Linearna algebra j teorija

Nekatere stvari še nismo jemali, zato določene povezave med stvarmi niso zapisane in bi jih bilo potrebno (povezave) ponovno preveriti.

Odnosi med A in A^2 so naslednji.

- dimenzije

Če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem $A^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (je poseben primer, če $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, potem $A^2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$) preveri

- rang (rank)

$$\text{rang}(A^2) \leq \text{rang}(A)$$

- obrnljivost (invertibility)

Če A obrnljiva, (je) obrnljiva tudi A^2.

Če A^2 obrnljiva, (je) obrnljiva tudi A.

- obstaja A^2

A^2 obstaja le, če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Če $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A^2 ne obstaja

- simetričnost

Če A simetrična, (je) A^2 tudi simetrična. Dokaz:

$$(A^2)^T = (A\cdot A)^T = A^T \cdot A^T = A\cdot A = A^2$$

Če je matrika (A) simetrična, zanjo velja $A = A^T$.

Produkt matrik je lahko ničelna matrika, tudi, če nobena od matrik pri množenju ni ničelna.

Če je rešitev sistema $Ax=0$ le ena (trivialna rešitev $\vec{x}=\vec{0}$), velja $\dim(N(A))=0$. To je pomembno razumeti zaradi

$$\dim(V) = \dim(C(A)) + \dim(N(A)).$$

Vedno $\dim(C(A)) = \text{rang}(A)$

Sedaj $\dim(V) = \dim(C(A))$

in zato $\dim(V) = \text{rang}(A)$.

dim(V) je najmanjša med dimenzijami m in n, če so m in n iz $\mathbb{R}^{n\times m}$ in je V poimenovanje za $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($V=\mathbb{R}^{n\times m}$).

$\dim(V) = m$ v $\mathbb{R}^{n\times m}$ zunanja
$\dim(V) = n$ v $\mathbb{R}^{m\times n}$ zunanja

$\Big\}$ Vedno gledam zunanjo med m in n.

Zunanja v $\mathbb{R}^{n\times m}$ (v tem primeru je zunanja m) je število stolpcev.

rang(A+B) <>= rang(A), saj prištevanje B lahko pokvari linearno neodvisnost vrstic/stolpcev ali pa ga popravi.

$$\text{rang}(A+B) = \dim(V) - \dim(N(A+B))$$

Osnovna formula je

$\dim(V) = (C(A)) + \dim(N(A))$. Če je $\dim(N(A+B))$ večje od $\dim(N(A))$, je rang(A+B) manjši od rang(A) (——

—— Če je $\dim(C(A+B))$ manjši od $\dim(C(A))$, je rang(A+B) manjši od rang(A), saj $\text{rang}(A) = \dim(C(A))$ in $\text{rang}(A+B) = \dim(C(A+B))$.

Pri linearnih ovojnicah.

$\Downarrow$

$$\dim(U_1+U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1+U_2).$$

Vsota vektorski podprostorov je vektorski podprostor.

$\left.\begin{array}{l} U_1 \text{ v.p.} \\ U_2 \text{ v.p.} \end{array}\right\} \Rightarrow U_1+U_2$ v.p.
vektorski podprostor

Presek vektorskih podprostorov je vektorski podprostor.

$\left.\begin{array}{l} U_1 \text{ v.p.} \\ U_2 \text{ v.p.} \end{array}\right\} \Rightarrow U_1\cap U_2$ v.p.

Unija vektorskih podprostorov ni vektorski podprostor.

$\left.\begin{array}{l} U_1 \text{ v.p.} \\ U_2 \text{ v.p.} \end{array}\right\} \Rightarrow U_1\cup U_2$ ni v.p. (lahko tudi je, vendar v glavnem ni).

1.

$A^2 - 3A + 2I = 0$

$A^2 - 3A = -2I \;/:(-2)$

$\frac{-A^2 + 3A}{2} = I$

$-A\frac{(A-3I)}{2} = I$

$A - 2I = A^{-1}$

3.

