Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 4 - MAE0228

Exercício 1

a) Vamos definir Y_i como o número de insetos gerados pelo i-ésimo ovo. Logo,

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Pode-se observar que $Y_i \sim$ Bernoulli(p). Sendo N a variável aleatória de distribuição Poisson(λ) que determina o número de ovos colocados pelo inseto-mãe, podemos definir X como uma partição da seguinte maneira:

$$X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

b) Usando a definição, a função geradora de momentos de X é:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= G_N(M_{Y_i}(t)) = G_N(E(e^{tY_i})) = G_N(1-p+pe^t) = \\ &= E((1-p+pe^t)^N) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p+pe^t)^i \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[(1-p+pe^t)\cdot\lambda]^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{(1-p+pe^t)\cdot\lambda} = e^{\lambda p(e^t-1)} \end{aligned}$$

Logo, $X \sim$ Poisson(λp). Com isso, sabemos que a função geradora de probabilidade de X é $G_x(t) = e^{\lambda p(t-1)}$.

c) Para calcular $E(X)$ e $Var(X)$, vamos usar os momentos. Sabemos que $E(X^i)$, o i-ésimo momento da variável X, é a i-ésima derivada de $M_X(t)$ com relação a t. Com isso:

$$E(X) = M_x'(t)|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)})'|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)}\cdot\lambda pe^t)|_{t=0} = \lambda p$$

Agora, para a variância, precisamos de $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= M_x''(t)|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)})''|_{t=0} = (e^{\lambda p(e^t-1)}\cdot\lambda pe^t)'|_{t=0} = \\ &= (e^{\lambda p(e^t-1)}\cdot\lambda pe^t + e^{\lambda p(e^t-1)}\cdot\lambda pe^t\cdot\lambda pe^t)|_{t=0} = \lambda p + (\lambda p)^2 \end{aligned}$$

Portanto, $Var(X) = \lambda p + (\lambda p)^2 - (\lambda p)^2 = \lambda p$

Exercício 3

b) Sendo $X_1, X_2, ..., X_k$ variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim$ Binomial(n_i, p), teremos:

$$M_{X_1+...+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k}(1-p+p\cdot e^t)^{n_i} = (1-p+p\cdot e^t)^{\sum_{i=1}^{k} n_i} = (1-p+p\cdot e^t)^{n_1+n_2+...+n_k}$$

Logo, $X_1 + X_2 + ... + X_k \sim$ Binomial$(n_1 + n_2 + ... + n_k, p)$

d) Sendo $X_1, X_2, ..., X_r$ variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim$ Exponencial(λ), teremos:

$$M_{X_1+...+X_r}(t) = \prod_{i=1}^{r} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

Logo, $X_1 + X_2 + ... + X_r \sim$ Gama(r, λ)

Exercício 4

a) Queremos $Z_n = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Vamos chamar de $U_1, U_2, ..., U_n$ as mesmas variáveis, só que ordenadas do menor para o maior. Logo, o que estamos procurando é $P(U_1 < z)$, que é $1 - P(U_1 \geq z)$. Então:

$$\begin{aligned}
P(U_1 < z) &= 1 - P(X_1 \geq z, X_2 \geq z, ..., X_n \geq z) = 1 - [(1 - F_{X_1}(z)) \cdot (1 - F_{X_2}(z)) \cdot ... \cdot (1 - F_{X_n}(z))] \\
&= 1 - \left[(1 - (1 - e^{-\lambda_1 z})) \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda_2 z})) \cdot ... \cdot (1 - (1 - e^{-\lambda_n z}))\right] \\
&= 1 - \left[(e^{-\lambda_1 z}) \cdot (e^{-\lambda_2 z}) \cdot ... \cdot (e^{-\lambda_n z})\right] = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)z}
\end{aligned}$$

$Z_n \sim$ Exponencial$(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)$

b) Para um X_k qualquer ser um mínimo, fazemos:

$$\begin{aligned}
P(Z_n = X_k) &= \int_0^\infty P(Z_n = x_k | X_k = x_k) \cdot P(X_k = x_k) \mathrm{d}x_k = \\
&= \int_0^\infty \frac{P(\bigcap_{i=0}^n Xi \geq x_k \bigcap X_k = x_k)}{P(X_k = x_k)} \cdot P(X_k = x_k) \mathrm{d}x_k = \int_0^\infty P\left(\bigcap_{i=0}^n Xi \geq x_k \bigcap X_k = x_k\right) \mathrm{d}x_k \\
&\overset{ind.}{=} \int_0^\infty \prod_{i \neq k} P(Xi \geq x_k) \cdot P(X_k = x_k) \mathrm{d}x_k = \int_0^\infty \prod_{i \neq k} \left[\int_{x_k}^\infty \lambda_i e^{-\lambda_i x_i} \mathrm{d}x_i\right] \cdot (\lambda_k e^{-\lambda_k x_k}) \mathrm{d}x_k \\
&= \int_0^\infty \prod_{i \neq k} [1 - e^{-\lambda_i x_i}|_{x_k}^\infty] \cdot (\lambda_k e^{-\lambda_k x_k}) \mathrm{d}x_k = \int_0^\infty \prod_{i \neq k} (e^{-\lambda_i x_k}) \cdot (\lambda_k e^{-\lambda_k x_k}) \mathrm{d}x_k \\
&= \lambda_k \int_0^\infty e^{-\sum_{i=0}^n \lambda_i x_k} \mathrm{d}x_k = -\lambda_k \frac{e^{\sum_{i=0}^n \lambda_i x_k}|_0^\infty}{\sum_{i=0}^n \lambda_i} = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n}
\end{aligned}$$

Exercício 5

Sendo Y uma variável aleatória contínua:

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) = E(e^{tY}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty} \cdot f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{u} e^{ty} \cdot f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_{u}^{+\infty} e^{ty} \cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&\geq \int_{u}^{+\infty} e^{ty} \cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \geq \int_{u}^{+\infty} e^{tu} \cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&\geq e^{tu} \cdot \int_{u}^{+\infty} f_Y(y)\mathrm{d}y = e^{ut} \cdot P(Y > u)
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{gathered}
e^{ut} \cdot P(Y > u) \leq M_Y(t) \\
P(Y > u) \leq e^{-ut} \cdot M_Y(t)
\end{gathered}
$$

$\square$