Intersection entre un plan, un ellipsoïde et un cône

1 Introduction

On cherche l'intersection entre un plan $\mathcal{P}$, un ellipsoïde $\mathcal{E}$ et un cône $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$, tous trois définis par leur équation cartésienne. On va introduire les notations en présentant les équations cartésiennes de chaque quadrique.

1.1 Equations cartésiennes

Dans un repère orthonormé adapté, noté $\mathcal{B}_0$, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation :

$$z = 0.$$

Dans un autre repère orthonormé, noté $\mathcal{B}_1$, l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ a pour équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

avec a, b, c des réels strictement positifs correspondant aux demi-axes, c'est-à-dire aux "rayons" de l'ellipsoïde selon chacun des axes.
Enfin, dans un troisième repère orthonormé, noté $\mathcal{B}_2$, le cône $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$x_2^2 + y_2^2 = (\tan\alpha)^2 \, z_2^2, \tag{2}$$

avec α l'angle du cône par rapport à l'axe z. On suppose ici que la base du cône est circulaire.

1.2 Changements de repère

Dans la suite, on souhaite travailler exclusivement dans le repère $\mathcal{B}_0$.

On suppose donc qu'on dispose de la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_0$, notée Q_1, ainsi que du vecteur v_1 correspondant aux coordonnées de l'origine de $\mathcal{B}_0$ exprimées dans $\mathcal{B}_1$. On rappelle que les colonnes de Q_1 sont les coordonnées des vecteurs de base de $\mathcal{B}_0$ dans le repère $\mathcal{B}_1$. Ainsi, si u_0 sont les coordonnées d'un point dans $\mathcal{B}_0$, on peut obtenir les coordonnées u_1 de ce même point dans $\mathcal{B}_1$ de la façon suivante :

$$u_1 = Q_1 u_0 + v_1.$$

Réciproquement, on passe de u_1 à u_0 de la façon suivante :

$$u_0 = Q_1^{-1}(u_1 - v_1).$$

De même, on suppose qu'on dispose de la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ vers $\mathcal{B}_0$, notée Q_2, ainsi que du vecteur v_2 correspondant aux coordonnées de l'origine de $\mathcal{B}_0$ exprimées dans $\mathcal{B}_1$.

1.3 Résumé de la méthode

La méthode permettant d'obtenir l'intersection se décompose en deux étapes :

1. On sait que l'intersection entre un plan et une quadrique est une conique (courbe plane de degré 2). En se plaçant dans le repère $\mathcal{B}_0$ et en posant $z = 0$, on peut voir x et y comme des coordonnées dans le plan $\mathcal{P}$. La première étape consiste à obtenir les équations cartésiennes des deux coniques (intersection de $\mathcal{P}$ avec $\mathcal{E}$ d'une part, et avec $\mathcal{C}$ d'autre part) exprimées avec les coordonnées x et y liées au plan $\mathcal{P}$.

2. La deuxième étape consiste à obtenir les coordonnées des points d'intersection entre les deux coniques. On sait qu'il y a au plus quatre points d'intersection. On peut ensuite exprimer les coordonnées des points d'intersection dans le repère $\mathcal{B}_0$. Pour cela, il suffit juste de rajouter la coordonnée $z = 0$ (puisqu'on est dans le plan $\mathcal{P}$).

2 Première étape

Afin d'obtenir l'intersection entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$, on va exprimer l'équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{B}_0$. On sait que :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + v_1.$$

Ainsi, on peut écrire $x_1 = x_1(x, y, z)$ comme une fonction de x, y et z. Et de même pour $y_1 = y_1(x, y, z)$ et $z_1 = z_1(x, y, z)$. En injectant ces trois expressions dans l'équation 1, on obtient une nouvelle équation cartésienne qui ne dépend que de x, y et z. Pour obtenir l'équation de la conique d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$, il suffit de poser $z = 0$. On obtient alors une équation en x et y de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \tag{3}$$

