IMPA Tech – AV2
Introdução à Probabilidade (CB22)
19 de novembro de 2025

1. [2 pontos] Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson com parâmetros λ_X e λ_Y, respectivamente.
   (a) [1 ponto] Mostre que a distribuição de $X+Y$ também é Poisson com parâmetro $\lambda_X+\lambda_Y$.
   (b) [1 ponto] Mostre que a distribuição de X dado $X+Y=n$ é Binomial com parâmetros n e $\lambda_X/(\lambda_X+\lambda_Y)$.

2. [3 pontos] Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma Binomial com parâmetros m e θ:
   (a) [1 ponto] Encontre a função geradora de momentos de X_i, $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
   (b) [1 ponto] Mostre que $Y_n=\sum_{i=1}^n X_i$ também é Binomial com parâmetros nm e θ.
   (c) [1 ponto] Pelo TCL, $\bar{X}_n = Y_n/n$ converge em distribuição para a normal. Encontre a média e a variância de $\bar{X}_n$ como função de m, n e θ.

3. [3 pontos] Sejam $T_1, T_2, \ldots, T_n$ variáveis aleatórias identicamente distribuídas com distribuição exponencial com parâmetro Y, $T_i \mid Y=y \sim Exp(y)$. Suponha que dado $Y=y$, $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são condicionalmente independentes, e $Y \sim Gama(\alpha,\lambda)$.
   (a) [1 ponto] Escreva a densidade conjunta de $(T_1, T_2, \ldots, T_n, Y)$.
   (b) [1 ponto] Obtenha a densidade conjunta de $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$.
   (c) [1 ponto] Mostre que a distribuição condicional de $Y \mid T_1 = t_1, \ldots, T_n = t_n$ é Gama com parâmetros $\alpha+n$ e $\lambda+\sum_{i=1}^n t_i$.

4. [2 pontos] Defina a desigualdade de Markov, e prove a desigualdade de Chernoff:

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{at}}, \qquad t>0.$$

Formulário:

Se $X \sim Poisson(\lambda)$ então

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x=0,1,2,\ldots,\ \lambda>0.$$

Se $X \sim Binomial(n,\theta)$, então

$$p_X(x) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{1-x} \quad x=0,1,\ldots,n,\ \theta\in(0,1).$$

Se $X \sim Gama(\alpha,\lambda)$ então

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, \quad x>0,\ \lambda>0, \alpha>0,$$

onde a $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^a e^{-x}dx$; se a inteiro $\Gamma(a)=(a-1)!$. Se $\alpha=1$, $X\sim Exp(\lambda)$.

Elaborado por Leo Bastos