Licence 3 MIASHS **Statistique inférentielle**

QCM
Examen du 06/11/2018

Instructions :

- Le sujet comprend 4 exercices pour 15 questions au total. Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses.
- Seul le questionnaire à la 4ème feuille est à rendre. Vous commencerez par renseigner votre nom et prénom dans la case prévue. Il n'est pas utile de renseigner le numéro d'étudiant.
- Il faut **colorier** les cases correspondants aux bonnes réponses (sur la page 7), mettre une croix dans la case n'est **pas suffisant**. Les cases devront être **coloriées avec un stylo noir** (pas de crayon papier, de stabilo...).
- Tous les sujets sont différents, si vous commettez une erreur en coloriant la case, vous pouvez demander un autre sujet complet, il faudra dans ce cas recommencer le devoir au début.
- Le barème sera effectué de la façon suivante :
  - Aucune case coloriée entrainera une note de 0 sur la question.
  - Pour les questions à une seule bonne réponse (sans le symbole ♣), un nombre de points sera affecté (par exemple +2) si la bonne case est cochée. Un nombre de points sera retranché (par exemple -1) si une mauvaise case est coloriée ou si plusieurs cases sont coloriées.
  - Pour les questions avec plusieurs bonnes réponses (avec le symbole ♣), un nombre de points (par exemple +0.5) sera affecté pour chaque bonne réponse coloriée et pour chaque mauvaise réponse non coloriée. Un nombre de points (par exemple -0.5) sera retranché pour chaque mauvaise réponse coloriée et pour chaque bonne réponse non coloriée.
- La correction étant automatique, un non respect des consignes aura forcément un impact sur la note finale.

Durée : 1 heure 15 minutes.

Exercice 1.

Question 1 ♣ Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s)

- [A] L'espérance d'une variable aléatoire réelle est toujours positive ou nulle
- ■ L'espérance de X est un nombre réel
- [C] $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$
- [D] La fonction de répartition de X vaut $F(x) = \mathbf{P}(x \leq X)$
- ■ $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
- [F] Une densité de probabilité prend toujours des valeurs négatives
- ■ $\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ La fonction de répartition de X vaut $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$
- [I] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Soit X une variable aléatoire réelle continues de densité f_X qui admet une variance. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s)

- ■ $\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ $\mathbf{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ $\mathbf{P}(X \geq 0) = \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$
- [E] $\mathbf{P}(X = 0) = f(0)$
- [F] $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$
- [G] $\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\mathrm{d}x$
- [H] $\mathbf{P}(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ $\mathbf{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ Soit X une variable aléatoire réelle continues de loi uniforme sur $[-\theta, \theta]$ avec $\theta > 0$. On note F_X la fonction de répartition de X et f_X sa densité. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s)

- [A] $\mathbf{V}[X] = \theta^2/12$
- ■ $\mathbf{E}[X] = 0$
- [C] $\mathbf{P}(X = 0) = 1/(2\theta)$
- ■ $\mathbf{P}(X > -2\theta) = 1$
- [E] $\mathbf{P}(X > 2\theta) = 1$
- ■ $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1/2$
- [G] $f_X(x) = \frac{\theta}{2}\mathbf{1}_{[-\theta,\theta]}(x)$
- [H] $F_X(\theta) = \theta$
- ■ $F_X(0) = 1/2$
- [J] $\mathbf{E}[X] = \theta/2$
- [K] $F_X(\theta) = F_X(-\theta)$
- ■ $\mathbf{V}[X] = \theta^2/3$
- ■ $f_X(x) = \frac{2}{\theta}\mathbf{1}_{[-\theta,\theta]}(x)$
- [N] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 2.

Question 4 ♣ Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s)

- ■ $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ La fonction de répartition de X vaut $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$
- [C] La fonction de répartition de X vaut $F(x) = \mathbf{P}(X < x)$
- ■ $\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$
- ■ L'espérance de X est un nombre réel
- [F] $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x$
- [G] La fonction de répartition de X vaut $F(x) = \mathbf{P}(x \leq X)$
- [H] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbf{P}_\theta$ et de vraisemblance $L(x, \theta)$. L'information de Fisher (si elle existe) associée à X est définie par :

- ■ $\mathbf{V}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right]$
- ■ $-\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(X,\theta))\right]$
- ■ $\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right)^2\right]$
- [D] $\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(X,\theta))\right]$
- [E] $-\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right)^2\right]$
- [F] $\mathbf{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right]$
- [G] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 6 ♣ Soit $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu. Soit $\hat{\theta}$ un estimateur de θ. On note $b(\hat{\theta})$ son biais. Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ vaut (on cochera la (ou les) assertion(s) vraie(s)) :

