Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 1 - MAE0228

Exercício 3

a) Neste caso, cada chave possui a mesma probabilidade P de abrir a porta. Como os testes ocorrem sucessivamente, ou seja, sem reposição, a distribuição aqui é a *Uniforme Discreta*. Logo, $P(X = k) = \frac{1}{n}$, que é a probabilidade de a porta ser aberta na k-ésima tentativa, onde X é a nossa variável aleatória ($X = 1, 2, ..., n$).

b) Aqui, a probabilidade de cada chave abrir é a mesma. O que mudou foi o experimento. Agora, com a amostragem sem reposição, são feitas várias tentativas até o primeiro sucesso. Então, abrir a porta na k-ésima tentativa significa que ocorreram $k - 1$ falhas e então, o sucesso. A distribuição aqui é a *Geométrica*. Portanto, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, onde $p = \frac{1}{n}$ é a probabilidade de uma chave abrir a porta e $k = 1, 2, ...$ é o número de tentativas.

Exercício 4

Queremos saber se, num grupo com 4 macacos capturados entre 20, temos 2 macacos marcados (e outros 2 não marcados). Do grupo de 20, 5 foram marcados e 15 não. Assim:

- Espaço amostral (4 macacos marcados entre 20): $C_{20,4}$
- 2 macacos marcados entre 5: $C_{5,2}$
- 2 macacos não marcados entre 15: $C_{15,2}$

Portanto, $P(2 \text{ marcados } e \text{ } 2 \text{ não marcados}) = \frac{C_{5,2} \cdot C_{15,2}}{C_{20,4}} \cong 0.2167$
A suposição feita foi que as seleções de um macaco foram independentes e identicamente distribuídas.

Exercício 7

a) Os dois casos são análogos. Sabemos que:

- $P(B^c \mid A)$ é a probabilidade de o dígito 0 ser recebido dado que o dígito 1 foi enviado;
- $P(B \mid A^c)$ é a probabilidade de o dígito 1 ser recebido dado que o dígito 0 foi enviado.

Essas probabilidades indicam a probabilidade de haver uma falha na comunicação, devido ao ruído, no lado da recepção.

b) Para calcularmos essas probabilidades, vamos antes calcular algumas outras para auxiliar nossos cálculos. Sabendo que $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$:

- $P(B^c \cap A) = P(B^c \mid A) \cdot P(A) = 0.01 \cdot 0.5 = 0.005$
- $P(B \cap A^c) = P(B \mid A^c) \cdot P(A^c) = P(B \mid A^c) \cdot [1 - P(A)] = 0.01 \cdot 0.5 = 0.005$
- $P(B) = P(A^c \cap B) + P(A \cap B) = P(A^c \cap B) + [P(A) - P(B^c \cap A)] = 0.005 + 0.5 - 0.005 = 0.5$

Portanto, vamos calcular:

- $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.005}{0.5} = 0.99$
- $P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0.005}{0.5} = 0.01$
- $P(A \mid B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{0.005}{0.5} = 0.01$
- $P(A^c \mid B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A^c \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{P(B^c) - P(A \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(B) - P(A \cap B^c)}{1 - P(B)} = \frac{0.5 - 0.005}{0.5} = 0.99$

Exercício 10

a) Teremos as seguintes tabelas:

Para $N = 5$:

X	pareamentos
0	34
1	35
2	24
3	7

Para $N = 20$:

X	pareamentos
0	33
1	41
2	18
3	4
4	4

Para demais valores de X não expressos, não houve pareamentos.

b) c)