Topologische Flächen und Fundamentalgruppen
Zusammenfassung

October 21, 2024

Contents

1 Topologische Flächen

1.1 Einführung

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X sodass

1. X ist Hausdorff'sch
2. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis
3. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $x \in U \subseteq X$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \tilde{\to} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt Karte.

4. X ist zusammenhängend

Für $n = 1$ heißt X eine Kurve, für $n = 2$ eine Fläche.

1.2 Klassifikation der Kurve

Satz 1.2. *Jede Kurve ist homöomorph zu genau einer der folgenden Kurven*

1. $\mathbb{R}$

2. S^1

Beispiel 1.3. *Sei* $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \; y^2 = x^3 - x\}$*. Das wichtigste Hilfsmittel, um die Topologie von* X *zu verstehen, ist die Projektion*

$$\pi : X \to \mathbb{C}$$

mit

$$\pi(x, y) = x$$

Für $a \in 0, \pm 1$ *hat* a *genau ein Urbild, ansonsten 2.*

Definition 1.4. Eine stetige Abbildung $\pi : Y \to X$ heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, sodass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

$$\pi|_{V_i} : V_i \tilde{\to} U$$

ein Homöomorphismus $\forall i$.

Definition 1.5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} \setminus \{(0, 0, ..., 0)\} / \sim$$

mit

$$(z_0, ..., z_n) \sim (z'_0, ..., z'_n)$$

genau dann, wenn

$$\exists t \in K^* : \; z'_i = t z_i$$

Beispiel 1.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \tilde{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *durch die Bijektion*

$$[z : 1] \leftarrow z$$

$$[1 : 0] \leftarrow \infty$$

1.3 Klassifizierung der kompakten Flächen

g	orientierbar	nicht orientierbar
0	S^2	$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
1	Torus	Klein'sche Flasche
2	Doppeltorus	$\vdots$
3	Tripeltorus	$\vdots$