Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 8 - MAE0228

Exercício 4

a) $\{X_t; t \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov em tempo contínuo porque pode ser modelada como um processo de nascimento e morte. Sua taxa de nascimento é $\lambda_i = \lambda$, para $i = 0, 1, 2, ...$ e a taxa de morte é $\mu_i = \mu$, para $i = 1, 2, 3, ...$. O espaço de estados é $S = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ e seu gerador infinitesimal G é:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & ... \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

b) Para calcularmos a distribuição estacionária, vamos fazer $\pi G = 0$:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \to \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \to \pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \to \pi_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \pi_0 \\ \vdots \\ \lambda\pi_{k-2} - (\lambda+\mu)\pi_{k-1} + \mu\pi_k = 0 \to \pi_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 \\ \vdots \end{cases}$$

Como $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$, temos que $\pi_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right) = 1$. A soma $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$ só converge quando $\lambda < \mu$. Quando isso acontece, a soma é finita, e existe a distribuição estacionária.

Exercício 7

Exercício 8

Exercício 10