Topologische Flächen und Fundamentalgruppen
Zusammenfassung

December 2, 2024

Contents

1 Topologische Flächen

1.1 Einführung

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X sodass

1. X ist Hausdorff'sch
2. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis
3. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $x \in U \subseteq X$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \tilde{\to} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt Karte.

4. X ist zusammenhängend

Für $n = 1$ heißt X eine Kurve, für $n = 2$ eine Fläche.

1.2 Klassifikation der Kurve

Satz 1.2. *Jede Kurve ist homöomorph zu genau einer der folgenden Kurven*

1. $\mathbb{R}$
2. S^1

Beispiel 1.3. *Sei* $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \ y^2 = x^3 - x\}$*. Das wichtigste Hilfsmittel, um die Topologie von* X *zu verstehen, ist die Projektion*

$$\pi : X \to \mathbb{C}$$

mit

$$\pi(x, y) = x$$

Für $a \in 0, \pm 1$ *hat* a *genau ein Urbild, ansonsten 2.*

Definition 1.4. Eine stetige Abbildung $\pi : Y \to X$ heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, sodass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

$$\pi|_{V_i} : V_i \tilde{\to} U$$

ein Homöomorphismus $\forall i$.

Definition 1.5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} \setminus \{(0, 0, ..., 0)\} / \sim$$

mit

$$(z_0, ..., z_n) \sim (z'_0, ..., z'_n)$$

genau dann, wenn

$$\exists t \in K^* : \ z'_i = tz_i$$

Beispiel 1.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \tilde{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *durch die Bijektion*

$$[z : 1] \leftarrow z$$

$$[1 : 0] \leftarrow \infty$$

2 Klassifizierung der kompakten Flächen

g	orientierbar	nicht orientierbar
0	S^2	$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
1	Torus	Klein'sche Flasche
2	Doppeltorus	$\vdots$
3	Tripeltorus	$\vdots$

2.1 Triangulierung

Definition 2.1. Sei $\mathbb{A}$ ein reeller Vektorraum.

1. $v_0, ..., v_n \in \mathbb{A}$ heißt affin unabhängig, wenn $v_1 - v_0, ..., v_n - v_0$ linear unabhängig sind

2. Für $v_0, ..., v_n \in \mathbb{A}$ affin unabhängig heißt

$$\sigma = [v_0 ..., v_n] = \{t_0 v_0 + \ldots t_n v_n \mid t_i \geq 0, \ t_0 + \ldots t_n = 1\}$$

der von den v_i aufgespannte Simplex der Dimension $\dim(\sigma) = n$

3. ist $\{v_{i_0}, ..., v_{i,k}\} \subseteq \{v_0, ..., v_n\}$ eine Teilmenge mit $k+1$ Elementen, dann heißt das davon erzeugte k-Simplex eine k-Seite von σ

4. $\partial\sigma = \bigcup_{\delta \subsetneq \sigma} \delta$ heißt Rand von σ und $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$ ist das Innere

Definition 2.2. Ein abstrakter Simplicialkomplex ist ein Paar $K = (V, S)$, wobei $V \neq \varnothing$ und S eine Menge von endlichen Teilmengen von V. Anschaulich ist K ein Graph mit V der Menge der Ecken von K und S die Menge der Simplizes von K.
S muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. jede Ecke $v \in V$ liegt in mindestens einem und höchstens endlich vielen Simplizes

2. $s \in S$ und $s' \subseteq s$, dann ist $s' \in S$

Sei $K = (V, S)$ ein Simplicialkomplex. Sei

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^{|V|} = \{(t_v)_{v\in V} \in \mathbb{R}^{|V|} \mid t_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in V\}$$

und

$$|K| = \{(t_v)_{v\in V} \in \mathbb{A} \mid t_v \geq 0 \ \wedge \sum_{v\in V} t_v = 1 \wedge \ s = \{v \in V \mid t_v > 0\} \in S\}$$

Definition 2.3. $|K|$ heißt die geometrische Realisierung von K. Für $s \in S$ heißt $\sigma = |s| = \{(t_v)_{v\in V} \mid t_v = 0 \ \forall v \notin s\} = [v_0, ..., v_n]$ die geometrische Realisierung von s.

