Capítulo 4.

Resultados de Convergência

4.1. Limitante para $\|(x^*, z^*)\|_\infty$

Nas análises de convergência de MPI infactíveis em geral há a necessidade de se escolher um ponto inicial que reflita de alguma maneira o *tamanho* do vetor (x^*, z^*) [44, 47]. Nessas análises o *tamanho* de tal vetor é estimado através de um limitante para sua norma-∞. Nada obstante, embora esse limitante é utilizado nas demonstrações não há qualquer indicativo de como é possível estimá-lo.

Como neste trabalho também se fará uso deste limitante, o Teorema 4.1 faz uma estimativa para o mesmo, usando a decomposição em valor singular da matriz A.

{teo:bound-xz}

Teorema 4.1. *Sejam $\mathcal{S}_P$ o conjunto das soluções ótimas primais e $\mathcal{S}_D$ o conjunto das soluções ótimas duais par ao par primal-dual* (2.1) *e* (2.2)*. Se $\mathcal{S}_P$ e $\mathcal{S}_D$ forem limitados então para toda solução primal $x^* \in \mathcal{S}_P$ e correspondente solução dual $(y^*, z^*) \in \mathcal{S}_D$ existe $\zeta > 0$ tal que*

$$\|(x^*, z^*)\|_\infty \leq \zeta$$

Demonstração. Suponha que $x = (x_B, x_N)$ seja tal que $x_B \in \mathbb{R}^m$ é uma solução básica e $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ uma solução não-básica de (2.1). Seja $U\Sigma V^T$ a decomposição em valor singular (SVD) de A, em que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix},$$

$C = \operatorname{diag}(\varsigma_{\max}, \dots, \varsigma_{\min})$ e $\varsigma_{\min}$ e $\varsigma_{\max}$ são o menor e maior valor singular de A. Com isso, $Ax = U\Sigma V^T x$ e logo $\Sigma V^T x = U^T b$.

Seja

$$\Sigma^\dagger = \begin{bmatrix} C^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo $\Sigma^\dagger \Sigma V^T x = \Sigma^\dagger U^T b$ e portanto

$$\left\| \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T x \right\| = \left\| \Sigma^\dagger U^T b \right\|$$

Como U e V são ortogonais, temos que $\|x_B\| \leq \left\|\Sigma^\dagger\right\| \|b\|$ e logo

$$\|x_B\|_\infty \leq \|x_B\| \leq \frac{1}{\varsigma_{\min}} \|b\|$$

Note que, como por hipótese $\mathcal{S}_P$ é limitado, qualquer solução ótima x^* de (2.1) é uma combinação convexa de soluções ótimas básicas, i.e.,

$$x^* = \sum_{\ell=1}^{p} t_\ell \tilde{x}_\ell$$

em que $\sum_{\ell=1}^{p} t_\ell = 1$ e para $\ell = 1, \ldots, p$ tem-se $\tilde{x}_\ell = (\tilde{x}_B | \tilde{x}_N)_\ell$ e $(\tilde{x}_B)_\ell$ como uma solução ótima básica.

Portanto, existe ζ_x escalar positivo, tal que

$$\|x^*\|_\infty \leq \zeta_x$$

em que

$$\zeta_x = \sum_{\ell=1}^{p} t_\ell \frac{1}{\varsigma_{\min}} \|b\| = \frac{1}{\varsigma_{\min}} \|b\| .$$

As restrições do problema dual (2.2), podem ser reescritas na forma padrão de um PL, definindo $\tilde{A} = [A^T \ I]$ e $\tilde{z} = [y \ z]$ tal que $\tilde{A}\tilde{z} = c$. Sejam π_i, com $i = 1, \ldots, n$, os valores singulares de $\tilde{A}$.

Com ideias similares às usadas na primeira parte da demonstração deste teorema, é possível verificar que a seguinte desigualdade

$$\|\tilde{z}^*\|_\infty \leq \frac{1}{\pi_{\min}} \|c\|$$

é verdadeira.

Note que $\|z^*\|_\infty \leq \|\tilde{z}^*\|_\infty$ e pelo Lema 4.2, $\pi_{\min} = 1$. Portanto

$$\|z^*\|_\infty \leq \zeta_z,$$

em que $\zeta_z = \|c\|$.

Para finalizar, basta definir $\zeta = \max\{\zeta_x, \zeta_z\}$ e o teorema está provado. ∎

{lem:svd-AI}

Lema 4.2. *Seja a matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m < n$ uma matriz de posto completo e a a matriz $\tilde{A} = [A^T\ I_n]$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n. Se ς_i, para $i = 1, \dots, m$, é valor singular de A – e de A^T –, e π_i, para $i = 1, \dots, n$, é valor singular de $\tilde{A}$ então*

{eq:sing_value

$$\pi_i^2 = \varsigma_i^2 + 1 \tag{4.1a}$$

para $i = 1, \dots, m$ e

$$\pi_i = 1 \tag{4.1b}$$

para $i = m+1, \dots, n$.

Demonstração. Os valores singulares de A^T são as raízes quadradas dos autovalores distintos da matriz A^TA, isto é, existem $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$ não nulos, tais que

$$A^TAv_i = \varsigma_i^2 v_i.$$

Agora, note que

$$\tilde{A}\tilde{A}^T = [A^T\ I_n]\begin{bmatrix} A \\ I_n \end{bmatrix} = A^TA + I_n$$

e que

$$\tilde{A}\tilde{A}^T v_i = A^TAv_i + v_i = (\varsigma^2 + 1)v_i.$$

Portanto, para $i = 1, \dots, m$, v_i é autovetor de $\tilde{A}\tilde{A}^T$ com autovalor correspondente a $(\varsigma_i^2 + 1)$.

Além disso, note que o posto de A^TA é m e portanto a dimensão do núcleo de A^TA é $(n - m)$. Seja $\mathcal{B} = \{u_{m+1}, \dots, u_n\}$ uma base para o núcleo de A^TA. Para $u_i \in \mathcal{B}$, tem-se que

$$\tilde{A}\tilde{A}^T u_i = A^TAu_i + u_i = u_i.$$

Com isso, para $i = m+1, \dots, n$, u_i também é autovetor de $\tilde{A}\tilde{A}^T$ com autovalor correspondente a 1.

Consequentemente, sendo os valores singulares de $\tilde{A}$ a raiz quadrada os autovalores de $\tilde{A}\tilde{A}^T$ e considerando que os autovalores são únicos valem as equações (4.1). ∎