Statistiques

Décembre 2019, Sans document, 1h20

Préambule : Le sujet est composé de trois exercices indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Toutes les réponses seront données sur la copie (ne pas rendre le sujet).

Exercice 1

1. Enoncer la loi forte des grands nombres (hypothèses et résultats).
2. Enoncer le théorème central limite (hypothèses et résultats).
3. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de loi de Poisson de paramètre $\lambda_n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que $\lambda_n \to +\infty$. Montrer que
$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \overset{p.s.}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$
4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \leq x} \quad \text{et} \quad F(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$
Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $F(x) \neq 0$ et $F(x) \neq 1$.
   (a) Montrer que $F_n(x) \overset{p.s.}{\to} F(x)$.
   (b) Montrer qu'il existe une suite $\varphi_n(x)$ à préciser telle que $\varphi_n(x)(F_n(x) - F(x)) \overset{p.s.}{\to} \mathcal{N}(0,1)$.
   (c) Déduire des question précédente un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ avec $\alpha \in]0,1[$ pour $F(x)$. On prendra soin de justifier toutes les étapes de construction de l'intervalle de confiance.

Exercice 2

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[1,\theta]$ où $\theta > 1$ est un paramètre inconnu à estimer.

1. Rappeler la densité de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. Calculer l'estimateur des moments de θ. On le notera $\hat{\theta}$.
3. Rappeler la définition du risque quadratique d'un estimateur et montrer sa décomposition biais/variance.
4. Calculer le biais et la variance de $\hat{\theta}$.
5. $\hat{\theta}$ est-il consistant ? Justifier.
6. En écrivant un théorème central limite pour $\hat{\theta}$, construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour θ (avec $\alpha \in]0,1[$).

Exercice 3 (5 points)

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires i.i.d. de loi admettant la densité
$$f_\theta(x) = \exp(-(x-\theta))\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x),$$
où θ est un paramètre réel.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, f_θ est une densité de probabilité.
2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. On le notera $\hat{\theta}_{MV}$.
3. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_{MV}$ et en déduire que la densité de $\hat{\theta}_{MV}$ est donnée par
$$f_{\hat{\theta}_{MV}}(x) = n\exp(n(\theta - x))\mathbf{1}_{[\theta,+\infty[}(x).$$
4. Calculer $\mathbf{E}[\hat{\theta}_{MV}]$. En déduire un nouvel estimateur $\tilde{\theta}$ de θ qui soit sans biais.
5. Calculer la variance de $\tilde{\theta}$.
6. Calculer $\mathbf{E}[X_1]$. En déduire l'estimateur des moments de θ. On notera $\hat{\theta}_m$ cet estimateur.
7. Calculer le risque quadratique de $\hat{\theta}_m$.
8. Comparer les risques quadratiques des estimateurs $\hat{\theta}_{MV}$, $\tilde{\theta}$ et $\hat{\theta}_m$.
9. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour θ.