

Loi exponentielle

Définition

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet pour densité

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

On la note $\mathcal{E}(\lambda)$.

Loi exponentielle

Définition

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ admet pour densité

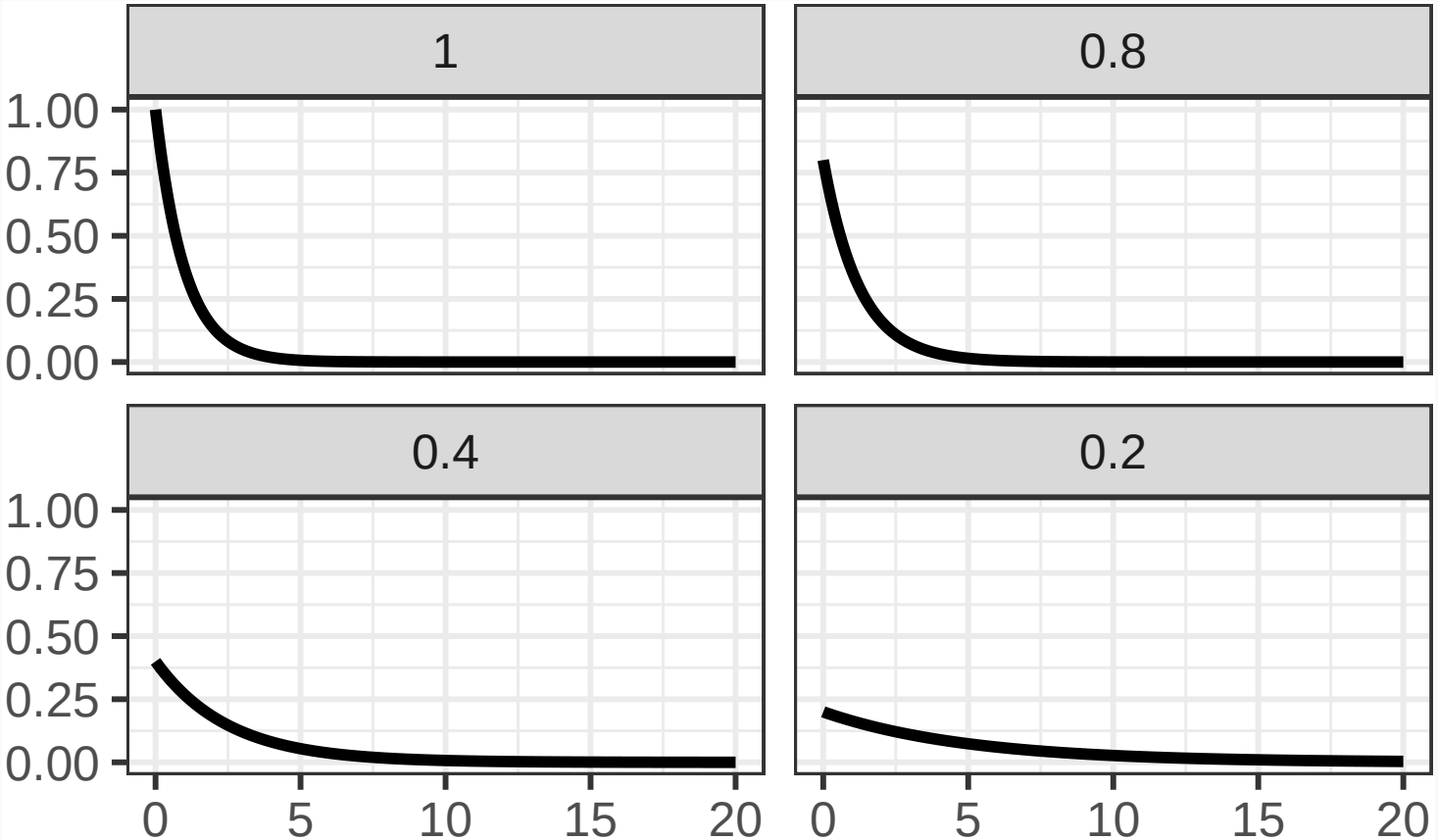
$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

On la note $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exemple

- Cette loi est souvent utilisée pour modéliser des durées de vie (composant électronique, patients atteint d'une pathologie...).

Visualisation



Le coin R

- Densité : fonction dexp

```
> dexp(1,1);dexp(3,1)
[1] 0.3678794
[1] 0.04978707
```

Le coin R

- Densité : fonction dexp

```
> dexp(1,1);dexp(3,1)
[1] 0.3678794
[1] 0.04978707
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec pexp :

```
> pexp(1,1);pexp(5,1)
[1] 0.6321206
[1] 0.9932621
```

Le coin R

- Densité : fonction dexp

```
> dexp(1,1);dexp(3,1)
[1] 0.3678794
[1] 0.04978707
```

- Fonction de répartition : $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$ avec pexp :

```
> pexp(1,1);pexp(5,1)
[1] 0.6321206
[1] 0.9932621
```

- Calcul de probabilités :

$$\mathbf{P}(X \in [2,4]) = \mathbf{P}(X \leq 4) - \mathbf{P}(X < 2).$$

```
> pexp(4,1)-pexp(2,1)
[1] 0.1170196
```

Quelques éléments de probabilité

Espérance et variance

Motivations

- Loi de probabilité : pas toujours facile à interpréter d'un point de vue pratique.

Motivations

- Loi de probabilité : pas toujours facile à interpréter d'un point de vue pratique.
- Objectif : définir des indicateurs (des nombres par exemple) qui permettent d'interpréter une loi de probabilité (tendance centrale, dispersion...).

Espérance

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).$$

Espérance

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).$$

Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de comprendre l'interprétation de l'espérance.

Espérance

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).$$

Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de comprendre l'interprétation de l'espérance.
- L'espérance revient à intégrer les valeurs de la v.a.r. X pour chaque évènement ω pondéré par la mesure de probabilité de chaque évènement.

Espérance

Définition

L'espérance d'une variable aléatoire X est le réel défini par :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).$$

Interprétation

- La formule ci-dessus ne sera d'aucun intérêt pratique, elle permet juste de comprendre l'interprétation de l'espérance.
- L'espérance revient à intégrer les valeurs de la v.a.r. X pour chaque évènement ω pondéré par la mesure de probabilité de chaque évènement.
- Elle s'interprète ainsi en terme de valeur moyenne prise par X.

Calculs d'espérance

- Pour les calculs d'espérance, on distingue les cas discrets et continus.

Propriété

- Cas discret :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\text{valeurs possibles de } X} x\mathbf{P}(X = x).$$

Calculs d'espérance

- Pour les calculs d'espérance, on distingue les cas discrets et continus.

Propriété

- Cas discret :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\text{valeurs possibles de } X} x\mathbf{P}(X = x).$$

- Cas continu :

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

où f est la densité de X.

Exemples

Loi	Espérance
$\mathcal{B}(p)$	p
$\mathcal{B}(n,p)$	np
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ

Variance

Définition

- La variance de X, notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée écart-type de X.

Variance

Définition

- La variance de X, notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée écart-type de X.

Interprétation

- La variance est un réel positif.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par X et l'espérance (moyenne) de X

Variance

Définition

- La variance de X, notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée écart-type de X.

Interprétation

- La variance est un réel positif.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par X et l'espérance (moyenne) de $X \Longrightarrow$ interprétation en terme de dispersion.

Variance

Définition

- La variance de X, notée $\mathbf{V}[X]$, est définie par :

$$\mathbf{V}[X] = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

- Sa racine carrée positive $\sigma[X]$ est appelée écart-type de X.

Interprétation

- La variance est un réel positif.
- Elle mesure l'écart entre les valeurs prises par X et l'espérance (moyenne) de $X \Longrightarrow$ interprétation en terme de dispersion.

Exemple

1. Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $\mathbf{V}[X] = p(1-p)$;
2. Loi uniforme sur $[0, 1]$: $\mathbf{V}[X] = 1/12$;

Espérance et variance de quelques lois classiques

X	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{V}[X]$
$\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$
$\mathcal{B}(n,p)$	p	$np(1-p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ

Lois discrètes

X	$\mathbf{E}[X]$	$\mathbf{V}[X]$
$\mathcal{U}_{[a,b]}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Lois continues

Modèle et estimation

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathloniens au cours de deux épreuves (jeux olympiques et decastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathloniens au cours de deux épreuves (jeux olympiques et decastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?

2. Les performances aux decastar et aux jeux olympiques sont-elles identiques ?

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathloniens au cours de deux épreuves (jeux olympiques et decastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?

2. Les performances aux decastar et aux jeux olympiques sont-elles identiques ?

3. Quelles sont les disciplines les plus influentes sur le classement ?

L'exemple du décathlon

- On s'intéresse aux performances de décathloniens au cours de deux épreuves (jeux olympiques et decastar)

Quelques problèmes

1. Quelle est la distribution de la variable vitesse au 100m ?
2. Les performances aux decastar et aux jeux olympiques sont-elles identiques ?
3. Quelles sont les disciplines les plus influentes sur le classement ?
4. Existe t-il un lien entre les performances au 100m et les autres disciplines ?
5. Si oui, peut-on le quantifier ?

Les données

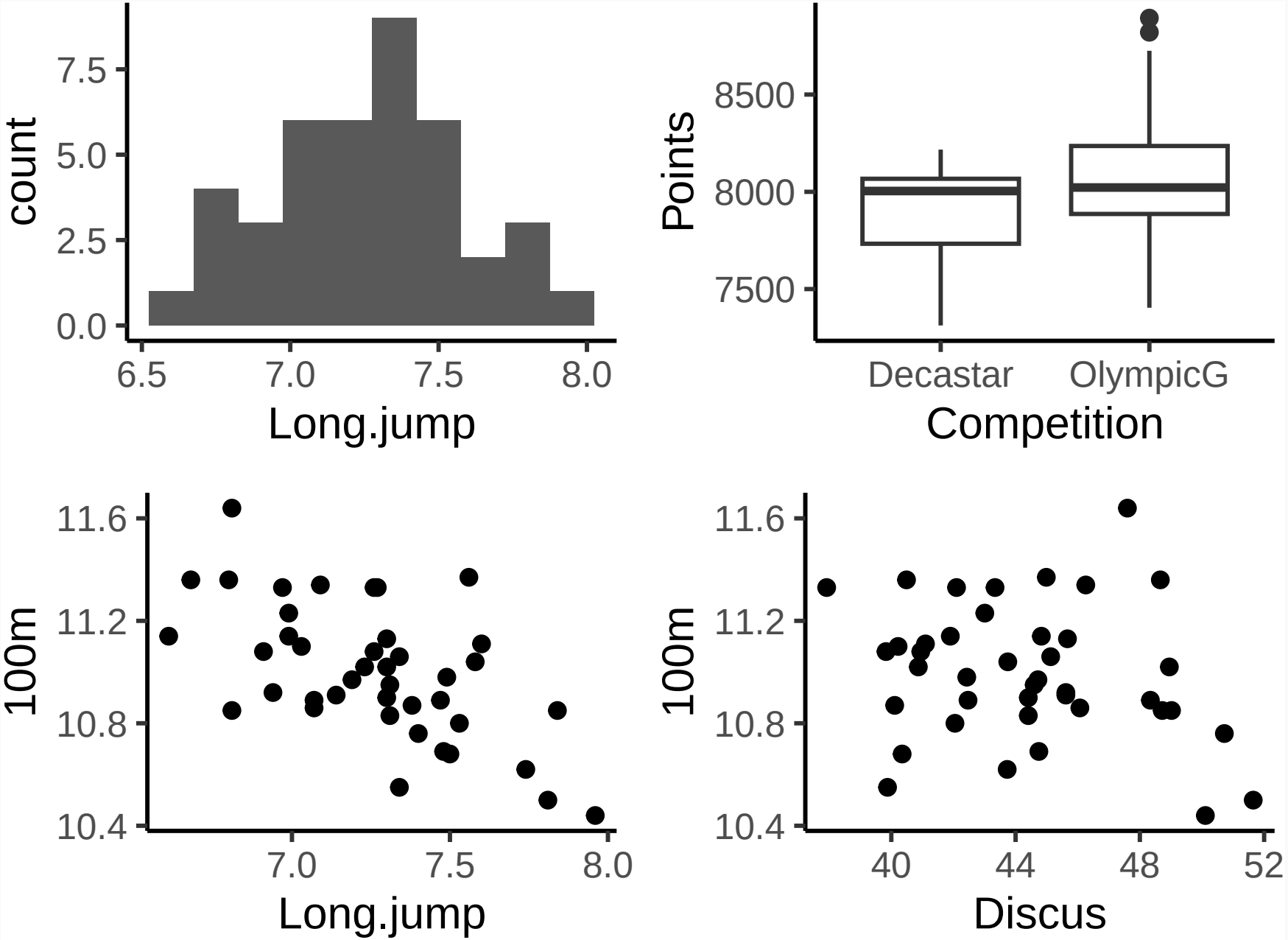
- Pour tenter de répondre à ces questions, on dispose des performances d'une vingtaine de décathloniens au cours de deux épreuves :