$A^2 - A - I = 0$

$A^2 - A = I$

$A(A - 1I) = I$

$A - 1I = A^{-1}$

4.

$A^2 + 4A - 3I = 0$

$A^2 + 4A = 3I \;/:3$

$A\frac{(A+4I)}{3} = I$

$A + 4I = A^{-1}$

5

$A^2 - 5A + 6I = 0$

$A^2 - 5A = -6I \;/:(-6)$

$\frac{A^2 - 5A}{-6} = I$

$-\frac{A(A-5I)}{6} = I$

$A - 5I = A^{-1}$

6.

$A^2 + A - 2I = 0$

$A^2 + A = 2I$

$A(A + I) = 2I \;/:2$

$\frac{A(A+I)}{2} = I$

$A + I = A^{-1}$

7.

$A^2 - 4A + 4I = 0$

$A^2 - 4A = -4I \;/:(-4)$

$\frac{A(A-4I)}{-4} = I$

$A - 4I = A^{-1}$

8.

$A^2 + 3A - 5I = 0$

$A^2 + 3A = 5I \;/:5$

$\frac{A(A+3I)}{5} = I$

$A + 3I = A^{-1}$

9.

$A^2 - 2A - I = 0$

$A^2 - 2A = I$

$A(A - 2I) = I$

$A - 2I = A^{-1}$

Linearna algebra, teorija, Lastne vrednosti

Za vsak karakteristični polinom polinom $p(\lambda)$ velja

$p(\lambda) = p(A)$, kjer se λ in A zamenjata. Tako na primer

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 10 = 0$ pomeni $A^3 - A^2 - A + 10I = 0$

Rezultat izraza je ničelna matrika, saj je $=0$ na desni strani.

Realne matrike lihih dimenzij, $A \in \mathbb{R}^{(2k+1)\times(2k+1)}$, imajo vedno vsaj eno realno lastno vrednost. Sledi primer.

$A \in \mathbb{R}^{11\times 11}$. Matrika A ima gotovo vsaj eno lastno vrednost. DA / NE

Sledijo lastnosti podobnih matrik, $A \sim B$.
podobno

- imajo enake karakteristični polinom (imajo enake lastne vrednosti)
- imajo enake sled in determinante

Dodatno:

- nimajo enakih jeder (ker) in slik (im)
- nimajo enakih lastnih vektorjev.

Matriki sta si podobno, če obstajata P in P^{-1}, da velja, če sta A in B matriki, $B = P^{-1}AP$.

Se ne sme zamešati z $B = PAP^T$.

Če imata A in B, kjer $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, lastno vrednost 0, ne pomeni, da jo bo imela tudi $A+B$.

Če je A nilpotentna matrika, so vse njene lastne vrednosti enake 0.

sled(A) - sled matrike A je vsota njenih diagonalnih elementov.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{sled}(A) = 2+4+2 = 2 \cdot 2 + 4 = 8$$

Naj bo A kvadratna matrika velikosti $n \times n$ s karakterističnim polinomom $p_A(\lambda) = \underbrace{\lambda^3}_{\lambda_1} \underbrace{(\lambda-1)^2}_{\lambda_2} \underbrace{(\lambda-3)^5}_{\lambda_3}$. Možno je, da velja $n = 15$. DA/NE

Ne, saj je n enak vsoti aritmetičnih večkratnosti lastnih vrednosti, $a(\lambda_1) = 3$, $a(\lambda_2) = 2$, $a(\lambda_3) = 5$, $a(\lambda_1) + a(\lambda_2) + a(\lambda_3) = 10 \neq 15$.

Naj bo A kvadratna matrika velikosti 10×10 s karakterističnim polinomom $p_A(\lambda) = \lambda^3 (\lambda-1)^2 (\lambda-3)^5$. Možno je, da je $\dim(\ker(A-5I)) \geq 1$. DA/NE.

