

# Topologische Flächen und Fundamentalgruppen

## Zusammenfassung

October 28, 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Topologische Flächen</b>	<b>2</b>
1.1	Einführung . . . . .	2
1.2	Klassifikation der Kurve . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Klassifizierung der kompakten Flächen</b>	<b>3</b>
2.1	Triangulierung . . . . .	3

# 1 Topologische Flächen

## 1.1 Einführung

**Definition 1.1** (Mannigfaltigkeit). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine  $n$ -Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum  $X$  sodass

1.  $X$  ist Hausdorff'sch
2. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis
3. jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine Umgebung  $x \in U \subseteq X$ , die homöomorph zu einer offenen Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  ist. Ein Homöomorphismus

$$\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt Karte.

4.  $X$  ist zusammenhängend

Für  $n = 1$  heißt  $X$  eine Kurve, für  $n = 2$  eine Fläche.

## 1.2 Klassifikation der Kurve

**Satz 1.2.** Jede Kurve ist homöomorph zu genau einer der folgenden Kurven

1.  $\mathbb{R}$
2.  $S^1$

**Beispiel 1.3.** Sei  $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^3 - x\}$ . Das wichtigste Hilfsmittel, um die Topologie von  $X$  zu verstehen, ist die Projektion

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{C}$$

mit

$$\pi(x, y) = x$$

Für  $a \in 0, \pm 1$  hat  $a$  genau ein Urbild, ansonsten 2.

**Definition 1.4.** Eine stetige Abbildung  $\pi : Y \rightarrow X$  heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  besitzt, sodass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

$$\pi|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\sim} U$$

ein Homöomorphismus  $\forall i$ .

**Definition 1.5.** Sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$ . Sei

$$\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\} / \sim$$

mit

$$(z_0, \dots, z_n) \sim (z'_0, \dots, z'_n)$$

genau dann, wenn

$$\exists t \in K^* : z'_i = tz_i$$

**Beispiel 1.6.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  durch die Bijektion

$$[z : 1] \leftarrow z$$

$$[1 : 0] \leftarrow \infty$$

## 2 Klassifizierung der kompakten Flächen

$g$	orientierbar	nicht orientierbar
0	$S^2$	$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
1	Torus	Klein'sche Flasche
2	Doppeltorus	$\vdots$
3	Tripeltorus	$\vdots$

### 2.1 Triangulierung

**Definition 2.1.** Sei  $\mathbb{A}$  ein reeller Vektorraum.

1.  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{A}$  heißt affin unabhängig, wenn  $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$  linear unabhängig sind
2. Für  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{A}$  affin unabhängig heißt

$$\sigma = [v_0, \dots, v_n] = \{t_0 v_0 + \dots + t_n v_n \mid t_i \geq 0, t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

der von den  $v_i$  aufgespannte Simplex der Dimension  $\dim(\sigma) = n$

3. ist  $\{v_{i_0}, \dots, v_{i,k}\} \subseteq \{v_0, \dots, v_n\}$  eine Teilmenge mit  $k + 1$  Elementen, dann heißt das davon erzeugte  $k$ -Simplex eine  $k$ -Seite von  $\sigma$
4.  $\partial\sigma = \bigcup_{\delta \subsetneq \sigma} \delta$  heißt Rand von  $\sigma$  und  $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$  ist das Innere

**Definition 2.2.** Ein abstrakter Simplicialkomplex ist ein Paar  $K = (V, S)$ , wobei  $V \neq \emptyset$  und  $S$  eine Menge von endlichen Teilmengen von  $V$ . Anschaulich ist  $K$  ein Graph mit  $V$  der Menge der Ecken von  $K$  und  $S$  die Menge der Simplizes von  $K$ .  $S$  muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. jede Ecke  $v \in V$  liegt in mindestens einem und höchstens endlich vielen Simplizes
2.  $s \in S$  und  $s' \subseteq s$ , dann ist  $s' \in S$

Sei  $K = (V, S)$  ein Simplicialkomplex. Sei

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^{|V|} = \{(t_v)_{v \in V} \in \mathbb{R}^{|V|} \mid t_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in V\}$$

und

$$|K| = \{(t_v)_{v \in V} \in \mathbb{A} \mid t_v \geq 0 \wedge \sum_{v \in V} t_v = 1 \wedge s = \{v \in V \mid t_v > 0\} \in S\}$$

**Definition 2.3.**  $|K|$  heißt die geometrische Realisierung von  $K$ . Für  $s \in S$  heißt  $\sigma = |s| = \{(t_v)_{v \in V} \mid t_v = 0 \ \forall v \notin s\} = [v_0, \dots, v_n]$  die geometrische Realisierung von  $s$ .

**Definition 2.4.** Basis der Topologie sind Mengen  $U \subseteq |K|$  der Form

- $U \cap |s| \subseteq |s|$  offen für alle  $s \in S$
- $U \cap |s| \neq \emptyset$  für alle  $s$  bis auf endlich viele

**Lemma 2.5.** Die Topologie hat folgende Eigenschaften

1. Für  $v \in V$  heißt  $st(v) = \bigcup_{s \in S, v \in s} \overset{\circ}{|s|}$  der Stern von  $v$ . Das ist eine offene Umgebung von  $v$  mit Abschluss  $\overline{st(v)} = \bigcup_{s \in S, v \in s} |s|$
2.  $(st(v))_{v \in V}$  bilden eine offene Überdeckung von  $|K|$
3.  $\overline{st(v)}$  ist kompakt, wegzusammenhängend
4.  $|K|$  ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend und Hausdorffsch
5.  $|K|$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow |K|$  ist wegzusammenhängend  $\Leftrightarrow K$  zusammenhängend  $\Rightarrow V$  ist abzählbar und  $|K|$  ist second countable.

**Definition 2.6.** Für  $v \in V$  definiert  $L_K(v) = (V_v, S_v)$  einen Link von  $v$  mit

$$S_v = \{s \setminus v \mid s \in S : v \in s\}$$

**Satz 2.7.** Sei  $K$  ein zusammenhängender Simplicialkomplex,  $n \geq 1$ . Dann ist  $|K|$  eine  $n$ -Mannigfaltigkeit genau dann, wenn

1. alle maximalen Simplizes haben Dimension  $n$  ( $K$  ist von reiner Dimension  $n$ )
2. jeder  $(n - 1)$ -Simplex ist eine Seite von genau zwei  $n$ -Simplizes
3.  $|L_K(v)| \cong S^{n-1}$

**Definition 2.8.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Triangulierung von  $X$  ist ein Homöomorphismus  $|K| \cong X$  wobei  $K$  ein Simplicialkomplex ist.

**Satz 2.9.** Jede Fläche ist triangulierbar.

*Bemerkung 2.10.* Die Aussage ist noch wahr für  $n = 3$  aber falsch ab  $n = 4$ .