IMPA Tech
CB22 Introdução à Probabilidade
6 de outubro de 2025

1. [2 pontos] Mostre que para todos inteiros positivos n e k com $n \geq k$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

   (a) [1 ponto] Algebricamente.

   (b) [1 ponto] Por combinatória, dando uma interpretação do porquê ambos os lados contam a mesma coisa.
   (Dica:)

2. [2 pontos] Você vai jogar 2 partidas de xadrez com um oponente contra o qual você nunca jogou antes (para fins deste problema). Seu oponente tem a mesma probabilidade de ser iniciante, intermediário ou mestre. Dependendo de qual, suas chances de vencer uma partida individual são de 90%, 50% ou 30%, respectivamente.

   (a) [1 ponto] Qual é a sua probabilidade de vencer a primeira partida?

   (b) [1 ponto] Parabéns: você venceu a primeira partida! Dada essa informação, qual é a probabilidade de você também vencer a segunda partida (suponha que, dado o nível de habilidade do seu oponente, os resultados das partidas sejam independentes)?

3. [2 pontos] Uma pessoa é testada para uma doença rara que atinge 1% da população. O teste tem acurácia de 95%, ou seja ele retorna positivo quando a pessoa de fato está doente com robabilidade 0.95, e também com probabilidade 0.95 teste dá um valor negativo se a pessoa não tiver a doença. Suponha que o resultado do teste foi positivo.

   (a) [1 ponto] Qual é a probabilidade da pessoa de fato ter a doença?

   (b) [1 ponto] Um segundo teste foi realizado, mas o resultado foi negativo. Qual a probabilidade da pessoa ter doença?

4. [3 pontos] Seja X o número de compras online que uma pessoa faz em um certo período de tempo. Suponha que a função de probabilidade de X é $P(X = x) = \lambda^x e^{-\lambda}/x!$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$.

   (a) [1 ponto] Encontre $P(X \geq 1)$ sem somar séries infinitas.

   (b) [1 ponto] Sabe-se que a pessoa comprou pelo menos um 1 item, ou seja $X \geq 1$. Encontre a função de probabilidade de X dado que $X \geq 1$. Isto é, encontre $P(X = x|X \geq 1)$.

5. [1 ponto] Seja X uma variável aleatória contínua no intervalo (0,1) com função de densidade, $f_X(x) = kx^2\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$. Encontre k e calcule $P(X > 1/2)$.

Elaborado por Leo Bastos