Correction

Licence 3 MIASHS **Statistique inférentielle**

QCM
Examen du 05/11/2019

Instructions :

- Le sujet comprend 4 exercices pour 21 questions au total. Les questions faisant apparaître le symbole $\clubsuit$ peuvent présenter plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse. Des points négatifs pourront être affectés à de *mauvaises* réponses.
- Seul le questionnaire à la 4ème feuille est à rendre. Vous commencerez par renseigner votre nom et prénom dans la case prévue ainsi que votre **numéro étudiant Rennes 2** (1 case à colorier par colonne).
- Il faut **colorier** les cases correspondants aux bonnes réponses (sur la page 7), mettre une croix dans la case n'est **pas suffisant**. Les cases devront être **coloriées avec un stylo noir** (pas de crayon papier, de stabilo...).
- Tous les sujets sont différents, si vous commettez une erreur en coloriant la case, vous pouvez demander un autre sujet complet, il faudra dans ce cas recommencer le devoir au début.
- Le barème sera effectué de la façon suivante :
  - Aucune case coloriée entrainera une note de 0 sur la question.
  - Pour les questions à une seule bonne réponse (sans le symbole $\clubsuit$), un nombre de points sera affecté (par exemple +2) si la bonne case est cochée. Un nombre de points sera retranché (par exemple -1) si une mauvaise case est coloriée ou si plusieurs cases sont coloriées.
  - Pour les questions avec plusieurs bonnes réponses (avec le symbole $\clubsuit$), un nombre de points (par exemple +0.5) sera affecté pour chaque bonne réponse coloriée et pour chaque mauvaise réponse non coloriée. Un nombre de points (par exemple -0.5) sera retranché pour chaque mauvaise réponse coloriée et pour chaque bonne réponse non coloriée.
  - Les nombres de points ajoutés et retranchés ne sont pas forcément fixes et pourront dépendre de la réponse.
- La correction étant automatique, un non respect des consignes aura forcément un impact sur la note finale.

Durée : 1 heure 20 minutes.

Exercice 1. Les questions de cet exercice portent sur des "bases" de probabilités.

Dans les questions 1 à 3 on considère (X, Y) un couple aléatoire de fonction de répartition $F_{X,Y}$ et de densité $f_{X,Y}$. On reprendra les mêmes notations que dans le cours : F_X et F_Y désignent les fonctions de répartition des marginales et f_X et f_Y les densités de ces marginales.

Question 1 $\clubsuit$ On désigne par $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ et on suppose que (X, Y) suit une loi uniforme sur $\mathcal{T}$. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- A $\mathbf{E}[Y] > \mathbf{E}[X]$
- ■ $f_{X,Y}(x, y) = 2\mathbf{1}_{\mathcal{T}}(x, y)$
- C $f_X(x) = \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$
- D $\mathbf{E}[X] = 1/3$
- ■ $f_X(x) = 2x\mathbf{1}_{]0,1[}(x)$
- F X et Y sont indépendantes.
- G $\mathbf{E}[X] = 1/2$
- H $f_{X,Y}(x, y) = \mathbf{1}_{\mathcal{T}}(x, y)$
- I *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 2 ♣ Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- [A] $F_{X,Y}(x,y) = \mathbf{P}(X \leq x)\mathbf{P}(Y \leq y)$
- [B] $F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$
- ■ $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$
- [D] $\mathbf{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} F_X(x)\mathrm{d}x$
- ■ $\lim_{y\to+\infty} F_Y(y) = 1$
- [F] $F_{X,Y} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$
- [G] $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$
- [H] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 3 ♣ On suppose (uniquement) dans cette question que X et Y sont indépendantes. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- ■ $\mathbf{V}[X - Y] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y]$
- [B] $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) + F_Y(y)$
- ■ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$
- [D] $\mathbf{V}[XY] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y]$
- ■ $\mathbf{E}[X - Y] = \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[Y]$
- ■ $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$
- [G] $\mathbf{E}[2X - 3Y] = 2\mathbf{E}[X] + 3\mathbf{E}[Y]$
- [H] $\mathbf{V}[XY] = \mathbf{V}[X]\mathbf{V}[Y]$
- [I] $\mathbf{V}[X - Y] = \mathbf{V}[X] - \mathbf{V}[-Y]$
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 4 ♣ Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X}_n = S_n/n$. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- [A] $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma^2} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- ■ $S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$
- [C] $S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, \sigma^2)$
- [D] $\mathbf{E}[X_1] = 0$
- [E] $\mathbf{V}[\bar{X}_n] = \sigma^2/\sqrt{n}$
- ■ $\mathbf{V}[X_2] = \sigma^2$
- ■ $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- [H] $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- [I] X_1 est une variable aléatoire discrète
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 5 ♣ Soit X une variable aléatoire telle que

