

Lista 2: Valor esperado, desigualdades e teoria assintótica

Leo Bastos

Segunda lista de exercícios da disciplina MD21 - Introdução à Estatística. (Data esperada: 30/4)

1. Calcule o valor esperado e a variância das seguintes distribuições:

- a. $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, $p_X(x) = \theta^x e^{-\theta} / x!$, $x = 0, 1, 2, \dots$
- b. $X \sim \text{Beta}(a, b)$, $f_X(x) = \Gamma(a+b) / (\Gamma(a)\Gamma(b)) x^{a-1} (1-x)^{b-1}$, $x \in (0, 1)$.
- c. $X \sim \chi_n^2$, $f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$, $x > 0$.

2. Seja $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ e $Y = 1/X$. Calcule a esperança de X e de Y .

3. Seja $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\theta)$, encontre a distribuição de $X + Y$

4. Mostre que $\mathbb{V}[X - Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\text{Cov}(X, Y)$

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias com função de densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}, \quad 0 \leq x \leq y$$

- a. Encontre as marginais de X e Y
- b. Calcule $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathbb{E}[XY]$
- c. Calcule $\mathbb{V}[X]$, $\mathbb{V}[Y]$ e $\text{Cov}(X, Y)$
- d. Calcule a correlação de X e Y , $\rho_{X,Y}$

6. Suponha que $X \sim \chi_n^2$ e $Y \sim \chi_m^2$

- a. Encontre a função geradora de momentos de X
- b. Mostre que $X + Y$ segue uma distribuição χ_{n+m}^2 c Encontre a distribuição de $X/(X + Y)$