Em todos os exercícios, definir o conjunto de estados S e desenhar a cadeia embutida para classificar os estados.

Processo de Poisson

Seja um processo $\{N((0,t]); t > 0\}$, temos que $P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k}{k!}$.

A distribuição Poisson é calculada como o limite da Binomial quando $n \to \infty$.

A notação utilizada é $N(t) = N((0,t])$ e $N((s,t]) = N((0,t]) - N((0,s]) = N(t) - N(s) = N(t-s)$.

Incrementos independentes: $P(N(s+t) - N(s) = k) = P(N(t) = k)$

Incrementos estacionários: $P(N(t) - N(s) = n-k) = P(N(t-s) = n-k)$

Instantes de ocorrência: Chamado de S_i e denota o tempo da i-ésima ocorrência. $S_i \sim \Gamma(i, \lambda)$

Tempos entre chegadas: $T_k = S_k - S_{k-1}$. $T_k \sim$ Exponencial(λ). Os T_i são independentes entre si.

Partição do processo de Poisson

Seja $N(t)$ um processo de Poisson(λ) em que seja possível classificar cada evento entre uma classe A ou B com prob. p e $1-p$.

Define-se dois processos de Poisson $A(t)$ e $B(t)$ com parâmetros λp e $\lambda(1-p)$, independentes.

Superposição dos processos: Sejam dois processos $N_1(t)$, com parâmetro λ_1 e $N_2(t)$, com parâmetro λ_2.

É possível fazer $N = N_1 + N_2$ com parâmetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Lembrar do caso do mercado com duas portas.

Propriedade Markoviana

$P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x_u, 0 <= u < s) = P(X(t+s) = j | X(s) = i) = p_{ij}(s, t+s) = p_{ij}(0,t) = p_{ij}(t)$

Tempo de permanência no estado: Deve satisfazer $P(T_i > s+t | T_i > s) = P(T_i > t)$, que é a propriedade da falta de memória.

A propriedade Markoviana induz a tempos de permanência exponenciais.

Processo de nascimento e morte

Estando no estado k, o processo só pode ir para $k-1$ e $k+1$. Fazendo N_k: o tempo de ocorrência de um nascimento se há k pessoas e M_k: o tempo de ocorrência de uma morte se há k pessoas, $N_k \sim$ Exponencial(λ_k) e $M_k \sim$ Exponencial(μ_k).

A transição ocorrerá após um tempo T_k. Esse tempo é o tempo de ocorrer o primeiro evento, ou seja, o mínimo entre N_k e M_k, logo: $T_k = \min\{N_k, M_k\} \to T_k \sim$ Exponencial($\lambda_k + \mu_k$).

A prob. de ir para $k-1$ é $P(N_k < M_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$ e de ir para $k+1$ é $P(N_k \geq M_k) = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$

O processo de Poisson(λ) é um processo Markoviano. Ele tem probabilidade = 1 de ir do estado k para o $k+1$. A taxa de morte é $\mu_n = 0$ e a de nascimento é $\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0$.

Equações de Chapman-Kolmogorov: $P(s+t) = P(s)P(t)$ (representação matricial)

Gerador infinitesimal: $P'_t = GP_t$. Lembrar que $P_t = e^{tG}$. Esse gerador nada mais é do que uma matriz com as taxas de transição instantâneas de um estado i para um estado j. As linhas têm que somar 0.

Cadeia embutida: É o diagrama de transição da cadeia, como se ela fosse em tempo discreto, com $q_{ii} = 0$ e soma das linhas igual a 1.

Não há periodiciade em tempo contínuo. O processo é irredutível sse a cadeia embutida é irredutível. Um estado é recorrente sse ele é recorrente para a cadeia embutida. Se o tempo médio de retorno ao estado i é finito, então o estado i é recorrente positivo.

Distribuição estacionária

$\pi = \pi P(t), \forall t \geq 0$ e $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$.

$\pi = \pi P(t)$ sse $\pi G = 0$

Se, em uma cadeia irredutível existe uma distribuição estacionária π ela é única e $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j, \forall i, j \in S$.

Se ela não existe, então o $p_{ij} \to 0$ quando $t \to \infty, \forall i, j \in S$.

Reversibilidade

Seja $X(t), t \geq 0$ uma cadeia de Markov em tempo contínuo, com gerador infinitesimal G com distribuição estacionária π.

Se existe um vetor α que satisfaz as equações de balanço detalhado: $\alpha_i g_{ij} = \alpha_j g_{ji}$, e $\sum_{k \in S} \alpha_k = 1$, o processo é reversível e $\alpha = \pi$ é a distribuição estacionária.

Nome:

Número USP: