Topologie Zusammenfassung

May 28, 2024

Contents

1 Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $X \neq \varnothing$. Eine Topologie auf X ist eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit

1. $\varnothing \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$
2. Die Vereinigung beliebig vieler Teilmengen aus $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}$
3. Der Durchschnitt endlich vieler Teilmengen von $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}$

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, die Elemente aus $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen.

Definition 1.2. Auf $X \neq \varnothing$ seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ zwei Topologien mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Dann heißt $\mathcal{T}'$ die feinere und $\mathcal{T}$ die gröbere Topologie. Ist zusätzlich $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, dann heißen die Relationen strikt feiner bzw. gröber.

Definition 1.3. Sei $X \neq \varnothing$. Eine Basis für eine Topologie auf X ist eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ welche die Eigenschaften erfüllt

1. $\forall x \in X\, \exists B \in \mathcal{B}$ sodass $x \in B$
2. Sind $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$, dann existiert $B_3 \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

Ist eine Basis $\mathcal{B}$ gegeben, so heißt $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie über

$$U \in \mathcal{T}(\mathcal{B}) :\Leftrightarrow \forall x \in U \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B \subset U$$

Theorem 1.4. *Sei $X \neq \varnothing$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Basis für eine Topologie auf X. Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ in der Tat eine Topologie.*

Theorem 1.5. *Sei $X \neq \varnothing$ und $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X. Dann besteht $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ aus genau den Mengen, die sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ schreiben lassen.*

Theorem 1.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei dann $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft*

$$\forall U \in \mathcal{T} \text{ und } x \in U\, \exists C \in \mathcal{C} :\ x \in C \subset U$$

Dann ist $\mathcal{C}$ bereits eine Basis für $\mathcal{T}$.

Theorem 1.7. *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen zweier Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent*

1. *$\mathcal{T}'$ ist feiner als $\mathcal{T}$*

2. *$\forall x \in X$ und $\forall B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ existiert $B' \in \mathcal{B}'$ mit $x \in B' \subset B$.*

Theorem 1.8. *Sei $X \neq \varnothing$. Ist dann $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, so gibt es eine eindeutige gröbste Topologie, welche $\mathcal{S}$ enthält. Diese sei mit $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ notiert.*
Ist außerdem $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$, dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ genau die Menge beliebiger Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ heißt Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

2 Konstruktion Topologischer Räume

2.1 Die Spurtopologie

Definition 2.1. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\varnothing \neq Y \subset X$. Dann ist

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in T\}$$

die Spurtopologie.

2.2 Produkttopologie

Definition 2.2. Seien X, Y topologische Räume. Dann ist die Menge

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \text{ offen in } X, V \text{ offen in } Y\}$$

Basis einer Topologie (der Produkttopologie) auf $X \times Y$. $\mathcal{B}$ selber ist aber keine Topologie.

Theorem 2.3. *Ist $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X und ist $\mathcal{C}$ eine Basis für eine Topologie auf Y, so ist*

$$\mathcal{D}0\{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$$

eine Basis für die Produkttopologie auf $X \times Y$.

Theorem 2.4. *Es seien X, Y topologische Räume und $A \subset X, B \subset Y$. Dann ist die Produkttopologie der Spurtopologien bezüglich A und B gleich der Spurtopologie der Produkttopologie bezüglich $A \times Y$ auf $X \times Y$.*

2.3 Quotiententopologie

Wir schreiben $X' = X/\sim$ als die Quotientenmenge von X bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. $\varphi : X \to X'$ sei die Funktion, die jedem Element $x \in X$ seinen Repräsentanten in X' zuordnet.

Theorem 2.5. *Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Dann ist*

$$\mathcal{T}' = \{U \in X' : \varphi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$$

eine Topologie auf X'.

Dieses Konzept lässt sich auf allgemeine surjektive Funktionen verallgemeinern.

3 Inneres, Häufungspunkte, Abschluss, Grenzwerte

Theorem 3.1. *$A \subset Y$ ist abgeschlossen in der Spurtopologie, genau dann, wenn $A = F \cap Y$ mit F in X abgeschlossen.*

Theorem 3.2. *Ist $Y \subset Y$ selber abgeschlossen, in X, so ist jede relativ abgeschlossene Menge $Y \subset Y$ auch abgeschlossen in X*

Theorem 3.3. *Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann gilt*

- *$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ für jede Umgebung U von x gilt $A \cap U \neq \varnothing$.*
- *ist $\mathcal{B}$ eine Basis für diese Topologie, so gilt*

$$x \in A \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing \; \forall B \in \mathcal{B} : x \in B$$

Definition 3.4. Ein Punkt $x \in X$ heißt Häufungspunkt von A, wenn für jede Umgebung U von x gilt

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$$

Das bedeutet, x liegt im Abschluss von $A \setminus \{x\}$.

