

Propagacja sygnału elektrycznego w linii transmisyjnej, problem zależny od czasu

Metody Monte Carlo w fizyce
Nanoinżynieria materiałów

Łukasz Ruba



Akademia Górnictwo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

14 maja 2024

Spis treści

Cel ćwiczenia	3
1 Wstęp teoretyczny	3
2 Metodyka	5
3 Wyniki	5
4 Wnioski	10
Literatura	11

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było rozwiązywanie równań całkowych opisujących propagację fali elektrycznej w linii transmisyjnej za pomocą metod Monte Carlo. Na tej podstawie dokonano analizy dokładności symulacji w zależności od ilości losowań.

1 Wstęp teoretyczny

Równanie telegrafistów stanowi układ dwóch równań różniczkowych, które wiążą ze sobą rozkład napięcia $u(x, t)$ oraz $i(x, t)$ i stanowią podstawę rozwiązywania zagadnienia propagacji sygnału elektrycznego w jednowymiarowej linii transmisyjnej [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - Ri, \quad (1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - Gu, \quad (2)$$

gdzie L oznacza indukcyjność, C - pojemność, R - rezystancję oraz G - konduktancję.

Można dokonać transformacji i przedstawić funkcję $f(x, t)$ oznaczającą rozwiązywanie przemieszczające w kierunku dodatnich wartości x (forward):

$$f(x, t) = \frac{1}{2}(u + R_0 i), \quad (3)$$

oraz w kierunku ujemnych wartości $b(x, t)$ (backward):

$$b(x, t) = \frac{1}{2}(u - R_0 i), \quad (4)$$

gdzie:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5)$$

Powyższe równania prowadzą do alternatywnego układu równań różniczkowych:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda b - (\lambda + \mu)f, \quad (6)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = c \frac{\partial b}{\partial x} + \lambda f - (\lambda + \mu)b, \quad (7)$$

gdzie:

$$c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (8)$$

$$\mu = \frac{G}{C}, \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right). \quad (10)$$

Problem ten można przekształcić metodą linii z różniczkowego na postać całkową:

$$f(x, t) = f_0(x - ct)e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^t (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)s} b(x - cs, t - s) ds, \quad (f_0(x) = f(x, 0)), \quad (11)$$

$$b(x, t) = b_0(x + ct)e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \int_0^t (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)s} f(x + cs, t - s) ds, \quad (b_0(x) = b(x, 0)). \quad (12)$$

Fragment wyrażenia podcałkowego w równaniach (11) i (12), które od teraz będzie oznaczone jako $p(s)$:

$$p(s) = (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)s}, \quad (13)$$

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa, którą można wykorzystać do określenia dwóch prawdopodobieństw:

$$P_1 = P\{s \leq t\} = \int_0^t p(s) ds = 1 - e^{-(\lambda+\mu)s}, \quad (14)$$

$$P_2 = P\{s > t\} = 1 - P_1 = e^{-(\lambda+\mu)s}. \quad (15)$$

Prawdopodobieństwo to posłuży do określenia wkładu pierwszego (f_0 lub b_0) i drugiego wyrazu (całka) do rozwiązania. Wartość s jest losowana z rozkładu eksponencjalnego poprzez formułę:

$$s = -\frac{\ln(U_1)}{\lambda + \mu}, \quad U_1 \sim U(0, 1), \quad (16)$$

i na jej podstawie określony zostaje wkład do rozwiązania $f(x, t)$:

$$\begin{cases} s \leq t, & f(x, t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} b(x - cs, t - s) \\ s > t, & f(x, t) = f_0(x - ct) \end{cases} \quad (17)$$

lub $b(x, t)$:

$$\begin{cases} s \leq t, & b(x, t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} f(x + cs, t - s) \\ s > t, & b(x, t) = b_0(x + ct) \end{cases} \quad (18)$$

Rozwiązanie takiego układu równań przy użyciu technik numerycznych odbywa się rekurencyjnie poprzez naprzemienne wzajemne wywołania funkcji f i b . Każde wywołanie funkcji redukuje zmienną $t \leftarrow t - s$ aż do chwili gdy spełniony zostanie warunek $s > t$. Wówczas następuje odwołanie do warunku początkowego.