- ■ $b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- ■ $\mathbf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$
- [C] $\mathbf{E}[(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2]$
- [D] $b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\theta)$
- [E] $b(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles i.i.d de loi $\mathbf{P}_\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu. On désigne par $\hat{\theta}$ un estimateur de θ. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- ■ Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ est toujours positif ou nul
- ■ $\hat{\theta}$ est une variable aléatoire
- ■ La variance de $\hat{\theta}$ est toujours positive ou nulle
- [D] Le biais de $\hat{\theta}$ est toujours positif ou nul
- [E] $\hat{\theta}$ est un nombre réel
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Pour les 4 questions suivantes, on considère $X_1, \ldots, X_n$ n v.a.r i.i.d. de loi uniforme sur $]\theta, 10[$ avec $\theta \in]0, 10[$.

Question 8 La densité de X_1 vaut:

- [A] $f(x) = \frac{1}{\theta-10}\mathbf{1}_{]\theta/2,10[}(x)$
- [B] $f(x) = \frac{1}{\theta-10}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(x)$
- ■ $f(x) = \frac{1}{10-\theta}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(x)$
- [D] $f(x) = (10-\theta)\mathbf{1}_{]\theta/2,10[}(x)$
- [E] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 9 L'estimateur des moments de θ est donné par

- [A] $\max(X_1, \ldots, X_n)$
- [B] $10 - 2\bar{X}_n$
- ■ $2\bar{X}_n - 10$
- [D] $\bar{X}_n$
- [E] Aucune de ces réponses n'est correcte.
- [F] $\min(X_1, \ldots, X_n)$
- [G] $2\bar{X}_n + 10$

Question 10 L'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est donné par

- ■ $\min(X_1, \ldots, X_n)$
- [B] $\max(X_1, \ldots, X_n)$
- [C] $2\bar{X}_n - 10$
- [D] $10 - 2\bar{X}_n$
- [E] Aucune de ces réponses n'est correcte.
- [F] $2\bar{X}_n + 10$
- [G] $\bar{X}_n$

Question 11 La densité $f(t)$ de l'estimateur du maximum de vraisemblance est donnée par

- [A] $\frac{(t)^{n-1}}{(\theta-10)^n}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(t)$
- [B] $\frac{(t-10)^{n-1}}{(\theta-10)^n}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(t)$
- [C] $\frac{(10-t)^{n-1}}{(10-\theta)^{n-1}}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(t)$
- ■ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- [E] $\frac{(10-t)^{n-1}}{(10-\theta)^n}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(t)$
- [F] $\frac{(10-t)^n}{(10-\theta)^n}\mathbf{1}_{]\theta,10[}(t)$

Pour les 4 questions suivantes on considère $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles i.i.d de loi définie par

$$\mathbf{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1+\theta}{4}, \quad \mathbf{P}(X_1 = 3) = \frac{2-\theta}{4}$$

Question 12 L'ensemble des valeurs possibles de θ est

- [A] $[-1, 3]$
- [B] Aucune de ces réponses n'est correcte.
- ■ $[-1, 2]$
- [D] $\mathbb{R}$
- [E] $[-2, 2]$
- [F] $[-2, 1]$
- [G] $[0, 1]$

Question 13 L'espérance de X_1 est donnée par

- [A] $\frac{1}{4}(2 - 7\theta)$
- [B] Aucune de ces réponses n'est correcte.
- [C] 0
- [D] $\frac{1}{4}(7 - 2\bar{X}_n)$
- [E] θ
- [F] $\bar{X}_n$
- ■ $\frac{1}{4}(7 - 2\theta)$

Question 14 L'estimateur des moments de θ est

- A $\frac{1}{2}(4 - 7\bar{X}_n)$
- ■ $\frac{1}{2}(7 - 4\bar{X}_n)$
- C $\frac{1}{2}(3 - 2\bar{X}_n)]$
- D Aucune de ces réponses n'est correcte.
- E $\frac{1}{2}(2 - 3\bar{X}_n)$
- F $\frac{\bar{X}_n}{4}$
- G $\bar{X}_n$

Question 15 La borne de Cramer Rao du modèle considéré est donnée par:

- ■ Aucune de ces réponses n'est correcte.
- B $\frac{\theta}{n}$
- C $\frac{\theta^2}{n}$
- D $\frac{4(1-\theta)(2+\theta)}{n}$
- E $\frac{(1+\theta)(2+\theta)}{4n}$
- F $\frac{(1-\theta)(2+\theta)}{4n}$
- G la borne de Cramer Rao n'existe pas pour ce modèle
- H $\frac{4(1+\theta)(2-\theta)}{n}$
- I $\frac{(\theta)(2+\theta)}{4n}$

Question 16 (X_n) converge vers X presque sûrement si

- A $\mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = 1$
- B $\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$
- ■ $\mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = 0$
- D $\mathbf{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) \to 0$

Question 17 ♣ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi et telles que $\mathbf{E}[X_1^2] < +\infty$. On note $\mathbf{E}[X_1] = \mu$ et $\mathbf{V}[X_1] = \sigma^2$. On a

- A $\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} X_1$.
- B $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- C $(\bar{X}_n - \mu) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$
- ■ $\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} \mu$.
- ■ $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, 1)$
- ■ $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 ♣ Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies par

$$\mathbf{P}(X_n = \sqrt{n}) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- A $X_n \overset{L_1}{\to} 1$.
- B $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} 1$.
- C $X_n \overset{L_2}{\to} 0$.
- ■ $X_n \overset{L_1}{\to} 0$.
- ■ $X_n \overset{\mathbf{P}}{\to} 0$.
- F $X_n \overset{L_2}{\to} 1$.
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 19 (X_n) converge vers X en probabilité si

- A $\mathbf{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) \to 0$
- ■ $\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$
- C $\mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = 0$
- D $\mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = 1$

Question 20 ♣ Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- ■ $\frac{1}{3}\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} \frac{p}{3}$.
- B $\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} p + X_1$.
- ■ $\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} p$.
- D $\sqrt{n}(\bar{X}_n - p) \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(\mu, p(1-p))$
- ■ $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0,1)$
- F $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{p(1-p)} \overset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0,1)$
- ■ $2\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} 2p$.
- H *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 21 (X_n) converge vers X en moyenne quadratique si

- ■ $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[|X_n - X|^2] = 0$.
- B $\mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}\right) = 1$
- C $\mathbf{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) \to 0$
- D $\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$

Question 22 ♣ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de même loi et qui admettent une espérance. On note $\mathbf{E}[X_1] = \mu$. On a

- ■ $\bar{X}_n \overset{L_1}{\to} \mu$.
- ■ $\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} \mu$.
- C $\bar{X}_n \overset{p.s.}{\to} X_1$.
- D $\bar{X}_n \overset{\mathbf{P}}{\to} X_1$.
- E $\bar{X}_n \overset{L_1}{\to} \frac{\mu}{2}$.
- ■ $\bar{X}_n \overset{\mathbf{P}}{\to} \mu$.
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 23 ♣ Si $\hat{\theta}_n$ converge en moyenne quadratique vers θ, alors

- ■ Le biais de $\hat{\theta}_n$ tend vers 0
- B La variance de $\hat{\theta}_n$ tend vers $\theta/2$
- C Le biais de $\hat{\theta}_n$ tend vers θ
- ■ La variance de $\hat{\theta}_n$ tend vers 0
- E Le biais de $\hat{\theta}_n$ tend vers $1-\theta$
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Correction

Feuille de réponses :

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

⟵ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

Question 1 : A ■ C D ■ F ■ ■ I

Question 2 : ■ ■ ■ ■ E F G H ■ J

Question 3 : A ■ C ■ E ■ G H ■ J K ■ ■ N

Question 4 : ■ ■ C ■ ■ F G H

Question 5 : ■ ■ ■ D E F G

Question 6 : ■ ■ C D E F

Question 7 : ■ ■ ■ D E F

Question 8 : A B ■ D E

Question 9 : A B ■ D E F G

Question 10 : ■ B C D E F G

Question 11 : A B C ■ E F

Question 12 : A B ■ D E F G

Question 13 : A B C D E F ■

Question 14 : A ■ C D E F G

Question 15 : ■ B C D E F G H I

Question 16 : A B ■ D

Question 17 : A B C ■ ■ ■ G

Question 18 : A B C ■ ■ F G

Question 19 : A ■ C D

Question 20 : ■ B ■ D ■ F ■ H

Question 21 : ■ B C D

Correction

Question 22 : ■ ■ $\boxed{C}$ $\boxed{D}$ $\boxed{E}$ ■ $\boxed{G}$

Question 23 : ■ $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ ■ $\boxed{E}$ $\boxed{F}$