Theorem 3.5. *Sei A' die Menge aller Häufungspunkte, so gilt*

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Definition 3.6. Eine Folge $x_n \subset X$ heißt konvergent gegen x, wenn es für alle offenen Umgebungen U von x ein N gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Definition 3.7. Ein topologischer Raum X heißt Hausdorffsch, wenn $\forall x, y \in X$ gibt es zwei offene Mengen U_x, U_y mit $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y \neq \varnothing$.

Theorem 3.8. *Sei X ein Hausdorff-Raum. Es gilt*

- *Alle einelementigen und alle endlichen Teilmengen von X sind abgeschlossen*

- *ist $A \subset X$, dann ist $x \in X$ Häufungspunkt von A genau dann, wenn jede Umgebung von x unendlich viele Elemente aus A enthält*
- *jede Folge aus X besitzt maximal einen Grenzwert.*

4 Stetigkeit

Definition 4.1. Seien X und Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig, wenn für alle offenen Mengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Theorem 4.2. *Seien X, Y topologische Räume. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion, dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

1. *f ist stetig*
2. *Für jede Menge $A \subset X$ ist $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$*
3. *Für jede in Y abgeschlossene Menge $F \subset Y$ ist $f^{-1}(Y)$ abgeschlossen in X*
4. *zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung V von $f(x)$ gibt es eine Umgebung U von x, sodass $f(U) \subseteq V$.*

Definition 4.3. Eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ sodass f und f^{-1} stetig sind, heißt Homöomorphismus.

Definition 4.4. Ist f eine stetige, injektive aber nicht surjektive Abbildung, so sei $\overline{Z} = f(X) \subset Y$. Die Einschränkung

$$\tilde{f} : X \to \overline{Z}$$

ist bijektiv. Ist $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus, so nennen wir f eine Einbettung von X in Y.

Definition 4.5. Existiert zwischen X und Y ein Homöomorphismus, so heißen X und X homöomorph, geschrieben $X \cong Y$.

Theorem 4.6. *Seien X, Y, Z topologische Räume. Dann gilt*

1. *jede konstante Funktion $f : X \to Y$ ist stetig*
2. *ist $A \subset X$, so ist die Inklusion $f : A \to X$ stetig*
3. *sind $f : X \to Y$ stetig und $g : Y \to Z$ stetig, so ist $g \circ f$ stetig*
4. *ist $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$, so ist die Restriktion $f : X \to A$ stetig bzgl. der Spurtopologie.*

Theorem 4.7. *Seien X, Y topologische Räume und es gelte $X = A \cup B$ mit A, B abgeschlossen. Weiter seien die beiden Funktionen $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ stetig bzgl. der jeweiligen Spurtopologien und sei*

$$f(x) = g(x)\ \forall x \in A \cap B$$

dann ist

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

stetig auf X.

Theorem 4.8. *Es sei*

$$f : A \to X \times Y$$

eine vektorwertige Funktion. f ist stetig genau dann, wenn f_1 und f_2 stetig sind.

5 Zusammenhängende topologische Räume

Definition 5.1. Ein topologischer Raum X heißt unzusammenhängend, wenn $\exists U, V$ offen, sodass $U \cap V = \varnothing$, $U \neq \varnothing, V \neq \varnothing$ und $X = U \cup V$. X heißt zusammenhängend, wenn es keine solche Separation gibt. Das ist äquivalent dazu, dass X und $\varnothing$ die einzigen abgeschloffenen Mengen sind.

Lemma 5.2. *Sei X ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$. Eine Separation von Y bzgl. der Spurtopologie ist ein Paar (A, B) mit*

$$A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, A \cup B = Y, \overline{A} \cap B = \varnothing, A \cap \overline{B} = \varnothing$$

Lemma 5.3. *Sei X ein unzusammenhängender topologischer Raum mit Separation (U, V). Ist $Y \subset X$ zusammenhängend, so ist $Y \subset U$ oder $Y \subset V$.*

Theorem 5.4. *Die Vereinigung zusammenhängender Räume ist zusammenhängend, wenn alle Räume mindestens einen Punkt gemeinsam haben.*

Theorem 5.5. *Sind X, Y zusammenhängende Räume, so ist $X \times Y$ zusammenhängend.*

Theorem 5.6. *Sei $A \subset X$ ein zusammenhängender Teilraum. Dann ist B mit $A \subset B \subset \overline{A}$ zusammenhängend.*

Theorem 5.7. *Das stetige Bild eines zusammenhängenden Raumes ist zusammenhängend.*

Definition 5.8. Sei X ein topologischer Raum.

1. Für $x, y \in X$ definieren wir einen Weg von x nach y als stetige Abbildung
$$\gamma : [a, b] \to X$$
mit
$$\gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y$$
2. X ist weg-zusammenhängend, wenn es für alle x, y einen Weg γ gibt, der in X enthalten ist

Lemma 5.9. *Weg-zusammenhängend $\Rightarrow$ zusammenhängend aber umgekehrt nicht.*

Definition 5.10. Für einen topologischen Raum X bilden wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ über
$$x, y \in x : x \sim y \Leftrightarrow \exists Y \subset X : Y \text{ zusammenhängend mit } x, y \in Y$$