Definition 2.4. Basis der Topologie sind Mengen $U \subseteq |K|$ der Form

- $U \cap |s| \subseteq |s|$ offen für alle $s \in S$

- $U \cap |s| \neq \varnothing$ für alle s bis auf endlich viele

Lemma 2.5. *Die Topologie hat folgende Eigenschaften*

1. *Für $v \in V$ heißt $st(v) = \bigcup_{s\in S,\, v\in s} \overset{\circ}{|s|}$ der Stern von v. Das ist eine offene Umgebung von v mit Abschluss $\overline{st(v)} = \bigcup_{s\in S,\, v\in S} |s|$*

2. *$(st(v))_{v\in V}$ bilden eine offene Überdeckung von $|K|$*

3. *$\overline{st(v)}$ ist kompakt, wegzusammenhängend*

4. *$|K|$ ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend und Hausdorffsch*

5. *$|K|$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $|K|$ ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ K zusammenhängend $\Rightarrow$ V ist abzählbar und $|K|$ ist second countable.*

Definition 2.6. Für $v \in V$ definiert $L_K(v) = (V_v, S_v)$ einen Link von v mit

$$S_v = \{s \setminus v \mid s \in S : \ v \in s\}$$

Satz 2.7. *Sei K ein zusammenhängender Simlicialkomplex, $n \geq 1$. Dann ist $|K|$ eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn*

1. *alle maximalen Simplizes haben Dimension n (K ist von reiner Dimension n)*
2. *jeder $(n-1)$-Simplex ist eine Seite von genau zwei n-Simplizes*
3. $|L_K(v)| \cong S^{n-1}$

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum. Eine Triangulierung von X ist ein Homöomorphismus $|K| \cong X$ wobei K ein Simplicialkomplex ist.

Satz 2.9. *Jede Fläche ist triangulierbar.*

Bemerkung 2.10. Die Aussage ist noch wahr für $n = 3$ aber falsch ab $n = 4$.

2.2 Zellkomplexe

Definition 2.11. Sei A eine Menge.

1. Die Menge der orientierten Elemente von A ist

$$\tilde{A} = A \cup A^{-1}$$

   wobei $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

2. Die Menge der orientierten Zyklen in A ist

$$A^* = \{[a_1, ..., a_n] \mid n \geq 0, \ a_i \in \tilde{A}\}$$

   wobei die Äquivalenzklassen definiert sind durch

$$(a_1, ..., a_n) \sim (a'_1, ..., a'_n) \Leftrightarrow \exists k \geq 0 : \ a'_i = \begin{cases} a_{i+k}, & i+k \leq n \\ a_{i+k-n}, & k > n \end{cases}$$

Definition 2.12. Ein Zellenkomplex ist ein Tripel $K = (F, E, \delta)$, wobei F (Menge der Flächen) nicht leer und endlich, E (Menge der Kanten) endlich und $\delta : \tilde{F} \to E^*$ die Randabbildung sodass

1. $\delta(A^{-1}) = \delta(A)^{-1}\ \forall A \in F$
2. $A_1, A_2 \in F$, $A_1 \neq A_2$, dann $\partial(A_1) \neq \partial(A_2)$
3. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt in genau einem oder genau zwei Rändern $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vor.
4. K ist zusammenhängend.

Definition 2.13. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex. Wir definieren die geometrische Realisierung von K als den Quotientenraum

$$|K| = (\bigcup_{A \in F} |A|)/\sim$$

wobei $|A| =\cong D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\}$ und $\sim$ wie folgt definiert ist.
Ein Punkt $x \in |\mathring{A}|$ ist nur zu sich selbst äquivalent. Für $x \in \partial(|A|) \cong S^1$: Wir unterteilen $\partial(|A|) = S^1$ in $\underline{n}$ Segmente/Intervalle (wobei $\partial A = [a_1, ..., a_{\underline{n}}]$), markieren das i-te Segment mit a_i und identifizieren Punkte auf dem Segment mit a_i markierten Segment mit Punkten auf jeden mit a_i oder a_i^{-1} markierten Segment von Rand von $|A_j|$ gemäß der Orientierung.

