

## Lista 2: Valor esperado, desigualdades

Data esperada: 30/4

Segunda lista de exercícios da disciplina MD21 - Introdução à Estatística.

1. Calcule o valor esperado e variância das seguintes distribuições:

- $X \sim \text{Poisson}(\theta)$ ,  $p_X(x) = \theta^x e^{-\theta} / x!$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$
- $X \sim \text{Beta}(a, b)$ ,  $f_X(x) = \Gamma(a+b) / (\Gamma(a)\Gamma(b)) x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ ,  $x \in (0, 1)$ .
- $X \sim \chi_n^2$ ,  $f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$ ,  $x > 0$ .

2. Seja  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  e  $Y = 1/X$ . Calcule a esperança de  $X$  e de  $Y$ .

3. Seja  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$  e  $Y \sim \text{Poisson}(\theta)$ , encontre a distribuição de  $X + Y$

4. Mostre que  $\mathbb{V}[X - Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\text{Cov}(X, Y)$

5. Calcule a função geradora de momentos das distribuições da questão (1).

6. O coeficiente de assimetria de uma distribuição é definido por

$$\gamma_1 = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{X - \mu}{\sigma} \right)^3 \right]$$

onde  $\mu$  é a média e  $\sigma^2$  a variância de  $X$ . Se  $\gamma = 0$  dizemos que a distribuição de  $X$  é simétrica, se for  $\gamma < 0$  a distribuição é simétrica à esquerda, e  $\gamma > 0$  simétrica é direita. Encontre o coeficiente de assimetria para as distribuições da questão (1)

7. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias com função de densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}, \quad 0 \leq x \leq y$$

- Encontre as marginais de  $X$  e  $Y$
- Calcule  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$  e  $\mathbb{E}[XY]$
- Calcule  $\mathbb{V}[X]$ ,  $\mathbb{V}[Y]$  e  $\text{Cov}(X, Y)$
- Calcule a correlação de  $X$  e  $Y$ ,  $\rho_{X,Y}$

8. Suponha que  $X \sim \chi_n^2$  e  $Y \sim \chi_m^2$

- a. Encontre a função geradora de momentos de  $X$
  - b. Mostre que  $X+Y$  segue uma distribuição  $\chi_{n+m}^2$  c Encontre a distribuição de  $X/(X+Y)$
9. Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes de uma distribuição  $F$ . Seja  $Y = \sum_i I(X \leq x)/n$ , encontre esperança e variância de  $Y$ . E usando a desigualdade de Chebyshev, encontre um limite superior para  $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{Y}| > \epsilon)$ .
10. A desigualdade de Hoeffding diz que para  $W_1, W_2, \dots, W_n$  v.a.s independentes tais que  $\mathbb{E}[W_i] = 0$  e  $a_i < Y_i < b_i$ , para  $\epsilon > 0$ . Para  $t > 0$

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n W_i \geq \epsilon \right) \leq e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^n e^{t^2(b_i - a_i)^2/8}$$

Aplique a desigualdade de Hoeffding no exercício anterior (9) para encontrar um limite superior para  $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{Y}| > \epsilon)$  e compare os valores encontrados.