Topologische Flächen und Fundamentalgruppen
Zusammenfassung

February 10, 2025

Contents

1 Topologische Flächen

1.1 Einführung

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine n-Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X sodass

1. X ist Hausdorff'sch
2. die Topologie besitzt eine abzählbare Basis
3. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung $x \in U \subseteq X$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Ein Homöomorphismus

   $$\varphi : U \tilde{\to} V \subseteq \mathbb{R}^n$$

   heißt Karte.
4. X ist zusammenhängend

Für $n = 1$ heißt X eine Kurve, für $n = 2$ eine Fläche.

1.2 Klassifikation der Kurve

Satz 1.2. *Jede Kurve ist homöomorph zu genau einer der folgenden Kurven*

1. $\mathbb{R}$
2. S^1

Beispiel 1.3. *Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \ y^2 = x^3 - x\}$. Das wichtigste Hilfsmittel, um die Topologie von X zu verstehen, ist die Projektion*

$$\pi : X \to \mathbb{C}$$

mit

$$\pi(x, y) = x$$

Für $a \in 0, \pm 1$ hat a genau ein Urbild, ansonsten 2.

Definition 1.4. Eine stetige Abbildung $\pi : Y \to X$ heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subseteq X$ besitzt, sodass

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$$

$$\pi|_{V_i} : V_i \tilde{\to} U$$

ein Homöomorphismus $\forall i$.

Definition 1.5. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\mathbb{P}^n(K) = K^{n+1} \setminus \{(0,0,...,0)\} / \sim$$

mit

$$(z_0,...,z_n) \sim (z'_0,...,z'_n)$$

genau dann, wenn

$$\exists t \in K^* : \; z'_i = t z_i$$

Beispiel 1.6. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \tilde{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *durch die Bijektion*

$$[z : 1] \leftarrow z$$

$$[1 : 0] \leftarrow \infty$$

2 Klassifizierung der kompakten Flächen

g	orientierbar	nicht orientierbar
0	S^2	$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
1	Torus	Klein'sche Flasche
2	Doppeltorus	$\vdots$
3	Tripeltorus	$\vdots$

2.1 Triangulierung

Definition 2.1. Sei $\mathbb{A}$ ein reeller Vektorraum.

1. $v_0,...,v_n \in \mathbb{A}$ heißt affin unabhängig, wenn $v_1 - v_0, ..., v_n - v_0$ linear unabhängig sind

2. Für $v_0,...,v_n \in \mathbb{A}$ affin unabhängig heißt

$$\sigma = [v_0...,v_n] = \{t_0 v_0 + \dots t_n v_n \mid t_i \geq 0, \; t_0 + \dots t_n = 1\}$$

der von den v_i aufgespannte Simplex der Dimension $\dim(\sigma) = n$

3. ist $\{v_{i_0}, ..., v_{i,k}\} \subseteq \{v_0, ..., v_n\}$ eine Teilmenge mit $k+1$ Elementen, dann heißt das davon erzeugte k-Simplex eine k-Seite von σ

4. $\partial\sigma = \bigcup_{\delta \subsetneq \sigma} \delta$ heißt Rand von σ und $\mathring{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$ ist das Innere

Definition 2.2. Ein abstrakter Simplicialkomplex ist ein Paar $K = (V, S)$, wobei $V \neq \varnothing$ und S eine Menge von endlichen Teilmengen von V. Anschaulich ist K ein Graph mit V der Menge der Ecken von K und S die Menge der Simplizes von K.
S muss folgende Bedingungen erfüllen:

1. jede Ecke $v \in V$ liegt in mindestens einem und höchstens endlich vielen Simplizes

2. $s \in S$ und $s' \subseteq s$, dann ist $s' \in S$

Sei $K = (V, S)$ ein Simplicialkomplex. Sei

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^{|V|} = \{(t_v)_{v \in V} \in \mathbb{R}^{|V|} \mid t_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in V\}$$

und

$$|K| = \{(t_v)_{v \in V} \in \mathbb{A} \mid t_v \geq 0 \ \wedge \sum_{v \in V} t_v = 1 \wedge \ s = \{v \in V \mid t_v > 0\} \in S\}$$

Definition 2.3. $|K|$ heißt die geometrische Realisierung von K. Für $s \in S$ heißt $\sigma = |s| = \{(t_v)_{v \in V} \mid t_v = 0 \ \forall v \notin s\} = [v_0, ..., v_n]$ die geometrische Realisierung von s.

