**Nome**: Luís Felipe de Melo Costa Silva
**Número USP**: 9297961

# Lista de Exercícios 3 - MAE0228

## Exercício 2

Para esse exercício, vamos considerar:

- $T_A$ como o tempo de atendimento de $A$.
- $T_B$ como o tempo de atendimento de $B$.
- $T_C$ como o tempo de atendimento de $C$.

**a)** Queremos calcular $P(T_A > T_B + T_C)$. Aqui, os tempos são determinísticos, então, $T_A = T_B = T_C = 5$. Logo, $P(T_A > T_B + T_C) = P(5 > 10) = 0$.

**b)** Vamos calcular a distribuição de $T_B + T_C = T_{B+C}$. O valor de $T_B$ está nas linhas, e o de $T_C$, nas colunas. Os valores do interior são os possíveis para $T_{B+C}$.

| $T_B + T_C$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 4 | 5 | 6 |

Logo, assumindo independência entre $T_A$, $T_B$ e $T_C$ (já que o tempo de cada caixa é regido por uma variável aleatória, e portanto, o tempo de atendimento de cada cliente será um valor):

$$
\begin{aligned}
P(T_A > T_{B+C}) &= \sum_{T_A=1}^{3} \sum_{T_{B+C}=1}^{T_A-1} P(T_A) \cdot P(T_{B+C}) = \\
&= P(T_A = 2) \cdot P(T_{B+C} = 1) + P(T_A = 3) \cdot P(T_{B+C} = 1) + P(T_A = 3) \cdot P(T_{B+C} = 2) = \\
&= P(T_A = 3) \cdot P(T_{B+C} = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}
\end{aligned}
$$

**c)** Fazendo $T_A = W$, $T_B = X$, $T_C = Y$, $T_B + T_C = T_{B+C} = Z$, vamos achar a distribuição de Z, sabendo que $f_x(x) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot x}$ e que $f_y(y) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot y}$.

$$
\begin{aligned}
F_z(z) &= \int_0^z \int_0^{z-y} \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^z \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} \cdot \left[-e^{-\mu \cdot x}\right]_0^{z-y} \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^z \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} \cdot \left[1 - e^{-\mu(z-y)}\right] \mathrm{d}y = \int_0^z \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} - \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} \mathrm{d}y = \\
&= \left[-e^{-\mu \cdot y} - y \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z}\right]_0^z = -e^{-\mu \cdot z} - z \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} - (-1 - 0 \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z}) = \\
&= 1 - e^{-\mu \cdot z} - z \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$f_z(z) = F_z'(z) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} - \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} + z \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z} = z \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z} = \frac{z^{2-1} \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z}}{\Gamma(2)}$$

Logo, $Z \sim$ Gama$(2, \mu)$. Agora, vamos calcular $P(W > Z)$, assumindo independência, assim como no exercício anterior, entre $W$ e $Z$:

$$\begin{aligned}
P(W > Z) &= \int_0^\infty \int_0^w f_w(w) \cdot f_z(z) \mathrm{d}z \mathrm{d}w = \int_0^\infty \int_0^w \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot z \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z} \mathrm{d}z \mathrm{d}w = \\
&= \int_0^\infty \int_0^w \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot f_z(z) \mathrm{d}z \mathrm{d}w = \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot \int_0^w f_z(z) \mathrm{d}z \mathrm{d}w = \\
&= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot F_z(w) \mathrm{d}w = \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot [1 - e^{-\mu \cdot w} - w \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot w}] \mathrm{d}w = \\
&= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \mathrm{d}w - \int_0^\infty \mu \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w} \mathrm{d}w - \int_0^\infty w \cdot \mu^2 \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w} \mathrm{d}w = \\
&= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \mathrm{d}w - \frac{1}{2} \int_0^\infty 2 \cdot \mu \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w} \mathrm{d}w - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{w \cdot 4 \cdot \mu^2 \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w}}{\Gamma(2)} \mathrm{d}w = \\
&= 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

# Exercício 5

**a)** Na $i$-ésima iteração, a probabilidade de o número analisado ser o maior do conjunto é de $\frac{1}{i}$, pois, com $i$ números, apenas 1 deles é o maior.

