Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 2 - MAE0228

Exercício 2

a) Sabendo que $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$, pode-se fazer:

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) \cdot f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ax \cdot f(x) + b \cdot f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ax \cdot f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot f(x)dx \\
&= a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx + b \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\
&= a \cdot E(X) + b
\end{aligned}$$

$\square$

b) Usando a propriedade $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$ e o resultado do item **a**:

$$\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E[(aX+b)^2] - E^2(aX+b) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (a^2x^2 + 2abx + b^2) \cdot f(x)dx - [\int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) \cdot f(x)dx]^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a^2x^2 \cdot f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2abx \cdot f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} b^2 \cdot f(x)dx - [a \cdot E(X) + b]^2 \\
&= a^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx + 2ab \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx + b^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - [a \cdot E(X) + b]^2 \\
&= a^2 \cdot E(X^2) + 2ab \cdot E(X) + b^2 - a^2 \cdot E^2(X) - 2ab \cdot E(X) - b^2 \\
&= a^2 \cdot [E(X^2) - E^2(X)] = a^2 \cdot Var(X)
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 3

Do enunciado temos que $\lambda = 0.5$ defeito por quilômetro.

a) Para um rolo de 3000 m (3 km), esperamos que existam 1.5 defeitos. Portanto, $\lambda = 1.5$. A probabilidade de algum defeito é a probabilidade do número de defeitos ser maior do que zero.

$$P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \tfrac{e^{-1.5} \cdot 1.5^0}{0!} \cong 1 - 0.2231 = 0.7769$$

b) Analogamente ao item anterior, em um rolo de 6 km esperamos 3 defeitos. Portanto, $\lambda = 3$. Queremos a probabilidade de mais de um defeito:

$$\begin{aligned} P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 1) - P(X = 0) = \\ = 1 - \frac{e^{-3} \cdot 3^1}{1!} - \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} \cong 1 - 0.1493 - 0.0497 = 0.801 \end{aligned}$$

Exercício 6

Pelo enunciado, é possível inferir que X é uma variável aleatória que segue o modelo de distribuição *Geométrico* (por definição, o caso especial da *Bernoulli* com um sucesso). Portanto,

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

Vamos calcular $E(X)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) + \sum_{k=2}^{\infty} P(X = k) + \sum_{k=3}^{\infty} P(X = k) + ... \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p + \sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p + \sum_{k=3}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p + ... \\ &= p \cdot [\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (1-p)^{k-1} + \sum_{k=3}^{\infty} (1-p)^{k-1} + ...] \\ &= p \cdot [\frac{1}{1-(1-p)} + \frac{1-p}{1-(1-p)} + \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} + ...] \\ &= p \cdot [\frac{1}{p} + \frac{1-p}{p} + \frac{(1-p)^2}{p} + ...] \\ &= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Exercício 8

$E(\frac{1}{X+1})$ será calculada usando a definição de esperança para variáveis aleatórias discretas, como é no caso da Poisson. Logo:

$$
\begin{aligned}
E(\frac{1}{X+1}) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x+1} \cdot P(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{(x+1)!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!} = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x+1}}{(x+1)!} \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{y}}{y!} \text{ , onde } y = x+1 \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot [1 - P(Y=0)] \text{ , onde Y}\sim\text{Poisson}(\lambda) \\
&= \frac{1}{\lambda} \cdot (1 - e^{-\lambda}) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}
$$