Statistiques

Décembre 2021, 1h25

Préambule : Le sujet est composé de cinq exercices indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Toutes les réponses seront données sur la copie (ne pas rendre le sujet).

Exercice 1

1. Donner la définition de la convergence en probabilité et de la convergence en loi.
2. Enoncer la loi forte des grands nombres (hypothèses et résultats).
3. Enoncer le théorème central limite (hypothèses et résultats).
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires telle que X_n suit une loi uniforme sur $[-1/n, 1/n]$.
   (a) Ecrire la densité de X_n.
   (b) Calculer les probabilités suivantes :
   $$\mathbf{P}(X_n = 0), \quad \mathbf{P}(X_n \leq 0), \quad \mathbf{P}(X_n < 0), \quad \mathbf{P}(X_n > 1/(2n)), \quad \mathbf{P}(X_n = 1/n).$$
   (c) Est-ce que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers 0 ? Justifier.
   (d) Est-ce que $(X_n)_n$ converge en loi vers 0 ? Justifier.

Exercice 2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Enoncer le théorème de Cochran.
2. En déduire un intervalle de confiance de niveau 95% pour μ.
3. Même question pour un intervalle de confiance de niveau 90% pour σ^2.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que la fonction caractéristique de la loi de Poisson est donnée par

$$\varphi(t) = \exp(\lambda(\exp(it) - 1)).$$

On rappelle également que, avec les notations du cours, la fonction caractéristique vérifie

$$\varphi_{aX+b}(t) = \exp(ibt)\varphi_X(at), \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

1. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que
   $$\frac{X - \mathbf{E}[X]}{\sqrt{\mathbf{V}(X)}}$$
   converge en loi vers une variable aléatoire à préciser lorsque $\lambda \to \infty$.
2. On suppose ici que $\lambda \in \mathbb{N}^\star$. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le théorème central limite.

Exercice 4

On considère $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles i.i.d dont la loi admet pour densité

$$f_\theta(x) = (1-\theta)\mathbf{1}_{[-1/2,0]}(x) + (1+\theta)\mathbf{1}_{]0,1/2]}(x),$$

où θ est un paramètre inconnu à estimer vérifiant $|\theta| < 1$.

1. Soit $x_1, \ldots, x_n$ tels que $x_i \in [-1/2, 1/2], i = 1, \ldots, n$. Ecrire la vraisemblance du modèle $L(x_1, \ldots, x_n; \theta)$ en fonction de
   $$u_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]-\infty,0]}(x_i) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x_i).$$

2. Que vaut $u_n + v_n$? Justifier brièvement.
3. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.
4. Calculer l'information de Fisher et en déduire la borne de Cramer Rao..

Exercice 5

On considère $x_1, \ldots, x_n$ n nombres réels fixés entre 0 et 1. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ n variables aléatoires indépendantes telles que Y_i suit une loi $\mathcal{N}(\beta x_i, 1)$ où $\beta \in \mathbb{R}$ désigne le paramètre inconnu du modèle.

1. Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels. Calculer la vraisemblance $L(y_1, \ldots, y_n; \beta)$ du modèle.
2. En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance est donné par

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

3. Calculer le biais et la variance de $\widehat{\beta}$.
4. On suppose dans cette question que $x_i = i/n, i = 1, \ldots, n$.
   (a) Est-ce que l'estimateur du maximum de vraisemblance converge en moyenne quadratique vers β ?
   (b) Est-ce que l'estimateur du maximum de vraisemblance converge en probabilité vers β ?

   Pour ces deux dernières questions, on pourra utiliser que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$