```
> head(decathlon)
          100m Long.jump Shot.put High.jump  400m 110m.hurdle Discus Pol
SEBRLE   11.04      7.58    14.83      2.07 49.81       14.69  43.75
CLAY     10.76      7.40    14.26      1.86 49.37       14.05  50.72
KARPOV   11.02      7.30    14.77      2.04 48.37       14.09  48.95
BERNARD  11.02      7.23    14.25      1.92 48.93       14.99  40.87
YURKOV   11.34      7.09    15.19      2.10 50.42       15.31  46.26
WARNERS  11.11      7.60    14.31      1.98 48.68       14.23  41.10
         Javeline 1500m Rank Points Competition
SEBRLE      63.19 291.7    1   8217    Decastar
CLAY        60.15 301.5    2   8122    Decastar
KARPOV      50.31 300.2    3   8099    Decastar
BERNARD     62.77 280.1    4   8067    Decastar
YURKOV      63.44 276.4    5   8036    Decastar
WARNERS     51.77 278.1    6   8030    Decastar
```

Statistiques descriptives (capital)

```
> p1 <- ggplot(decathlon)+aes(x=Long.jump)+geom_histogram(bins=10)
> p2 <- ggplot(decathlon)+aes(x=Competition,y=Points)+geom_boxplot()
> p3 <- ggplot(decathlon)+aes_(x=as.name("Long.jump"),
+                              y=as.name("100m"))+geom_point()
> p4 <- ggplot(decathlon)+aes_(x=as.name("Discus"),
+                              y=as.name("100m"))+geom_point()
```

```
> library(gridExtra)
> grid.arrange(p1,p2,p3,p4,nrow=2)
```



Modèle et estimation

Modèle statistique

- On s'intéresse d'abord uniquement à la variable 100m.
- On dispose de $n = 41$ observations $x_1, \dots, x_n$

```
> decathlon |>  summarize(moy=mean(`100m`),var=var(`100m`),
+                        min=min(`100m`),max=max(`100m`))
       moy        var   min   max
1 10.99805 0.0691811 10.44 11.64
```

- On s'intéresse d'abord uniquement à la variable 100m.
- On dispose de $n = 41$ observations $x_1, \dots, x_n$

```
> decathlon |>  summarize(moy=mean(`100m`),var=var(`100m`),
+                        min=min(`100m`),max=max(`100m`))
       moy        var   min   max
1 10.99805 0.0691811 10.44 11.64
```

Question

Peut-on dire que le temps moyen au 100m pour les décathloniens est de 10.99 ?

Hazard, aléa...

- Le résultat de 10.99 dépend des conditions dans lesquelles l'expérience a été réalisée.

Hazard, aléa...

- Le résultat de 10.99 dépend des conditions dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on re-mesure les performances de nouvelles compétitions, il est fort possible qu'on n'obtienne pas la même durée moyenne.

Hazard, aléa...

- Le résultat de 10.99 dépend des conditions dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on re-mesure les performances de nouvelles compétitions, il est fort possible qu'on n'obtienne pas la même durée moyenne.

Remarque

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé dépend des conditions expérimentales.
- Ces conditions expérimentales vont cependant être difficiles à caractériser précisément.
- On dit souvent que le hasard ou l'aléa intervient dans ces conditions.

Hazard, aléa...

- Le résultat de 10.99 dépend des conditions dans lesquelles l'expérience a été réalisée.
- Si on re-mesure les performances de nouvelles compétitions, il est fort possible qu'on n'obtienne pas la même durée moyenne.

Remarque

- Nécessité de prendre en compte que le résultat observé dépend des conditions expérimentales.
- Ces conditions expérimentales vont cependant être difficiles à caractériser précisément.
- On dit souvent que le hasard ou l'aléa intervient dans ces conditions.
- L'approche statistique prend en compte le nombre et la dispersion des observations pour apporter une réponse.

Modèle statistique

- Pour prendre en compte cet aléa, on fait l'hypothèse que les observations x_i sont issues d'une loi de probabilité $\mathbf{P}_i$ (inconnue).

Modèle statistique

- Pour prendre en compte cet aléa, on fait l'hypothèse que les observations x_i sont issues d'une loi de probabilité $\mathbf{P}_i$ (inconnue).

Echantillon i.i.d

- Si les mesures x_i sont faites de façons indépendantes et dans des conditions identiques, on dit que $x_1, \ldots, x_n$ sont n observations indépendantes et de même loi $\mathbf{P}$.
- On emploi souvent le terme échantillon i.i.d (indépendant et identiquement distribué).

Le problème statistique

Estimer

- La loi $\mathbf{P}$ ainsi que toutes ses quantités dérivées (espérance, variance) est et sera toujours inconnue.
- Le travail du statisticien sera d'essayer de retrouver, ou plutôt d'estimer, cette loi ou les quantités d'intérêt qui dépendent de cette loi.

Modèle et estimation

Quelques exemples

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Modélisation

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ athlète a amélioré, 0 sinon.

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Modélisation

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ athlète a amélioré, 0 sinon.
- Les x_i sont issues d'une loi de Bernoulli de paramètre inconnu $p \in [0, 1]$.

Efficacité d'un traitement

- On souhaite tester l'efficacité d'un nouveau traitement (autorisé) sur les performances d'athlètes.
- On traite $n = 100$ patients athlètes.
- A l'issue de l'étude, 72 patients ont amélioré leurs performances.

Modélisation

- On note $x_i = 1$ si le $i^{\text{ème}}$ athlète a amélioré, 0 sinon.
- Les x_i sont issues d'une loi de Bernoulli de paramètre inconnu $p \in [0, 1]$.
- Si les individus sont choisis de manière indépendante et ont tous la même probabilité de progresser (ce qui peut revenir à dire qu'ils sont au même niveau), il est alors raisonnable de supposer que l'échantillon est i.i.d.

Le problème statistique

Estimer le paramètre p :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

Le problème statistique

Estimer le paramètre p :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

Exemple d'estimateur

- Il parait naturel d'estimer p par la proportion d'athlètes dans l'échantillon qui ont amélioré leur performance.

Le problème statistique

Estimer le paramètre p :

$$p = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(\text{"Athlète améliore"}).$$

Exemple d'estimateur

- Il parait naturel d'estimer p par la proportion d'athlètes dans l'échantillon qui ont amélioré leur performance.
- Cela revient à estimer p par la moyenne (empirique) des x_i :

$$\hat{p} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Durée de trajet

- On s'intéresse à la durée de trajet moyenne "domicile/travail".

Durée de trajet

- On s'intéresse à la durée de trajet moyenne "domicile/travail".
- Expérience : je mesure la durée de trajet domicile/travail pendant plusieurs jours.
- Je récolte $n = 100$ observations :

