Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 8 - MAE0228

Exercício 4

a) $\{X_t; t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov em tempo contínuo porque pode ser modelada como um processo de nascimento e morte, possuindo assim a propriedade Markoviana. Sua taxa de nascimento é $\lambda_i = \lambda$, para $i = 0, 1, 2, ...$ e a taxa de morte é $\mu_i = \mu$, para $i = 1, 2, 3, ...$ O espaço de estados é $S = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e seu gerador infinitesimal G é:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

b) Para calcularmos a distribuição estacionária, vamos fazer $\pi G = 0$:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \rightarrow \pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0 \\ \vdots \\ \lambda\pi_{k-2} - (\lambda+\mu)\pi_{k-1} + \mu\pi_k = 0 \rightarrow \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 \\ \vdots \end{cases}$$

Como $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, temos que $\pi_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1$. A soma $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ só converge quando $\lambda < \mu$. Quando isso acontece, a soma é finita, e existe a distribuição estacionária.

Exercício 7

a) Neste exercício, o espaço de estados é $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Vamos encontrar o gerador infinitesimal desse sistema. Note que a taxa para ir do estado 2 para o estado 1 é 2μ porque ela vem de uma Exponencial que distribui o tempo mínimo entre o atendimento dos dois caixas.

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores da matriz por $\lambda = 3$ clientes por hora e $\mu = 2$ clientes por hora, teremos:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a fração de clientes que entram no sistema, devemos somar a proporção de tempo que o sistema não fica no terceiro estado, que é quando ele está lotado. Usando as equações de Balanço Global:

$$\begin{cases} -3\pi_0 + 2\pi_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_0 \\ 3\pi_0 - 5\pi_1 + 4\pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \frac{9}{8}\pi_0 \\ 3\pi_1 - 7\pi_2 + 4\pi_3 = 0 \rightarrow \pi_3 = \frac{27}{32}\pi_0 \end{cases}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \rightarrow \pi_0 + \frac{3}{2}\pi_0 + \frac{9}{8}\pi_0 + \frac{27}{32}\pi_0 = 1 \rightarrow \pi_0 = \frac{32}{143}$$

Logo, a proporção de clientes que consegue entrar no sistema é $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \frac{32}{143} + \frac{9}{8} \cdot \frac{32}{143} + \frac{27}{32} \cdot \frac{32}{143} = \frac{116}{143}$.

b) Com a nova taxa de atendimento $\mu = 4$ clientes por hora, o sistema consegue atender mais clientes do que chegam. Neste item não precisamos calcular o mínimo entre o atendimento dos dois caixas porque $\lambda < \mu$. A matriz G fica:

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Analogamente ao item anterior:

$$\begin{cases} -3\pi_0 + 4\pi_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_0 \\ 3\pi_0 - 7\pi_1 + 4\pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \frac{9}{16}\pi_0 \\ 3\pi_1 - 7\pi_2 + 4\pi_3 = 0 \rightarrow \pi_3 = \frac{27}{64}\pi_0 \end{cases}$$

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1 \rightarrow \pi_0 + \frac{3}{4}\pi_0 + \frac{9}{16}\pi_0 + \frac{27}{64}\pi_0 = 1 \rightarrow \pi_0 = \frac{64}{175}$$

Logo, a proporção de clientes que consegue entrar no sistema é $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \frac{64}{175} + \frac{3}{4} \cdot \frac{64}{175} + \frac{9}{16} \cdot \frac{64}{175} = \frac{148}{175}$.

Exercício 8

a) Pelo enunciado, é possível particionar o processo de entrada no sistema, focando nos clientes que ficam. Os clientes entram no sistema com uma taxa $\lambda\alpha_n$, que é a taxa de nascimento. A taxa de morte é μ. O espaço de estados é $S = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. O gerador infinitesimal será:

$$
G = \begin{bmatrix}
-\lambda\alpha_0 & \lambda\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\mu & -(\lambda\alpha_1+\mu) & \lambda\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \mu & -(\lambda\alpha_2+\mu) & \lambda\alpha_2 & 0 & 0 & \dots \\
0 & 0 & \mu & -(\lambda\alpha_3+\mu) & \lambda\alpha_3 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
$$

b) Montando as equações de Balanço Global:

$$
\begin{cases}
-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\alpha_0\pi_0 \\
\lambda\alpha_1\pi_0 - (\lambda\alpha_1+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \alpha_0\alpha_1\pi_0 \\
\lambda\alpha_2\pi_1 - (\lambda\alpha_2+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \rightarrow \pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \alpha_0\alpha_1\alpha_2\pi_0 \\
\vdots \\
\lambda\alpha_{k-1}\pi_{k-2} - (\lambda\alpha_{k-1}+\mu)\pi_{k-1} + \mu\pi_k = 0 \rightarrow \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left[\prod_{i=0}^{k-1}\alpha_i\right]\pi_0 \\
\vdots
\end{cases}
$$

Como $\sum_{i\in S}\pi_i = 1$, temos que $\pi_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left[\prod_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right]\pi_0\right] = 1$. Já que $\alpha_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, e supondo que $\lambda < \mu$, a soma converge e a distribuição estacionária existe.

c) Quando $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, temos que $\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{n!}\cdot\pi_0$. Como $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}} = \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{\mu}}} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$, $\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}\cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}$, e, portanto, a distribuição estacionária é uma Poisson$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Exercício 10

a) Para modelar essa situação como um processo de nascimento e morte, temos que levar em conta dois casos: quando $n < N$ e quando $n \geq N$. No primeiro caso a imigração é permitida, então a taxa de nascimento é a taxa da população aumentar, e isso acontece quando alguém nasce ou imigra. No segundo caso, a imigração é restrita, logo, a taxa de nascimento não leva esse processo em conta. Para ficar mais claro, vamos analisar o gerador infinitesimal desse processo:

$$
G = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\mu & -(\lambda+\theta+\mu) & \lambda+\theta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \mu & -(\lambda+\theta+\mu) & \lambda+\theta & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots
\end{bmatrix}
$$