Chcąc rozpatrywać układy zamknięte konieczne jest narzucenie warunków brzegowych. Zakładamy, że układ rozciąga się w obszarze $x \in [0, l]$, gdzie l to długość linii transmisyjnej. W $x = 0$ zlokalizowane jest źródło napięcia zmennego $V_g(t)$ o oporze własnym R_g , które powoduje spadek potencjału:

$$u(0, t) = V_g(t) - u(0, t)R_g, \quad (19)$$

natomiast na wyjściu dołączony jest opornik R_l , który wpływa na wartość prądu:

$$i(l, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(l, \tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (20)$$

gdzie: $h(t - \tau) = \delta(t - \tau)/R_l$ jest funkcją odpowiedzi odbiornika na impuls napięciowy (δ - delta Diraca). Po wykonaniu transformacji $(u, i) \rightarrow (f, b)$ dostaje się warunki:

- na lewym brzegu skąd pochodzi sygnał propagujący się w prawo ($f(x, t)$):

$$f(0, t) = \zeta V_g(t) + \Gamma_g b(0, t), \quad (21)$$

- na prawym brzegu gdzie generuje się sygnał $b(x, t)$ przemieszczający się w kierunku wstecznym:

$$b(l, t) = \Gamma_l f(l, t), \quad (22)$$

gdzie:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (23)$$

$$\zeta = \frac{R_0}{R_0 + R_g}, \quad (24)$$

$$\Gamma_g = \frac{R_g - R_0}{R_g + R_0}, \quad (25)$$

$$\Gamma_l = \frac{R_l - R_0}{R_l + R_0}. \quad (26)$$

i wartości Γ określają współczynniki osłabienia amplitudy sygnału na skutek odbicia się od brzegów.

W wykorzystanym algorytmie powyższe warunki brzegowe uwzględniono jako warunki:

- gdy $x - cs < 0 \rightarrow$ na lewym brzegu następuje odbicie $f \rightarrow \Gamma_g b$ i do rozwiązania dodawany jest wkład od źródła napięcia $\zeta V_g(t)$,
- gdy $x + cs > l \rightarrow$ następuje odbicie sygnału od prawego brzegu $b \rightarrow \Gamma_l f$.

2 Metodyka

Wzory i zależności opisane we wstępnie teoretycznym (1) zaimplementowano w kodzie napisanym w języku *C++*. Na tej podstawie dokonano obliczeń propagacji sygnału elektrycznego w linii transmisyjnej o długości $l = 2$ m, którą podzielono na równe odległe fragmenty o długości $\Delta x = 0.01$ m. Parametry charakteryzujące linię zostały ustalone na wartości:

$$\bullet L = 0.25 \cdot 10^{-6} \text{ H}, \quad \bullet C = 100 \cdot 10^{-12} \text{ F}, \quad \bullet R = 12.5 \Omega, \quad \bullet G = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ S}.$$

Wartości oporów na brzegach linii wynosiły $R_l = 12.5 \Omega$ i $R_g = 75 \Omega$, zaś potencjał generowany przez źródło obliczany był na podstawie czasu t ze wzoru:

$$V_g(t) = \sin(2\pi\nu t) \exp\left(-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (27)$$

gdzie ν określa częstotliwość źródła i wynosiła ona 1 GHz, t_0 wynosiło $7.5 \cdot 10^{-9}$ s i σ wynosiła $0.75 \cdot 10^{-9}$ s.

Dla tak zadanych parametrów dokonano serii obliczeń dla czasów $t = 10, 15, 25, 35, 50$ ns oraz ilości ścieżek $npaths = 10^3, 10^4$ i 10^5 . Rozkład napięcia w danej chwili czasowej obliczano ze wzoru:

$$u(x, t) = f(x, t) + b(x, t). \quad (28)$$

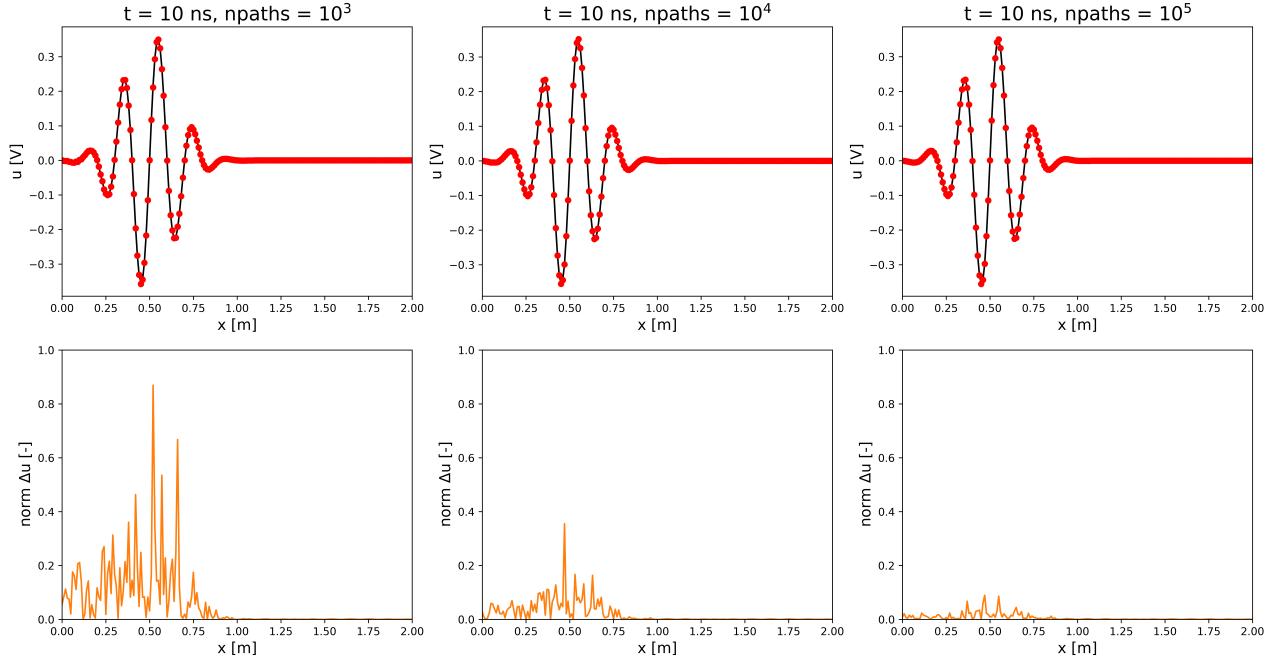
Dodatkowo wyniki porównano z rozwiązaniem dokładnym, obliczonym na podstawie funkcji *u_xt_exact* dołączonej do materiałów.

Wszystkie grafiki wykonano przy pomocy biblioteki *matplotlib* w *Python*.