$$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{1-\theta}{3}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1+\theta}{3},$$

avec $\theta \in]-1,1[$. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- [A] $\mathbf{E}[X^2] = 5/3 - \theta$
- [B] $\mathbf{V}[X] = -\theta^2/9 - 5\theta/3 + 2/3$
- ■ $\mathbf{E}[X] = 1 + \theta/3$
- ■ $\mathbf{V}[X] = -\theta^2/9 + \theta/3 + 2/3$
- [E] $\mathbf{E}[X^2] = (1 + \theta/3)^2$
- ■ X est une variable aléatoire discrète
- [G] $\mathbf{E}[X] = 2/3$
- [H] $\mathbf{E}[\sqrt{X}] = \sqrt{1 + \theta/3}$
- [I] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 2.

Les questions de cet exercice sont essentiellement des questions de cours sur la partie estimation.

Question 6 ♣ Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles i.i.d de loi $\mathbf{P}_\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu. On désigne par $\hat{\theta}$ un estimateur de θ. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- [A] $\hat{\theta}$ est un nombre réel
- ■ La variance de $\hat{\theta}$ est toujours positive ou nulle
- ■ $\hat{\theta}$ est une variable aléatoire
- [D] Le biais de $\hat{\theta}$ est toujours positif ou nul
- ■ Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ est toujours positif ou nul
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 7 ♣ Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathbf{P}_\theta$ et de vraisemblance $L(x, \theta)$. L'information de Fisher (si elle existe) associée à X est définie par :

- A $\mathbf{E}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right]$
- ■ $\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right)^2\right]$
- ■ $-\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(X,\theta))\right]$
- D $-\mathbf{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right)^2\right]$
- E $\mathbf{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log(L(X,\theta))\right]$
- ■ $\mathbf{V}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log(L(X,\theta))\right]$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 8 ♣ Soit $X_1, \dots, X_n$ n v.a.r i.i.d. de loi $\mathbf{P}_\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ inconnu. Soit $\hat{\theta}$ un estimateur de θ. On note $b(\hat{\theta})$ son biais. Le risque quadratique de $\hat{\theta}$ vaut (on cochera la (ou les) assertion(s) vraie(s)) :

- ■ $\mathbf{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$
- ■ $b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- C $b^2(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\theta)$
- ■ $\left(\mathbf{E}[\hat{\theta}] - \theta\right)^2 + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- E $b(\hat{\theta}) + \mathbf{V}(\hat{\theta})$
- F $\mathbf{E}[(\hat{\theta} - \mathbf{E}[\hat{\theta}])^2]$
- G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 9 ♣ Soit $\hat{\theta}$ un estimateur VUMSB (de variance minimale parmi les estimateurs sans biais) d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\theta}$ un estimateur sans biais de θ. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- A $\mathbf{E}[\tilde{\theta}] = 0$
- ■ $\mathbf{V}[\hat{\theta}] \geq 0$
- ■ $\mathbf{E}[\hat{\theta}] = \mathbf{E}[\tilde{\theta}]$
- D $\mathbf{E}[\hat{\theta}] > \mathbf{E}[\tilde{\theta}]$
- ■ $\mathbf{E}[\hat{\theta}] = \theta$
- F $\mathbf{V}[\hat{\theta}] \geq \mathbf{V}[\tilde{\theta}]$
- ■ $\mathbf{V}[\hat{\theta}] \leq \mathbf{V}[\tilde{\theta}]$
- H *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 3.

