

# Generatory liczb pseudolosowych - rozkłady skorelowane w 2D

Metody Monte Carlo w fizyce  
Nanoinżynieria materiałów

Łukasz Ruba



Akademia Górniczo-Hutnicza  
im. Stanisława Staszica w Krakowie

15 marca 2024

# Spis treści

Cel ćwiczenia	3
1 Wstęp teoretyczny	3
1.1 Generowanie rozkładów kołowych . . . . .	3
1.2 Transformacja afiniczna . . . . .	3
1.3 Macierz kowariancji . . . . .	3
2 Metodyka	4
3 Wyniki	4
4 Wnioski	5
Literatura	6

## Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia było skonstruowanie dwóch generatorów liczb pseudolosowych dwuwymiarowych. Zaimplementowano model Boxa-Mullera do generowania liczb z rozkładu normalnego, a następnie na podstawie otrzymanych punktów utworzono rozkład jednorodny z przedziału wartości koła jednostkowego. Na końcu przeskalowano oba rozkłady do formy rozkładów eliptycznych i policzono wartości macierzy kowariancji oraz współczynnika korelacji.

## 1 Wstęp teoretyczny

### 1.1 Generowanie rozkładów kołowych

Rozkład normalny sferycznie konturowany można wygenerować korzystając z metody Boxa-Mullera. Polega ona na wygenerowaniu dwóch liczb pseudolosowych  $U_1$  i  $U_2$  z przedziału  $[0,1]$ , a następnie korzystając ze wzorów [1] i [2] można obliczyć wartości współrzędnych  $(X,Y)$  punktów.

$$X = \sqrt{-2 \ln(1 - U_1)} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad (1)$$

$$Y = \sqrt{-2 \ln(1 - U_1)} \cdot \sin(2\pi U_2). \quad (2)$$

Z uzyskanych punktów o rozkładzie normalnym można utworzyć rozkład jednorodny o współrzędnych z przedziału koła jednostkowego. Współrzędne punktów należy znormalizować, a następnie przesunąć je do środka okręgu zgodnie ze wzorem [3]:

$$X'|Y' = \frac{X|Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \sqrt{U}, \quad (3)$$

gdzie  $U$  to zmienna losowa z przedziału  $[0,1]$  i wyraz  $\sqrt{U}$  odpowiada za przenoszenie punktów do wnętrza okręgu  $K^2(0,1)$ .

### 1.2 Transformacja afiniczna

W celu przekształcenia rozkładu punktów z koła do elipsy należy skonstruować macierz transformacji:

$$A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

gdzie  $r$  to wektory określające główne półośie i zależą od współczynników skalujących  $b_1$  i  $b_2$  oraz macierzy obrotu  $R_\alpha$ :

$$\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix} = b_1 R_\alpha \hat{e}_x = b_1 \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{bmatrix} = b_2 R_\alpha \hat{e}_y = b_2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Znając wartość macierzy  $A$  dla zadanych współ. skalowania i kąta  $\alpha$  możemy dokonać transformacji położenia punktu  $P = (X, Y)$  jako:

$$\vec{P}' = A \cdot \vec{P} + \vec{c}, \quad (7)$$

gdzie  $\vec{c}$  jest wektorem przesunięcia tego punktu. Dla transformacji przedstawionej w tym sprawozdaniu nie wykonywano przesunięcia, czyli  $\vec{c} = [0, 0]^T$ .

### 1.3 Macierz kowariancji

Chcąc wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych  $x, y$  można skonstruować macierz kowariancji, która ma postać:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

i użyć jej wartości we wzorze [9]:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{yx}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}. \quad (9)$$

## 2 Metodyka

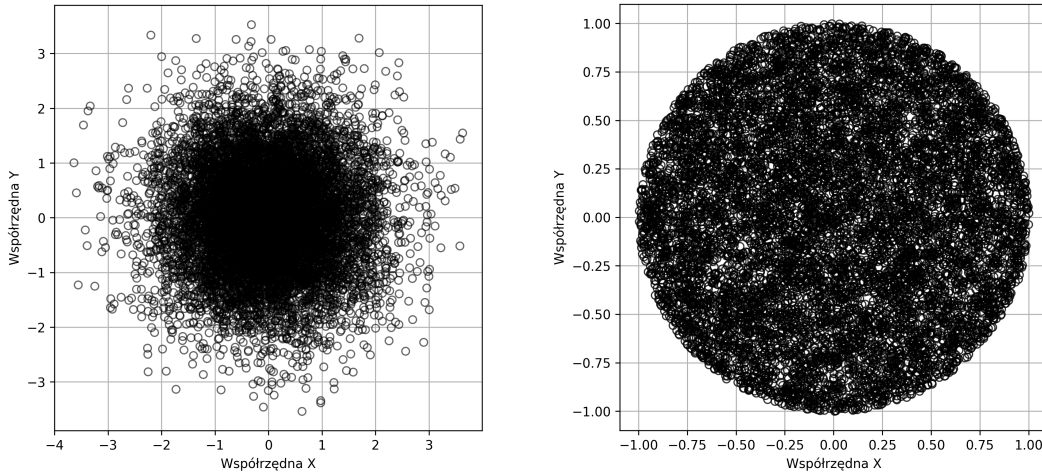
Generatory o rozkładzie normalnym [1-2] i jednorodnym [3] zostały zaimplementowane w języku *C++* i wygenerowano nimi ciągi liczb pseudolosowych o mocy  $10^4$ .