```
> summary(duree_ht)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  10.62   16.42   18.46   19.37   21.88   30.20
```

Modélisation

Les données sont issues d'une loi inconnue $\mathbf{P}$.

Modélisation

Les données sont issues d'une loi inconnue $\mathbf{P}$.

Le problème statistique

Estimer l'espérance (moyenne) μ de la loi $\mathbf{P}$.

Modélisation

Les données sont issues d'une loi inconnue $\mathbf{P}$.

Le problème statistique

Estimer l'espérance (moyenne) μ de la loi $\mathbf{P}$.

Exemple d'estimateur

Là encore, un estimateur naturel de μ est donné par la moyenne empirique

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Le modèle gaussien

Cadre

- $x_1, \ldots, x_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Le problème : estimer $\mu = \mathbf{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$.

Le modèle gaussien

Cadre

- $x_1, \ldots, x_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Le problème : estimer $\mu = \mathbf{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$.

Exemple d'estimateurs

- Moyenne empirique :

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Le modèle gaussien

Cadre

- $x_1, \ldots, x_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- Le problème : estimer $\mu = \mathbf{E}[X]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$.

Exemple d'estimateurs

- Moyenne empirique :

$$\hat{\mu} = \bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

- Variance empirique :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Autres exemples

X	Paramètre	Estimateur
$\mathcal{B}(p)$	p	$\bar{x}_n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	$\bar{x}_n$
$\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	θ	$2\bar{x}_n$
$\mathcal{E}(\lambda)$	λ	$1/\bar{x}_n$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ et σ^2	$\bar{x}_n$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$

Autres exemples

X	Paramètre	Estimateur
$\mathcal{B}(p)$	p	$\bar{x}_n$
$\mathcal{P}(\lambda)$	λ	$\bar{x}_n$
$\mathcal{U}_{[0,\theta]}$	θ	$2\bar{x}_n$
$\mathcal{E}(\lambda)$	λ	$1/\bar{x}_n$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	μ et σ^2	$\bar{x}_n$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2$

Conclusion

De nombreux estimateurs sont construits à partir de la moyenne empirique $\bar{x}_n$.

La moyenne empirique

Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- La moyenne empirique est une variable aléatoire.

Remarque

- De nombreux estimateurs sont construits à partir de la moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- La moyenne empirique est une variable aléatoire.
- Elle va donc posséder une loi, une espérance, une variance...

La moyenne empirique

Cas gaussien

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une loi gaussienne.
- On considère alors $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une loi gaussienne.
- On considère alors $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Propriété

- Dans le cas gaussien, la moyenne empirique $\bar{X}_n$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- On a ainsi

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- On se place tout d'abord dans le cas où les observations suivent une loi gaussienne.
- On considère alors $X_1, \dots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

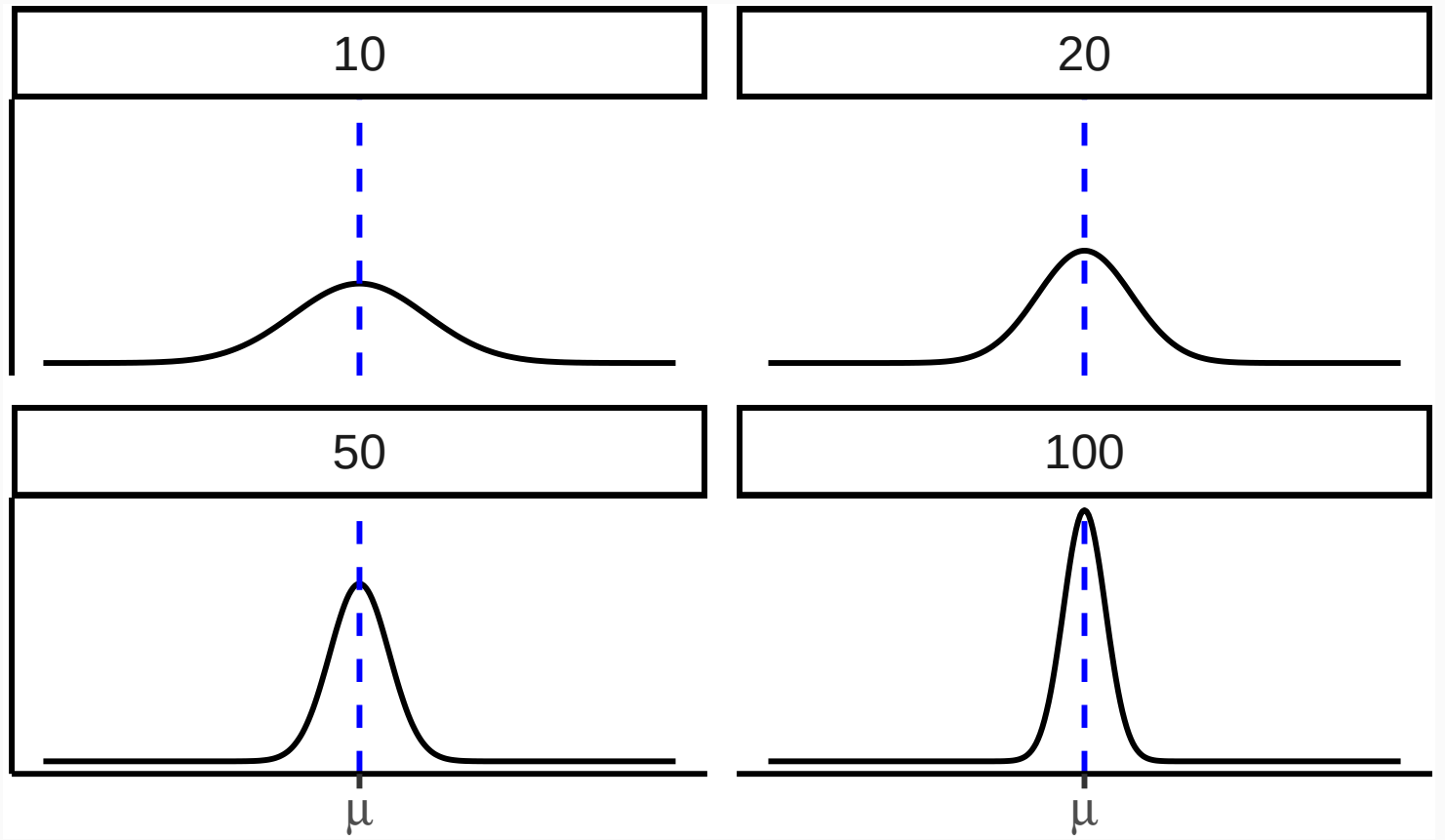
Propriété

- Dans le cas gaussien, la moyenne empirique $\bar{X}_n$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- On a ainsi

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Conclusion

- $\bar{X}_n$ est centrée autour de μ.
- Sa dispersion dépend de σ^2 et n.


10
20
50
100
μ
μ

Biais et variance

- $\bar{X}_n$ tombe toujours en moyenne sur μ. On dit que c'est un estimateur sans biais de μ.

Biais et variance

- $\bar{X}_n$ tombe toujours en moyenne sur μ. On dit que c'est un estimateur sans biais de μ.
- Sa précision augmente lorsque :
  - σ^2 diminue (difficile à contrôler) ;
  - n augmente (lorsqu'on augmente le nombre de mesures).

La moyenne empirique

Cas non gaussien

- On dispose ici d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

- On dispose ici d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

- On dispose ici d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Commentaires

- L'espérance et la variance de $\bar{X}_n$ sont identiques au cas gaussien.

- On dispose ici d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Commentaires

- L'espérance et la variance de $\bar{X}_n$ sont identiques au cas gaussien.
- Les remarques faites dans le cas gaussien restent donc valables.

- On dispose ici d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. (de même loi).
- La loi est quelconque (discrète, continue...). On note $\mu = \mathbf{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbf{V}[X_1]$.

Propriété

On a

$$\mathbf{E}[\bar{X}_n] = \mu \quad \text{et} \quad \mathbf{V}[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Commentaires

- L'espérance et la variance de $\bar{X}_n$ sont identiques au cas gaussien.
- Les remarques faites dans le cas gaussien restent donc valables.
- Seul changement : on ne connait pas ici la loi de $\bar{X}_n$ (juste son espérance et sa variance).

- Dans de nombreuses applications (intervalles de confiance, tests statistiques), on a besoin de connaître la loi de $\bar{X}_n$.
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- Dans de nombreuses applications (intervalles de confiance, tests statistiques), on a besoin de connaître la loi de $\bar{X}_n$.
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- Interprétation : $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

- Dans de nombreuses applications (intervalles de confiance, tests statistiques), on a besoin de connaître la loi de $\bar{X}_n$.
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- Interprétation : $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

La puissance du TCL

- Le théorème central limite stipule que, sous des hypothèses très faibles, on peut étendre ce résultat (pour n grand) à "n'importe quelle" suite de variables aléatoires indépendantes.

- Dans de nombreuses applications (intervalles de confiance, tests statistiques), on a besoin de connaître la loi de $\bar{X}_n$.
- On rappelle que, dans le cas gaussien,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

- Interprétation : $\mathcal{L}(\bar{X}_n) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

La puissance du TCL

- Le théorème central limite stipule que, sous des hypothèses très faibles, on peut étendre ce résultat (pour n grand) à "n'importe quelle" suite de variables aléatoires indépendantes.
