

Topologische Flächen und Fundamentalgruppen

Zusammenfassung

December 9, 2024

Contents

1	Topologische Flächen	2
1.1	Einführung	2
1.2	Klassifikation der Kurve	2
2	Klassifizierung der kompakten Flächen	3
2.1	Triangulierung	3
2.2	Zellkomplexe	5
3	Die Fundamentalgruppe	10

1 Topologische Flächen

1.1 Einführung

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit). Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n -Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X sodass

1. X ist Hausdorff'sch
2. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis
3. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $x \in U \subseteq X$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt Karte.

4. X ist zusammenhängend

Für $n = 1$ heißt X eine Kurve, für $n = 2$ eine Fläche.

1.2 Klassifikation der Kurve

Satz 1.2. Jede Kurve ist homöomorph zu genau einer der folgenden Kurven

1. \mathbb{R}
2. S^1

Beispiel 1.3. Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^3 - x\}$. Das wichtigste Hilfsmittel, um die Topologie von X zu verstehen, ist die Projektion

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\pi(x, y) = x$$

Für $a \in 0, \pm 1$ hat a genau ein Urbild, ansonsten 2.

Definition 1.4. Eine stetige Abbildung $\pi : Y \rightarrow X$ heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, sodass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

$$\pi|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\sim} U$$

ein Homöomorphismus $\forall i$.

Definition 1.5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\} / \sim$$

mit

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n)$$

genau dann, wenn

$$\exists t \in K^* : z'_i = tz_i$$

Beispiel 1.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch die Bijektion

$$[z : 1] \leftarrow z$$

$$[1 : 0] \leftarrow \infty$$

2 Klassifizierung der kompakten Flächen

g	orientierbar	nicht orientierbar
0	S^2	$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
1	Torus	Klein'sche Flasche
2	Doppeltorus	\vdots
3	Tripeltorus	\vdots

2.1 Triangulierung

Definition 2.1. Sei \mathbb{A} ein reeller Vektorraum.

1. $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{A}$ heißt affin unabhängig, wenn $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ linear unabhängig sind
2. Für $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{A}$ affin unabhängig heißt

$$\sigma = [v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

der von den v_i aufgespannte Simplex der Dimension $\dim(\sigma) = n$

3. ist $\{v_{i_0}, \dots, v_{i,k}\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\}$ eine Teilmenge mit $k + 1$ Elementen, dann heißt das davon erzeugte k -Simplex eine k -Seite von σ
4. $\partial\sigma = \bigcup_{\delta \subsetneq \sigma} \delta$ heißt Rand von σ und $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$ ist das Innere

Definition 2.2. Ein abstrakter Simplicialkomplex ist ein Paar $K = (V, S)$, wobei $V \neq \emptyset$ und S eine Menge von endlichen Teilmengen von V . Anschaulich ist K ein Graph mit V der Menge der Ecken von K und S die Menge der Simplizes von K . S muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. jede Ecke $v \in V$ liegt in mindestens einem und höchstens endlich vielen Simplizes
2. $s \in S$ und $s' \subseteq s$, dann ist $s' \in S$

Sei $K = (V, S)$ ein Simplicialkomplex. Sei

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^{|V|} = \{(t_v)_{v \in V} \in \mathbb{R}^{|V|} \mid t_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in V\}$$

und

$$|K| = \{(t_v)_{v \in V} \in \mathbb{A} \mid t_v \geq 0 \wedge \sum_{v \in V} t_v = 1 \wedge s = \{v \in V \mid t_v > 0\} \in S\}$$

Definition 2.3. $|K|$ heißt die geometrische Realisierung von K . Für $s \in S$ heißt $\sigma = |s| = \{(t_v)_{v \in V} \mid t_v = 0 \forall v \notin s\} = [v_0, \dots, v_n]$ die geometrische Realisierung von s .

