Nome: Luís Felipe de Melo Costa Silva
Número USP: 9297961

Lista de Exercícios 4 - MAE0228

Exercício 3

b) Sendo $X_1, X_2, ..., X_k$ variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim$ Binomial(n_i, p), teremos:

$$M_{X_1+...+X_k}(t) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k}(1-p+p\cdot e^t)^{n_i} = (1-p+p\cdot e^t)^{\sum_{i=1}^{k} n_i} = (1-p+p\cdot e^t)^{n_1+n_2+...+n_k}$$

Logo, $X_1 + X_2 + ... + X_k \sim$ Binomial$(n_1 + n_2 + ... + n_k, p)$

d) Sendo $X_1, X_2, ..., X_r$ variáveis aleatórias independentes, com $X_i \sim$ Exponencial(λ), teremos:

$$M_{X_1+...+X_r}(t) = \prod_{i=1}^{r} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda}{\lambda - t} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

Logo, $X_1 + X_2 + ... + X_r \sim$ Gama(r, λ)

Exercício 5

Sendo Y uma variável aleatória discreta:

$$\begin{aligned} M_Y(t) = E(e^{tY}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{u} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y + \int_{u}^{+\infty} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \\ &\geq \int_{u}^{+\infty} e^{ty}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \geq \int_{u}^{+\infty} e^{tu}\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y \\ &\geq e^{tu}\cdot \int_{u}^{+\infty} f_Y(y)\mathrm{d}y = e^{ut}\cdot P(Y > u) \end{aligned}$$

Portanto,

$$e^{ut}\cdot P(Y>u) \leq M_Y(t)$$
$$P(Y>u) \leq e^{-ut}\cdot M_Y(t)$$

$\square$