

Lista de Exercícios 3 - MAE0228

Exercício 2

Para esse exercício, vamos considerar:

- T_A como o tempo de atendimento de A .
- T_B como o tempo de atendimento de B .
- T_C como o tempo de atendimento de C .

a) Queremos calcular $P(T_A > T_B + T_C)$. Aqui, os tempos são determinísticos, então, $T_A = T_B = T_C = 5$. Logo, $P(T_A > T_B + T_C) = P(5 > 10) = 0$.

b) Vamos calcular a distribuição de $T_B + T_C = T_{B+C}$. O valor de T_B está nas linhas, e o de T_C , nas colunas. Os valores do interior são os possíveis para T_{B+C} .

$T_B + T_C$	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

Logo, assumindo independência entre T_A , T_B e T_C (já que o tempo de cada caixa é regido por uma variável aleatória, e portanto, o tempo de atendimento de cada cliente será um valor):

$$\begin{aligned} P(T_A > T_{B+C}) &= \sum_{T_A=1}^3 \sum_{T_{B+C}=1}^{T_A-1} P(T_A) \cdot P(T_{B+C}) = \\ &= P(T_A = 2) \cdot P(T_{B+C} = 1) + P(T_A = 3) \cdot P(T_{B+C} = 1) + P(T_A = 3) \cdot P(T_{B+C} = 2) = \\ &= P(T_A = 3) \cdot P(T_{B+C} = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

c) Fazendo $T_A = W$, $T_B = X$, $T_C = Y$, $T_B + T_C = T_{B+C} = Z$, vamos achar a distribuição de Z , sabendo que $f_x(x) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot x}$ e que $f_y(y) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot y}$.

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \int_0^z \int_0^{z-y} \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} dx dy = \int_0^z \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} \cdot [-e^{-\mu \cdot x}]_0^{z-y} dy = \\ &= \int_0^z \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} \cdot [1 - e^{-\mu(z-y)}] dy = \int_0^z \mu \cdot e^{-\mu \cdot y} - \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} dy = \\ &= [-e^{-\mu \cdot y} - y \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z}]_0^z = -e^{-\mu \cdot z} - z \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} - (-1 - 0 \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z}) = \\ &= 1 - e^{-\mu \cdot z} - z \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} \end{aligned}$$

Portanto,

$$f_z(z) = F'_z(z) = \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} - \mu \cdot e^{-\mu \cdot z} + z \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z} = z \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z} = \frac{z^{2-1} \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z}}{\Gamma(2)}$$

Logo, $Z \sim \text{Gama}(2, \mu)$. Agora, vamos calcular $P(W > Z)$, assumindo independência, assim como no exercício anterior, entre W e Z :

$$\begin{aligned} P(W > Z) &= \int_0^\infty \int_0^w f_w(w) \cdot f_z(z) dz dw = \int_0^\infty \int_0^w \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot z \cdot \mu^2 \cdot e^{-\mu \cdot z} dz dw = \\ &= \int_0^\infty \int_0^w \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot f_z(z) dz dw = \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot \int_0^w f_z(z) dz dw = \\ &= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot F_z(w) dw = \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} \cdot [1 - e^{-\mu \cdot w} - w \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot w}] dw = \\ &= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} dw - \int_0^\infty \mu \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w} dw - \int_0^\infty w \cdot \mu^2 \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w} dw = \\ &= \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot w} dw - \frac{1}{2} \int_0^\infty 2 \cdot \mu \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w} dw - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{w \cdot 4 \cdot \mu^2 \cdot e^{-2 \cdot \mu \cdot w}}{\Gamma(2)} dw = \\ &= 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercício 6

b) Sabendo, do item anterior, que $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$ e que X e Y são independentes, teremos:

$$\begin{aligned} P(X|X + Y = n) &= \frac{P(X = x, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = x, Y = n - x)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = x) \cdot P(Y = n - x)}{P(X + Y = n)} = \\ &= \left[\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^{n-x}}{(n-x)!} \right] \cdot \frac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda + \mu)^n} = \\ &= \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{e^{-(\lambda+\mu)}} \cdot \frac{\lambda^x \cdot \mu^{n-x}}{(\lambda + \mu)^n} = \binom{n}{x} \frac{\lambda^x}{(\lambda + \mu)^x} \cdot \frac{\mu^{n-x}}{(\lambda + \mu)^{n-x}} = \\ &= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^x \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-x} \sim \text{Binomial} \left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right) \end{aligned}$$

□

Exercício 8

Acatando a sugestão do enunciado, vamos particionar X como $X = A + B + C$, onde:

- A é o número de retiradas até o primeiro cupom do primeiro tipo.
- B é o número de retiradas até o primeiro cupom de tipo diferente do anterior.
- C é o número de retiradas até o primeiro cupom de tipo diferente dos anteriores.

As retiradas são feitas com reposição. Então, teremos as seguintes definições para cada uma das variáveis aleatórias acima:

- $A \sim \text{Geométrica}(1)$. $E(A) = \frac{1}{1} = 1$ e $Var(A) = \frac{1-1}{1^2} = 0$
- $B \sim \text{Geométrica}(\frac{9}{10})$. $E(B) = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1.\bar{1}$ e $Var(B) = \frac{1-\frac{9}{10}}{(\frac{9}{10})^2} \cong 0.12346$
- $C \sim \text{Geométrica}(\frac{8}{10})$. $E(C) = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8} = 1.25$ e $Var(C) = \frac{1-\frac{8}{10}}{(\frac{8}{10})^2} = 0.3125$

É importante notar que A , B e C são **independentes** umas das outras. Como as retiradas são feitas **com reposição**, um evento não interfere no seu sucessor. Quando fazemos as A retiradas para o cupom do primeiro tipo, começaremos as B retiradas para o cupom do segundo tipo, que será um novo experimento independente do anterior, com probabilidade diferente. Para o terceiro tipo de cupom, vale o mesmo raciocínio. Logo:

- $E(X) = E(A + B + C) = E(A) + E(B) + E(C) = 3.36\bar{1}$
- $Var(X) = Var(A + B + C) = Var(A) + Var(B) + Var(C) \cong 0.43596$