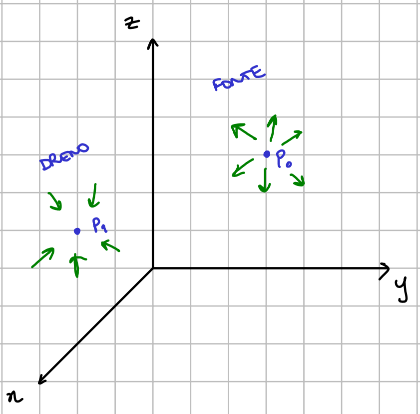
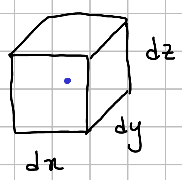
DIVERGENTE & LAPLACIANO

COMEÇEMOS POR ENTENDER O DIVERGENTE DE UM CAMPO VETORIAL $\vec{F}$. O DIVERGENTE MEDE O FLUXO LÍQUIDO DO CAMPO POR UNIDADE DE VOLUME (QUANDO ESSE VOLUME VAI PARA ZERO E PASSA A SER INFINITESIMAL).



NA PRÁTICA, ELE INDICA FONTES (SOURCES) E DRENOS (SINKS) DE UM CAMPO VETORIAL. POR CONVENÇÃO, SE HÁ UMA FONTE O DIVERGENTE É POSITIVO, E EM CASOS DE DRENO, NEGATIVO.

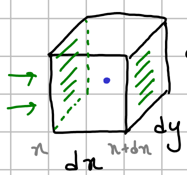
PRA CONSTRUIR O OPERADOR, SAÍMOS DE SUA DEFINIÇÃO: PRECISAMOS COMPUTAR O FLUXO DO CAMPO NO VOLUME INFINITESIMAL



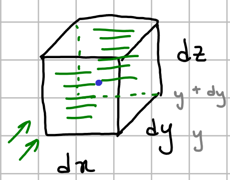
VAMOS SAIR DE COORDENADAS CARTESIANAS. O VOLUME É:

$$dV = dx\,dy\,dz$$

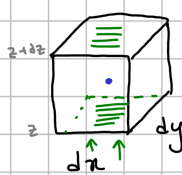
AGORA VAMOS VER O FLUXO EM CADA DIREÇÃO. COMEÇEMOS COM x:



$$F_x(x+dx)\,\overbrace{dy\,dz}^{dA} - F_x(x)\,dy\,dz \equiv \text{FLUXO EM } x$$



$$\left[F_y(y+dy) - F_y(y)\right] dx\,dz \equiv \text{FLUXO EM } y$$



$$\left[F_z(z+dz) - F_z(z)\right] dx\,dy \equiv \text{FLUXO EM } z$$

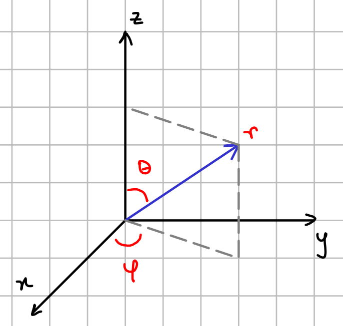
O FLUXO TOTAL É A CONTRIBUIÇÃO EM CADA DIREÇÃO. DIVIDINDO PELO VOLUME TOTAL, TEMOS A DENSIDADE DO FLUXO PONTO A PONTO (O DIVERGENTE):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\left[F_x(x+dx) - F_x(x)\right]dy\,dz + \left[F_y(y+dy) - F_y(y)\right]dx\,dz + \left[F_z(z+dz) - F_z(z)\right]dx\,dy}{dx\,dy\,dz}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \underbrace{\frac{F_x(x+dx) - F_x(x)}{dx}} + \frac{F_y(y+dy) - F_y(y)}{dy} + \frac{F_z(z+dz) - F_z(z)}{dz} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

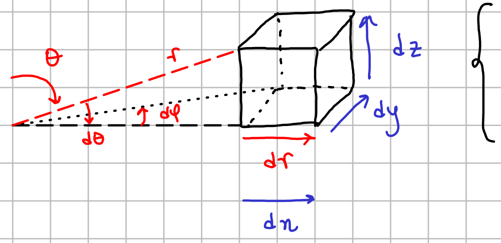
DEFINIÇÃO DE DERIVADA PARCIAL QUANDO $dx \to 0$

Caso a gente fosse pensar o problema em outras coordenadas, precisaríamos primeiro repensar o volume nesse novo sistema. Por exemplo, vamos pegar as esféricas:



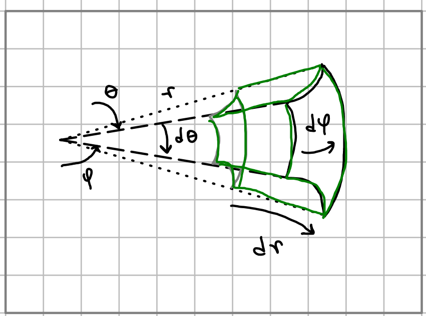
Nesse sistema, o antigo cubo de volume infinitesimal

$dV = dx\,dy\,dz$, é escrito como



$$\begin{cases} dx = dr \\ dz = r\,d\theta \quad (d\theta \ll 1) \\ dy = r\,\text{sen}\theta\,d\varphi \quad (d\varphi \ll 1) \end{cases}$$

Pensa que esse carinha se deforma em um cubo quando $dr, d\theta, d\varphi \ll 1$



Desse modo: $dV = r^2\,\text{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