- C'est l'un des résultats les plus impressionnants et les plus utilisés en probabilités et statistique.

Le TCL

Théorème Central Limite (TCL)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Le TCL

Théorème Central Limite (TCL)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

- Les hypothèses sont faibles : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.

Le TCL

Théorème Central Limite (TCL)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

- Les hypothèses sont faibles : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- Conséquence : si n est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de $\bar{X}_n$ par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

Le TCL

Théorème Central Limite (TCL)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon i.i.d. On note $\mathbf{E}[X_i] = \mu$, $\mathbf{V}[X_i] = \sigma^2$ et $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. On a alors

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

- Les hypothèses sont faibles : on demande juste des v.a.r i.i.d. qui admettent une variance.
- Conséquence : si n est suffisamment grand, on pourra approcher la loi de $\bar{X}_n$ par la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.
- On pourra écrire $\mathcal{L}(\bar{X}_n) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ mais pas

$$\mathcal{L}(\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n).$$

TCL pour modèle de Bernoulli

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.
- On a donc $\mathbf{E}[X_1] = p$ et $\mathbf{V}[X_1] = p(1-p)$.

TCL

On a d'après le TCL

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

TCL pour modèle de Bernoulli

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
- On a donc $\mathbf{E}[X_1] = p$ et $\mathbf{V}[X_1] = p(1-p)$.

TCL

On a d'après le TCL

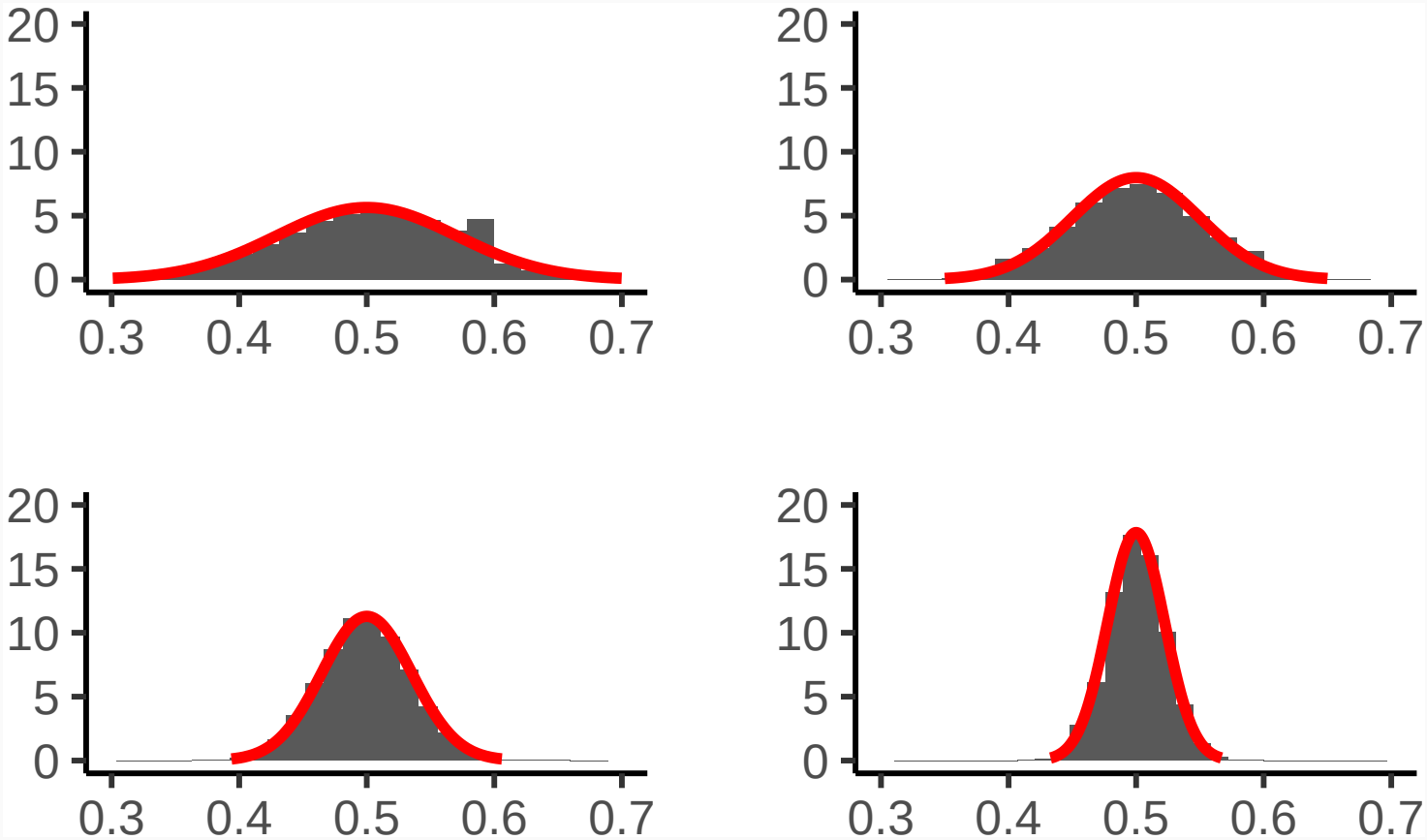
$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Conséquence

On peut donc approcher la loi de la moyenne empirique $\bar{X}_n$ par la loi

$$\mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

- Approximation TCL pour le modèle de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ avec $n = 50, 100, 200, 500$.



Intervalles de confiance

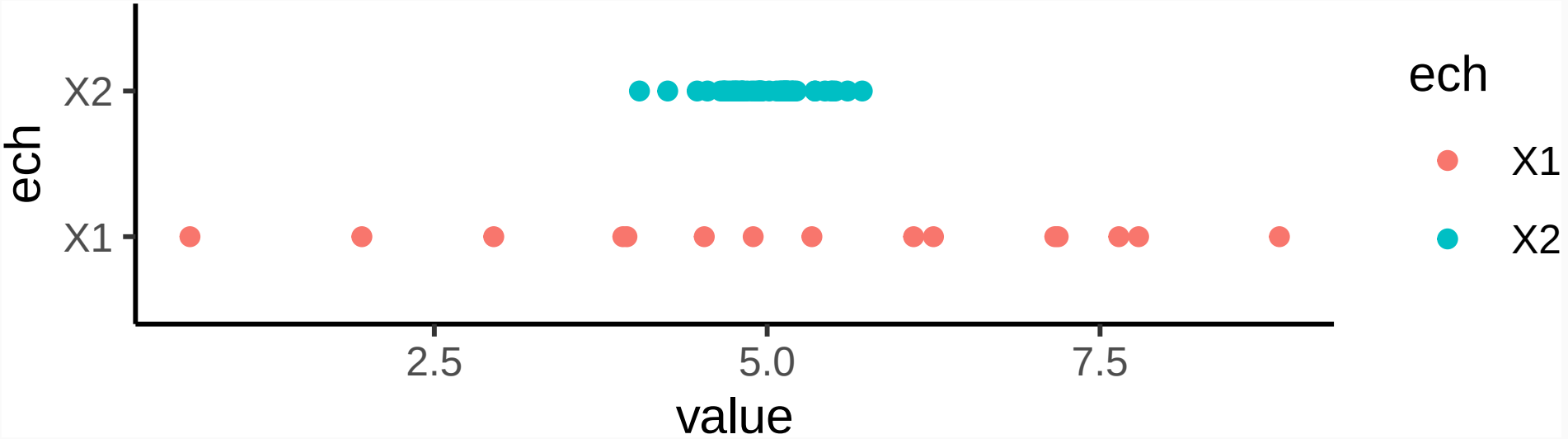
Motivations

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.

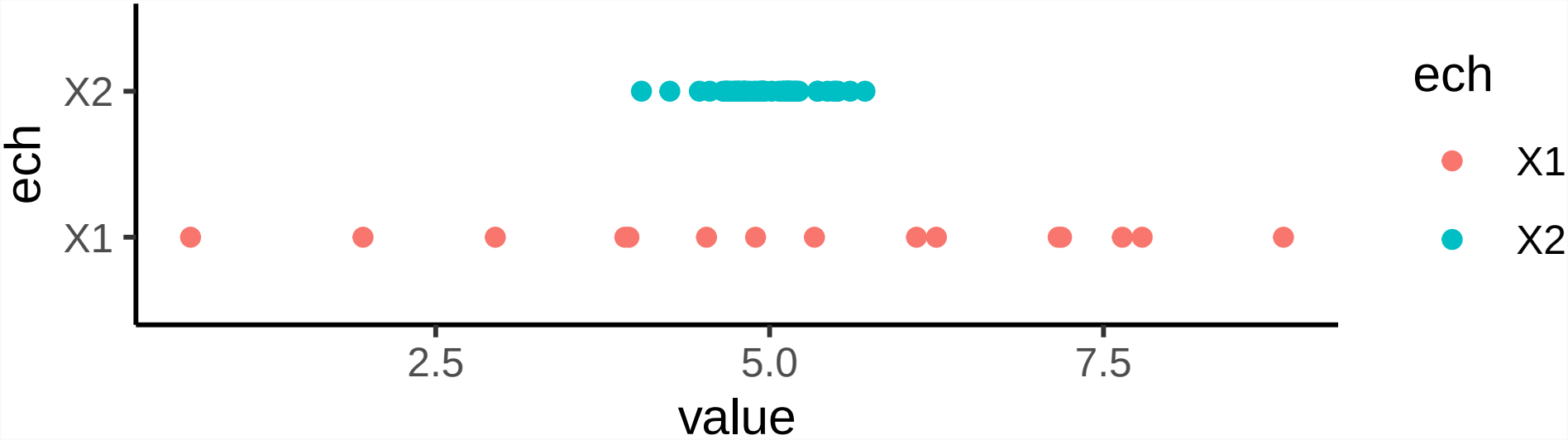
Motivations

- Donner une seule valeur pour estimer un paramètre peut se révéler trop ambitieux.
- Exemple : la performance est de 72% lorsque on prend le traitement (alors qu'on ne l'a testé que sur 100 athlètes).
- Il peut parfois être plus raisonnable de donner une réponse dans le genre, la performance se trouve dans l'intervalle $[70\%, 74\%]$ avec une confiance de 90%.

Un exemple



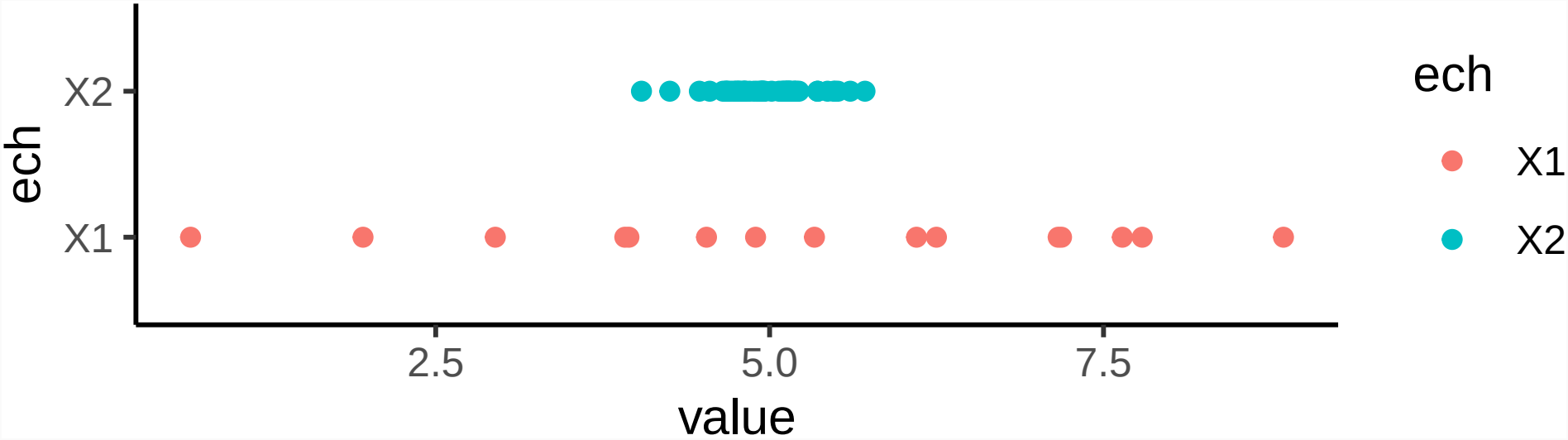
Un exemple



Remarque

- Ces deux échantillons sembelent avoir (à peu près) la même moyenne.
- Cependant,

Un exemple



Remarque

- Ces deux échantillons sembelent avoir (à peu près) la même moyenne.
- Cependant, l'échantillon 2 semble être plus précis pour estimer cette moyenne.

- $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}$ inconnue.
- Soit θ un paramètre inconnu, par exemple $\theta = \mathbf{E}[X]$.

- $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}$ inconnue.
- Soit θ un paramètre inconnu, par exemple $\theta = \mathbf{E}[X]$.

Définition

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle intervalle de confiance pour θ tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

- $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathbf{P}$ inconnue.
- Soit θ un paramètre inconnu, par exemple $\theta = \mathbf{E}[X]$.

Définition

Soit $\alpha \in]0,1[$. On appelle intervalle de confiance pour θ tout intervalle de la forme $[A_n, B_n]$, où A_n et B_n sont des fonctions telles que :

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Définition

Si $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha$, on dit que $[A_n, B_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour θ au niveau $1 - \alpha$.

Construction d'IC

- Un intervalle de confiance pour un paramètre inconnu θ se construit généralement à partir d'un estimateur de θ dont on connait la loi.

Construction d'IC

- Un intervalle de confiance pour un paramètre inconnu θ se construit généralement à partir d'un estimateur de θ dont on connait la loi.
- A partir de la loi de $\widehat{\theta}$, on cherche deux bornes A_n et B_n telle que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Construction d'IC

- Un intervalle de confiance pour un paramètre inconnu θ se construit généralement à partir d'un estimateur de θ dont on connait la loi.
- A partir de la loi de $\hat{\theta}$, on cherche deux bornes A_n et B_n telle que

$$\mathbf{P}(\theta \in [A_n, B_n]) = 1 - \alpha.$$

Remarque

A priori, plus α est petit, plus l'intervalle aura un grande amplitude.

Exemple

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Exemple

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.

Exemple

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.
- Loi de l'estimateur : $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.

Exemple

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.
- Loi de l'estimateur : $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.
- On déduit

$$\mathbf{P}\left(\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Exemple

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(\mu, 1)$.
- Question: IC de niveau 0.95 pour μ ?

Construction de l'IC

- Estimateur : $\hat{\mu} = \bar{X}_n$.
- Loi de l'estimateur : $\mathcal{L}(\hat{\mu}) = \mathcal{N}(\mu, 1/n)$.
- On déduit

$$\mathbf{P}\left(\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

- Un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ est donc donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
- Il est défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
- Il est défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Définition

Plus généralement, le quantile d'ordre α d'une variable aléatoire X est défini par le réel q_α vérifiant

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_\alpha\right) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geq q_\alpha) \geq 1-\alpha.$$

Quantiles

- $q_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
- Il est défini par

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Définition

Plus généralement, le quantile d'ordre α d'une variable aléatoire X est défini par le réel q_α vérifiant

$$\mathbf{P}\left(X \leq q_\alpha\right) \geq \alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X \geq q_\alpha) \geq 1-\alpha.$$

- Les quantiles sont généralement renvoyés par les logiciels statistique :