Uzyskane wartości poddano transformacji afinicznej zgodnie ze wzorem [7]. W obu przypadkach użyto parametrów  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0.2$  i kąta  $\alpha$  równego  $\frac{\pi}{4}$ . Dla uzyskanych rozkładów eliptycznych policzono wartości macierzy kowariancji oraz współczynniki korelacji ze wzoru [9].

Wszystkie wykresy utworzono przy pomocy biblioteki *matplotlib* w *Python*.

## 3 Wyniki

Na Rysunku 1 przedstawiono wygenerowane punkty dla rozkładu normalnego i jednorodnego w postaci punktów naniesionych na dwuwymiarową płaszczyznę.



**Rysunek 1:** Wykresy położenia punktów wygenerowanych przy pomocy rozkładu: lewy) normalnego; prawy) jednorodnego w kole jednostkowym.

Można zauważyć, że rozkład punktów na płaszczyznach odpowiada przypuszczeniom, tzn. dla rozkładu normalnego w centrum znajduje się ich najwięcej i oddalając się od niego stopniowo ich gęstość maleje. Dla rozkładu jednorodnego zaś cały obszar koła jednostkowego jest równomiernie pokryty punktami.

W kolejnym kroku dokonano transformacji na obu rozkładach, zmieniając ich kształt z kołowego na eliptyczny. Nowe rozmieszczenie punktów przedstawiono na Rysunku 2.

Jak widać, mimo transformacji i w efekcie zmianie kształtu charakter obu rozkładów, normalnego i jednorodnego, nie uległ zmianie.

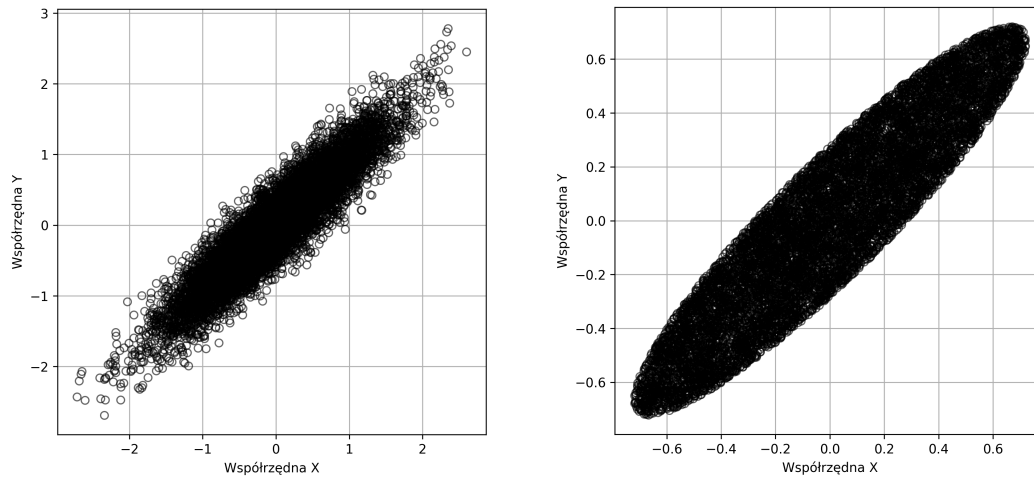
Dla rozkładów eliptycznych policzono wariancje i skonstruowano z nich macierze kowariancji:

$$\Sigma_{normalny} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5226 & 0.4807 \\ 0.4807 & 0.5186 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\Sigma_{jednorodny} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1295 & 0.1197 \\ 0.1197 & 0.1300 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Na podstawie uzyskanych danych policzono współczynniki korelacji zmiennych losowych:

$$r_{normalny} = 0.9233, \quad r_{jednorodny} = 0.9227. \quad (12)$$



**Rysunek 2:** Wykresy położenia punktów po transformacji afinicznej wygenerowanych przy pomocy rozkładu: lewy) normalnego; prawy) jednorodnego w kole jednostkowym.

## 4 Wnioski

W sprawozdaniu zaprezentowano wyniki pracy dwóch generatorów dwuwymiarowych liczb pseudolosowych. Oba spełniały narzucone im wymagania, tj. rozkładu normalnego punktów oraz, w przypadku drugim, rozkładu jednorodnego.

Pokazano również, że ich charakter nie ulega zmianie przy transformacji kształtu rozkładu do eliptycznego.

Współczynniki korelacji zmiennych losowych w obu przypadkach były do siebie bardzo zbliżone i jednocześnie były bliskie jedności. Oznacza to, że istnieje silna liniowa zależność między punktami z obu rozkładów. Wniosek ten jest słuszny z przewidywaniami, ponieważ każdy z wygenerowanych punktów był poddany tej samej procedurze obliczania go w ramach pewnej puli wspólnych parametrów takich jak chociażby współczynniki skalujące. Niższa wartość współczynnika korelacji dla rozkładu jednorodnego może wynikać z dodatkowego udziału zmiennej losowej  $U$  (element przenoszący do wnętrza koła jednostkowego we wzorze [3]) w momencie obliczania punktów tegoż rozkładu.

## Literatura

[1] Tomasz Chwiej, dr hab. inż., wykład pt. “*Generatory liczb pseudolosowych*”, AGH, Kraków, 2024.