Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 4 - MAE0228

Exercício 1

a) Vamos definir Y_i como o número de insetos gerados pelo i-ésimo ovo. Logo,

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Pode-se observar que $Y_i \sim$ Bernoulli(p). Sendo N a variável aleatória de distribuição Poisson(λ) que determina o número de ovos colocados pelo inseto-mãe, podemos definir X como uma partição da seguinte maneira:

$$X = \textstyle\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

b) Usando a definição, a função geradora de momentos de X é:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= G_N(M_{Y_i}(t)) = G_N(E(e^{tY_i})) = G_N(1-p+pe^t) = \\ &= E((1-p+pe^t)^N) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p+pe^t)^i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(1-p+pe^t)\cdot\lambda]^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{(1-p+pe^t)\cdot\lambda} = e^{\lambda p(e^t-1)} \end{aligned}$$

Logo, $X \sim$ Poisson(λp). Com isso, sabemos que a função geradora de probabilidade de X é $G_x(t) = e^{\lambda p(t-1)}$.

c) Para calcular $E(X)$ e $Var(X)$, vamos usar os momentos. Sabemos que $E(X^i)$, o i-ésimo momento da variável X, é a i-ésima derivada de $M_X(t)$ com relação a t. Com isso:

$$E(X) = M_x'(t)|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)})'|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)} \cdot \lambda pe^t)|_{t=0} = \lambda p$$

Agora, para a variância, precisamos de $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M_x''(t)|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)})''|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)} \cdot \lambda pe^t)'|_{t=0} = \\ &= (e^{\lambda p(e^t-1)} \cdot \lambda pe^t + e^{\lambda p(e^t-1)} \cdot \lambda pe^t \cdot \lambda pe^t)|_{t=0} = \lambda p + (\lambda p)^2 \end{aligned}$$

Portanto, $Var(X) = \lambda p + (\lambda p)^2 - (\lambda p)^2 = \lambda p$

Exercício 3

b) Sendo $X_1, X_2, ..., X_k$ variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim$ Binomial(n_i, p), teremos:

$$M_{X_1+...+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k}(1-p+p\cdot e^t)^{n_i} = (1-p+p\cdot e^t)^{\sum_{i=1}^{k} n_i} = (1-p+p\cdot e^t)^{n_1+n_2+...+n_k}$$

Logo, $X_1 + X_2 + ... + X_k \sim$ Binomial$(n_1 + n_2 + ... + n_k, p)$

d) Sendo $X_1, X_2, ..., X_r$ variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim$ Exponencial(λ), teremos:

$$M_{X_1+...+X_r}(t) = \prod_{i=1}^{r} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

Logo, $X_1 + X_2 + ... + X_r \sim$ Gama(r, λ)

Exercício 5

Sendo Y uma variável aleatória discreta:

$$\begin{aligned}
M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y &= \int_{-\infty}^{u} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_{u}^{+\infty} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&\geq \int_{u}^{+\infty} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \geq \int_{u}^{+\infty} e^{tu}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&\geq e^{tu}\cdot \int_{u}^{+\infty} f_Y(y)\mathrm{d}y = e^{ut}\cdot P(Y > u)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{ut}\cdot P(Y > u) \leq M_Y(t)$$
$$P(Y > u) \leq e^{-ut}\cdot M_Y(t)$$

□