```
> c(qnorm(0.975),qnorm(0.95),qnorm(0.5))
[1] 1.959964 1.644854 0.000000
```

Une exemple à la main

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$:

```
> head(X)
[1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

Une exemple à la main

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$:

```
> head(X)
[1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

- Estimation de μ :

```
> mean(X)
[1] 4.546947
```

- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qnorm(0.975)*1/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.269766 4.824128
```

Loi normale (cas réel)

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On a vu qu'un IC pour μ est donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Loi normale (cas réel)

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On a vu qu'un IC pour μ est donné par

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Problème

- Dans la vraie vie, σ est inconnu !
- L'intervalle de confiance n'est donc pas calculable.

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right].$$

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right].$$

Problème

- On a bien

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Idée

1. Estimer σ^2 par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

2. Et considérer l'IC :

$$\left[\hat{\mu} - q_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \hat{\mu} + q_{1-\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right].$$

Problème

- On a bien

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

- mais

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0,1)$$

- Pour avoir la loi de

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\hat{\sigma}} \neq \mathcal{N}(0,1)$$

avec

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$$

- il faut définir d'autres lois de probabilité.

La loi normale (Rappel)

Définition

- Une v.a.r X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

La loi normale (Rappel)

Définition

- Une v.a.r X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Propriétés

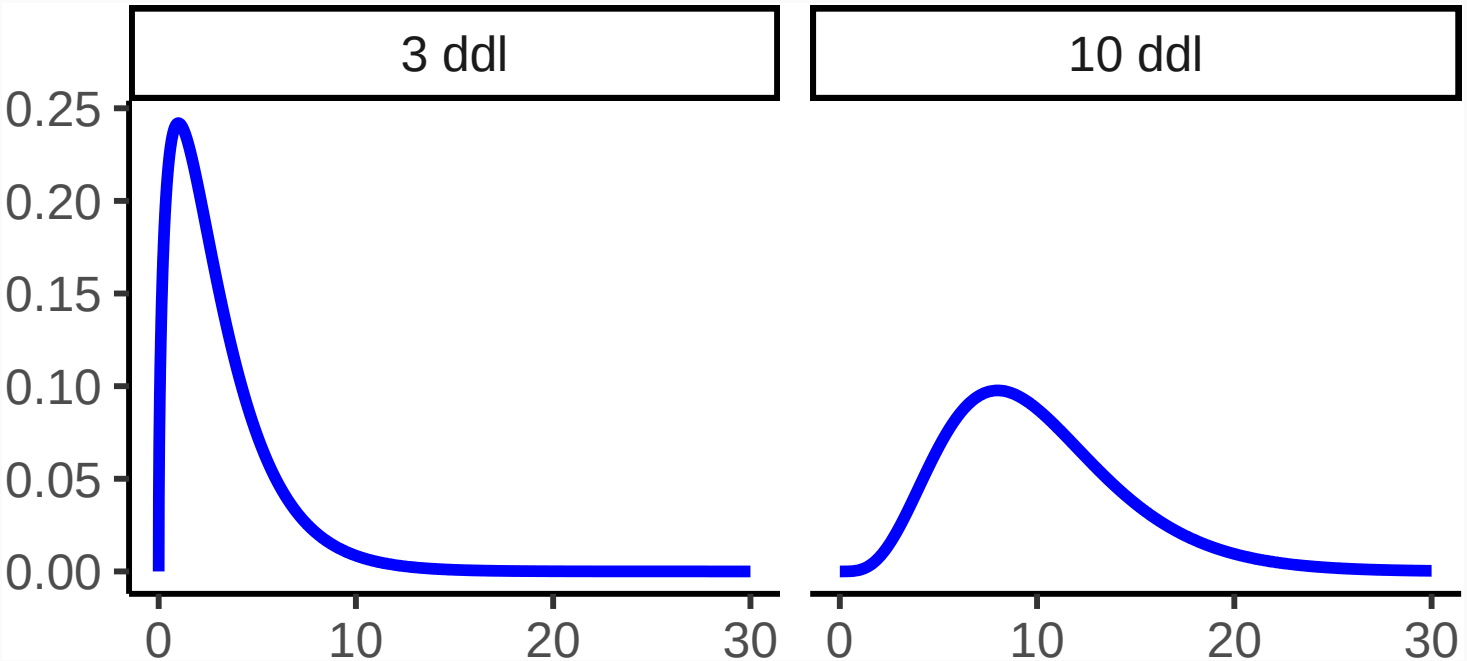
- $\mathbf{E}[X] = \mu$ et $\mathbf{V}[X] = \sigma^2$.
- Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Loi du χ^2

Définition

- Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. La variable $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ suit une loi du Chi-Deux à n degrés de liberté. Elle est notée $\chi^2(n)$.
- $\mathbf{E}[Y] = n$ et $\mathbf{V}[Y] = 2n$.



Loi de Student

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une loi de student à n degrés de liberté. On note $\mathcal{T}(n)$.

Loi de Student

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

suit une loi de student à n degrés de liberté. On note $\mathcal{T}(n)$.

- $\mathbf{E}[T] = 0$ et $\mathbf{V}[T] = n/(n-2)$.

Loi de Student

Définition

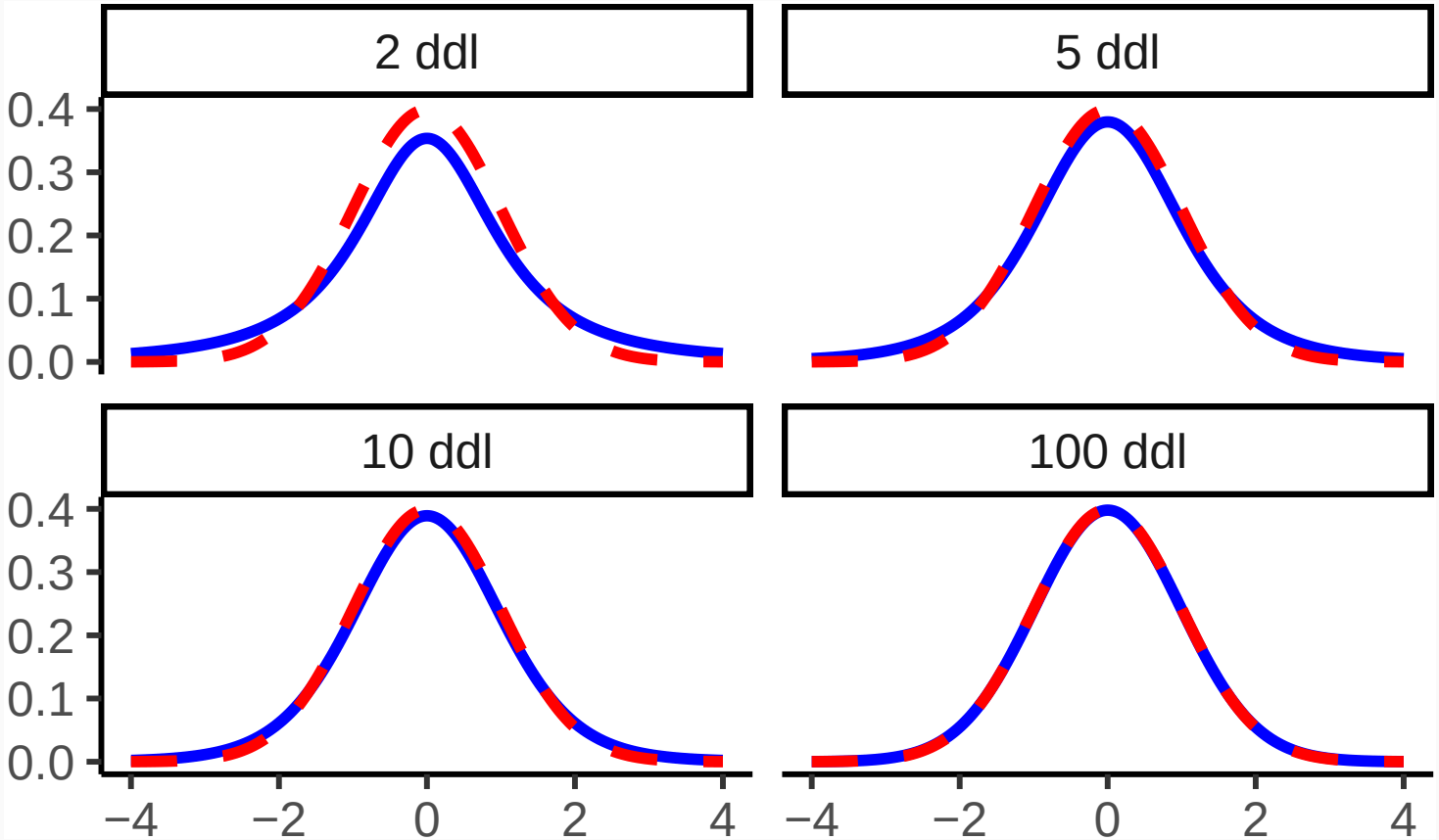
- Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

  suit une loi de student à n degrés de liberté. On note $\mathcal{T}(n)$.

- $\mathbf{E}[T] = 0$ et $\mathbf{V}[T] = n/(n-2)$.

- Lorsque n est grand la loi de student à n degrés de liberté peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.



Légende

Densités des lois de student à 2, 5, 10 et 100 degrés de liberté (bleu) et densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (rouge).

Loi de Fisher

Définition

- Soient X et Y deux v.a.r indépendantes de lois $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/m}$$

suit une loi de Fisher à m et n degrés de liberté. On note $\mathcal{F}(m, n)$.

Loi de Fisher

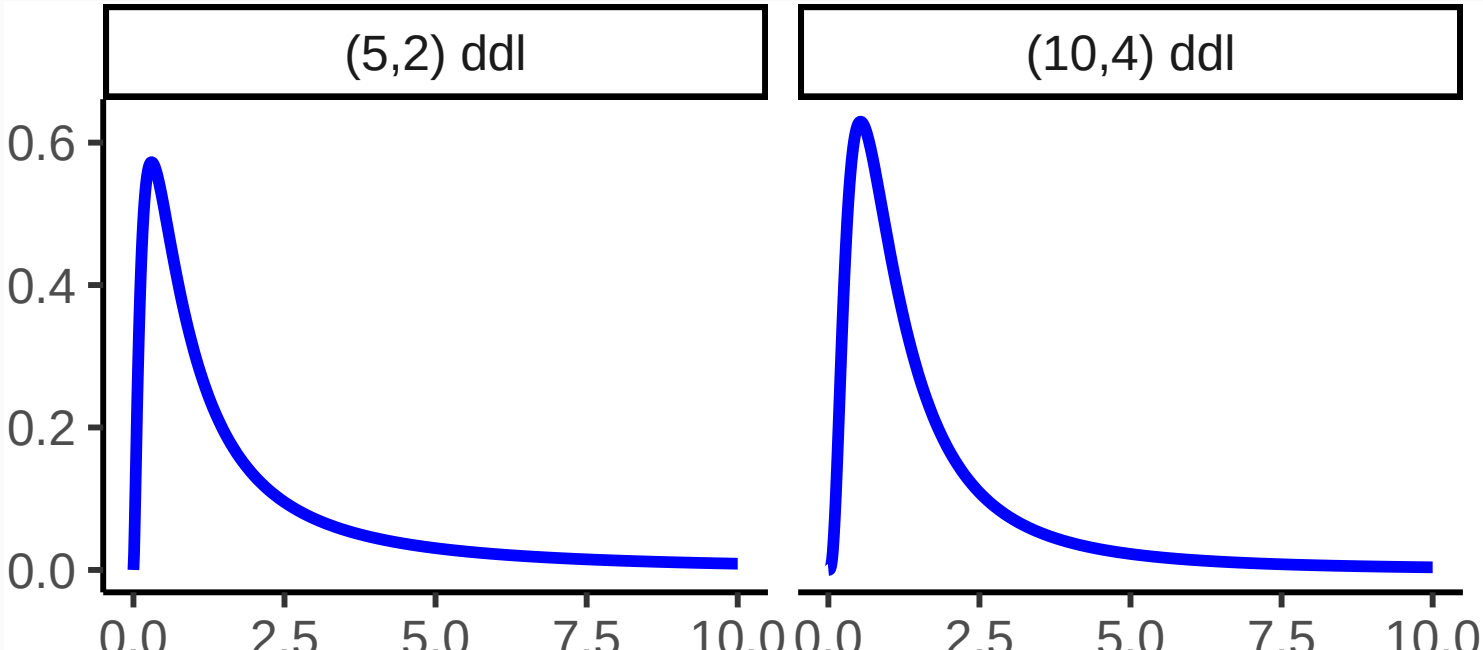
Définition

- Soient X et Y deux v.a.r indépendantes de lois $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$. Alors la v.a.r

$$F = \frac{X/m}{Y/m}$$

suit une loi de Fisher à m et n degrés de liberté. On note $\mathcal{F}(m,n)$.