Definition 2.4. Basis der Topologie sind Mengen $U \subseteq |K|$ der Form

- $U \cap |s| \subseteq |s|$ offen für alle $s \in S$
- $U \cap |s| \neq \emptyset$ für alle s bis auf endlich viele

Lemma 2.5. Die Topologie hat folgende Eigenschaften

1. Für $v \in V$ heißt $st(v) = \bigcup_{s \in S, v \in s} \overset{\circ}{|s|}$ der Stern von v . Das ist eine offene Umgebung von v mit Abschluss $\overline{st(v)} = \bigcup_{s \in S, v \in s} |s|$
2. $(st(v))_{v \in V}$ bilden eine offene Überdeckung von $|K|$
3. $\overline{st(v)}$ ist kompakt, wegzusammenhängend
4. $|K|$ ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend und Hausdorffsch
5. $|K|$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow |K|$ ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow K$ zusammenhängend $\Rightarrow V$ ist abzählbar und $|K|$ ist second countable.

Definition 2.6. Für $v \in V$ definiert $L_K(v) = (V_v, S_v)$ einen Link von v mit

$$S_v = \{s \setminus v \mid s \in S : v \in s\}$$

Satz 2.7. Sei K ein zusammenhängender Simplicialkomplex, $n \geq 1$. Dann ist $|K|$ eine n -Mannigfaltigkeit genau dann, wenn

1. alle maximalen Simplizes haben Dimension n (K ist von reiner Dimension n)
2. jeder $(n-1)$ -Simplex ist eine Seite von genau zwei n -Simplizes
3. $|L_K(v)| \cong S^{n-1}$

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum. Eine Triangulierung von X ist ein Homöomorphismus $|K| \cong X$ wobei K ein Simplicialkomplex ist.

Satz 2.9. Jede Fläche ist triangulierbar.

Bemerkung 2.10. Die Aussage ist noch wahr für $n = 3$ aber falsch ab $n = 4$.

2.2 Zellkomplexe

Definition 2.11. Sei A eine Menge.

1. Die Menge der orientierten Elemente von A ist

$$\tilde{A} = A \cup A^{-1}$$

wobei $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

2. Die Menge der orientierten Zyklen in A ist

$$A^* = \{[a_1, \dots, a_n] \mid n \geq 0, a_i \in \tilde{A}\}$$

wobei die Äquivalenzklassen definiert sind durch

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (a'_1, \dots, a'_n) \Leftrightarrow \exists k \geq 0 : a'_i = \begin{cases} a_{i+k}, & i+k \leq n \\ a_{i+k-n}, & k > n \end{cases}$$

Definition 2.12. Ein Zellenkomplex ist ein Tripel $K = (F, E, \delta)$, wobei F (Menge der Flächen) nicht leer und endlich, E (Menge der Kanten) endlich und $\delta : \tilde{F} \rightarrow E^*$ die Randabbildung sodass

1. $\delta(A^{-1}) = \delta(A)^{-1} \forall A \in F$
2. $A_1, A_2 \in F, A_1 \neq A_2$, dann $\partial(A_1) \neq \partial(A_2)$
3. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt in genau einem oder genau zwei Rändern $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vor.
4. K ist zusammenhängend.

Definition 2.13. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex. Wir definieren die geometrische Realisierung von K als den Quotientenraum

$$|K| = (\bigcup_{A \in F} |A|) / \sim$$

wobei $|A| = \cong D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ und \sim wie folgt definiert ist.

Ein Punkt $x \in |A|$ ist nur zu sich selbst äquivalent. Für $x \in \partial(|A|) \cong S^1$: Wir unterteilen $\partial(|A|) = S^1$ in \underline{n} Segmente/Intervalle (wobei $\partial A = [a_1, \dots, a_{\underline{n}}]$), markieren das i -te Segment mit a_i und identifizieren Punkte auf dem Segment mit a_i markierten Segment mit Punkten auf jeden mit a_i oder a_i^{-1} markierten Segment von Rand von $|A_j|$ gemäß der Orientierung.

Satz 2.14. Für jeden Zellenkomplex K ist $|K|$ eine kompakte Fläche mit Rand.

Definition 2.15. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex und $a \in \tilde{E}$.

1. Ein Nachfolger von a ist ein $b \in \tilde{E}$, sodass ab in einem Rand $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vorkommt.
2. a heißt innere Kante, falls a in genau zwei Rändern vorkommt.
3. a heißt äußere Kante, falls a in genau einem Rand vorkommt.
4. Die Relation \sim ist eine Relation auf \tilde{E} definiert als $a \sim b \Leftrightarrow b^{-1}$ ist ein Nachfolger von a
5. Sei \approx die größte Äquivalenzrelation mit $a \sim b \Rightarrow a \approx b$
6. Eine Ecke von K ist eine Äquivalenzklasse $v = a_1, \dots, a_n$ von \approx , $v \in V = \tilde{E} / \approx$.

Lemma 2.16. Sei $\bar{x} \in |K|$ ein Eckpunkt, $a_1, \dots, a_m \in \tilde{E}$ die orientierten Kanten mit Endpunkt \bar{x} .

1. Angenommen a_1, \dots, a_m sind innere Kanten. Dann gibt es eine zyklische Anordnung sodass $\forall i$ gilt a_{i-1}^{-1} und a_{i+1}^{-1} sind Nachfolger von a .

2. Sonst gibt es eine Ordnung a_1, \dots, a_m , sodass a_1, a_m äußere und a_2, \dots, a_{m-1} innere Kanten sind. Für $i = 2, \dots, m-1$ gilt die gleiche Aussage wie oben und für $i = 1, m$ jeweils modulo m .

Definition 2.17. Die beiden Fälle des vorherigen Lemmas definieren innere und äußere Ecken.

Bemerkung 2.18. $|K|$ ist eine triangulierte Fläche mit Rand \Leftrightarrow

1. $a, b \in \tilde{E}$, $a \sim b \Rightarrow a^{-1} \not\sim b^{-1}$.
2. $\forall A \in \tilde{F}$: $\partial A = [a_1, a_2, a_3]$

Satz 2.19. Jede kompakte Fläche mit Rand X besitzt eine Darstellung $X \cong |K|$ für einen Zellkomplex K .

Es stellt sich nun die Frage, wie man für zwei Zellkomplexe K_1, K_2 entscheiden kann, ob $|K_1| \cong |K_2|$.

Schritte:

1. Definiere eine kombinatorische Äquivalenzrelation auf der Menge der Zellkomplexe, sodass $K_1 \sim K_2 \Rightarrow |K_1| \cong |K_2|$
2. Finde eine Liste von Zellkomplexen K_1, K_2, \dots , sodass für jeden Zellkomplex K gilt $|K| \sim |K_i|$ für genau ein i .
3. zeige $|K_i| \not\cong |K_j|$

Definition 2.20. Seien K, K' Zellkomplexe. Dann heißt K' eine elementare Verkleinerung von K , wenn K' aus K durch eine Reihe von den folgenden Operationen entsteht

1. Unterteilung einer Randkante a in zwei Kanten b, c mit gleicher Orientierung
2. Ergänzung einer inneren Kante durch eine Fläche A

Nun definiert man \sim auf der Menge der Isomorphie-Klassen der Zellkomplexe durch

Definition 2.21. \sim ist die grösste Äquivalenzrelation mit K' ist eine elementare Verfeinerung von $K \Rightarrow K' \sim K$

Lemma 2.22. Ist K' eine elementare Verfeinerung von K , so gilt $|K'| \cong |K|$.

Für die weiteren Überlegungen müssen wir uns Invarianten von K überlegen, die unter den beiden Operationen erhalten bleiben. Ab diesem Punkt wollen wir die Annahme treffen, dass alle Kanten innere Kanten sind. Das heißt, jedes $a \in \tilde{E}$ kommt genau zweimal im Rand vor. Damit ist $|K|$ eine kompakte Fläche ohne Rand.

Definition 2.23. Sei $K = (F, E, \partial)$ ein Zellkomplex. Eine Orientierung von K ist eine Teilmenge $O \subset \tilde{F}$, sodass

1. $\tilde{F} = O \cup O^{-1}$
2. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt genau ein Mal in den Rändern $\partial(A)$, $A \in O$ vor

Definition 2.24. $K = (F, E, \partial)$ heißt orientierbar, wenn eine Orientierung existiert.

