TP. L1 Maths-Info

TP. Approximation et erreurs numériques

Exercice 1. Ecrire un programme qui demande un entier n et affiche, avec 20 chiffres après la virgule, les expressions :

$$S_n^{exact} = \frac{2n+1}{n+1}$$

$$S_n^{(1)} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{i=n}^{1} \frac{1}{i(i+1)} + 1$$

Afficher également les erreurs absolues et relatives :

$$\left|S_n^{(1)} - S_n^{exact}\right|, \frac{\left|S_n^{(1)} - S_n^{exact}\right|}{S_n^{exact}}, \left|S_n^{(2)} - S_n^{exact}\right| \ et \ \frac{\left|S_n^{(2)} - S_n^{exact}\right|}{S_n^{exact}}$$

Exercice 2. Considérons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1, b =$ 3000.001 et $c = 3$.

1. Calculer $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, afficher ces racines avec 15 chiffres après la virgule.
2. Afficher les erreurs : $E(x_1) = |ax_1^2 + bx_1 + c|$, $E(x_2) = |ax_2^2 + bx_2 + c|$
3. Sachant que $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, calculer x_1.
4. Afficher : $E(x_1) = |ax_1^2 + bx_1 + c|$

Exercice 3.

Objectif. Calculer une approximation de π en utilisant les formules de Leibniz et Euler-Wallis

Formule de Leibniz : La constante π est égale à

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \times (-1)^n}{2n+1}$$

1. Ecrire deux fonctions `int Leibniz1(double& pi, int MAXITER)` et `int Leibniz2(double& pi, int MAXITER)` qui

   - demandent le nombre maximal d'itérations MAXITER,
   - calculent l'approximation `pi` à l'aide de la formule de Leibniz,

- renvoient le nombre d'itérations effectuées avant d'atteindre la précision $|pi - \pi| < eps$, où eps est une constante strictement inférieure à 1.

Les premières itérations de la fonction `int Leibniz1(double& pi, int MAXITER)` sont les suivantes :

Itération 0	$S = 1$
Itération 1	$S = S - \frac{1}{3}$
Itération 2	$S = S + \frac{1}{5}$
Itération 3	$S = S - \frac{1}{7}$
Itération 4	$S = S + \frac{1}{9}$
….	…

Les premières itérations de la fonction `int Leibniz2(double& pi, int MAXITER)` sont les suivantes :

Itération 0	$S = 0$
Itération 1	$S = S + \left(1 - \frac{1}{3}\right)$
Itération 2	$S = S + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$
Itération 3	$S = S + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right)$
….	….

$$S = 4 \times S$$

Formule d'Euler-Wallis : La constante π est égale à

$$P = 2 \times \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)})$$

2. Ecrire une function `int EulerWallis(double& pi, int MAXITER)` qui demande le nombre maximal d'itérations MAXITER, calcule l'approximation `pi` et renvoie le nombre d'itérations effectué avant d'atteindre la précision $|pi - \pi| < eps$, eps est une constante < 1.