- Si $F \sim \mathcal{F}(m,n)$ alors $1/F \sim \mathcal{F}(n,m)$.



Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
2. $\bar{X}_n$ et S^2 sont indépendantes.

Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
2. $\bar{X}_n$ et S^2 sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

Théorème de Cochran

- $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
- On note

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Théorème de Cochran

On a alors

1. $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.
2. $\bar{X}_n$ et S^2 sont indépendantes.
3. On déduit

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

Remarque

1 et 3 sont très importants pour construire des intervalles de confiance.

IC pour la loi gaussienne

IC pour μ

On déduit du résultat précédent qu'un IC de niveau $1-\alpha$ pour μ est donné par

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à $n-1$ ddl.

IC pour la loi gaussienne

IC pour μ

On déduit du résultat précédent qu'un IC de niveau $1-\alpha$ pour μ est donné par

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right],$$

où $t_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à $n-1$ ddl.

IC pour σ^2

Un IC de niveau $1-\alpha$ pour σ^2 est donné par

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}}\right]$$

où $\chi_{1-\alpha/2}$ et $\chi_{\alpha/2}$ sont les quantiles d'ordre $1-\alpha/2$ et $\alpha/2$ de loi $\chi^2(n-1)$.

Exemple (IC pour μ)

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

```
> head(X)
[1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

Exemple (IC pour μ)

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

```
> head(X)
[1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

- Estimation de μ :

```
> mean(X)
[1] 4.546947
```

Exemple (IC pour μ)

- $n = 50$ observation issues d'une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

```
> head(X)
[1] 3.792934 5.277429 6.084441 2.654302 5.429125 5.506056
```

- Estimation de μ :

```
> mean(X)
[1] 4.546947
```

- Estimation de σ^2 :

```
> S <- var(X)
> S
[1] 0.783302
```

- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.295420 4.798474
```

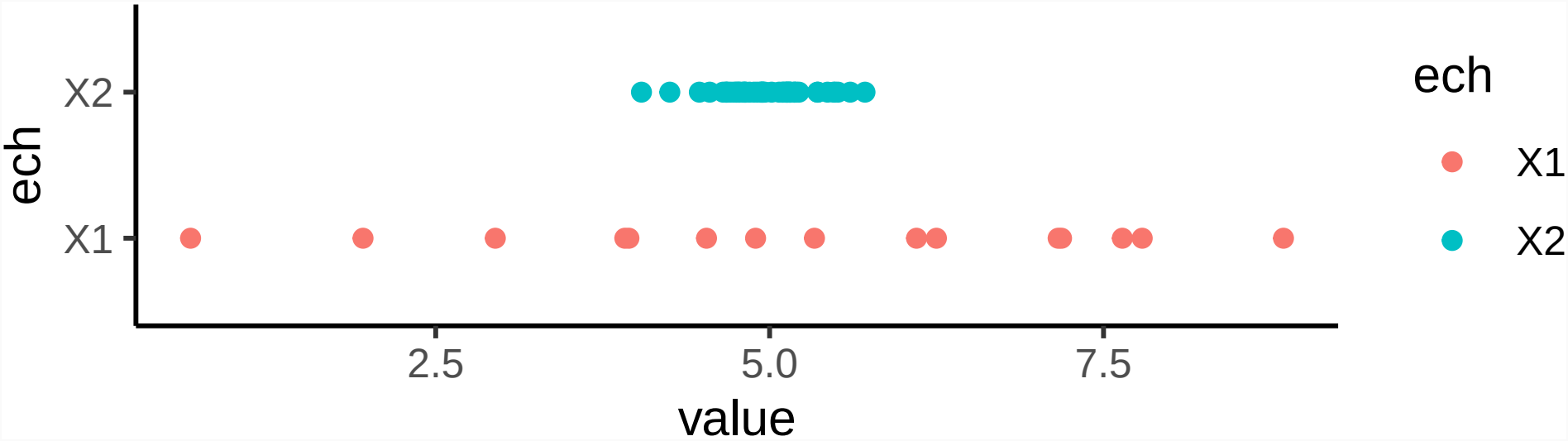
- Intervalle de confiance de niveau 95% :

```
> binf <- mean(X)-qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> bsup <- mean(X)+qt(0.975,49)*sqrt(S)/sqrt(50)
> c(binf,bsup)
[1] 4.295420 4.798474
```

- On peut obtenir directement l'intervalle de confiance à l'aide de la fonction t.test :

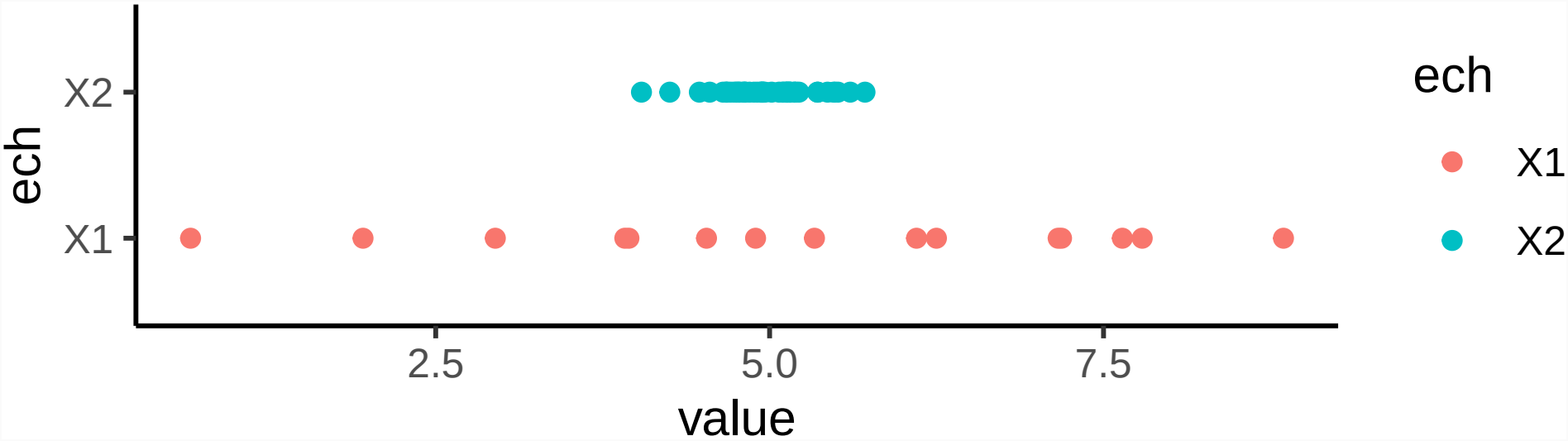
```
> t.test(X)$conf.int
[1] 4.295420 4.798474
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Autre exemple




```
> t.test(df1$value)$conf.int[1:2]
[1] 3.990982 6.563659
> t.test(df2$value)$conf.int[1:2]
[1] 4.887045 5.074667
```

Autre exemple




```
> t.test(df1$value)$conf.int[1:2]
[1] 3.990982 6.563659
> t.test(df2$value)$conf.int[1:2]
[1] 4.887045 5.074667
```

Conclusion

Sans surprise, on retrouve bien qu'on est plus précis avec l'échantillon 2.

Exemple (IC pour σ^2)

- On obtient l'IC pour σ^2 à l'aide de la formule

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}}\right]$$

Exemple (IC pour σ^2)

- On obtient l'IC pour σ^2 à l'aide de la formule

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}}\right]$$

- On peut donc le calculer sur R :

```
> binf <- 49*S/qchisq(0.975,49)
> bsup <- 49*S/qchisq(0.025,49)
> c(binf,bsup)
[1] 0.5465748 1.2163492
```

Application décathlon

- IC de niveau 95% pour la longueur moyenne en saut en longueur :

```
> t.test(decathlon$Long.jump)$conf.int
[1] 7.160131 7.359869
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

- IC de niveau 95% pour la temps moyen au 1500m :

```
> t.test(decathlon$`1500m`)$conf.int
[1] 275.3403 282.7094
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

- IC de niveau 90% pour la temps moyen au 1500m :

```
> t.test(decathlon$`1500m`,conf.level=0.90)$conf.int
[1] 275.9551 282.0946
attr(,"conf.level")
[1] 0.9
```

Remarque

L'IC à 95% a une amplitude plus grande que celui à 90% (c'est normal).

La question de la taille d'échantillon

Une question fréquente

Quelle taille d'échantillon minimale dois-je avoir pour mon problème ?

La question de la taille d'échantillon

Une question fréquente

Quelle taille d'échantillon minimale dois-je avoir pour mon problème ?

- Question difficile $\Longrightarrow$ pas de réponse universelle.
- Nécessité de se donner une contrainte.

Un exemple pour un IC

- Pour une moyenne, l'IC est donné par :

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Question

Je cherche la taille n de manière à ce que mon IC ait une longueur inférieurs où égale à ℓ.

Un exemple pour un IC

- Pour une moyenne, l'IC est donné par :

$$\left[\bar{X}_n - t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right].$$

Question

Je cherche la taille n de manière à ce que mon IC ait une longueur inférieurs où égale à ℓ.

- La longueur de l'IC est égale à $2t_{1-\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$, on cherche donc n tel que :

$$n \geq \frac{4t_{1-\alpha/2}^2 S^2}{\ell^2}.$$

Remarque

Nécessité de connaître (ou d'avoir une idée sur) la valeur de S^2.

Exemple

Remarque

Je sais que la variance de mes données est de l'ordre de 1 et je veux que la longueur de mon IC soit inférieure ou égale à 0.25.

Exemple

Remarque

Je sais que la variance de mes données est de l'ordre de 1 et je veux que la longueur de mon IC soit inférieure ou égale à 0.25.

- Le nombre minimal d'observations pour ce niveau de précision est de

```
> 4*qt(0.975,100)/(0.25^2)
[1] 126.9742
```

Une introduction aux tests

Objectif

Prendre une décision

Objectif

Prendre une décision

Exemple

- n observations $x_1, \ldots, x_n$ issues d'une loi $\mathbf{P}$ inconnue.
- Est-ce que la moyenne (espérance) de $\mathbf{P}$ est égale à μ_0 ou est-ce qu'elle est supérieurs à μ_0 ?

Hypothèses

- On note μ l'espérance de $\mathbf{P}$.
- On doit choisir entre 2 hypothèses :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > \mu_0.$$

Hypothèses

- On note μ l'espérance de $\mathbf{P}$.
- On doit choisir entre 2 hypothèses :

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > \mu_0.$$

Deux conclusions possibles

- accepter $H_0 \Longrightarrow \mathcal{A}_{H_0}$ ou
- rejeter $H_0 \Longrightarrow \mathcal{R}_{H_0}$.

2 types d'erreur

Erreur de première espèce

- Rejeter H_0 à tort.
- Mesurée par la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie :

$$\mathbf{P}_{H_0}(\mathcal{R}_{H_0})$$

2 types d'erreur

Erreur de première espèce

- Rejeter H_0 à tort.
- Mesurée par la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie :

$$\mathbf{P}_{H_0}(\mathcal{R}_{H_0})$$

Erreur de deuxième espèce

- Accepter H_0 à tort.
- Mesurée par la probabilité d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie :

$$\mathbf{P}_{H_1}(\mathcal{A}_{H_0})$$

Dissymétrie des hypothèses

- Difficile de se concentrer simultanément sur ces deux erreurs.

Principe de Neyman-Pearson

Contrôler le risque de première espèce en fixant un niveau α (souvent 5%) qui corresponde à ce risque.

Dissymétrie des hypothèses

- Difficile de se concentrer simultanément sur ces deux erreurs.

Principe de Neyman-Pearson

Contrôler le risque de première espèce en fixant un niveau α (souvent 5%) qui corresponde à ce risque.

Conséquence

L'hypothèse nulle est "privilégiée".

Test sur une moyenne

- n observations $x_1, \ldots, x_n$ de loi $\mathbf{P}$ d'espérance μ inconnue.
- On veut tester $H_0 : \mu = 5$ contre $H_1 : \mu > 5$.

Test sur une moyenne

- n observations $x_1, \dots, x_n$ de loi $\mathbf{P}$ d'espérance μ inconnue.
- On veut tester $H_0 : \mu = 5$ contre $H_1 : \mu > 5$.
- Statistique de test :

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

Test sur une moyenne

- n observations $x_1, \dots, x_n$ de loi $\mathbf{P}$ d'espérance μ inconnue.
- On veut tester $H_0 : \mu = 5$ contre $H_1 : \mu > 5$.
- Statistique de test :

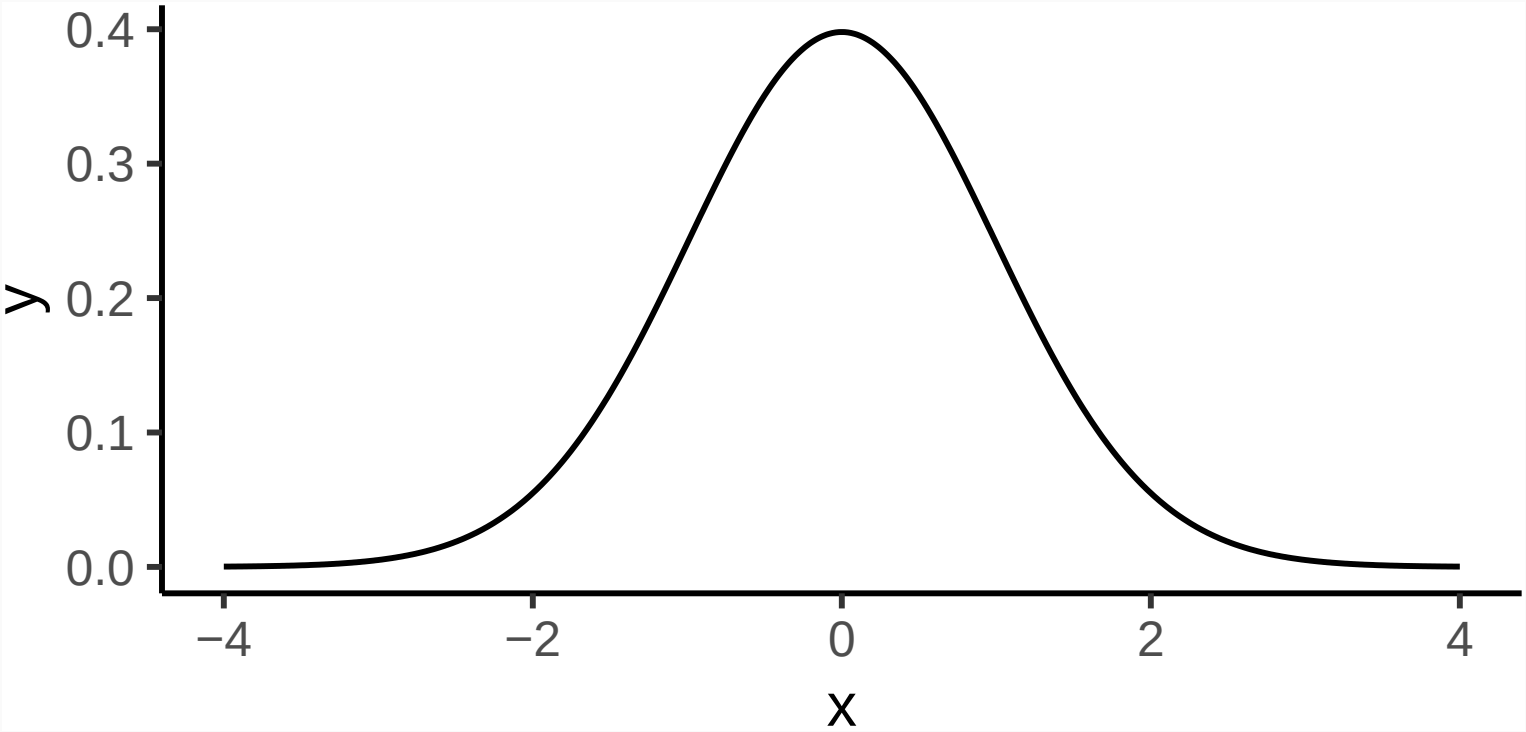
$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

- Sous H_0 (si H_0 est vraie) :

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - 5}{S} \sim \mathcal{T}(n-1).$$

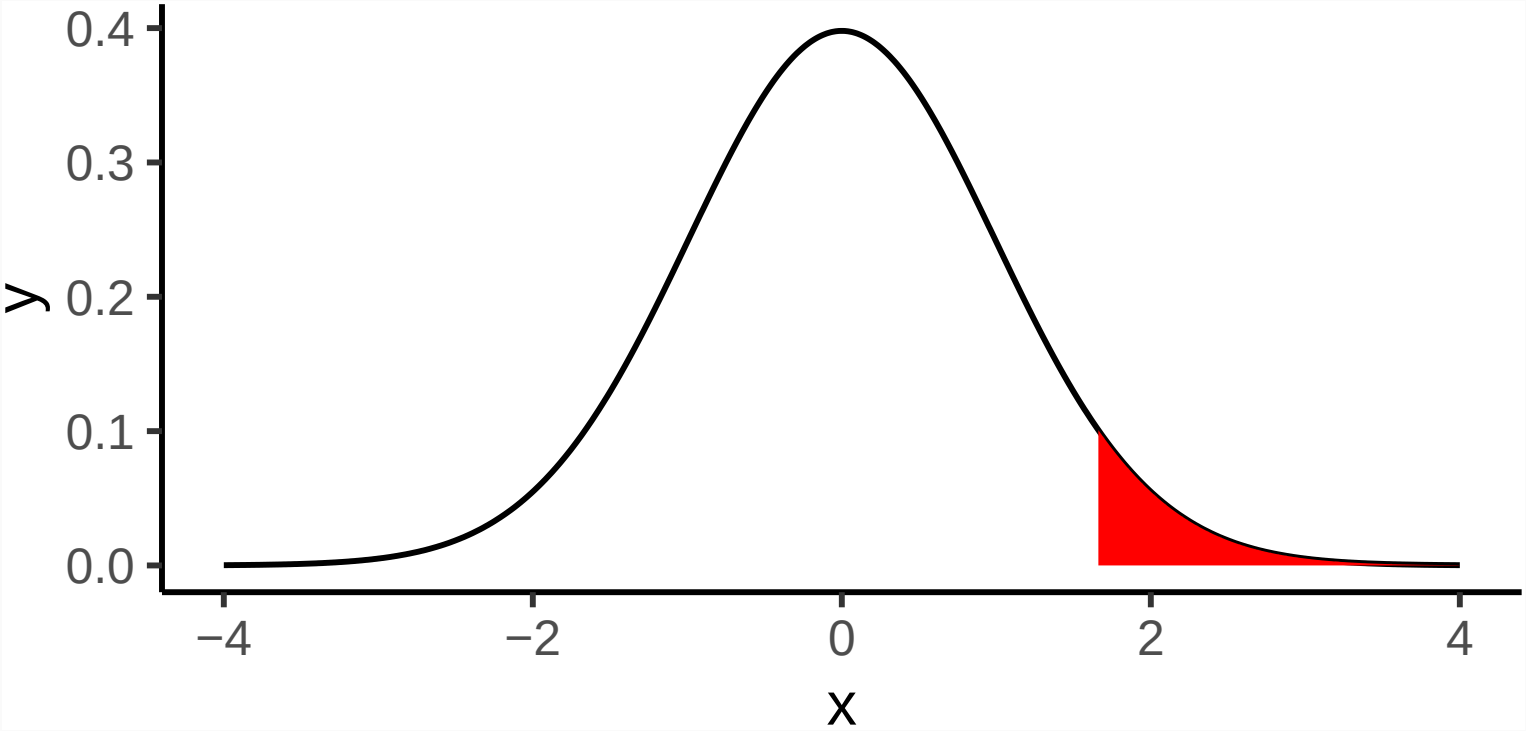
Zone de rejet

- On définit une zone de rejet de telle sorte que le risque de première espèce soit de 5% :



