Lista de Introdução à probabilidade: Valor esperado e distribuição conjunta

Leonardo Bastos - IMPA Tech

Novembro 2025

1. Suponha que $P(X = 0) = 1 - P(X = 1)$. Se $E[X] = 3Var[X]$, encontre $P(X = 0)$

2. Se $X \sim Poisson(\lambda)$, mostre que $E[X] = Var[X] = \lambda$.

3. Se $X \sim Binomial(n, p)$, mostre que $E[X] = np$ e $V[X] = np(1 - p)$.

4. Se $X \sim Exp(\lambda)$, mostre que $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ e $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

5. Seja X uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Encontre o valor esperado e a variância de

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

6. A função de densidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   Se $E[X] = \frac{3}{5}$, encontre a e b.

7. O tempo de vida em horas de um certo componente eletrônico é uma variável aleatória com função de densidade dada por

$$f_X(x) = xe^{-x} \qquad x > 0$$

   Calcule o tempo de vida esperado desse componente eletrônico.

8. Dois dados são lançados. Encontre a distribuição conjunta de X e Y quando

   (a) X é o maior valor dos dois dados e Y a soma dos resultados dos dois dados.

   (b) X é o valor do primeiro dado e Y é o maior dos dois valores.

9. Considere uma sequencia de experimentos de Bernoulli independentes, com probabilidade de sucesso em cada experimento dada por p. Seja X_1 o número de falhas que precedem o primeiro sucesso, e X_2 o número de falhas entre os dois primeiros sucessos. Encontre função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2.

10. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \qquad -y \leq x \leq y, 0 < y < \infty$$

    (a) Encontre c.
    (b) Encontre as densidades marginais de X e Y.
    (c) Encontre $E[X]$

11. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right) \qquad 0 < x < 1, 0 < y < 2$$

    (a) Verifique que esta é de fato uma função de densidade conjunta.
    (b) Encontre a densidade marginal de X.
    (c) Encontre $P(X > Y)$
    (d) Encontre $P(Y > 1/2 \mid X < 1/2)$
    (e) Encontre $E[X]$
    (f) Encontre $E[Y]$

12. Um homem e uma mulher concordaram em se encontrar em uma certa localidade por volta de 12:30. Se o homem chega em tempo uniformemente distribuído entre 12:15 e 12:45 e se a mulher independentemente chega em um tempo uniformemente distribuído entre 12:00 e 13:00, encontre a probabilidade de que o primeiro a chegar espere menos que 5 minutos. Qual a probabilidade do homem chegar primeiro?

13. A densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

    X e Y são independentes? E se a a conjunta fosse dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

14. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1\,, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) X e Y são independentes?
(b) Encontre a densidade marginal de X.
(c) Encontre $P(X + Y > 1)$

15. Se X é uniformemente distribuída no intervalo (0,1) e Y é exponencialmente distribuída com parâmetro $\lambda = 1$, encontre a distrbuição de (a) $Z = X + Y$ e (b) $Z = X/Y$. Assuma independência.

16. Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes e exponencialmente distribuídas repectivamente com parâmetros λ_1 e λ_2, encontre a distribuição de $Z = X_1/X_2$. Também calcule $P(X_1 < X_2)$.

17. A função de probabilidade conjunta de X e Y é dada por

$$\begin{array}{ll} p_{X,Y}(1,1) = \frac{1}{8} & p_{X,Y}(1,2) = \frac{1}{4} \\ p_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{8} & p_{X,Y}(2,2) = \frac{1}{2} \end{array}$$

(a) Calcule a distribuição condicional de X dado $Y = y$, $y = 1, 2$.
(b) X e Y são independentes?
(c) Calcule $P(XY \leq 3)$, $P(X + Y > 2)$, $P(X/Y > 1)$

18. Se X e Y são variáveis aleatórias binomiais independentes com os mesmos parâmetros n e p, mostre analiticamente que a distribuição condicional de X dado $X + Y = m$ é hipergeométrica.

19. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = xe^{-x(y+1)}, \quad x > 0, y > 0$$

(a) Encontre a distribuição condicional de X dado $Y = y$, e a distribuição de Y dado $X = x$.
(b) Encontre a distribuição de $Z = XY$

20. A função de densidade conjunta de X e Y é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y} \qquad -y \leq x \leq y, 0 < y < \infty$$

Encontre a distribuição condicional de X dado $Y = y$.

21. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias tais que $E[X_i] < \infty$.

(a) Mostre que $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$.
(b) Prove por indução que

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right]$$

22. Um grupo de N pessoas em uma sala, todas usando chapeu, arremessam seus chapeus no centro da sala. Os chapeus se misturam e cada pessoa aleatoriamente pega um chapeu. Encontra o número esperado de pessoas que vão selecionar o próprio chapeu.

23. Seja $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tendo função de distribuição F, valor esperado $\mu < \infty$ e variância $\sigma^2 < \infty$. Seja a média amostral definida por

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}.$$

Calcule $E[\bar{X}]$ e $V[\bar{X}]$.

24. A correlação entre duas variáveis aleatórias X e Y é dada por

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}$$

Mostre que $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.

25. As variáveis aleatórias X e Y tem densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-2x}/x & 0 < x < \infty\,, 0 < y < x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule $Cov(X,Y)$

26. Seja X uma variável aleatória com média, μ, e variância, σ^2 finitas, e seja $g(\cdot)$ uma função pelo menos duas vezes diferenciável. Mostre que

$$E[g(X)] \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2$$

Dica: Expandir g em uma série de Taylor em torno de μ. Use os três primeiros termos e ignore os demais.

27. Se X e Y são variáveis aleatórias identicamente distribuídas, não necessariamente independentes, mostre que

$$Cov(X+Y, X-Y) = 0$$