Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 1 - MAE0228

Exercício 3

a) Neste caso, cada chave possui a mesma probabilidade P de abrir a porta. Como os testes ocorrem sucessivamente, ou seja, sem reposição, a distribuição aqui é a *Uniforme Discreta*. Logo, $P(X = k) = \frac{1}{n}$, que é a probabilidade de a porta ser aberta na k-ésima tentativa, onde X é a nossa variável aleatória ($X = 1, 2, ..., n$).

b) Aqui, a probabilidade de cada chave abrir é a mesma. O que mudou foi o experimento. Agora, com a amostragem sem reposição, são feitas várias tentativas até o primeiro sucesso. Então, abrir a porta na k-ésima tentativa significa que ocorreram $k - 1$ falhas e então, o sucesso. A distribuição aqui é a *Geométrica*. Portanto, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, onde $p = \frac{1}{n}$ é a probabilidade de uma chave abrir a porta e $k = 1, 2, ...$ é o número de tentativas.

Exercício 4

Deseja-se saber se, num grupo com 4 macacos capturados entre 20, existem 2 macacos marcados (e outros 2 não marcados). Do grupo de 20, 5 foram marcados e 15 não. Assim:

- Espaço amostral (4 macacos marcados entre 20): $\binom{20}{4}$
- 2 macacos marcados entre 5: $\binom{5}{2}$
- 2 macacos não marcados entre 15: $\binom{15}{2}$

Portanto, $P(\text{X=2}) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2}}{\binom{20}{4}} \cong 0.2167$

Como pode-se ver, foi suposto que a população de macacos pode ser descrita por uma variável aleatória que segue o modelo Hipergeométrico descrito abaixo:

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \cdot \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \text{ com:}$$

- $k = 2$;
- $r = 5$;
- $N = 20$;
- $n = 4$.

Exercício 7

a) Os dois casos são análogos. Sabemos que:

- $P(B^c \mid A)$ é a probabilidade de o dígito 0 ser recebido dado que o dígito 1 foi enviado;
- $P(B \mid A^c)$ é a probabilidade de o dígito 1 ser recebido dado que o dígito 0 foi enviado.

Essas probabilidades indicam a probabilidade de haver uma falha na comunicação, devido ao ruído, no lado da recepção.

b) Para essas probabilidades serem calculadas, é necessário calcular algumas outras para auxiliar nos cálculos. Sabendo que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$:

- $P(B^c \cap A) = P(B^c \mid A) \cdot P(A) = 0.01 \cdot 0.5 = 0.005$
- $P(B \cap A^c) = P(B \mid A^c) \cdot P(A^c) = P(B \mid A^c) \cdot [1 - P(A)] = 0.01 \cdot 0.5 = 0.005$
- $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(A^c \cap B) + [P(A) - P(B^c \cap A)] = 0.005 + 0.5 - 0.005 = 0.5$

Portanto, vamos calcular:

- $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.005}{0.5} = 0.99$
- $P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.005}{0.5} = 0.01$
- $P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{0.005}{0.5} = 0.01$
- $P(A^c \mid B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{P(B^c) - P(A \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(B) - P(A \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{0.5 - 0.005}{0.5} = 0.99$

Exercício 10

a) Depois da simulação, saíram as seguintes tabelas:

Para $N = 5$:

X	pareamentos
0	33
1	40
2	19
3	7
5	1

Para $N = 20$:

X	pareamentos
0	37
1	38
2	15
3	7
4	2
6	1

Para demais valores de X não expressos, não houve pareamentos.

b) Aqui, a probabilidade de pelo menos um pareamento quer dizer: um pareamento, ou dois pareamentos, e por aí vai. Portanto, será calculada $\sum_{k=1}^{N} P(X = k)$. Logo:

- Para $N = 5$: $\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = 0.4 + 0.19 + 0.07 + 0.01 = 0.67$
- Para $N = 20$: $\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = 0.38 + 0.15 + 0.07 + 0.02 + 0.01 = 0.63$

Nesse exercício foi usado o princípio da inclusão-exclusão. No entanto, minha simulação considerou eventos disjuntos A_i (A_i significa i pareamentos). Como não existem intersecções, já que cada evento considera exatamente i pareamentos, foi usada a seguinte fórmula para a probabilidade $P(\bigcup_{i=1}^{N} A_i) = \sum_{k=1}^{N} P(A_i)$

c) Como nossa variável X é discreta, a fórmula da esperança que será usada aqui será:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{N} X_i \cdot P(X_i), \text{ logo:}$$

- Para $N = 5$: $\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = 0 \cdot 0.33 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.19 + 3 \cdot 0.07 + 5 \cdot 0.01 = 1.04$
- Para $N = 20$: $\sum_{k=1}^{N} P(X = k) = 0 \cdot 0.37 + 1 \cdot 0.38 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.07 + 4 \cdot 0.02 + 6 \cdot 0.01 = 0.99$