Ne, saj $(\lambda - 5)$ ni v karakterističnem polinomu (bi se pri $p_A(A)$ spremenilo v $(A-5I)$), zato ne more biti $\dim(\ker(A-5I)) \geq 1$, temveč le $\dim(\ker(A-5I)) = 0$.

Matrika A, če $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in A ni ničelna matrika, ima vsaj en lastni vektor (in zato tudi lastno vrednost) v $\mathbb{C}$, vendar ne tudi v $\mathbb{R}$. Matrika ima zagotovo vsaj eno lastno vrednost (in zato tudi lastni vektor) le, če je lihih dimenzij, $A \in \mathbb{R}^{(2k+1)\times(2k+1)}$, $k \in \mathbb{R}$.

koeficient

Pri množenju matrik se iz začetne matrike prenesejo le lastne vrednosti z vrednostjo 0, $\lambda = 0$, lastne vrednosti v A, ki nimajo vrednosti 0, $\lambda \neq 0$, se preslikajo (običajno) v druge vrednosti. A... začetna matrika

$$p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$$

AB... produkt matrik

$$p_{AB}(\lambda) = \lambda(\lambda - a)$$

enako velja tudi za BA

a... neka vrednost

Lastni vektorji simetrične matrike so vedno pravokotni, zato naprimer, če so $\vec{u}$ in $\vec{v}$ lastni vektorji iste simetrične matrike, velja $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Nilpotentna preslikava je linearna preslikava $f: V \to V$, kjer V v.p., da obstaja naravno število k, za katerega je $f^k = 0$.

Lastnosti:

- $\dim(\operatorname{im}(f)) < \dim(V)$
- Ker je $f^k = 0$, mora biti slika preslikave vsebovana v jedru, torej velja $\operatorname{im}(f) \subseteq \ker(f)$, zato $\dim(\operatorname{im}(f)) \leq \dim(\ker(f))$.

Za preslikave velja podobno pravilo kot za dimenzije stolpičnega ($\dim(C(A))$) in ničelnega ($\dim(N(A))$) prostora matrike.

f... preslikava

$$\dim(\operatorname{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(V)$$ – pravilo za preslikave

$$\dim(C(A)) + \dim(N(A)) = \dim(V)$$ – pravilo za matrike.

Nilpotentna preslikava, Lastnosti:

- nima lastne vrednosti 0 ($\lambda \neq 0$), saj ni nobenega vektorja $\vec{v}$, za katerega bi $f(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{v}$ za vse vektorje v prostoru. Preslikava izniči vse vektorje, zato so vsi lastni prostori v f enaki 0 (ne vektorju 0, $\neq \vec{0}$).

Za poljubne tri vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ne obstaja linearna preslikava $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ po vrsti preslika v vektorje $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$, saj $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ morda niso bazni vektorji, vsaka preslikava pa potrebuje toliko baznih vektorjev, kolikor je dimenzija prostora. – Odgovor od ChatGPT, še malo preveri.

Jedro preslikave je množica vseh vektorjev, ki se preslikajo v ničelni vektor, oznaka ker, za preslikavo f, $\ker(f)$. V njem so vsi ničelni vektorji ($\vec{0}$) in vsi vektorji, ki jih f preslika v ničelni vektor. Jedro vedno vsebuje ničelni vektor. Vključuje vse ničelne slike.

Slika. Mi ni povsem jasno, kaj je, sledi definicija. Slika preslikave je množica vseh vektorjev, ki so slike vektorjev iz domene (množica začetnih vektorjev pred preslikavo). Slika vključuje vse neničelne slike, vendar ne vključuje nujno ničelnega vektorja, oznaka $im(f)$ za preslikavo f.

Če slika vsebuje samo ničelni vektor, pomeni, da vse vektorje razen ničelnega vektorja iz domene preslika v ničelni vektor. (v kodomeni).

Če slika vsebuje ničelni vektor in druge vektorje, je vsebovanost ničelnega vektorja le posledica lastnosti preslikava, nima posebnega poimenovanja ali lastnosti.