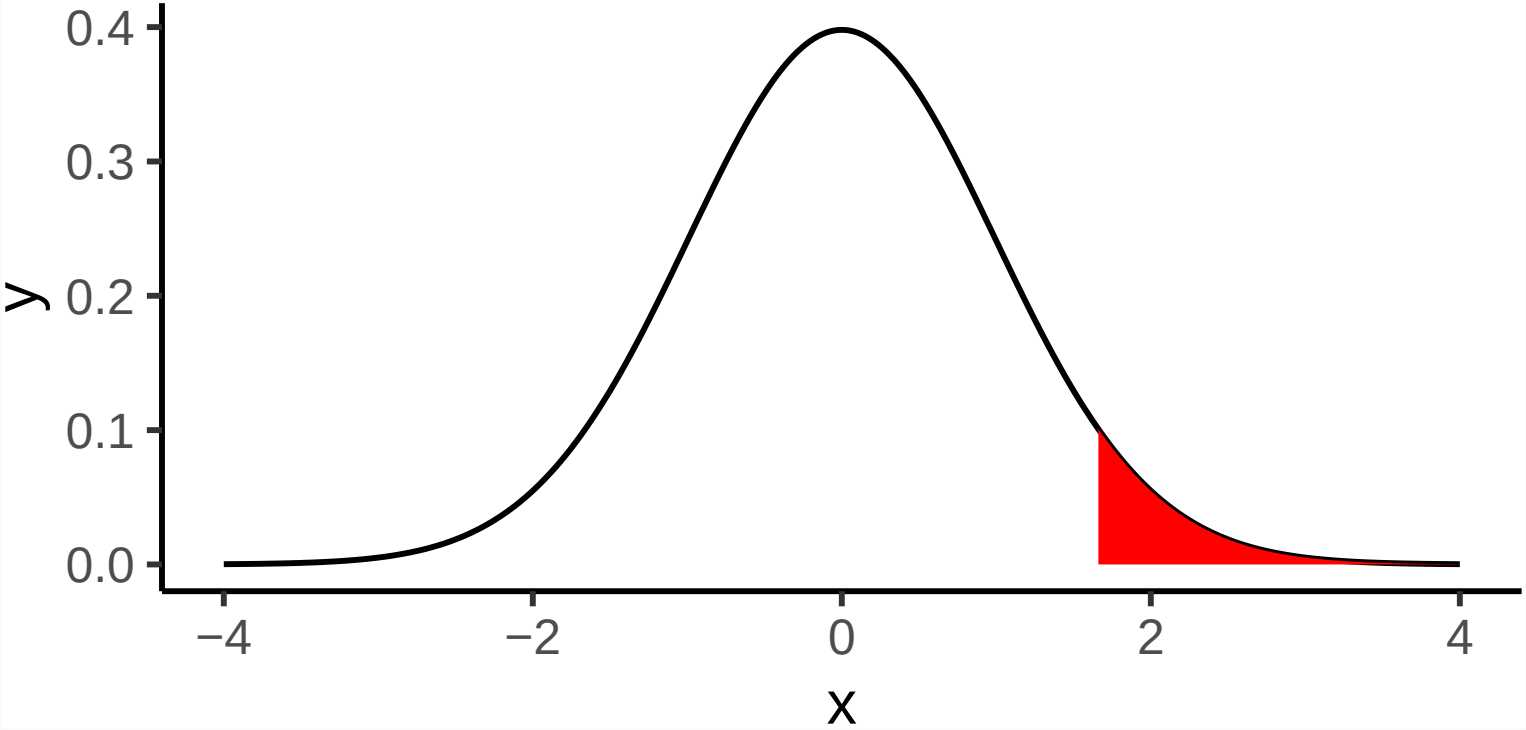
Zone de rejet

- On définit une zone de rejet de telle sorte que le risque de première espèce soit de 5% :



Zone de rejet

- On définit une zone de rejet de telle sorte que le risque de première espèce soit de 5% :



Conclusion

Si la valeur observée de la statistique de test tombe dans la zone de rejet, on rejette l'hypothèse nulle. Sinon on l'accepte.

Exemple

```
[1] 5.245197
```

- Les données :

```
> length(X)
[1] 100
> head(X)
[1] 5.585529 5.709466 4.890697 4.546503 5.605887 3.182044
```

- La zone de rejet

```
> qt(0.95,df=99)
[1] 1.660391
```

- La statistique de test

```
> (t <- sqrt(100)*(mean(X)-5)/sqrt(var(X)))
[1] 2.199609
```

- Conclusion : on rejette H_0 au niveau 5%.

Le coin R

- On peut bien entendu retrouver tout ça avec la fonction `t.test` :

```
> t.test(X,mu=5,alternative = "greater")

    One Sample t-test

data:  X
t = 2.1996, df = 99, p-value = 0.01508
alternative hypothesis: true mean is greater than 5
95 percent confidence interval:
 5.060108      Inf
sample estimates:
mean of x
 5.245197
```

La probabilité critique

- Les logiciels renvoient un indicateur, appelé probabilité critique ou valeur p qui permet de prendre la décision.

La probabilité critique

- Les logiciels renvoient un indicateur, appelé probabilité critique ou valeur p qui permet de prendre la décision.
- Sur l'exemple précédent, elle correspond à la probabilité que, sous H_0, la statistique de test T dépasse la valeur observée t_{obs} :

$$pc = \mathbf{P}_{H_0}(T > t_{\text{obs}}).$$

Règle de décision

- Si $pc > 0.05$ on accepte H_0.
- Sinon on rejette.

- On peut retrouver cette valeur

```
> 1-pt(t,df=99)
[1] 0.01508072
```

Comparer des moyennes

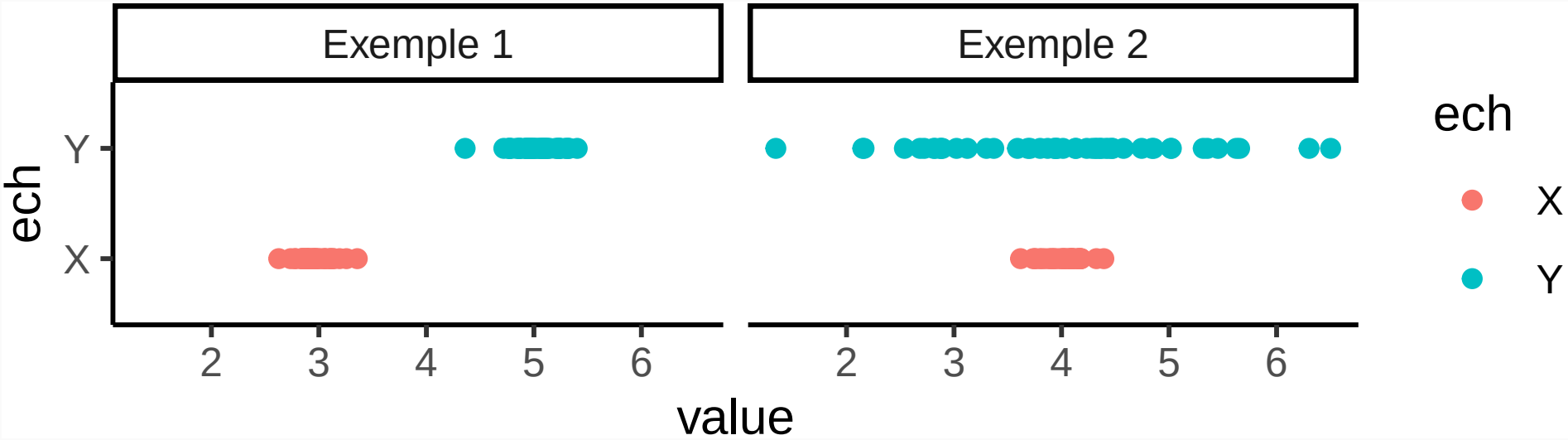
Question (fréquente)

- Peut-on dire que deux populations ont les mêmes catactéristiques ?
- Ou plus simplement que deux caractéristiques ont la même moyenne ?

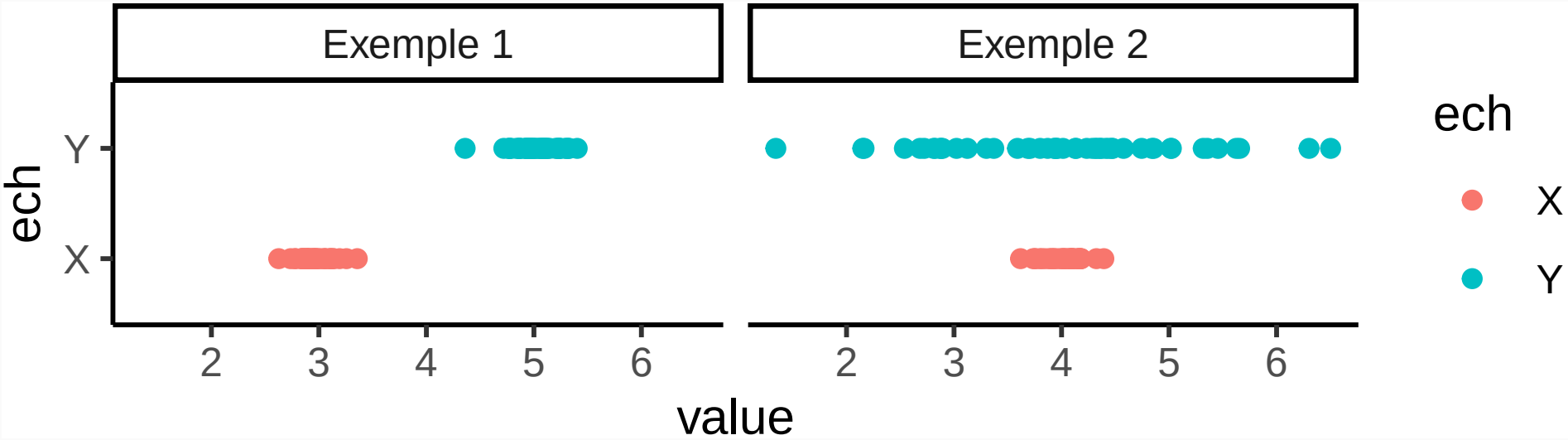
Observations

- $X_1, \dots, X_{n_1}$ observations pour la population 1.
- $Y_1, \dots, Y_{n_2}$ observations pour la population 2.

Exemple



Exemple



Idée

Utiliser un test d'hypothèses.

Comparer des moyennes.

- Hypothèses : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contre $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.

Comparer des moyennes.

- Hypothèses : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contre $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.
- Méthode : trouver la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$.

Comparer des moyennes.

- Hypothèses : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contre $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.
- Méthode : trouver la loi de $\bar{X} - \bar{Y}$.
- Résultat : cette loi est proche d'un loi Gaussienne. On peut montrer plus précisément que

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_1} + \frac{S_Y^2}{n_2}}}$$

  suit un loi de Student à ν degrés de liberté (ν par de forme explicite pour ν).
- On déduit une zone de rejet bilatérale.

Exemple 1

- On reprend les deux échantillons des diapos précédentes.

```
> t.test(df1$value,df2$value)

    Welch Two Sample t-test

data:  df1$value and df2$value
t = -55.526, df = 81.644, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -2.134079 -1.986443
sample estimates:
mean of x mean of y
 2.965286  5.025547
```

Exemple 1

- On reprend les deux échantillons des diapos précédentes.

```
> t.test(df1$value,df2$value)

    Welch Two Sample t-test

data:  df1$value and df2$value
t = -55.526, df = 81.644, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -2.134079 -1.986443
sample estimates:
mean of x mean of y
 2.965286  5.025547
```

Conclusion

$pc < 0.05 \Longrightarrow$: on rejette H_0

Exemple 2

```
> t.test(df3$value,df4$value)

    Welch Two Sample t-test

data:  df3$value and df4$value
t = 0.05457, df = 52.455, p-value = 0.9567
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3040912  0.3210965
sample estimates:
mean of x mean of y
 4.015909  4.007406
```

Exemple 2

```
> t.test(df3$value,df4$value)

    Welch Two Sample t-test

data:  df3$value and df4$value
t = 0.05457, df = 52.455, p-value = 0.9567
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3040912  0.3210965
sample estimates:
mean of x mean of y
 4.015909  4.007406
```

Conclusion

$pc > 0.05 \Longrightarrow$: on accepte H_0.