Definition 2.4. Basis der Topologie sind Mengen $U \subseteq |K|$ der Form

- $U \cap |s| \subseteq |s|$ offen für alle $s \in S$

- $U \cap |s| \neq \varnothing$ für alle s bis auf endlich viele

Lemma 2.5. *Die Topologie hat folgende Eigenschaften*

1. *Für $v \in V$ heißt $st(v) = \bigcup_{s \in S,\, v \in s} \mathring{|s|}$ der Stern von v. Das ist eine offene Umgebung von v mit Abschluss $\overline{st(v)} = \bigcup_{s \in S,\, v \in S} |s|$*

2. *$(st(v))_{v \in V}$ bilden eine offene Überdeckung von $|K|$*

3. *$\overline{st(v)}$ ist kompakt, wegzusammenhängend*

4. *$|K|$ ist lokal kompakt, lokal wegzusammenhängend und Hausdorffsch*

5. *$|K|$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ $|K|$ ist wegzusammenhängend $\Leftrightarrow$ K zusammenhängend $\Rightarrow$ V ist abzählbar und $|K|$ ist second countable.*

Definition 2.6. Für $v \in V$ definiert $L_K(v) = (V_v, S_v)$ einen Link von v mit

$$S_v = \{s \setminus v \mid s \in S : \ v \in s\}$$

Satz 2.7. *Sei K ein zusammenhängender Simlicialkomplex, $n \geq 1$. Dann ist $|K|$ eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn*

1. *alle maximalen Simplizes haben Dimension n (K ist von reiner Dimension n)*
2. *jeder $(n-1)$-Simplex ist eine Seite von genau zwei n-Simplizes*
3. $|L_K(v)| \cong S^{n-1}$

Definition 2.8. Sei X ein topologischer Raum. Eine Triangulierung von X ist ein Homöomorphismus $|K| \cong X$ wobei K ein Simplicialkomplex ist.

Satz 2.9. *Jede Fläche ist triangulierbar.*

Bemerkung 2.10. Die Aussage ist noch wahr für $n = 3$ aber falsch ab $n = 4$.

2.2 Zellkomplexe

Definition 2.11. Sei A eine Menge.

1. Die Menge der orientierten Elemente von A ist

$$\tilde{A} = A \cup A^{-1}$$

   wobei $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$

2. Die Menge der orientierten Zyklen in A ist

$$A^* = \{[a_1, ..., a_n] \mid n \geq 0, \ a_i \in \tilde{A}\}$$

   wobei die Äquivalenzklassen definiert sind durch

$$(a_1, ..., a_n) \sim (a'_1, ..., a'_n) \Leftrightarrow \exists k \geq 0 : \ a'_i = \begin{cases} a_{i+k}, & i+k \leq n \\ a_{i+k-n}, & k > n \end{cases}$$

Definition 2.12. Ein Zellenkomplex ist ein Tripel $K = (F, E, \delta)$, wobei F (Menge der Flächen) nicht leer und endlich, E (Menge der Kanten) endlich und $\delta : \tilde{F} \to E^*$ die Randabbildung sodass

1. $\delta(A^{-1}) = \delta(A)^{-1}\ \forall A \in F$

2. $A_1, A_2 \in F$, $A_1 \neq A_2$, dann $\partial(A_1) \neq \partial(A_2)$

3. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt in genau einem oder genau zwei Rändern $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vor.

4. K ist zusammenhängend.

Definition 2.13. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex. Wir definieren die <u>geometrische Realisierung</u> von K als den Quotientenraum

$$|K| = (\bigcup_{A\in F} |A|)/\sim$$

wobei $|A| =\cong D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid ||x|| \leq 1\}$ und $\sim$ wie folgt definiert ist.
Ein Punkt $x \in |\overset{\circ}{A}|$ ist nur zu sich selbst äquivalent. Für $x \in \partial(|A|) \cong S^1$: Wir unterteilen $\partial(|A|) = S^1$ in $\underline{n}$ Segmente/Intervalle (wobei $\partial A = [a_1, ..., a_{\underline{n}}]$), markieren das i-te Segment mit a_i und identifizieren Punkte auf dem Segment mit a_i markierten Segment mit Punkten auf jeden mit a_i oder a_i^{-1} markierten Segment von Rand von $|A_j|$ gemäß der Orientierung.

Satz 2.14. *Für jeden Zellenkomplex K ist $|K|$ eine kompakte Fläche <u>mit Rand</u>.*

Definition 2.15. Sei $K = (F, E, \delta)$ ein Zellenkomplex und $a \in \tilde{E}$.