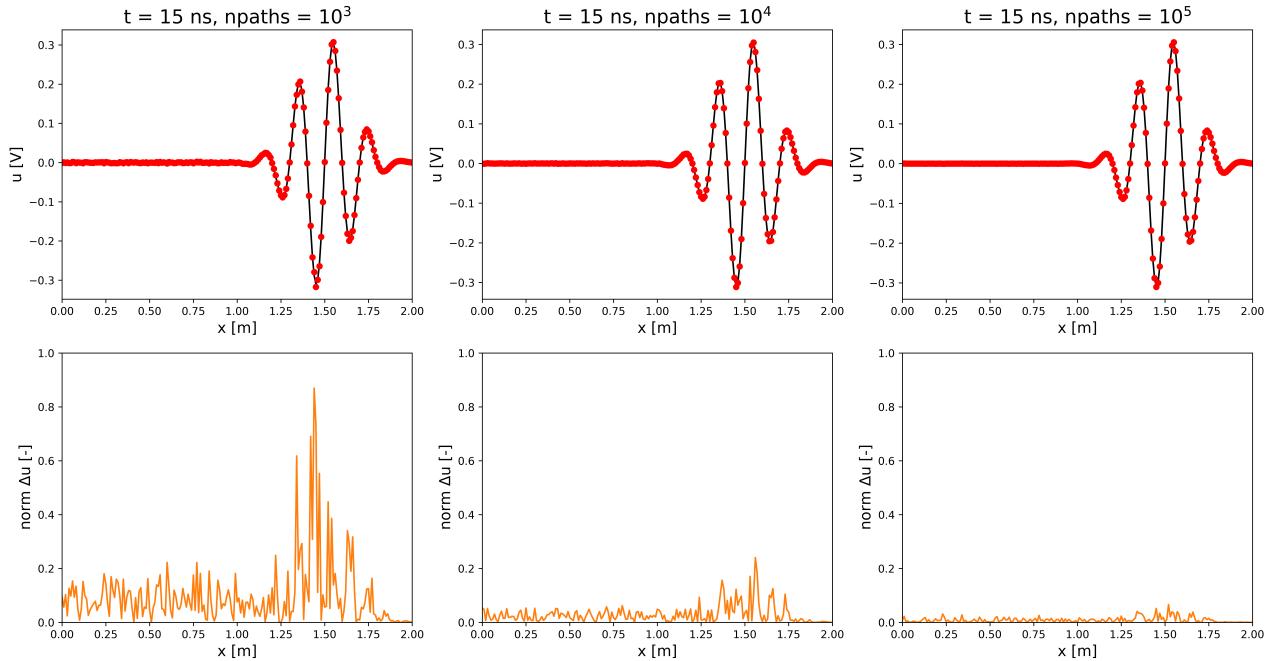
3 Wyniki

Na Rysunkach 1, 2, 3, 4 i 5 przedstawiono wyniki wszystkich symulacji. Dla pierwszych trzech czasów, tj. 10, 15 i 25 ns, ze względu na duże amplitudy sygnału fluktuacje nie są zbyt dobrze widoczne lub w ogóle ich nie widać. Dlatego utworzono wykresy bezwzględnych różnic potencjałów obliczonych w sposób dokładny i stochastyczny, które następnie znormalizowano względem największej wartości błędu w danym czasie.

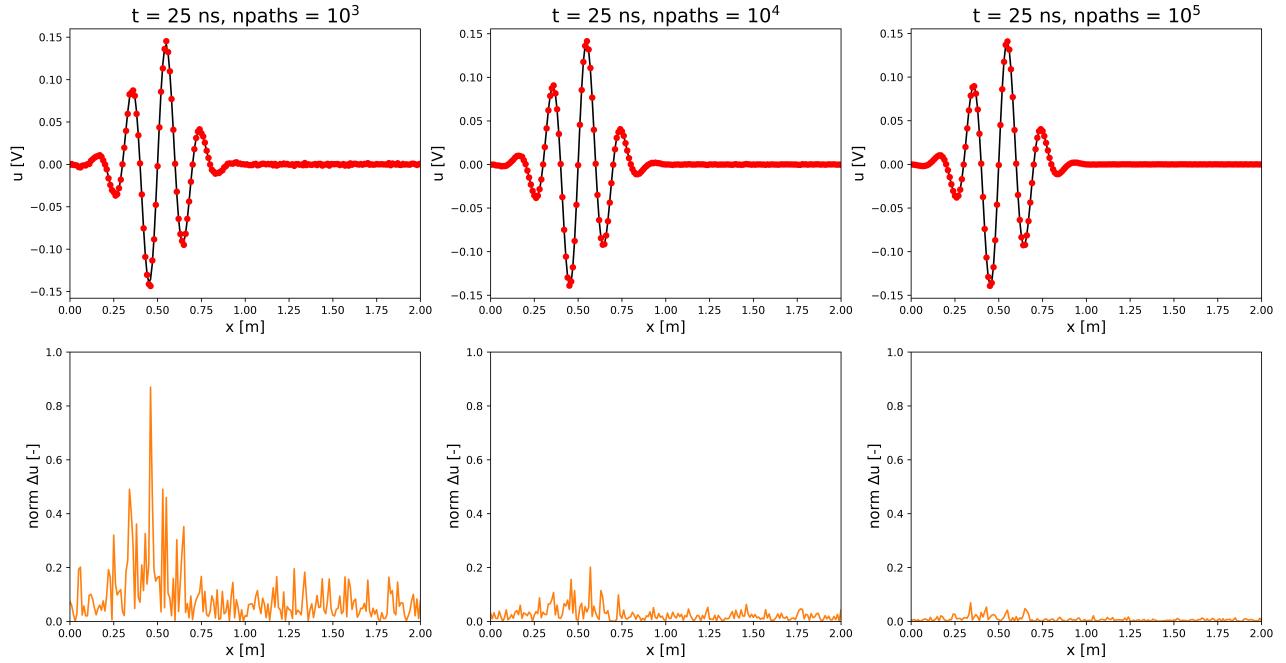
Pierwszą ważną obserwacją jest, że zgodnie z teorią, zwiększenie liczby losowań w każdym przypadku znaczaco poprawia dokładność odwzorowania przebiegu sygnału. Widać, że wraz z wydłużaniem się długości propagacji sygnału błąd rósł i "rozlewał" się po całej długości linii. Ciekawy efekt widać na Rys. 5, gdzie dla małej liczby łańcuchów wartość błędu była większa poza paczką falową niżli w niej. Zwiększenie ich ilości z wartości 10^3 do 10^5 pozwoliło zredukować wartość tego błędu w każdym przypadku około 9 razy.