Então:

$$\Phi_r = F_r(r+dr)\overbrace{\left[(r+dr)\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,(r+dr)\,d\theta\right] - F_r(r)}^{\text{As áreas não são iguais}}\left[r\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,r\,d\theta\right]$$

$$= F_r(r+dr)\left[\left(r^2 + 2r\,dr + \underbrace{dr^2}_{\to 0,\ dr \ll 1}\right)\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta\right] - F_r(r)\,r^2\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \left[F_r(r+dr) - F_r(r)\right] r^2\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta + 2r\,F_r(r+dr)\,dr\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta$$

Dividindo por $dV = r^2\,\text{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$, temos

$$\frac{F_r(r+dr) - F_r(r)}{dr} + \frac{2}{r}F_r(r+dr) \xrightarrow{dr \to 0} \underbrace{\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{2}{r}F_r(r)}$$

que podemos escrever mais compactamente como

$$\frac{\Phi_r}{dV} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right)$$

derivada do produto

Basta repetir o mesmo para as outras componentes (lembrando que a área não é constante como no caso das cartesianas).

- $$\Phi_\theta = F_\theta(\theta+d\theta)\left[dr\,r\,\text{sen}(\theta+d\theta)\,d\varphi\right] - F_\theta(\theta)\left[dr\,r\,\text{sen}\theta\,d\varphi\right]$$

$$= F_\theta(\theta+d\theta)\left[r\left(\text{sen}\theta\,\underbrace{\cos d\theta}_{\approx 1,\ d\theta \ll 1} + \underbrace{\text{sen}\,d\theta}_{\approx d\theta,\ d\theta \ll 1}\cos\theta\right)dr\,d\varphi\right] - F_\theta(\theta)\,r\,\text{sen}\theta\,dr\,d\varphi$$

$$= F_\theta(\theta+d\theta)\left(r\,\text{sen}\theta + r\cos\theta\,d\theta\right)dr\,d\varphi - F_\theta(\theta)\,r\,\text{sen}\theta\,dr\,d\varphi$$

$$= \left[F_\theta(\theta+d\theta) - F(\theta)\right] r\,\text{sen}\theta\,dr\,d\varphi + F_\theta(\theta+d\theta)\,r\cos\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\frac{\Phi_\theta}{dV} = \frac{F_\theta(\theta+d\theta) - F(\theta)}{d\theta}\,\frac{1}{r} + F_\theta(\theta+d\theta)\,\frac{1}{r\,\text{tg}\theta} \xrightarrow{d\theta \to 0} \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{F_\theta}{\text{tg}\theta} = \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta \cdot F_\theta\right)$$

- $$\Phi_\varphi = F_\varphi(\varphi+d\varphi)\underbrace{\left[r\,dr\,d\theta\right]}_{\text{nesse caso a área é constante}} - F_\varphi(\varphi)\left[r\,dr\,d\theta\right] = \left[F_\varphi(\varphi+d\varphi) - F_\varphi(\varphi)\right] r\,dr\,d\theta$$

$$\frac{\Phi_\varphi}{dV} = \frac{F_\varphi(\varphi + d\varphi) - F(\varphi)}{r\,\text{sen}\theta\, d\varphi} \xrightarrow{d\varphi \to 0} \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

Assim concluímos a demonstração do divergente em coordenadas esféricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\, F_\theta\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Mais rigorosamente, o que mostramos foi: $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{A}$

Já o Laplaciano é um caso especial (que extenderemos depois) onde o nosso campo $\vec{F}$ pode ser descrito por um potencial escalar ϕ, i.e., $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$. Nesse caso, temos por definição que o Laplaciano de uma função escalar é:

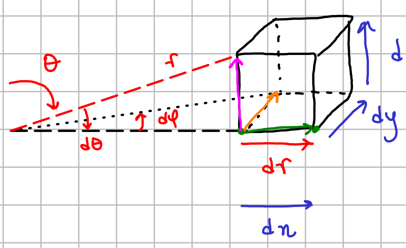
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \nabla^2\phi = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\oint_{\partial V}\vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{A}$$

Assim fica fácil! É só substituir F_x por $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, F_y por $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ e F_z por $\frac{\partial\phi}{\partial z}$.

O Laplaciano em cartesianas fica:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Enquanto que em esféricas precisamos ter um pouco mais de atenção, pois o gradiente muda.



$$\begin{cases} d\hat{x} = d\hat{r} \\ d\hat{y} = r\,\text{sen}\theta\, d\hat{\varphi} \\ d\hat{z} = r\, d\hat{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Logo, o gradiente e o Laplaciano em esféricas ficam:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\phi$$

F_x $\qquad$ F_y $\qquad$ F_z

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\text{sen}\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r\,\text{sen}\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

INTUIÇÃO $\nabla \phi$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, $\nabla^2 \phi$

- O GRADIENTE DE UM ESCALAR APONTA NA DIREÇÃO DO MAIOR CRESCIMENTO LOCAL DA FUNÇÃO.

- O DIVERGENTE INDICA A PRESENÇA DE DRENOS OU FONTES NO CAMPO VETORIAL. SABER SE HÁ UM DRENO OU UMA FONTE CONSISTE EM ANALISAR, PONTO A PONTO, O QUANTO O VOLUME AO SEU REDOR ESTÁ SENDO CONTRAÍDO OU EXPANDIDO PELO "TRANSPORTE" DO CAMPO VETORIAL (MEDE A TAXA LOCAL DE CRIAÇÃO / DESTRUIÇÃO DE FLUXO)

- O LAPLACIANO É UM DIVERGENTE ESPECIAL QUANDO $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$ (PODEMOS EXPRESSAR O CAMPO COMO O GRADIENTE DE UM ESCALAR).