1. Ein <u>Nachfolger</u> von a ist ein $b \in \tilde{E}$, sodass ab in einem Rand $\partial(A)$, $A \in \tilde{F}$ vorkommt.

2. a heißt <u>innere Kante</u>, falls a in genau zwei Rändern vorkommt.

3. a heißt <u>äußere Kante</u>, falls a in genau einem Rand vorkommt.

4. Die Relation $\sim$ ist eine Relation auf $\tilde{E}$ definiert als $a \sim b \Leftrightarrow b^{-1}$ ist ein Nachfolger von a

5. Sei $\approx$ die gröbste Äquivalenzrelation mit $a \sim b \Rightarrow a \approx b$

6. Eine Ecke von K ist eine Äquivalenzklasse $v = a_1, ..., a_n$ von $\approx$, $v \in V = \tilde{E}/\approx$.

Lemma 2.16. *Sei $\bar{x} \in |K|$ ein Eckpunkt, $a_1, ..., a_m \in \tilde{E}$ die orientierten Kanten mit Endpunkt $\bar{x}$.*

1. *Angenommen $a_1, ..., a_m$ sind innere Kanten. Dann gibt es eine zyklische Anordnung sodass $\forall i$ gilt a_{i-1}^{-1} und a_{i+1}^{-1} sind Nachfolger von a.*

2. *Sonst gibt es eine Ordnung $a_1, ..., a_m$, sodass a_1, a_m äußere und $a_2, ..., a_{m-1}$ innere Kanten sind. Für $i = 2, ..., m-1$ gilt die gleiche Aussage wie oben und für $i = 1, m$ jeweils modulo m.*

Definition 2.17. Die beiden Fälle des vorherigen Lemmas definieren innere und äußere Ecken.

Bemerkung 2.18. $|K|$ ist eine triangulierte Fläche mit Rand $\Leftrightarrow$

1. $a, b \in \tilde{E}$, $a \sim b \Rightarrow a^{-1} \not\sim b^{-1}$.

2. $\forall A \in \tilde{F}$: $\partial A = [a_1, a_2, a_3]$

Satz 2.19. *Jede kompakte Fläche mit Rand X besitzt eine Darstellung $X \cong |K|$ für einen Zellkomplex K.*

Es stellt sich nun die Frage, wie man für zwei Zellkomplexe K_1, K_2 entscheiden kann, ob $|K_1| \cong |K_2|$.
Schritte:

1. Definiere eine kombinatorische Äquivalenzrelation auf der Menge der Zellkomplexe, sodass $K_1 \sim K_2 \Rightarrow |K_1| \cong |K_2|$

2. Finde eine Liste von Zellkomplexen $K_1, K_2, ...$, sodass für jeden Zellkomplex K gilt $|K| \sim |K_i|$ für genau ein i.

3. zeige $|K_i| \ncong |K_j|$

Definition 2.20. Seine K, K' Zellkomplexe. Dann heißt K' eine elementare Verkleinerung von K, wenn K' aus K durch eine Reihe von den folgenden Operationen entsteht

1. Unterteilung einer Randkante a in zwei Kanten b, c mit gleicher Orientierung

2. Ergänzung einer inneren Kante durch eine Fläche A

Nun definiert man $\sim$ auf der Menge der Isomorphie-Klassen der Zellkomplexe durch

Definition 2.21. $\sim$ ist die gröbste Äquivalenzrelation mit K' ist eine elementare Verfeinerung von $K \Rightarrow K' \sim K$

Lemma 2.22. *Ist K' eine elementare Verfeinerung von K, so gilt $|K'| \cong |K|$.*

Für die weiteren Überlegungen müssen wir uns Invarianten von K überlegen, die unter den beiden Operationen erhalten bleiben. Ab diesem Punkt wollen wir die Annahme treffen, dass alle Kanten innere Kanten sind. Das heißt, jedes $a \in \tilde{E}$ kommt genau zwei mal im Rand vor. Damit ist $|K|$ eine kompakte Fläche ohne Rand.

Definition 2.23. Sei $K = (F, E, \partial)$ ein Zellkomplex. Eine Orientierung von K ist eine Teilmenge $O \subset \tilde{F}$, sodass

1. $\tilde{F} = O \cup O^{-1}$

2. jedes $a \in \tilde{E}$ kommt genau ein Mal in den Rändern $\partial(A)$, $A \in O$ vor

Definition 2.24. $K = (F, E, \partial)$ heißt orientierbar, wenn eine Orientierung existiert.