Satz 2.14. *Für jeden Zellenkomplex K ist $|K|$ eine kompakte Fläche mit Rand.*

Definition 2.15. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex und $a \in \tilde{E}$.

1. Ein Nachfolger von a ist ein $b \in \tilde{E}$, sodass ab in einem Rand $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vorkommt.
2. a heißt innere Kante, falls a in genau zwei Rändern vorkommt.
3. a heißt äußere Kante, falls a in genau einem Rand vorkommt.
4. Die Relation $\sim$ ist eine Relation auf $\tilde{E}$ definiert als $a \sim b \Leftrightarrow b^{-1}$ ist ein Nachfolger von a
5. Sei $\approx$ die gröbste Äquivalenzrelation mit $a \sim b \Rightarrow a \approx b$
6. Eine Ecke von K ist eine Äquivalenzklasse $v = a_1, ..., a_n$ von $\approx$, $v \in V = \tilde{E}/\approx$.

Lemma 2.16. *Sei $\bar{x} \in |K|$ ein Eckpunkt, $a_1, ..., a_m \in \tilde{E}$ die orientierten Kanten mit Endpunkt $\bar{x}$.*

1. *Angenommen $a_1, ..., a_m$ sind innere Kanten. Dann gibt es eine zyklische Anordnung sodass $\forall i$ gilt a_{i-1}^{-1} und a_{i+1}^{-1} sind Nachfolger von a.*

2. *Sonst gibt es eine Ordnung $a_1, ..., a_m$, sodass a_1, a_m äußere und $a_2, ..., a_{m-1}$ innere Kanten sind. Für $i = 2, ..., m-1$ gilt die gleiche Aussage wie oben und für $i = 1, m$ jeweils modulo m.*

Definition 2.17. Die beiden Fälle des vorherigen Lemmas definieren innere und äußere Ecken.

Bemerkung 2.18. $|K|$ ist eine triangulierte Fläche mit Rand $\Leftrightarrow$

1. $a, b \in \tilde{E}$, $a \sim b \Rightarrow a^{-1} \not\sim b^{-1}$.
2. $\forall A \in \tilde{F}$: $\partial A = [a_1, a_2, a_3]$

Satz 2.19. *Jede kompakte Fläche mit Rand X besitzt eine Darstellung $X \cong |K|$ für einen Zellkomplex K.*

Es stellt sich nun die Frage, wie man für zwei Zellkomplexe K_1, K_2 entscheiden kann, ob $|K_1| \cong |K_2|$.
Schritte:

1. Definiere eine kombinatorische Äquivalenzrelation auf der Menge der Zellkomplexe, sodass $K_1 \sim K_2 \Rightarrow |K_1| \cong |K_2|$
2. Finde eine Liste von Zellkomplexen $K_1, K_2, ...$, sodass für jeden Zellkomplex K gilt $|K| \sim |K_i|$ für genau ein i.
3. zeige $|K_i| \ncong |K_j|$

Definition 2.20. Seine K, K' Zellkomplexe. Dann heißt K' eine elementare Verkleinerung von K, wenn K' aus K durch eine Reihe von den folgenden Operationen entsteht

1. Unterteilung einer Randkante a in zwei Kanten b, c mit gleicher Orientierung
2. Ergänzung einer inneren Kante durch eine Fläche A

Nun definiert man $\sim$ auf der Menge der Isomorphie-Klassen der Zellkomplexe durch

Definition 2.21. $\sim$ ist die gröbste Äquivalenzrelation mit K' ist eine elementare Verfeinerung von $K \Rightarrow K' \sim K$

Lemma 2.22. *Ist K' eine elementare Verfeinerung von K, so gilt $|K'| \cong |K|$.*

Für die weiteren Überlegungen müssen wir uns Invarianten von K überlegen, die unter den beiden Operationen erhalten bleiben. Ab diesem Punkt wollen wir die Annahme treffen, dass alle Kanten innere Kanten sind. Das heißt, jedes $a \in \tilde{E}$ kommt genau zwei mal im Rand vor. Damit ist $|K|$ eine kompakte Fläche ohne Rand.

