Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 7 - MAE0228

Exercício 2

Vamos definir: $A = \{A_t; t \geq 0\}$ como o número de fregueses que entram pela porta A até o instante t.
$B = \{B_t; t \geq 0\}$ como o número de fregueses que entram pela porta B até o instante t.

a) De acordo com a definição acima, $X_t = A_t + B_t$. Vamos mostrar, usando Funções Geradoras de Momentos, que X_t é um Processo de Poisson.

$$M_{X_t}(s) = M_{A_t+B_t}(s) \overset{ind.}{=} M_{A_t}(s) \cdot M_{B_t}(s) = e^{15\cdot(e^s-1)} \cdot e^{10\cdot(e^s-1)} = e^{25\cdot(e^s-1)}$$

Pela unicidade das Funções Geradoras de Momentos, temos que X_t é um Processo de Poisson com taxa média (parâmetro) de 25 fregueses por minuto.

b) O instante em que o primeiro freguês entra por A é $T_1 \sim \Gamma(1, 15) \sim \text{Exponencial}(15)$. Para B, esse instante é dado por $V_1 \sim \Gamma(1, 10) \sim \text{Exponencial}(10)$. Seja $Y = \min(T_1, V_1)$, teremos:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(T_1 > y, V_1 > y) \overset{ind.}{=} 1 - P(T_1 > y) \cdot P(V_1 > y) \\ &= 1 - \left[\int_y^\infty 15 \cdot e^{-15t} \mathrm{d}t \cdot \int_y^\infty 10 \cdot e^{-10v} \mathrm{d}v\right] = 1 - \left[\left(-e^{-15t}\big|_y^\infty\right) \cdot \left(-e^{-10v}\big|_y^\infty\right)\right] \\ &= 1 - \left[e^{-15y} \cdot e^{-10y}\right] = 1 - e^{-25y} \Rightarrow f_Y(y) = 25 \cdot e^{-25y} \Rightarrow Y \sim \text{Exponencial}(25) \end{aligned}$$

c) Neste item, queremos encontrar $P(T_1 < V_1)$. Fazemos:

$$\begin{aligned} P(T_1 < V_1) &\overset{ind.}{=} \int_0^\infty \int_0^v 15 \cdot e^{-15t} \cdot 10 \cdot e^{-10v} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}v = \int_0^\infty 10 \cdot e^{-10v} \cdot \left[\int_0^v 15 \cdot e^{-15t} \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}v \\ &= \int_0^\infty 10 \cdot e^{-10v} \cdot \left[-e^{-15t}\big|_0^v\right] \mathrm{d}v = \int_0^\infty 10 \cdot e^{-10v} \cdot \left[1 - e^{-15v}\right] \mathrm{d}v \\ &= \int_0^\infty 10 \cdot e^{-10v}\, \mathrm{d}v - \int_0^\infty 10 \cdot e^{-25v}\, \mathrm{d}v = 1 - \frac{10}{25} \int_0^\infty 25 \cdot e^{-25v}\, \mathrm{d}v \\ &= 1 - \frac{10}{25} = \frac{15}{25} \end{aligned}$$

Exercício 5

$$
\begin{aligned}
P[N(S)=k|N(t)=n] &= \frac{P[N(s)=k, N(t)=n]}{P[N(t)=n]} = \frac{P[N(s)=k, N(t)-N(s)=n-k]}{P[N(t)=n]} \\
&\overset{inc.\ ind.}{=} \frac{P[N(s)=k]\cdot P[N(t)-N(s)=n-k]}{P[N(t)=n]} \\
&\overset{inc.\ est.}{=} \frac{P[N(s)=k]\cdot P[N(t-s)=n-k]}{P[N(t)=n]} \\
&= \frac{\frac{e^{-\lambda s}\cdot(\lambda s)^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\lambda(t-s)}\cdot[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}}\cdot\frac{(\lambda s)^k\cdot[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(\lambda t)^n} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{s^k\cdot(t-s)^{n-k}}{t^n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{s^k}{t^k}\cdot\frac{(t-s)^{n-k}}{t^{n-k}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^k\cdot\left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\left(\frac{s}{t}\right)^k\cdot\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

$\square$

Exercício 6

Vamos definir esse processo assim: $N = \{N(t); t \geq 0\}$, que é o número de carros que passam pelo pedágio da Imigrantes até o instante t. O parâmetro é $\lambda = 1$.

a) Para este item, vamos configurar $t = 20$.

$$
\begin{aligned}
P[N(20)<3] &= \sum_{k=0}^{2} P[N(20)=k] = P[N(20)=0] + P[N(20)=1] + P[N(20)=2] \\
&= \frac{e^{-1\cdot 20}\cdot(1\cdot 20)^0}{0!} + \frac{e^{-1\cdot 20}\cdot(1\cdot 20)^1}{1!} + \frac{e^{-1\cdot 20}\cdot(1\cdot 20)^2}{2!} \cong 4.55\cdot 10^{-7}
\end{aligned}
$$

b) Neste item, vamos considerar $t = 5$.

$$
P[N(5)=0] = \frac{e^{-1\cdot 5}\cdot(1\cdot 5)^0}{0!} = e^{-5} \cong 0.007
$$

c) Vamos usar partição para a resolução desse item. Cada veículo que passa pela Imigrantes é classificado como um caminhão, com probabilidade $p = 0.15$. Portanto, é possível definir dois processos independentes, que compõem o processo N já definido:

- $X = \{X(t); t \geq 0\}$, que representa o número de caminhões que passam pelo pedágio da Imigrantes. Ele possui o parâmetro $\lambda_X = 0.15$ caminhões por minuto.
- $Y = \{Y(t); t \geq 0\}$, para os outros veículos. Ele possui o parâmetro $\lambda_Y = 0.85$ caminhões por minuto.