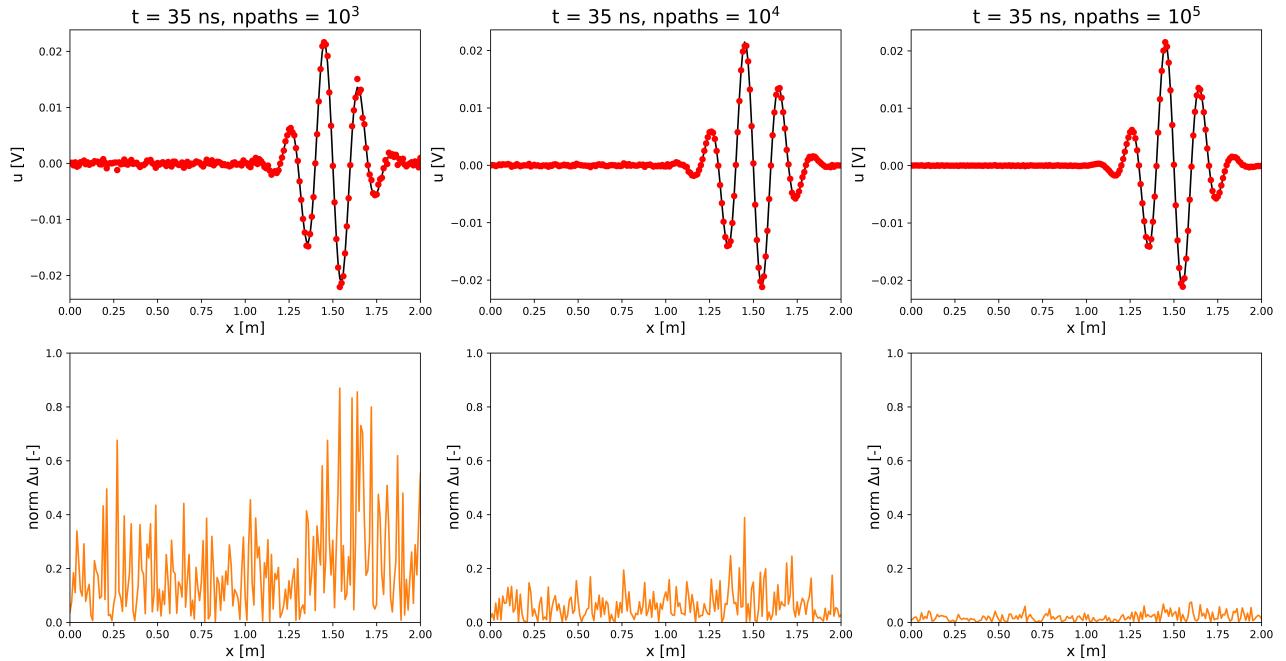
Rysunek 1: Porównanie sygnałów w chwili $t = 10$ ns w zależności od ilości ścieżek. Linia czarna reprezentuje rozwiązanie dokładne, zaś czerwone kropki wyniki obliczeń Monte Carlo dla danego punktu linii. Dolny rząd przedstawia znormalizowaną wartość bezwzględną różnicę potencjałów dokładnego i stochastycznego.



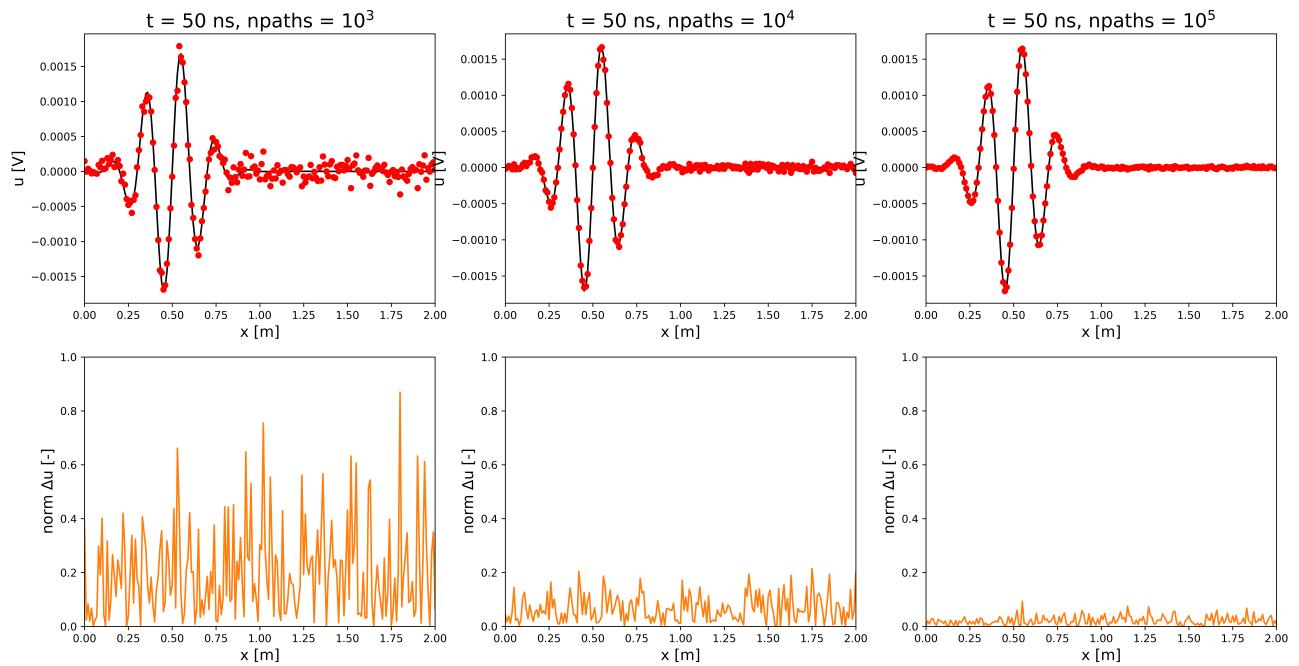
Rysunek 2: Porównanie sygnałów w chwili $t = 15$ ns w zależności od ilości ścieżek. Linia czarna reprezentuje rozwiązanie dokładne, zaś czerwone kropki wyniki obliczeń Monte Carlo dla danego punktu linii. Dolny rząd przedstawia znormalizowaną wartość bezwzględną różnicę potencjałów dokładnego i stochastycznego.



Rysunek 3: Porównanie sygnałów w chwili $t = 25$ ns w zależności od ilości ścieżek. Linia czarna reprezentuje rozwiązanie dokładne, zaś czerwone kropki wyniki obliczeń Monte Carlo dla danego punktu linii. Dolny rząd przedstawia znormalizowaną wartość bezwzględną różnicę potencjałów dokładnego i stochastycznego.