Lemma 2.25. Sei K' eine elementare Verfeinerung von K . Dann ist K orientierbar, genau dann, wenn K' orientierbar ist.

Korollar 2.26. $K_1 \sim K_2 \Rightarrow K_1$ ist orientierbar, genau dann, wenn K_2 ist orientierbar.

Definition 2.27. Die Euler-Charakteristik von K ist

$$\chi(K) = |F| - |E| + |V|$$

Lemma 2.28. Sei $K_1 \sim K_2$. Dann ist $\chi(K_1) = \chi(K_2)$.

Definition 2.29. Für Zellkomplexe werden zwei Normalformen definiert.

1. $F = \{A\}$, $E = \{a_1, b_1, \dots, a_p, b_p\}$, $p \geq 0$ mit

$$\partial(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

2. $F = \{A\}$, $E = \{a_1, \dots, a_p\}$, $p \geq 1$ mit

$$\partial(A) = a_1 a_1 \dots a_p a_p$$

Bemerkung 2.30. • Ist in Fall 1. $p = 0$, dann ist $|K| \cong S^1$.

- Fall 1. ist orientierbar, Fall 2. nicht.
- In Fall 1. ist $\chi(K) = 2 - 2p$, in Fall 2. ist $\chi(K) = 2 - p$.

Korollar 2.31. Die Zellkomplexe in Normalform sind paarweise nicht äquivalent.

Man kann sich überlegen, dass die beschriebene Ebene in Fall 2 ein p -Torus ist. Deswegen wird der Teil $aba^{-1}b^{-1}$ des Randes eines Zellkomplexes auch Henkel. Analog nennt man die Teile des Randes einer Fläche in zweiter Normalform eine Kreuzhaube.

Satz 2.32. Jeder Zellenkomplex ist äquivalent zu genau einem Zellkomplex in Normalform.

Korollar 2.33. Jede kompakte Fläche ist homöomorph zu einer der Flächen in Normalform $(|K|, K \text{ in NF})$, d.h. eine zusammenhängende Summe von $p \geq 0$ Henkeln oder $p \geq 1$ Kreuzhauben.

Satz 2.34. Sind K_1, K_2 in verschiedenen Normalformen, dann ist $|K_1| \not\cong |K_2|$.

Die Aussage ist eine Konsequenz des folgenden Lemmas.

Lemma 2.35. Orientierbarkeit und Euler-Charakteristik sind topologische Invarianten.

INTERMEZZO: Dafür kann die sogenannte singuläre Homologie verwendet werden.

Definition 2.36. Sei X ein topologischer Raum. Die singulären Homologiegruppen $H_q(x)$, $q \geq 0$ sind alle abelschen Gruppen, die funktionell von X abhängen. D.h. für $f : X \rightarrow Y$ enthält man abelsche Gruppen $f_{*,q} : H_q(x) \rightarrow H_q(y)$ sodass

$$(I_x)_x = I_{H_q(x)}$$

und

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Sei X eine kompakte Fläche, dann ist

1. $H_0(x) \cong \mathbb{Z}$ (allgemein: H_0 ist freie abelsche Gruppe mit Rang gleich der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten)
2. $H_1(x) = \frac{\langle \gamma | \gamma : S^1 \rightarrow X \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle \partial A | A \subseteq X \rangle}$

Lemma 2.37. Ist allgemein X eine kompakte Fläche in Normalform, so ist

1. $H_0(x) \cong \mathbb{Z}$
2. $H_1(x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2p}, & (I), p \geq 0 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p, & (II), p \geq 1 \end{cases}$
3. $H_2(x) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & (I) \\ 0, & (II) \end{cases}$

Alternativ lässt sich das Lemma mittels der Fundamentalgruppe beweisen.

3 Die Fundamentalgruppe

Definition 3.1. Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f, g : X \rightarrow Y$ stetig. Dann heißen f, g homotop relativ zu A , wenn es eine stetige Abbildung

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

gibt, sodass

- $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$
- $F(x, t) = f(x) = g(x), \forall x \in A, t \in [0, 1]$

F heißt eine Homotopie zwischen f und g relativ zu A . Man schreibt $f \cong_A g$.

