Topologie Zusammenfassung

April 23, 2024

Contents

1 Topologische Räume

Definition 1.1. Sei $X \neq \varnothing$. Eine Topologie auf X ist eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit

1. $\varnothing \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$
2. Die Vereinigung beliebig vieler Teilmengen aus $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}$
3. Der Durchschnitt endlich vieler Teilmengen von $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}$

Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum, die Elemente aus $\mathcal{T}$ heißen offene Mengen.

Definition 1.2. Auf $X \neq \varnothing$ seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ zwei Topologien mit $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Dann heißt $\mathcal{T}'$ die feinere und $\mathcal{T}$ die gröbere Topologie. Ist zusätzlich $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, dann heißen die Relationen strikt feiner bzw. gröber.

Definition 1.3. Sei $X \neq \varnothing$. Eine Basis für eine Topologie auf X ist eine Familie $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ welche die Eigenschaften erfüllt

1. $\forall x \in X \, \exists B \in \mathcal{B}$ sodass $x \in B$
2. Sind $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$, dann existiert $B_3 \in \mathcal{B}$ mit

$$x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

Ist eine Basis $\mathcal{B}$ gegeben, so heißt $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie über

$$U \in \mathcal{T}(\mathcal{B}) :\Leftrightarrow \forall x \in U \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } x \in B \subset U$$

Theorem 1.4. *Sei $X \neq \varnothing$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Basis für eine Topologie auf X. Dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ in der Tat eine Topologie.*

Theorem 1.5. *Sei $X \neq \varnothing$ und $\mathcal{B}$ eine Basis für eine Topologie auf X. Dann besteht $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ aus genau den Mengen, die sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ schreiben lassen.*

Theorem 1.6. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei dann $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft*

$$\forall U \in \mathcal{T} \text{ und } x \in U \, \exists C \in \mathcal{C} : \; x \in C \subset U$$

Dann ist $\mathcal{C}$ bereits eine Basis für $\mathcal{T}$.

Theorem 1.7. *Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen zweier Topologien $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent*

1. $\mathcal{T}'$ ist feiner als $\mathcal{T}$

2. $\forall x \in X$ und $\forall B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ existiert $B' \in \mathcal{B}'$ mit $x \in B' \subset B$.

Theorem 1.8. *Sei $X \neq \varnothing$. Ist dann $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, so gibt es eine eindeutige gröbste Topologie, welche $\mathcal{S}$ enthält. Diese sei mit $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ notiert.*
Ist außerdem $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S = X$, dann ist $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ genau die Menge beliebiger Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}$ heißt Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.