Definition 2.23. Sei $K = (F, E, \partial)$ ein Zellkomplex. Eine Orientierung von K ist eine Teilmenge $O \subset \tilde{F}$, sodass

1. $\tilde{F} = O \cup O^{-1}$

2. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt genau ein Mal in den Rändern $\partial(A)$, $A \in O$ vor

Definition 2.24. $K = (F, E, \partial)$ heißt orientierbar, wenn eine Orientierung existiert.

Lemma 2.25. *Sei K' eine elementare Verfeinerung von K. Dann ist K orientierbar, genau dann, wenn K' orientierbar ist.*

Korollar 2.26. $K_1 \sim K_2 \Rightarrow K_1$ *ist orientierbar, genau dann, wenn K_2 ist orientierbar.*

Definition 2.27. Die Euler-Charakteristik von K ist

$$\chi(K) = |F| - |E| + |V|$$

Lemma 2.28. *Sei $K_1 \sim K_2$. Dann ist $\chi(K_1) = \chi(K_2)$.*

Definition 2.29. Für Zellkomplexe werden zwei Normalformen definiert.

1. $F = \{A\}$, $E = \{a_1, b_1, ..., a_p, b_p\}$, $p \geq 0$ mit

$$\partial(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

2. $F = \{A\}$, $E = \{a_1, ..., a_p\}$, $p \geq 1$ mit

$$\partial(A) = a_1 a_1 ... a_p a_p$$

Bemerkung 2.30.

- Ist in Fall 1. $p = 0$, dann ist $|K| \cong S^1$.
- Fall 1. ist orientierbar, Fall 2. nicht.
- In Fall 1. ist $\chi(K) = 2 - 2p$, in Fall 2. ist $\chi(K) = 2 - p$.

Korollar 2.31. *Die Zellkomplexe in Normalform sind paarweise nicht äquivalent.*

Man kann sich überlegen, dass die beschriebene Ebene in Fall 2 ein p-Torus ist. Deswegen wird der Teil $aba^{-1}b^{-1}$ des Randes eines Zellkomplexes auch Henkel. Analog nennt man die Teile des Randes einer Fläche in zweiter Normalform eine Kreuzhaube.

Satz 2.32. *Jeder Zellenkomplex ist äquivalent zu genau einem Zellkomplex in Normalform.*

Korollar 2.33. *Jede kompakte Fläche ist homöomorph zu einer der Flächen in Normalform ($|K|, K$ in NF), d.h. eine zusammenhängede Summe von $p \geq 0$ Henkeln oder $p \geq 1$ Kreuzhauben.*

Satz 2.34. *Sind K_1, K_2 in verschiedenen Normalformen, dann ist $|K_1| \ncong |K_2|$.*

Die Aussage ist eine Konsequenz des folgenden Lemmas.

Lemma 2.35. *Orientierbarkeit und Euler-Charakteristik sind topologische Invarianten.*

Dafür wird die sogenannte singuläre Homologie verwendet.

Definition 2.36. Sei X ein topologischer Raum. Die singulären Homologiegruppen $H_q(x)$, $q \geq 0$ sind alle abelschen Gruppen, die funktionell von X abhängen. D.h. für $f : X \to Y$ enthält man abelsche Gruppen $f_{\star,q} : H_q(x) \to H_q(y)$ sodass

$$(I_x)_x = I_{H_q(x)}$$

und

$$(f \circ g)_\star = f_\star \circ g_\star$$

Sei X eine kompakte Fläche, dann ist

1. $H_0(x) \cong \mathbb{Z}$ (allgemein: H_0 ist freie abelsche Gruppe mit Rang gleich der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten)
2. $H_1(x) = \frac{\langle \gamma | \gamma : S^1 \to \to X \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle \partial A | A \subseteq X \rangle}$

Lemma 2.37. *Ist allgemein X eine kompakte Fläche in Normalform, so ist*

1. $H_0(x) \cong \mathbb{Z}$
2. $H_1(x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2p}, & (I), p \geq 0 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p, & (II), p \geq 1 \end{cases}$
3. $H_2(x) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & (I) \\ 0, & (II) \end{cases}$