Agora é possível calcular a probabilidade de ver mais de um caminhão durante a troca de pneus ($t = 20$).

$$P[X(20) \geq 1] = 1 - P[X(20) = 0] = 1 - \frac{e^{-0.15 \cdot 20} \cdot (0.15 \cdot 20)^0}{0!} = 1 - \frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} \cong 0.9502$$

d) Queremos o valor esperado de veículos dado que passaram 3 caminhões. Portanto:

$$\begin{aligned} E[N(20)|X(20) = 3] &= E[X(20) + Y(20)|X(20) = 3] = E[3 + Y(20)] \\ &\stackrel{lin.}{=} 3 + E[Y(20)] = 3 + 0.85 \cdot 20 = 3 + 17 = 20 \end{aligned}$$

Exercício 7

Vamos definir as variáveis que vamos usar:

- A: tempo de morte de Andréa. $A \sim$ Exponencial(μ_A).
- B: tempo de morte de Bernardo. $B \sim$ Exponencial(μ_B)
- $N = \{N(t); t \geq 0\}$: Número de rins doados até o instante t. O parâmetro é λ.
- S_k: o instante em que o k-ésimo rim é doado. $S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$.

a) Andréa recebe um rim quanto o primeiro rim é doado antes de sua morte, ou seja, $S_1 < A$. Sabemos que S_1 é uma $\Gamma(1, \lambda)$, e portanto é uma Exponencial(λ). Portanto, fazendo os cálculos de uma forma análoga ao item **c** do **Exercício 2**, temos que:

$$P(\text{Andréa receber um rim}) = P(S_1 < A) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu_A}$$

b) Existem duas maneiras para que Bernardo receba um rim. A mais feliz é quando Andréa recebe um primeiro rim e ele, o segundo, antes que venha a falecer. A outra maneira é quando o primeiro rim é doado depois da morte de Andréa e ele o recebe antes de falecer. Para saber a probabilidade de que ele receba um rim, devemos somar as probabilidades desses eventos, assumindo independência entre o tempo que cada um dos pacientes tem de vida.

$$\begin{aligned} P(\text{Bernardo receber um rim}) &= P(S_1 < A) \cdot P(S_2 < B) + P(A < S_1 < B) \\ &= P(S_1 < A) \cdot P(S_2 < B) + P(A < S_1) \cdot P(S_1 < B) \\ &\stackrel{2.c)}{=} \frac{\lambda}{\lambda + \mu_A} \cdot P(S_2 < B) + \frac{\mu_A}{\lambda + \mu_A} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu_B} \\ &\stackrel{obs.}{=} \frac{\lambda}{\lambda + \mu_A} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu_B}\right)^2 + \frac{\mu_A}{\lambda + \mu_A} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu_B} \end{aligned}$$

Obs:

$$
\begin{aligned}
P(S_2 < B) &\overset{ind.}{=} \int_0^\infty \int_0^v \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} \cdot e^{-\lambda s} \cdot s \cdot \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}b = \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \cdot \left[\int_0^v \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} \cdot e^{-\lambda s} \cdot s \, \mathrm{d}s \right] \, \mathrm{d}b \\
&= \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \cdot \left[-e^{-\lambda s} \cdot (\lambda s + 1)|_0^b \right] \, \mathrm{d}b = \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \cdot \left[1 - e^{-\lambda b} \cdot (\lambda b + 1) \right] \, \mathrm{d}b = \\
&= \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \, \mathrm{d}b - \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \cdot e^{-\lambda b} \cdot (\lambda b + 1) \, \mathrm{d}b \\
&= \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-\mu_B b} \, \mathrm{d}b - \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \cdot \lambda b \, \mathrm{d}b - \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \, \mathrm{d}b \\
&= 1 - \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \cdot \lambda b \, \mathrm{d}b - \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \, \mathrm{d}b \\
&= 1 - \frac{\mu_B \cdot \lambda \cdot \Gamma(2)}{(\mu_B + \lambda)^2} \int_0^\infty \frac{(\mu_B + \lambda)^2}{\Gamma(2)} \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \cdot b \, \mathrm{d}b - \int_0^\infty \mu_B \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \, \mathrm{d}b \\
&= 1 - \frac{\mu_B \cdot \lambda \cdot \Gamma(2)}{(\mu_B + \lambda)^2} - \frac{\mu_B}{(\mu_B + \lambda)} \cdot \int_0^\infty (\mu_B + \lambda) \cdot e^{-(\mu_B + \lambda) b} \, \mathrm{d}b = 1 - \frac{\mu_B \cdot \lambda}{(\mu_B + \lambda)^2} - \frac{\mu_B}{(\mu_B + \lambda)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu_B} \right)^2
\end{aligned}
$$