Topologische Flächen und Fundamentalgruppen
Zusammenfassung

November 4, 2024

Contents

1 Topologische Flächen

1.1 Einführung

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X sodass

1. X ist Hausdorff'sch
2. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis
3. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $x \in U \subseteq X$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Ein Homöomorphismus

   $$\varphi : U \tilde{\to} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

   heißt Karte.
4. X ist zusammenhängend

Für $n = 1$ heißt X eine Kurve, für $n = 2$ eine Fläche.

1.2 Klassifikation der Kurve

Satz 1.2. *Jede Kurve ist homöomorph zu genau einer der folgenden Kurven*

1. $\mathbb{R}$

2. S^1

Beispiel 1.3. *Sei* $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \ y^2 = x^3 - x\}$*. Das wichtigste Hilfsmittel, um die Topologie von* X *zu verstehen, ist die Projektion*

$$\pi : X \to \mathbb{C}$$

mit

$$\pi(x, y) = x$$

Für $a \in 0, \pm 1$ *hat* a *genau ein Urbild, ansonsten 2.*

Definition 1.4. Eine stetige Abbildung $\pi : Y \to X$ heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, sodass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

$$\pi|_{V_i} : V_i \tilde{\to} U$$

ein Homöomorphismus $\forall i$.

Definition 1.5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} \setminus \{(0, 0, ..., 0)\} / \sim$$

mit

$$(z_0, ..., z_n) \sim (z'_0, ..., z'_n)$$

genau dann, wenn

$$\exists t \in K^* : \ z'_i = tz_i$$

Beispiel 1.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \tilde{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *durch die Bijektion*

$$[z : 1] \leftarrow z$$

$$[1 : 0] \leftarrow \infty$$

2 Klassifizierung der kompakten Flächen

g	orientierbar	nicht orientierbar
0	S^2	$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
1	Torus	Klein'sche Flasche
2	Doppeltorus	$\vdots$
3	Tripeltorus	$\vdots$

2.1 Triangulierung

Definition 2.1. Sei $\mathbb{A}$ ein reeller Vektorraum.

1. $v_0, ..., v_n \in \mathbb{A}$ heißt affin unabhängig, wenn $v_1 - v_0, ..., v_n - v_0$ linear unabhängig sind

2. Für $v_0, ..., v_n \in \mathbb{A}$ affin unabhängig heißt

$$\sigma = [v_0..., v_n] = \{t_0v_0 + \ldots t_nv_n \mid t_i \geq 0, \ t_0 + \ldots t_n = 1\}$$

der von den v_i aufgespannte Simplex der Dimension $\dim(\sigma) = n$

3. ist $\{v_{i_0}, ..., v_{i,k}\} \subseteq \{v_0, ..., v_n\}$ eine Teilmenge mit $k+1$ Elementen, dann heißt das davon erzeugte k-Simplex eine <u>k-Seite</u> von σ

4. $\partial\sigma = \bigcup_{\delta \subsetneq \sigma} \delta$ heißt <u>Rand</u> von σ und $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$ ist das <u>Innere</u>

Definition 2.2. Ein <u>abstrakter Simplicialkomplex</u> ist ein Paar $K = (V, S)$, wobei $V \neq \varnothing$ und S eine Menge von endlichen Teilmengen von V. Anschaulich ist K ein Graph mit V der Menge der Ecken von K und S die Menge der Simplizes von K.
S muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. jede Ecke $v \in V$ liegt in mindestens einem und höchstens endlich vielen Simplizes

2. $s \in S$ und $s' \subseteq s$, dann ist $s' \in S$

Sei $K = (V, S)$ ein Simplicialkomplex. Sei

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^{|V|} = \{(t_v)_{v\in V} \in \mathbb{R}^{|V|} \mid t_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in V\}$$

und

$$|K| = \{(t_v)_{v\in V} \in \mathbb{A} \mid t_v \geq 0 \ \wedge \sum_{v\in V} t_v = 1 \wedge \ s = \{v \in V \mid t_v > 0\} \in S\}$$

Definition 2.3. $|K|$ heißt die geometrische Realisierung von K. Für $s \in S$ heißt $\sigma = |s| = \{(t_v)_{v\in V} \mid t_v = 0 \ \forall v \notin s\} = [v_0, ..., v_n]$ die geometrische Realisierung von s.

