Comment étudier la "robustesse" ?

Premier point de vue : sensibilité aux conditions initiales via le calcul des variations.

Soit $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe régulière. On souhaite étudier comment une courbe voisine "$\gamma + \eta$" avec des conditions initiales légèrement différentes va s'écarter de γ. Dans une variété, on ne peut pas additionner les points. Cependant, si $\eta(t)$ est suffisamment petit, on le voir comme un vecteur tangent à $\gamma(t)$. La façon rigoureuse de définir cette idée est le calcul des variations.

Une variation est une application $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times [0,1] \to M$ telle que $\Psi(0,t) = \gamma(t)$ et qui est lisse selon la première variable s, et régulière ("lisse par morceaux") selon la seconde variable t. Notre champ de vecteurs η n'est autre que $\partial_s \Psi|_{s=0}$. Si pour tout s, $\Psi(s,\cdot)$ est une géodésique alors $\partial_s \Psi|_{s=0}$ est ce qu'on appelle un champ de Jacobi. Les champs de Jacobi caractérisent la façon dont les géodésiques divergent ou convergent. L'écart entre deux géodésiques est lié à la courbure sectionnelle. Dans le cas général, la façon dont la variation Ψ est définie dépend des caractéristiques du problème étudié. Dans le cas d'une courbe γ quelconque (dans notre cas, γ est la courbe du processus solution de l'EDS), on va s'intéresser à :

$$e(s) = \int_0^1 g(\Psi(s,t); \partial_s \Psi(s,t), \partial_s \Psi(s,t)) dt, \tag{1}$$

où $g(p;\cdot,\cdot)$ est la métrique au point $p \in M$. La grandeur $e(0)$ indique à quel point un petit changement des conditions initiales de γ va faire diverger la courbe par rapport à γ. Autrement dit, $e(0)$ mesure la sensibilité de γ aux conditions initiales.

A partir de là, il est possible de prendre plusieurs directions. A titre d'exemple, on peut considérer une variation entre γ et une géodésique, et donc voir comment γ s'écarte d'une géodésique (?). On peut aussi s'intéresser à $\partial_s e(s)$ qu'on peut interpréter comme la "vitesse de variation" de la sensibilité aux conditions initiales en fonction de s. Par exemple, si on a un s^* tel que $\partial_s e(s)|_{s=s^*} = 0$, alors en s^*, notre processus est soit très sensible aux conditions initiales (maximum) soit très robuste aux conditions initiales (minimum).

Second point de vue "Bayésien" : comportement asymptotique de la variance

On peut aussi voir la robustesse comme le comportement de la variance du processus quand $t \to \infty$. Si la variance diverge, le modèle est peu robuste car son comportement devient imprévisible. On peut caractériser plus finement la robustesse en étudiant la façon dont la variance évolue asymptotiquement. Croit-elle linéairement, ou exponentiellement etc. ? Explose-t-elle en temps fini ? Par exemple, la variance du processus de Wiener croit linéairement avec le temps. Elle diverge donc assez lentement.

Développement

Il est possible que le calcul de $e(s)$ ne soit pas réalisable. On peut alors chercher à obtenir des bornes pour $e(s)$. Une méthode consiste à utiliser les développements. Un développement consiste à faire "rouler" une surface sur une autre. Si la relation ainsi obtenue entre les deux surfaces est une bijection locale, alors les deux surfaces sont localement isométriques. On dit que chaque surface est un développement de l'autre. Si l'une des deux surfaces est un plan, alors on dit que l'autre est une *surface développable*. Cela permet de pouvoir effectuer des calculs dans un espace euclidien puis de se ramener dans l'espace étudié (?).

Demi-espace de Siegel

Le demi-plan de Poincaré P_1 peut être vu comme le demi-plan complexe des parties imaginaires strictement positives. Un point $z \in P_1$ peut être écrit $z = \mu + i\sigma$ avec $\sigma > 0$. La métrique associée est $ds^2 = \frac{d\mu^2}{\sigma^2} + \frac{d\sigma^2}{\sigma^2}$.

Le demi-espace de Siegel P_n est une généralisation de P_1. Un point $S \in P_n$ s'écrit $S = \mu + i\Sigma$ où μ est une matrice $n \times n$ quelconque, et Σ est une matrice symétrique définie positive de taille n. La métrique associée est $ds^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\Sigma^{-1} d\Sigma \Sigma^{-1} d\Sigma)$.

Pour calculer les géodésiques d'une variété, une astuce classique consiste à trouver un groupe agissant par isométrie (et transitivement) sur la variété. En effet, l'action du groupe conserve les géodésiques (car il agit par isométrie). Il suffit alors de déterminer une géodésique simple pour déterminer l'ensemble des géodésiques (car le groupe agit transitivement).

Dans le cas de P_1, on dispose du groupe des transformations de Möbius $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ qu'on appelle aussi homographies. Ces transformations préservent les cercles, et en particulier elles envoient les droites sur des cercles (ou sur d'autres droites, vues comme des cercles de rayon infini). On sait que la droite verticale $\mu = 0$ est une géodésique. L'ensemble des géodésiques de P_1 est ainsi déterminé par l'image de la droite $\mu = 0$ par le groupe des homographies. On retrouve bien que les demi-cercles centrés sur l'axe des μ sont des géodésiques. Dans le cas de la sphère, le groupe des rotations convient. On montre que les géodésiques sont les grands cercles en remarquant que l'équateur est une géodésique est en lui appliquant l'ensemble des rotations. Dans le cas de P_n, il est possible que le groupe symplectique convienne (à vérifier).

Bonus : Équivalence entre métriques ?

Ma question était : étant donnée une courbe dans une même variété munie de deux métriques différentes, les courbures de la courbe avec chacune des métriques sont-elles "équivalentes" ? Par exemple, si une courbure diverge vers ∞, l'autre courbure va-t-elle aussi diverger ?

La réponse est non. Il suffit de considérer les géodésiques du demi-plan de Poincaré (les demi-cercles). Avec la métrique hyperbolique, leur courbure est toujours nulle. En revanche, avec la métrique euclidienne, on peut trouver des demi-cercles dont la courbure est arbitrairement grande (en prenant des rayons de plus en plus petits). Je me rends compte en écrivant que ce n'est pas un bon contre-exemple. En effet, on voit que dans les deux métriques, la courbure est finie (et même constante). Ce que je cherchais était plutôt une courbe dont la courbure diverge vers ∞ avec une métrique, mais converge vers une valeur finie avec une autre ...

Idée de la topologie et des métriques. Pour ce qui est des espaces compacts, la topologie sert à "compter les trous". La métrique quant à elle, donne la "forme" de l'espace.

Petit bonus sur la conjecture de Poincaré (*toute variété de dimension 3 compacte sans bord et simplement connnexe est homéomorphe à la sphère* S^3) ou du moins le peu que j'en ai compris. La méthode pour montrer ce résultat, due à Richard Hamilton, est basée sur une équation différentielle sur les métriques appelée flot de Ricci. Cela permettrait de faire évoluer continûment la métrique afin d'obtenir une 3-sphère (déformer la variété jusqu'à en faire une sphère). Cependant, des singularités apparaissent dans le flot de Ricci. Grigori Perelman a montré qu'on peut prolonger la solution du flot de Ricci de façon unique au-delà des singularités ce qui permet de montrer la conjecture de Poincaré.