

Lista de Exercícios 4 - MAE0228

Exercício 1

a) Vamos definir Y_i como o número de insetos gerados pelo i -ésimo ovo. Logo,

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Pode-se observar que $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$. Sendo N a variável aleatória de distribuição Poisson(λ) que determina o número de ovos colocados pelo inseto-mãe, podemos definir X como uma partição da seguinte maneira:

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i$$

b) Usando a definição, a função geradora de momentos de X é:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= G_N(M_{Y_i}(t)) = G_N(E(e^{tY_i})) = G_N(1 - p + pe^t) = \\ &= E((1 - p + pe^t)^N) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p + pe^t)^k \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(1 - p + pe^t) \cdot \lambda]^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{(1-p+pe^t) \cdot \lambda} = e^{\lambda p(e^t - 1)} \end{aligned}$$

Logo, $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$. Com isso, sabemos que a função geradora de probabilidade de X é $G_X(t) = e^{\lambda p(t-1)}$.

c) Para calcular $E(X)$ e $Var(X)$, vamos usar os momentos. Sabemos que $E(X^i)$, o i -ésimo momento da variável X , é a i -ésima derivada de $M_X(t)$ com relação a t . Com isso:

$$E(X) = M'_X(t)|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t - 1)})'|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t - 1)} \cdot \lambda p e^t)|_{t=0} = \lambda p$$

Agora, para a variância, precisamos de $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M''_X(t)|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t - 1)})''|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t - 1)} \cdot \lambda p e^t)'|_{t=0} = \\ &= (e^{\lambda p(e^t - 1)} \cdot \lambda p e^t + e^{\lambda p(e^t - 1)} \cdot \lambda p e^t \cdot \lambda p e^t)|_{t=0} = \lambda p + (\lambda p)^2 \end{aligned}$$

Portanto, $Var(X) = \lambda p + (\lambda p)^2 - (\lambda p)^2 = \lambda p$

Exercício 3

b) Sendo X_1, X_2, \dots, X_k variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim \text{Binomial}(n_i, p)$, teremos:

$$M_{X_1+\dots+X_k}(t) = \prod_{i=1}^k M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^k (1 - p + p \cdot e^t)^{n_i} = (1 - p + p \cdot e^t)^{\sum_{i=1}^k n_i} = (1 - p + p \cdot e^t)^{n_1+n_2+\dots+n_k}$$

Logo, $X_1 + X_2 + \dots + X_k \sim \text{Binomial}(n_1 + n_2 + \dots + n_k, p)$

d) Sendo X_1, X_2, \dots, X_r variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, teremos:

$$M_{X_1+\dots+X_r}(t) = \prod_{i=1}^r M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^r \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^r$$

Logo, $X_1 + X_2 + \dots + X_r \sim \text{Gama}(r, \lambda)$

Exercício 4

a) Queremos $Z_n = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Vamos chamar de U_1, U_2, \dots, U_n as mesmas variáveis, só que ordenadas do menor para o maior. Logo, o que estamos procurando é $P(U_1 < z)$, que é $1 - P(U_1 \geq z)$. Então:

$$\begin{aligned} P(U_1 < z) &= 1 - P(X_1 \geq z, X_2 \geq z, \dots, X_n \geq z) = 1 - [(1 - F_{X_1}(z)) \cdot (1 - F_{X_2}(z)) \cdot \dots \cdot (1 - F_{X_n}(z))] \\ &= 1 - [(1 - (1 - e^{-\lambda_1 z})) \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda_2 z})) \cdot \dots \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda_n z}))] \\ &= 1 - [(e^{-\lambda_1 z}) \cdot (e^{-\lambda_2 z}) \cdot \dots \cdot (e^{-\lambda_n z})] = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)z} \end{aligned}$$

$Z_n \sim \text{Exponencial}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$

b) Para um X_k qualquer ser um mínimo, fazemos:

$$\begin{aligned} P(Z_n = X_k) &= \int_0^\infty P(Z_n = x_k | X_k = x_k) \cdot P(X_k = x_k) dx_k = \\ &= \int_0^\infty \frac{P(\bigcap_{i=0}^n X_i \geq x_k \cap X_k = x_k)}{P(X_k = x_k)} \cdot P(X_k = x_k) dx_k = \int_0^\infty P\left(\bigcap_{i=0}^n X_i \geq x_k \cap X_k = x_k\right) dx_k \\ &\stackrel{\text{ind.}}{=} \int_0^\infty \prod_{i \neq k} P(X_i \geq x_k) \cdot P(X_k = x_k) dx_k = \int_0^\infty \prod_{i \neq k} \left[\int_{x_k}^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i x_i} dx_i \right] \cdot (\lambda_k e^{-\lambda_k x_k}) dx_k \\ &= \int_0^\infty \prod_{i \neq k} [1 - e^{-\lambda_i x_i} \Big|_{x_k}^\infty] \cdot (\lambda_k e^{-\lambda_k x_k}) dx_k = \int_0^\infty \prod_{i \neq k} (e^{-\lambda_i x_k}) \cdot (\lambda_k e^{-\lambda_k x_k}) dx_k \\ &= \lambda_k \int_0^\infty e^{-\sum_{i=0}^n \lambda_i x_k} dx_k = -\lambda_k \frac{e^{-\sum_{i=0}^n \lambda_i x_k} \Big|_0^\infty}{\sum_{i=0}^n \lambda_i} = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \end{aligned}$$

Exercício 5

Sendo Y uma variável aleatória discreta:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} \cdot f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^u e^{ty} \cdot f_Y(y) \mathrm{d}y + \int_u^{+\infty} e^{ty} \cdot f_Y(y) \mathrm{d}y \\ &\geq \int_u^{+\infty} e^{ty} \cdot f_Y(y) \mathrm{d}y \geq \int_u^{+\infty} e^{tu} \cdot f_Y(y) \mathrm{d}y \\ &\geq e^{tu} \cdot \int_u^{+\infty} f_Y(y) \mathrm{d}y = e^{ut} \cdot P(Y > u) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{ut} \cdot P(Y > u) &\leq M_Y(t) \\ P(Y > u) &\leq e^{-ut} \cdot M_Y(t) \end{aligned}$$

□