**b)** A linha $5$ só pode ser executada $0$ ou $1$ vez. Ela será executada quando o número analisado for o maior do conjunto, ou seja, $P(X_i = 1) = \frac{1}{i}$, e, portanto, $P(X_i = 0) = \frac{i-1}{i}$. Logo, $X_i \sim Bernoulli(\frac{1}{i})$ e:

$$E(X_i) = \sum_{k=0}^{1} k \cdot P(X = k) = 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) = P(X = 1) = \tfrac{1}{i}$$

**c)** Para que $X_i$ seja independente de $X_j$, $P(X_j | X_i) = P(X_j)$.

Vamos analisar $P(X_j | X_i)$. Seja $i < j$. $P(X_j | X_i)$ é a probabilidade de o $j$-ésimo número ser o maior no conjunto de $j$ números dado que o $i$-ésimo número era o maior do conjunto de $i$ números. Portanto, isso é a probabilidade de o $j$-ésimo ser o maior no conjunto de números entre as posições $i$ e $j$, ($i$ e $j$ incluídos). Como existem $j - i + 1$ números nesse conjunto, então, $P(X_j | X_i) = \frac{1}{j-i+1} \neq P(X_j) = \frac{1}{j}$.

Como pode-se ver, os $X_i$ não são independentes. A distribuição deles é a mesma (Bernoulli). No entanto, o parâmetro é diferente para cada variável, o que mostra que elas não são identicamente distribuídas.

**d)** Calculando a $E(T)$:

$$
\begin{aligned}
E(T) = E\left(\sum_{i=0}^{n} X_i\right) = \sum_{i=0}^{n} E(X_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i} = \\
= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n
\end{aligned}
$$

Portanto, $E(T) = \mathcal{O}(\log n)$.

# Exercício 6

**b)** Sabendo, do item anterior, que $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$ e que $X$ e $Y$ são independentes, teremos:

$$
\begin{aligned}
P(X|X+Y=n) &= \frac{P(X=x, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=x, Y=n-x)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=x)\cdot P(Y=n-x)}{P(X+Y=n)} = \\
&= \left[\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}\cdot\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{n-x}}{(n-x)!}\right]\cdot\frac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)}\cdot(\lambda+\mu)^n} = \\
&= \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{e^{-(\lambda+\mu)}}\cdot\frac{\lambda^x\cdot\mu^{n-x}}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{x}\frac{\lambda^x}{(\lambda+\mu)^x}\cdot\frac{\mu^{n-x}}{(\lambda+\mu)^{n-x}} = \\
&= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x\cdot\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-x} \sim Binomial\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

# Exercício 8

Acatando a sugestão do enunciado, vamos particionar $X$ como $X = A + B + C$, onde:

- $A$ é o número de retiradas até o primeiro cupom do primeiro tipo.
- $B$ é o número de retiradas a partir do cupom de primeiro tipo até o primeiro cupom de um tipo diferente.
- $C$ é o número de retiradas a partir do momento em que temos dois cupons de tipos diferentes até o primeiro cupom do terceiro tipo.

As retiradas são feitas com reposição. Então, teremos as seguintes definições para cada uma das variáveis aleatórias acima:

- $A \sim$ Geométrica(1). $E(A) = \frac{1}{1} = 1$ e $Var(A) = \frac{1-1}{1^2} = 0$
- $B \sim$ Geométrica$\left(\frac{9}{10}\right)$. $E(B) = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1.\overline{1}$ e $Var(B) = \frac{1-\frac{9}{10}}{(\frac{9}{10})^2} \cong 0.12346$

- $C \sim$ Geométrica$\left(\frac{8}{10}\right)$. $E(C) = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8} = 1.25$ e $Var(C) = \frac{1-\frac{8}{10}}{(\frac{8}{10})^2} = 0.3125$

É importante notar que $A$, $B$ e $C$ são **independentes** umas das outras. Como as retiradas são feitas **com reposição**, um evento não interfere no seu sucessor. Quando fazemos as $A$ retiradas para o cupom do primeiro tipo, começaremos as $B$ retiradas para o cupom do segundo tipo, que será um novo experimento independente do anterior, com probabilidade diferente. Para o terceiro tipo de cupom, vale o mesmo raciocínio. Logo:

- $E(X) = E(A + B + C) = E(A) + E(B) + E(C) = 3.36\overline{1}$
- $Var(X) = Var(A + B + C) = Var(A) + Var(B) + Var(C) \cong 0.43596$