Lemma 3.2. \cong_A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen der Funktionen von X nach Y .

Definition 3.3. Sei X ein topologischer Raum. Ein Pfad/Weg in X ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

Wir bezeichnen mit

- $x_0 = \gamma(0)$ den Startpunkt und mit
- $x_1 = \gamma(1)$ den Endpunkt.

Zwei Pfade γ_1, γ_2 in X heißen pfadhomotop ($\gamma_1 \cong \gamma_2$) falls γ_1, γ_2 homotop relativ zu $\{0, 1\}$ sind. Mit $\pi_1(X)$ bezeichnen wir die Menge der Pfadäquivalenzklassen, genannt Fundamentalgruppe.

$$\pi_1(X) = \bigcup_{(x_0, x_1) \in X^2} \pi_1(X; x_0, x_1)$$

ist ein Gruppoid.

Ist $x_0 = x_1$, also $\pi_1(X; x_0, x_1) = \pi_1(X; x_0)$, so nennen wir die die Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0 .

Definition 3.4. Sei X ein topologischer Raum.

1. Für $x_0 \in X$ definiere e_{x_0} den konstanten Pfad in x_0
2. Für einen Pfad γ , definiere $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$

3. Für γ, σ in X mit $\gamma(1) = \sigma(0)$ definieren wir

$$(\gamma * \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lemma 3.5. 1. $\gamma \cong \gamma', \sigma \cong \sigma'$ und $\gamma(1) = \sigma(0)$, dann ist $(\gamma * \sigma) \cong (\gamma' * \sigma')$.

2. Für γ mit $x_0 = \gamma(0), x_1 = \gamma(1)$ gilt

$$e_{x_0} * \gamma \cong \gamma \cong \gamma * e_{x_1}, \quad \gamma * \gamma^{-1} \cong e_{x_0}, \quad \gamma^{-1} * \gamma \cong e_{x_1}$$

3. Für γ, σ, τ mit $\gamma(1) = \sigma(0), \sigma(1) = \tau(0)$ gilt

$$\gamma * (\sigma * \tau) \cong (\gamma * \sigma) * \tau$$

Definition 3.6. Wir definieren

1. $1_{x_0} = [e_{x_0}] = \pi_1(X; x_0)$
2. $* : \pi_1(X; x_0, x_1) \times \pi_1(X; x_1, x_2) \rightarrow \pi_1(X; x_0, x_2)$ mit $[\gamma] * [\sigma] = [\gamma * \sigma]$
3. $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$

Satz 3.7. $(\pi_1(X; x_0, x_1), 1_{x_0}, *)$ ist ein Gruppoid. Insbesondere ist $(\pi_1(X; x_0), *)$ eine Gruppe.

Bemerkung 3.8. Für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist $f_* = \pi_1(f) : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ mit $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ ein Morphismus von Gruppoiden. Insbesondere ist $f_* : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(Y; f(x_0))$ ein Gruppenhomomorphismus. Für $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ gilt $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ und $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X)}$.

Korollar 3.9. Aus $f_X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Homöomorphismus folgt $f_* : \pi_1(X; x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y; f(x_0))$ ein Gruppenhomöomorphismus.

Bemerkung 3.10. Sei X ein topologischer Raum, γ ein Pfad in X , $x_0 = \gamma(0), x_1 = \gamma(1)$. Dann ist

$$\hat{\gamma} : \pi_1(X; x_0) \rightarrow \pi_1(X; x_1), [\sigma] \mapsto [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma]$$

ein Gruppenisomorphismus, der nur von $[\gamma]$ abhängt.

Korollar 3.11. Ist X wegzusammenhängend, so hängt die Isomorphieklasse von $\pi_1(X; x_0)$ nicht von x_0 ab.

Definition 3.12. Sei X ein topologischer Raum.

1. X ist zusammenziehbar (kontrahierbar), falls $Id_X \cong \underline{x_0}$ (konstante Abbildung) für ein $x_0 \in X$
2. X heißt einfach zusammenhängend, falls X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X; x_0) = \{1_{x_0}\} \forall x_0 \in X$.