Lemma 2.25. *Sei K' eine elementare Verfeinerung von K. Dann ist K orientierbar, genau dann, wenn K' orientierbar ist.*

Korollar 2.26. *$K_1 \sim K_2 \Rightarrow K_1$ ist orientierbar, genau dann, wenn K_2 ist orientierbar.*

Definition 2.27. Die Euler-Charakteristik von K ist

$$\chi(K) = |F| - |E| + |V|$$

Lemma 2.28. *Sei $K_1 \sim K_2$. Dann ist $\chi(K_1) = \chi(K_2)$.*

Definition 2.29. Für Zellkomplexe werden zwei Normalformen definiert.

1. $F = \{A\}$, $E = \{a_1, b_1, ..., a_p, b_p\}$, $p \geq 0$ mit

$$\partial(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

2. $F = \{A\}$, $E = \{a_1, ..., a_p\}$, $p \geq 1$ mit

$$\partial(A) = a_1 a_1 ... a_p a_p$$

Bemerkung 2.30.

- Ist in Fall 1. $p = 0$, dann ist $|K| \cong S^1$.
- Fall 1. ist orientierbar, Fall 2. nicht.
- In Fall 1. ist $\chi(K) = 2 - 2p$, in Fall 2. ist $\chi(K) = 2 - p$.

Korollar 2.31. *Die Zellkomplexe in Normalform sind paarweise nicht äquivalent.*

Man kann sich überlegen, dass die beschriebene Ebene in Fall 2 ein p-Torus ist. Deswegen wird der Teil $aba^{-1}b^{-1}$ des Randes eines Zellkomplexes auch Henkel. Analog nennt man die Teile des Randes einer Fläche in zweiter Normalform eine Kreuzhaube.

Satz 2.32. *Jeder Zellenkomplex ist äquivalent zu genau einem Zellkomplex in Normalform.*

Korollar 2.33. *Jede kompakte Fläche ist homöomorph zu einer der Flächen in Normalform ($|K|, K$ in NF), d.h. eine zusammenhängede Summe von $p \geq 0$ Henkeln oder $p \geq 1$ Kreuzhauben.*

Satz 2.34. *Sind K_1, K_2 in verschiedenen Normalformen, dann ist $|K_1| \ncong |K_2|$.*

Die Aussage ist eine Konsequenz des folgenden Lemmas.

Lemma 2.35. *Orientierbarkeit und Euler-Charakteristik sind topologische Invarianten.*

INTERMEZZO: Dafür kann die sogenannte singuläre Homologie verwendet werden.

Definition 2.36. Sei X ein topologischer Raum. Die singulären Homologiegruppen $H_q(x)$, $q \geq 0$ sind alle abelschen Gruppen, die funktionell von X abhängen. D.h. für $f : X \to Y$ enthält man abelsche Gruppen $f_{*,q} : H_q(x) \to H_q(y)$ sodass

$$(I_x)_x = I_{H_q(x)}$$

und

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

Sei X eine kompakte Fläche, dann ist

1. $H_0(x) \cong \mathbb{Z}$ (allgemein: H_0 ist freie abelsche Gruppe mit Rang gleich der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten)
2. $H_1(x) = \frac{\langle \gamma | \gamma : S^1 \to \to X \rangle_{\mathbb{Z}}}{\langle \partial A | A \subseteq X \rangle}$

Lemma 2.37. *Ist allgemein X eine kompakte Fläche in Normalform, so ist*

1. $H_0(x) \cong \mathbb{Z}$
2. $H_1(x) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2p}, & (I), p \geq 0 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p, & (II), p \geq 1 \end{cases}$
3. $H_2(x) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & (I) \\ 0, & (II) \end{cases}$

Alternativ lässt sich das Lemma mittels der Fundamentalgruppe beweisen.

3 Die Fundamentalgruppe

Definition 3.1. Seien X, Y topologische Räume, $A \subset X$ und $f, g : X \to Y$ stetig. Dann heißen f, g homotop relativ zu A, wenn es eine stetige Abbildung

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

gibt, sodass

- $F(x,0) = f(x), F(x,1) = g(x)$
- $F(x,t) = f(x) = g(x), \forall x \in A, t \in [0,1]$

F heißt eine Homotopie zwischen f und g relativ zu A. Man schreibt $f \cong_A g$.

Lemma 3.2. $\cong_A$ *ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen der Funktionen von X nach Y.*

Definition 3.3. Sei X ein topologischer Raum. Ein Pfad/Weg in X ist eine stetige Abbildung

$$\gamma : [0,1] \to X$$

Wir bezeichnen mit

- $x_0 = \gamma(0)$ den Startpunkt und mit
- $x_1 = \gamma(1)$ den Endpunkt.

Zwei Pfade γ_1, γ_2 in X heißen pfadhomotop ($\gamma_1 \cong \gamma_2$) falls γ_1, γ_2 homotop relativ zu $\{0,1\}$ sind. Mit $\pi_1(X)$ bezeichnen wir die Menge der Pfadäquivalenzklassen, genannt Fundamentalgruppe.

$$\pi_1(X) = \bigcup_{(x_0,x_1)\in X^2} \pi_1(X; x_0, x_1)$$

ist ein Gruppoid.
Ist $x_0 = x_1$, also $\pi_1(X; x_0, x_1) = \pi_1(X; x_0)$, so nennen wir die die Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0.

Definition 3.4. Sei X ein topologischer Raum.

1. Für $x_0 \in X$ definiere e_{x_0} den konstanten Pfad in x_0
2. Für einen Pfad γ, definiere $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$

3. Für γ, σ in X mit $\gamma(1) = \sigma(0)$ definieren wir

$$(\gamma * \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \sigma(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Lemma 3.5. *1. $\gamma \cong \gamma'$, $\sigma \cong \sigma'$ und $\gamma(1) = \sigma(0)$, dann ist $(\gamma * \sigma) \cong (\gamma' * \sigma')$.*

2. Für γ mit $x_0 = \gamma(0), x_1 0 \gamma(1)$ gilt

$$e_{x_0} * \gamma \cong \gamma \cong \gamma * e_{x_0},\ \gamma * \gamma^{-1} \cong e_{x_0},\ \gamma^{-1} * \gamma \cong e_{x_1}$$

3. Für γ, σ, τ mit $\gamma(1) = \sigma(0), \sigma(1) = \tau(0)$ gilt

$$\gamma * (\sigma * \tau) \cong (\gamma * \sigma) * \tau$$

Definition 3.6. Wir definieren

1. $1_{x_0} = [e_{x_0}] = \pi_1(X; x_0)$
2. $* : \pi_1(X; x_0, x_1) \times \pi_1(X; , x_1, x_2) \to \pi_1(X; x_0, x_2)$ mit $[\gamma] * [\sigma] = [\gamma * \sigma]$
3. $[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$

Satz 3.7. $(\pi_1(X; x_0, x_1), 1_{x_0}, *)$ *ist ein Gruppoid. Insbesondere ist* $(\pi_1(X; x_0), *)$ *eine Gruppe.*

Bemerkung 3.8. Für jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist $f_* = \pi_1(f) : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ mit $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ ein Morphismus von Gruppoiden. Insbesondere ist $f_* : \pi_1(X; x_0) \to \pi_1(X; f(x_0))$ ein Gruppenhomomorphismus. Für $f : X \to Y, g : Y \to Z$ gilt $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ und $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X)}$.

Korollar 3.9. *Aus $f_X \tilde{\to} Y$ ein Homöomorphismus folgt $f_* : \pi_1(X; x_0) \tilde{\to} \pi_1(Y; f(x_0))$ ein Gruppenhomöomorphismus.*

Bemerkung 3.10. Sei X ein topologischer Raum, γ ein Pfad in X, $x_0 = \gamma(0), x_1 = \gamma(1)$. Dann ist

$$\hat{\gamma} : \pi_1(X; x - 0) \to \pi_1(X; x_1), [\sigma] \mapsto [\gamma^{-1} * \sigma * \gamma]$$

ein Gruppenisomorphismus, der nur von $[\gamma]$ abhängt.

Korollar 3.11. *Ist X wegzusammenhängend, so hängt die Isomorphieklasse von $\pi_1(X; x_0)$ nicht von x_0 ab.*

Definition 3.12. Sei X ein topologischer Raum.

1. X ist zusammenziehbar (kontrahierbar), falls $Id_X \cong \underline{x_0}$ (konstante Abbildung) für ein $x_0 \in X$

2. X heißt einfach zusammenhängend, falls X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X; x_0) = \{1_{x_0}\}\ \forall x_0 \in X$.

Bemerkung 3.13. X zusammenziehbar $\Rightarrow$ X einfach zusammenhängend.