Za vse preslikave velja $\dim(im(f)) \leq \dim(V)$, ker $f: W \to V$, (izjema nilpotentne povezave). Pozoren sem na naslednji primer.

$f: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ je vsaj en neničelni vektor? Da ali ne.

$im(f) \subseteq \mathbb{R}^4$, zato $\dim(im(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^4)$, $\dim(im(f)) \leq 4)$

$$\dim(im(f)) + \dim(ker(f)) = \dim(V) \quad \mathbb{R}^5$$

V formuli se vedno uporablja dimenzija domene.

$$\dim(im(f)) + \dim(ker(f)) = 5$$

$$\dim(ker(f)) = 5 - \dim(im(f))$$
$$\dim(ker(f)) = 5 - 4 \quad \text{največ } 4$$
$$\dim(ker(f)) = 1$$
$$1 \leq \dim(ker(f)) \leq 5 \quad \text{morda 4, ne vem.}$$

Naj bodo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times o}$, $C \in \mathbb{R}^{o \times p}$ pravokotne (irelevantno) matrike. Velja $\ker C \subseteq \ker(ABC)$, saj je jedro zadnje matrike v produktu ($\ker C$), kar je za ABC matrika C – vedno vsebovana v jedru produkta ($\ker(ABC)$). Velja $im(ABC) \subseteq im(A)$, saj je vedno slika produkta ($im(ABC)$) vsebovana v sliki prve matrike produkta ($\mathrm{Im}(A)$).

Če sta L_1, L_2 surjektivni, ne pomeni, da je $L_1 + L_2$ ali $L_1 \circ L_2$ surjektivna.

Naj bo $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linearna preslikava. Množica $L(\mathbb{R}^n)$ je vektorski podprostor. DA/NE. Da, saj je definirano, da L vedno preslika vektorski podprostor v vektorski podprostor.

Za kvadratno matriko A velja $\dim(\ker(A-2I)) = 3$. Potem je njen karakteristični polinom oblike $(\lambda-2)^3 g(\lambda)$ za nek polinom g. DA/NE.

Algebraična večkratnost $a(A-2I) = 3$

Geometrijska večkratnost $g(A-2I) = 3$.

Je DA, saj je algebraična večkratnost, $a(A-2I) \geq g(A-2I)$, vsaj toliko velika kot geometrijska večkratnost.

Za kvadratno matriko A velja $\dim(\ker(A-2I)) = 1$. Potem njen karakteristični polinom NE more biti oblike $(\lambda-2)^2 g(\lambda)$ za nek polinom g. DA/NE.

$g(A-2I) = 1$ $\quad$ $a(A-2I) = 2$

Je tudi suma lastnih vrednosti.

Ne, saj je lahko, ker je $a(A-2I) \geq g(A-2I)$ v danem primeru.

<u>A je inverzna matrika, če $\ker(A) = \{\vec{0}\}$</u>

Naj bodo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ linearno neodvisni vektorji. Obstaja taka linearna preslikava $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$, da so vektorji

$L(\vec{u}), L(\vec{v}), L(\vec{w})$ linearno neodvisni. DA/NE

Ne, saj je slika linearno odvisnega vektorja vedno linearno odvisni vektor.

Stolpični prostor (C(A)) in vrstični prostor - ničelni prostor - N(A) sta enaka le za simetrične matrike (, če je A matrika).

Jedro in slika matrike sta lahko enaka le, če $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $n = \{2k; k \in \mathbb{N}\}$, kar pomeni, da je mogoče le, če je n sodo število (in matrika A kvadratna matrika).

Singularna matrika je matrika, naprimer A, katere determinanta $\det(A) = 0$.

A^+ je Moore-Penroseov inverz, kar je inverz, ki ne velja le za kvadratne, temveč tudi pravokotne matrike. Za pravokotne matrike velja $A^+ = A^T$ in zato $\mathrm{im}(A^+) = \mathrm{im}(A^T)$.