Les questions suivantes portent sur la partie convergence stochastique. L'écriture $\to 0$ signifie "tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$".

Question 10 ♣ Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. qui converge en loi vers X. On note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n et F_X celle de X. Soit $x \in \mathbb{R}$. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- A $\mathbf{P}(X_n \in]0,1]) = \mathbf{P}(X \in]0,1])$ si F_X est continue en 0 et en 1.
- B $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ si F_{X_n} est continue en x.
- C $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pour tout x.
- D $X_n - X \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$
- E $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n \in]0,1]) = \mathbf{P}(X \in]0,1])$ si F_{X_n} est continue en 0 et en 1.
- ■ $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ si F_X est continue en x.
- G $\mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X]$
- H $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[X]$
- ■ $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n \in]0,1]) = \mathbf{P}(X \in]0,1])$ si F_X est continue en 0 et en 1.
- J *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 11 ♣ Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. qui converge en probabilité vers X. On a

- ■ $X_n - X \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.
- [B] $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
- [C] $X_n \xrightarrow{L_1} X$
- ■ $X_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} X^2$.
- ■ $2X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 2X$.
- [F] $X_n \xrightarrow{L_2} X$
- [G] $X_n - X \xrightarrow{L_2} 0$
- [H] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 $(X_n)_n$ converge vers X en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

- [A] $\frac{1}{n}\mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$
- [B] $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$
- [C] $\mathbf{P}(|X_n - X| \leq \varepsilon) \to 0$
- [D] $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 1$
- ■ $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$
- [F] $\mathbf{P}(|X_n - \mathbf{E}[X]| > \varepsilon) \to 0$
- [G] Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 13 ♣ Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- [A] $\bar{X}_n \xrightarrow{L_2} p(1-p)$.
- [B] $\mathbf{V}[\bar{X}_n] = p(1-p)$
- ■ $2\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 2p$.
- [D] $\bar{X}_n \xrightarrow{L_2} 1-p$.
- ■ $\bar{X}_n(1-\bar{X}_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} \mathbf{V}[X_1]$.
- ■ $\bar{X}_n \xrightarrow{L_2} p$.
- [G] $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X_1$
- ■ $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} p$.
- ■ $\mathbf{E}[(\bar{X}_n - p)^2] = \mathbf{V}[\bar{X}_n]$
- [J] $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1-p$.
- [K] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Dans les deux questions suivantes (questions 14 et 15), on considère $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes dont la loi est définie par

$$\mathbf{P}(X_n = n+1) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Question 14 ♣ Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- [A] $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} n$.
- [B] $X_n \xrightarrow{L_1} 1$.
- ■ $X_n \xrightarrow{L_1} 0$.
- [D] $X_n \xrightarrow{L_2} 0$.
- ■ $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$.
- [F] $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$.
- [G] $X_n \xrightarrow{p.s.} 1$.
- ■ $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.
- [I] $X_n \xrightarrow{L_2} 1$.
- [J] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 15 ♣ On désigne par F_{X_n} la fonction de répartition de X_n et par F_X celle de la variable aléatoire $X = 0$ (v.a constante égale à 0). Soit $x > 0$. Cochez la (ou les) assertion(s) vraie(s).

- ■ $\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = 1$
- [B] $F_{X_n}(0) = 1/n^2$.
- [C] $F_{X_n}(0) = 0$.
- [D] $F_{X_n}(x) = 1/n^2$ pour n assez grand
- ■ $F_{X_n}(0) = 1 - 1/n^2$.
- ■ $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.
- ■ $F_{X_n}(x) = 1 - 1/n^2$ pour n assez grand
- [H] $F_{X_n}(x) = 1$ pour n assez grand
- [I] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Exercice 4. Dans cet exercice on considère $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles i.i.d dont la loi admet pour densité

$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta))\mathbf{1}_{]\theta,+\infty[(x)}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

On note $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ et $\tilde{\theta}$ celui des moments.