3.1 Überlagerungen

Definition 3.14. Sei $p : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Eine offene Teilmenge $U \subset X$ wird gleichmäßig überlagert von p, falls

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i,\ p|_{U_i} : U_i \tilde{\to} U$$

p heißt eine Überlagerung von X, falls X eine offene Überdeckung durch $U \subseteq X$ besitzt, die gleichmäßig überlagert werden.

- $Cov(X)$ = Kategorie der Überlagerungen von X.
- Objekte: $p : Y \to X$ Überlagerung
- Morphismus: $Hom(p_1, p_2) = \{f : y_1 \to y_2 \mid p_2 = f \circ p_1\}$

Beispiel 3.15. *Sei $X = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Wir betrachten folgende Überlagerungen von X:*

- $\varrho : \mathbb{R} \to X,\ \varrho(t) = e^{2\pi i t}$ *(universelle Überlagerung)*
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma_n : X \to X,\ \sigma_n(z) = z^n$

Satz 3.16. $\pi_1(X, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Lemma 3.17. *Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein geschlossener Pfade mit Basispunkt 1. Dann* $[\alpha] \in \pi_1(X, 1)$

- *Es gibt einen eindeutig bestimmten Lift $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = 0,\ f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$*
- *$\tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$ hängt nur von der Klasse $[\alpha] \in \pi_1(X, \mathbb{Z})$ ab. Definiere*

$$\pi_1(X, 1) \to \mathbb{Z}$$

durch $[\alpha] \to \tilde{\alpha}(1)$. Z.z. das ist ein Gruppenisomorphismus.

Sei im folgenden $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Für eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ heißt $\tilde{f} : Y \to X$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ ein Lift von f.

Lemma 3.18. *Angenommen Y ist zusammenhängend und Hausdorff'sch, $f : Y \to X$ ist stetig und $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ sind Lifts von f. Wenn $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ für ein $y \in Y$, dann $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Lemma 3.19 (Homotopy lifting property of covering spaces)**.** *Sei Y ein topologischer Raum, $F : Y \times [0,1] \to X$ stetig.*

$$f : Y \to X,\ f(y) = F(Y, 0),\ \tilde{f} : Y \to \tilde{X}$$

Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Lift $\tilde{F}$ von F mit $\tilde{F}(y,0) = \tilde{f}(y)\ \forall y \in Y$.

Satz 3.20.

1. *Sei $\alpha : [0,1] \to X$ ein Pfad mit Anfangspunkt $x_0 = \alpha(0) \in X$ und $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Lift $\tilde{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x_0}$.*

2. *Seien $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ zwei Pfade mit $x_0 = \alpha(x_0) = \beta(0)$, $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ und $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ die Lifts mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x_0}$. Falls $\alpha \cong \beta$, so gilt auch $\tilde{\alpha} \cong \tilde{\beta}$, insbesondere also*

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$$

Korollar 3.21. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $\tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \tilde{X}$, $x_i = p(\tilde{x_i})$. Dann ist*

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}; \tilde{x_0}, \tilde{x_1}) \to \pi_1(X; x_0, x_1)$$

injektiv. Insbesondere ist $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_1(X; x_0)$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Satz 3.22. *Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend, $x_0 \in X$. Für eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$, $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ sei*

$$H_{p,\tilde{x_0}} = p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \subseteq \pi_1(X, x_0)$$

Dann induziert $(p, \tilde{x_0}) \mapsto H_{p,\tilde{x_0}}$ eine monotone Bijektion zwischen

1. *zusammenhängenden Überlagerungen $p : \tilde{X} \to X$ bis auf Isomorphie*

2. *Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ bis auf Konjugation $H \sim \alpha^{-1}H\alpha$.*

Satz 3.23. *Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ stetig. Sei Y zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei $y_0 \in Y$, $x_0 = f(y_0)$ und $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$. Dann sind äquivalent:*

- *Es existiert ein Lift* $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ *mit* $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x_0}$

- $f_*\pi_1(Y; y_0) \subseteq p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x_0})$

Sei G eine Gruppe, X eine Menge. Eine Wirkung von G auf X (von rechts) ist eine Abbildung

$$X \times G \to X$$

mit

$$(x, g) \mapsto x \cdot g$$

sodass

$$x \cdot 1 = x,\ (x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)\ \forall x \in X, g, h \in G$$