Definition 2.4. Basis der Topologie sind Mengen $U \subseteq |K|$ der Form

- $U \cap |s| \subseteq |s|$ offen für alle $s \in S$

- $U \cap |s| \neq \varnothing$ für alle s bis auf endlich viele

Lemma 2.5. *Die Topologie hat folgende Eigenschaften*

1. *Für $v \in V$ heißt $st(v) = \bigcup_{s\in S,\, v\in s} \overset{\circ}{|s|}$ der Stern von v. Das ist eine offene Umgebung von v mit Abschluss $\overline{st(v)} = \bigcup_{s\in S,\, v\in S} |s|$*

2. *$(st(v))_{v\in V}$ bilden eine offene Überdeckung von $|K|$*

3. *$\overline{st(v)}$ ist kompakt, wegzusammenhängend*

4. *$|K|$ ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend und Hausdorffsch*

5. *$|K|$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $|K|$ ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ K zusammenhängend $\Rightarrow$ V ist abzählbar und $|K|$ ist second countable.*

Definition 2.6. Für $v \in V$ definiert $L_K(v) = (V_v, S_v)$ einen Link von v mit

$$S_v = \{s \setminus v \mid s \in S: \ v \in s\}$$

Satz 2.7. *Sei K ein zusammenhängender Simlicialkomplex, $n \geq 1$. Dann ist $|K|$ eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn*

1. *alle maximalen Simplizes haben Dimension n (K ist von reiner Dimension n)*
2. *jeder $(n-1)$-Simplex ist eine Seite von genau zwei n-Simplizes*
3. $|L_K(v)| \cong S^{n-1}$

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum. Eine Triangulierung von X ist ein Homöomorphismus $|K| \cong X$ wobei K ein Simplicialkomplex ist.

Satz 2.9. *Jede Fläche ist triangulierbar.*

Bemerkung 2.10. Die Aussage ist noch wahr für $n = 3$ aber falsch ab $n = 4$.

2.2 Zellkomplexe

Definition 2.11. Sei A eine Menge.

1. Die Menge der orientierten Elemente von A ist

$$\tilde{A} = A \cup A^{-1}$$

   wobei $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

2. Die Menge der orientierten Zyklen in A ist

$$A^* = \{[a_1, ..., a_n] \mid n \geq 0, \ a_i \in \tilde{A}\}$$

   wobei die Äquivalenzklassen definiert sind durch

$$(a_1, ..., a_n) \sim (a'_1, ..., a'_n) \Leftrightarrow \exists k \geq 0 : \ a'_i = \begin{cases} a_{i+k}, & i+k \leq n \\ a_{i+k-n}, & k > n \end{cases}$$

Definition 2.12. Ein Zellenkomplex ist ein Tripel $K = (F, E, \delta)$, wobei F (Menge der Flächen) nicht leer und endlich, E (Menge der Kanten) endlich und $\delta : \tilde{F} \to E^*$ die Randabbildung sodass

1. $\delta(A^{-1}) = \delta(A)^{-1}\ \forall A \in F$

2. $A_1, A_2 \in F$, $A_1 \neq A_2$, dann $\partial(A_1) \neq \partial(A_2)$

3. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt in genau einem oder genau zwei Rändern $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vor.

4. K ist zusammenhängend.

Definition 2.13. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex. Wir definieren die geometrische Realisierung von K als den Quotientenraum

$$|K| = (\bigcup_{A \in F} |A|)/ \sim$$

wobei $|A| = \cong D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\}$ und $\sim$ wie folgt definiert ist.
Ein Punkt $x \in |\overset{\circ}{A}|$ ist nur zu sich selbst äquivalent. Für $x \in \partial(|A|) \cong S^1$: Wir unterteilen $\partial(|A|) = S^1$ in $\underline{n}$ Segmente/Intervalle (wobei $\partial A = [a_1, ..., a_{\underline{n}}]$), markieren das i-te Segment mit a_i und identifizieren Punkte auf dem Segment mit a_i markierten Segment mit Punkten auf jeden mit a_i oder a_i^{-1} markierten Segment von Rand von $|A_j|$ gemäß der Orientierung.

Satz 2.14. *Für jeden Zellenkomplex K ist $|K|$ eine kompakte Fläche mit Rand.*

Definition 2.15. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex und $a \in \tilde{E}$.

1. Ein Nachfolger von a ist ein $b \in \tilde{E}$, sodass ab in einem Rand $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vorkommt.

2. a heißt innere Kante, falls a in genau zwei Rändern vorkommt.

3. a heißt äußere Kante, falls a in genau einem Rand vorkommt.