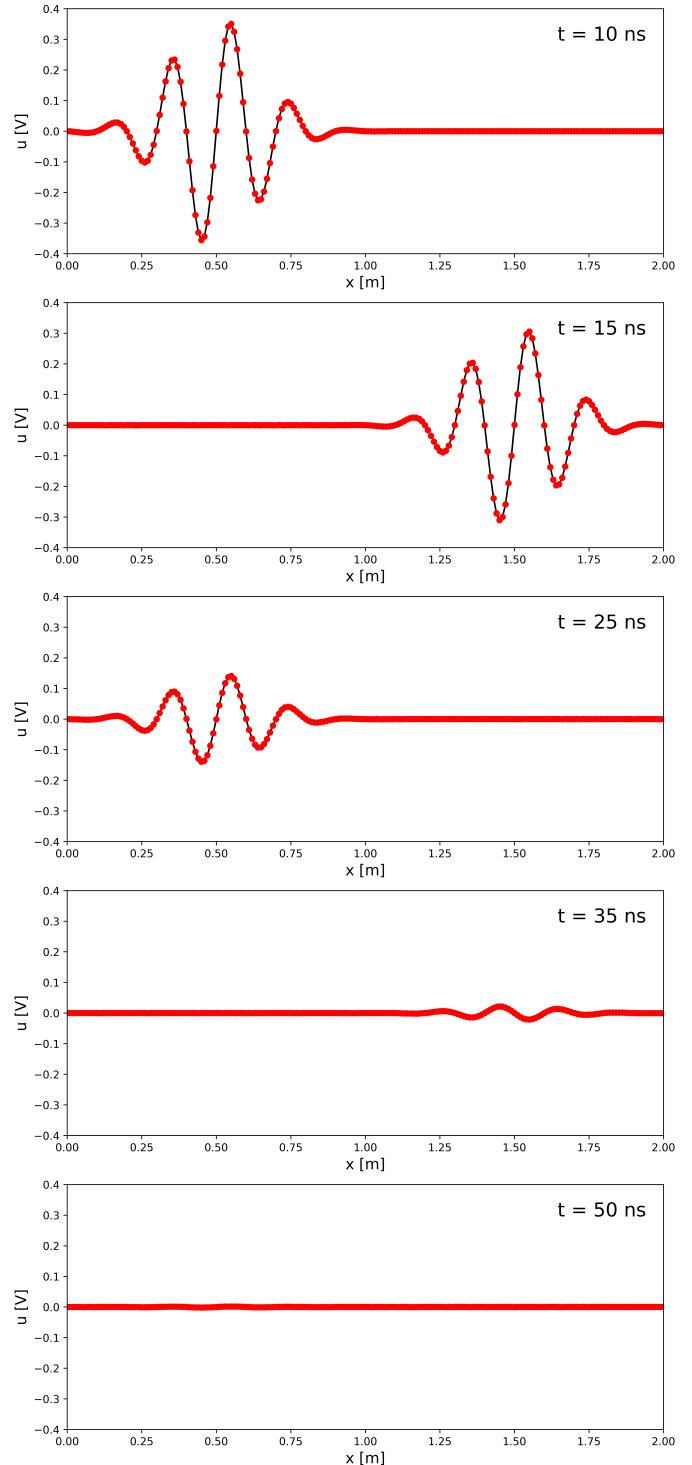


Rysunek 4: Porównanie sygnałów w chwili $t = 35$ ns w zależności od ilości ścieżek. Linia czarna reprezentuje rozwiązanie dokładne, zaś czerwone kropki wyniki obliczeń Monte Carlo dla danego punktu linii. Dolny rząd przedstawia znormalizowaną wartość bezwzględną różnicę potencjałów dokładnego i stochastycznego.



Rysunek 5: Porównanie sygnałów w chwili $t = 50$ ns w zależności od ilości ścieżek. Linia czarna reprezentuje rozwiązanie dokładne, zaś czerwone kropki wyniki obliczeń Monte Carlo dla danego punktu linii. Dolny rząd przedstawia znormalizowaną wartość bezwzględną różnicy potencjałów dokładnego i stochastycznego.

Na Rysunku 6 raz jeszcze pokazano przebieg sygnału w różnych chwilach czasowych dla ilości ścieżek $npaths = 10^5$. W poprzednich rozważaniach skalę osi y dopasowywano do amplitudy sygnału tak, aby jak najlepiej zauważać fluktuacje wartości obliczonych metodą Monte Carlo. Na Rys. 6 skala y została ustalona na sztywno. Dzięki temu można zauważać, że wraz z trwaniem symulacji fala faktycznie zanika. Wartość oporu własnego R_0 wynosiła 50Ω , na podstawie czego można obliczyć wartość współczynnika odbicia od prawej ścianki $\Gamma_l = -0.6$. Oznacza to, że fala została osłabiona o czynnik 0.6, co dobrze widać dla rysunku $t = 25 \text{ ns}$. Współczynnik odbicia dla ścianki lewej wyniósł $\Gamma_g = 0.2$. To osłabienie również jest widoczne dla kolejnych chwil. W efekcie po czasie 50 ns fala prawie całkowicie wygasła, co jest zgodne z oczekiwaniami.



Rysunek 6: Caption

4 Wnioski

Obliczenia metodą Monte Carlo dość dobrze pokrywały się z przewidywaniami dokładnymi. Udowadnia to, że korzystanie z metody całkowej daje dobre rezultaty i stanowi wydajną alternatywę dla układów równań różniczkowych, których złożoność i czas potrzebny na obliczenia byłyby znacznie większe. Ponadto pokazano, że zwiększenie ilości ścieżek o dwa rzędy wielkości redukuje wartość błędu około 9 razy.

Literatura

- [1] Tomasz Chwiej, dr hab. inż., skrypt do zadania “*Monte Carlo: propagacja sygnału elektrycznego w linii transmisyjnej, problem zależny od czasu*”, AGH, Kraków, 9 maja 2022.