

Primeira avaliação da disciplina Introdução à estatística (MD21). Notem que essa é uma avaliação com nota máxima de 10 pontos, mesmo a soma de pontos das quatro questões podendo ultrapassar esse valor. Ou seja, o total de pontos desse exame consiste no mínimo entre a nota atingida e 10 pontos.

1. [3 pontos] Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes com função de probabilidade acumulada  $F_X(x)$ . Seja a seguinte transformação:

$$Y_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_i \leq x, \\ 0 & \text{se } X_i > x. \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Seja  $\widehat{F_X}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(x)$  a função acumulada empírica.

- (a) [1 ponto] Encontre  $\mathbb{E}[Y_i(x)]$  e  $\mathbb{V}[Y_i(x)]$
- (b) [1 ponto] Mostre que  $\widehat{F_X}(x)$  é um estimador não viesado, ou seja,  $\mathbb{E}[\widehat{F_X}(x)] = F_X(x)$ .
- (c) [1 ponto] Calcule  $\mathbb{V}[\widehat{F_X}(x)]$
2. [3 pontos] Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes com distribuição Pareto com parâmetros  $\alpha$  e  $x^*$ , cuja função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x^*}{x}\right)^\alpha & \text{se } x \geq x^*, \\ 0 & \text{se } x < x^*. \end{cases} \quad \alpha > 0, \quad x^* > 0.$$

- (a) [1 ponto] Encontre a função de densidade de  $X$ .
- (b) [1 ponto] Calcule o primeiro momento de  $X$
- (c) [1 ponto] Escreva a função de verossimilhança de  $\alpha$  e  $x^*$ , e mostre que os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $x^*$  são

$$\hat{x}^* = \min_i x_i \quad \text{e} \quad \hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_i \ln(x_i/\hat{x}^*)}$$

3. [3 pontos] Seja  $X$  uma variável aleatória com função geradora de momentos dada por

$$M_X(t) = \exp \{ \lambda [e^t - 1] \}$$

- (a) [1 ponto] Encontre a média e a variância de  $X$
- (b) [1 ponto] Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de  $X$ . Defina  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ . Encontre a função geradora de momentos de  $Y$ .
- (c) [1 ponto] Encontre o valor esperado e a variância de  $Y$
4. [3 pontos] Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$  variáveis aleatórias com a seguinte distribuição de probabilidades

$$Y_t \mid Y_{t-1} = y_{t-1} \sim N(\alpha y_{t-1}, \sigma^2), \quad t = 2, 3, \dots, T, \\ Y_1 \sim N(0, \sigma^2)$$

onde  $\alpha \in (-1, 1)$ ,  $\sigma^2 > 0$ , e a função densidade da distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  é dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Suponha que  $Y_t$  dependa do histórico  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1}$  somente através de  $Y_{t-1}$ , ou seja,  $f_{Y_t|Y_1, Y_2, \dots, Y_{t-1}}(y) = f_{Y_t|Y_{t-1}}(y)$ .

- (a) [1 ponto] Escreva a função de densidade conjunta de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ .
- (b) [1 ponto] Encontre os valores de  $\alpha$  e  $\sigma^2$  que maximizam a função de verossimilhança (calculada no item anterior).
- (c) [1 ponto] Suponha que queremos prever a próxima realização da variável aleatória estudada,  $X_{T+1}$ , condicional aos valores  $X_1, X_2, \dots, X_T$ . Proponha um estimador para  $X_{T+1}$ .