Lista 2: Valor esperado, desigualdades

Data esperada: 30/4

Segunda lista de exercícios da disciplina MD21 - Introdução à Estatística.

1. Calcule o valor esperado e variância das seguintes distribuições:

   a. $X \sim Poisson(\theta)$, $p_X(x) = \theta^x e^{-\theta}/x!$, $x = 0, 1, 2, ...$
   b. $X \sim Beta(a, b)$, $f_X(x) = \Gamma(a+b)/(\Gamma(a)\Gamma(b))x^{a-1}(1-x)^{b-1}$, $x \in (0, 1)$.
   c. $X \sim \chi^2_n$, $f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$, $x > 0$.

2. Seja $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ e $Y = 1/X$. Calcule a esperança de X e de Y.

3. Seja $X \sim Poisson(\lambda)$ e $Y \sim Poisson(\theta)$, encontre a distribuição de $X + Y$

4. Mostre que $\mathbb{V}[X - Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\mathbb{Cov}(X, Y)$

5. Calcule a função geradora de momentos das distribuiições da questão (1).

6. O coeficiente de assimetria de uma distribuição é definido por

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

   onde μ é a média e σ^2 a variância de X. Se $\gamma = 0$ dizemos que a distribuição de X é simétrica, se for $\gamma < 0$ a distribuição é simétrica à esquerda, e $\gamma > 0$ simétrica é direita. Encontre o coeficiente de assimetria para as ditribuições da questão (1)

7. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y},\ 0 \leq x \leq y$$

   a. Encontre as marginais de X e Y
   b. Calcule $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathbb{E}[XY]$
   c. Calcule $\mathbb{V}[X]$, $\mathbb{V}[Y]$ e $\mathbb{Cov}(X, Y)$
   d. Calcule a correlação de X e Y, $\rho_{X,Y}$

8. Suponha que $X \sim \chi^2_n$ e $Y \sim \chi^2_m$

a. Encontre a função geradora de momentos de X
b. Mostre que $X+Y$ segue uma distribuição χ^2_{n+m} c Encontre a distribuição de $X/(X+Y)$

9. Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes de uma distribuição F. Seja $Y = \sum_i I(X \leq x)/n$, encontre esperança e variancia de Y. E usando a desigualdade de Chebyshev, encontre um limite superior para $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| > \epsilon)$.

10. A desigualdade de Hoeffding diz que para $W_1, W_2, \dots, W_n$ v.a.s independentes tais que $\mathbb{E}[W_i] = 0$ e $a_i < Y_i < b_i$, para $\epsilon > 0$. Para $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} W_i \geq \epsilon\right) \leq e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{t^2(b_i - a_i)^2/8}$$

Aplique a desigualdade de Hoeffding no exercício anterior (9) para encontrar um limite superior para $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}[Y]| > \epsilon)$ e compare os valores encontrados.