Question 16 L'espérance de X_1 vaut

A $\theta - 1$ B $1 - \theta$ ■ $\theta + 1$ D θ E $-\theta$ F 0
G Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 17 L'estimateurs des moments $\tilde{\theta}$ est donné par :

- A $\min(X_1, \ldots, X_n)$
- B $\bar{X}_n$
- C $\max(X_1, \ldots, X_n)$
- D $\max(X_1, \ldots, X_n) - 1/n$
- ■ $\bar{X}_n - 1$
- F $1 - \bar{X}_n$
- G $\bar{X}_n + 1$
- H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 18 L'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ est donné par

- ■ $\min(X_1, \ldots, X_n)$
- B $\max(X_1, \ldots, X_n)$
- C $\bar{X}_n - 1$
- D $1 - \bar{X}_n$
- E $\max(X_1, \ldots, X_n) - 1/n$
- F $\bar{X}_n + 1$
- G $\bar{X}_n$
- H Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 19 Soit $t \geq \theta$, la probabilité $\mathbf{P}(X_1 \geq t)$ est égale à

- A $\exp(\theta - t) - 1$
- B $1 - \log(\theta - t)$
- C $1 - \exp(\theta - t)$
- D 0
- E $\exp(t - \theta) - 1$
- F $1 - \exp(t - \theta)$
- G $1 - 1/t$
- H 1
- ■ $\exp(\theta - t)$
- J Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 20 Soit $t > \theta$. La densité de $f_{\hat{\theta}}(t)$ de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ en t vaut

- A $\exp(n(t - \theta))$
- B $n\exp(-n(\theta - t))$
- C 0
- D $1 - n\exp(-n(\theta - t))$
- ■ $n\exp(n(\theta - t))$
- F $\exp(n(\theta - t))$
- G $n\exp(-n(t - \theta))$
- H $1 - \exp(n(\theta - t))$
- I Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 21 L'espérance de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ vaut :

- A $-\theta$
- B $\theta - 2/n$
- C $\theta + 2/n$
- D $\theta + 1/n$
- E $\frac{n+1}{n}\theta$
- F $\frac{n}{n+1}\theta$
- G $\theta - 1/n$
- ■ $\theta + 1/n$
- I θ
- J Aucune de ces réponses n'est correcte.

Feuille de réponses :

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

$\longleftarrow$ codez votre numéro d'étudiant ci-contre, et inscrivez votre nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

....

....

Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur cette feuille : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.

QUESTION 1 : A ■ C D ■ F G H I

QUESTION 2 : A B ■ D ■ F G H

QUESTION 3 : ■ B ■ D ■ ■ G H I J

QUESTION 4 : A ■ C D E ■ ■ H I J

QUESTION 5 : A B ■ ■ E ■ G H I

QUESTION 6 : A ■ ■ D ■ F

QUESTION 7 : A ■ ■ D E ■ G

QUESTION 8 : ■ ■ C ■ E F G

QUESTION 9 : A ■ ■ D ■ F ■ H

QUESTION 10 : A B C D E ■ G H ■ J

QUESTION 11 : ■ B C ■ ■ F G H

QUESTION 12 : A B C D ■ F G

QUESTION 13 : A B ■ D ■ ■ G ■ ■ J K

QUESTION 14 : A B ■ D ■ F G ■ I J

QUESTION 15 : ■ B C D ■ ■ ■ H I

QUESTION 16 : A B ■ D E F G

QUESTION 17 : A B C D ■ F G H

QUESTION 18 : ■ B C D E F G H

QUESTION 19 : A B C D E F G H ■ J

QUESTION 20 : A B C D ■ F G H I

QUESTION 21 : A B C D E F G ■ I J