Eine G-Menge ist eine Menge X mit einer Wirkung von G. Wir definieren uns

$$SET_G = \text{ Kategorie der } G\text{-Menge}$$

Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Für eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X \in Cov(X)$ schreibe

$$F_{x_0}(p) = p^{-1}(x_0) \ni \tilde{x_0}$$

Sei $\alpha : [0, 1] \to X$ ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0, $\tilde{\alpha}$ der Lift von α mit Anfangspunkt $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x_0}$. Setze

$$\tilde{x_0}^{\alpha} = \tilde{\alpha}(1)$$

Lemma 3.24. *1.* $(\tilde{x_0}, [x]) \mapsto \tilde{x_0}^{\alpha}$ *definiert eine Wirkung von* $\pi_1(X; x_0)$ *auf* $F_{x_0}(p)$

2. Sei $q : \tilde{Y} \to X$ *eine weitere Überlagerung. Dann ist die induzierte Abbildung* $f|_{F_{x_0}(p)} : F_{x_0}(p) = p^{-1}(x_0) \to F_{x_0}(p) = q^{-1}(x_1)$ $\pi_1(X; x_0)$*-äquivariant.*

Bemerkung 3.25. Die Aussage des Lemmas ist, dass

$$F_{x_0} : \begin{cases} Cov(X) \to SET_{\pi_1(X\ x_0)}, \\ (p : \tilde{X} \mapsto x) \mapsto F_{x_0}(p) \end{cases}$$

ein kovarianter Funktor ist (Faserfunktor auf X in x_0).

Satz 3.26. *Sei* X *zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. DAnn ist* $\forall x_0 \in X$ *der Funktor*

$$F_{x_0} = \begin{cases} Cov(X) \to SET_{\pi_1(X, x_0)} \\ (p : \tilde{X} \to X) \mapsto F_{x_0}(p) = p^{-1}(x_0) \end{cases}$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Das bedeutet

1. F_{x_0} *ist volltreu, d.h. für* $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ *ist die natürliche Abbildung*

$$HOM_X(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) \to HOM_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0), p_2^{-1}(x_0))$$

   bijektiv.

2. F_{x_0} *ist essentiell surjektiv. Das bedeutet für alle* $A \in SET_{\pi_1(X,x_0)}$ *gibt es ein* $p : \tilde{X} \to X \in Cov(X)$ *mit*
$$p^{-1}(x_0) \cong A$$

Korollar 3.27. *Wir haben ein Bijektion*

$$\{\text{Überlagerung } p : \tilde{X} \to X\}/\cong \tilde{\to} \{\text{Mengen } A \text{ mit Wirkung von } \pi_1(X, x_0)\}/\cong$$

$$(p : \tilde{X} \to X) \mapsto p^{-1}(x_0)$$

Korollar 3.28. *Sei* $p : \tilde{X} \to X$ *eine zusammenhängende Überlagerung,* $x_0 \in X, \tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$, $H_{p,\tilde{x}_0} := p * \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \subseteq \pi_1(X, x_0)$,

$$[H_{p,\tilde{x}_0}] = \{\alpha H_{p,\tilde{x}_0} \alpha^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X, x_0)\}$$

die Menge der konjugierten Klassen.

1. $[H_{p,\tilde{x}_0}]$ *hängt von* p *aber nicht von* $\tilde{x}_0$

2. *Die Zuordnung* $p : \tilde{X} \to X \mapsto [H_{p,\tilde{x}_0}]$ *ist eine Bijektion zwischen*

   - *zusammenhängenden Überdeckungen von* X *bis auf Isomorphismus*
   - *Untergruppen von* $\pi_1(X, x_0)$ *bis auf Konjugieren*

Korollar 3.29. *Sei* X *wie im Hauptsatz. Dann gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutige Überlagerung* $p^{univ} : X^{univ} \to X$ *(universelle Überlagerung), sodass* X^{univ} *einfach zusammenhängend ist. Zusätzlich gilt*

1. *Für alle* $\tilde{x}_0 \in (p^{univ})^{-1}(x_0)$ *haben wir eine Bijektion*

$$\begin{cases} \pi_1(X, x_0) \tilde{\to} (p^{univ})^{-1}(x_0) \\ \alpha \mapsto \tilde{x}_0^{\alpha} \end{cases}$$

2. Wir haben einen kanonischen Antiisomorphismus

$$\Phi = \begin{cases} \pi_1(X, x_0) \tilde{\to} AUT_X(X^*) \\ \alpha \mapsto \Phi_\alpha \end{cases}$$

sodass für $\tilde{x_0} \in (p^{univ})^{-1}(x_0)$ gilt $\Phi_\alpha(\tilde{x_0}) = \tilde{x}_0^\alpha$.

3. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine zusammenhängende Überlagerung, $H = \Phi(H_{p,\tilde{x}_0})$. Dann ist $\tilde{X} \cong X^{univ}/H$.

Lemma 3.30. *Sei X zusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann gibt es eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ sodass $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.*

3.2 Der Satz von van Kampen

Sei X ein topologischer Raum, $(A_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X mit offenen, wegzusammenhängenden Mengen und $x_0 \in X$, sodass

$$x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$$

Bezeichne mit

$$\varphi_i : \pi_1(A_i, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

die natürlichen Homomorphismen und mit

$$\Phi : *_i \pi_1(A_i, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

den Homomorphismus induziert durch die φ_i und den Eigenschaften des freien Produkts.

1. Falls $A_{i,j} = A_i \cap A_j \ \forall i, j \in I$ wegzusammenhängend ist, so ist Φ surjektiv.

2. Falls $A_{i,j,k} = A_i \cap A_j \cap A_k \ \forall i, j, k$ wegzusammenhängend ist, so ist $\mathcal{N} = \ker \Phi$ der normale Abschluss der Elemente

$$\varphi_{i,j}(\alpha)\varphi_{j,i}(\alpha)^{-1}$$

wobei $\varphi_{i,j} : \pi_1(A_{i,j}, x_0) \to \pi_1(A_i, x_0)$ und $\alpha : [0, 1] \to A_{i,j}$ ist ein geschlossener Weg mit Basispunkt x_0.

Satz 3.31. *Sei X wegzusammenhängend und $\alpha : S^1 \to X$, $x_0 = \alpha(1)$. Wir definieren*

$$Y = (X \cup D)/\sim$$

wobei D eine Scheibe sei und $\sim$ die Relation

$$\alpha(t) \sim \iota(t)$$

wenn $t \in S^1$ und $\iota : S^1 \to D$. Dann ist der natürliche Homomorphismus $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ surjektiv mit Kern $\langle [\alpha] \rangle^{norm}$.

Mit den gesammelten Resultaten über Fundamentalgruppen kann nun gezeigt werden, dass zwei Simplizialkomplexe in verschiedenen Normalformen nicht homöomorph zueinander sind. Das lässt sich zusammenfassen in folgendem Satz.

Satz 3.32. *Sei $X = |K|$ eine kompakte Fläche in Normalform, $x_0 \in X$.*

- *Ist K orientierbar, $\chi(K) = 2 - 2g$, $g \geq 0$, dann*

$$\pi_1(X; x_0)\langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

- *Ist K nicht orientierbar, $\chi(K) = 1 - p$, $p \geq 1$, damm*

$$\pi_1(X, x_0) = \langle a_1, a_2, ..., a_p \mid a_1^2 ... a_p^2 = 1 \rangle$$

Definition 3.33. Sei G eine Gruppe. Dann heißt $G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle \subseteq G$ die Kommutatorengruppe.

Lemma 3.34. *1. $G' \triangleleft G$ ist eine normale Untergruppe*

2. $G^{ab} = G/G'$ ist der maximale abelsche Quotient von G. Für alle H gilt $\varphi : G \to H$ abelsch genau dann, wenn $\ker(\varphi) \supseteq G'$.

Lemma 3.35. *Sei X eine kompakte Fläche in Normalform, $x_0 \in X$.*

- *Ist X orientierbar, $\chi(X) = 2 - 2g$, gilt*

$$\pi_1(X, x_0)^{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$$

- *Ist X nicht orientierbar, $\chi(X) = 1 - p$,*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}^{p-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Korollar 3.36. *Die Normalform einer kompakten Fläche ist eindeutig bestimmt.*

Wir wollen dieses Konzept verallgemeinern. Sei X eine kompakte Fläche, $R \subseteq X$ eine endliche Teilmenge, $r = |R|$, $X^0 = X \setminus R$. Dann

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g, c_1, ..., c_N \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_j c_j = 1 \rangle$$

in Normalform 1 und

$$\pi(X, x_0) = \langle a_1 ... a_p c_1 ... c_N \mid \prod_{i=1}^{p} a_i^2 \prod_j c_j = 1 \rangle$$

in Normalform 2.
Sei X eine kompakte Fläche, $p : Y \to X$ eine endlich verzweigte Überlagerung, d.h.

$$p : Y^0 = Y \setminus p^{-1}(R) \to X^0 = X \setminus R$$

Es gilt, dass X^0 homöomorph zu einer Untergruppe von $\pi_1(X^0, x_0)$ ist