En procédant de même avec l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$, et en utilisant Q_2 et v_2, on obtient l'équation de la conique d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$, de la forme :

$$Gx^2 + Hy^2 + Ixy + Jx + Ky + L = 0. \tag{4}$$

Explicitation des coefficients. On va maintenant expliciter les coefficients $A, B, C, \ldots, K, L$ en fonction des données de départ. On note :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix},$$

et

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\tan\alpha)^2 \end{pmatrix},$$

On note également :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, la conique d'intersection entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$ a pour équation :

$$(Q_1 X + v_1)^T M_1 (Q_1 X + v_1) = 1,$$

et la conique d'intersection entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$(Q_2 X + v_2)^T M_2 (Q_2 X + v_2) = 0.$$

On peut développer les deux équations :

$$X^T Q_1^T M_1 Q_1 X + v_1^T (Q_1^T M_1 + M_1 Q_1) X + v_1^T M_1 v_1 = 1,$$
$$X^T Q_2^T M_2 Q_2 X + v_2^T (Q_2^T M_2 + M_2 Q_2) X + v_2^T M_2 v_2 = 0.$$

On peut alors lire directement les coefficients introduits dans les équations 3 et 4 :

$$
\begin{aligned}
Q_1^T M_1 Q_1 &= \begin{pmatrix} A & C/2 & * \\ C/2 & B & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \\
v_1^T (Q_1^T M_1 + M_1 Q_1) &= \begin{pmatrix} D & E & * \end{pmatrix}, \\
v_1^T M_1 v_1 &= F + 1, \\
Q_2^T M_2 Q_2 &= \begin{pmatrix} G & I/2 & * \\ I/2 & H & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \\
v_2^T (Q_2^T M_2 + M_2 Q_2) &= \begin{pmatrix} J & K & * \end{pmatrix}, \\
v_2^T M_2 v_2 &= L.
\end{aligned}
$$

Les éléments notés "$*$" peuvent être ignorés.

3 Deuxième étape

Afin de trouver l'intersection de deux coniques, il y a deux méthodes possibles (équivalentes en termes de complexité) :

1. On peut directement chercher les solutions du système formé par les deux équations quadratiques. Le système peut être transformé en une seule équation de degré 4. On peut ensuite obtenir les solutions de cette équation, soit de façon numérique, soit en utilisant les formules analytiques[1].
2. On peut utiliser la "méthode des faisceaux" (brievement décrite ici[2]) qui est peut-être plus facile à implémenter en pratique.

3.1 La méthode des faisceaux

On va utiliser la méthode des faisceaux. Elle a déjà été implémentée sur MATLAB[3]. La fonction MATLAB prend en entrée les coefficients $A, B, C, \dots, K, L$ déterminés dans la section précédente. Ces coefficients sont organisés avec la *représentation matricielle d'une conique*. Il s'agit des deux matrices symétriques suivantes[4] :

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \begin{pmatrix} A & C/2 & D/2 \\ C/2 & B & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}, \\
S_2 &= \begin{pmatrix} G & I/2 & J/2 \\ I/2 & H & K/2 \\ J/2 & K/2 & L \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Le *faisceau de coniques* $S(\lambda)$ engendré par S_1 et S_2 est l'ensemble des matrices paramétrées par $\lambda \in \mathbb{R}$ et définies comme suit :

$$S(\lambda) = S_1 + \lambda S_2.$$

Le fait fondamental qu'on va utiliser est que *l'intersection entre deux coniques distinctes issues d'un même faisceau de coniques ne dépend pas du choix des deux représentants.* L'idée consiste alors à trouver un λ_0 tel que la conique $S(\lambda_0)$ soit "simple", de sorte que l'intersection entre $S(\lambda_0)$ et S_1 (ou entre $S(\lambda_0)$ et S_2) soit facile à obtenir.

[1] `https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_quartique`

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section#Intersecting_two_conics`

[3] `https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28318-conics-intersection`

[4] ATTENTION. Il semble que pour utiliser la fonction MATLAB, il faille retirer tous les 1/2 dans les matrices. Mais pour que la suite du document soit correcte, je laisse les 1/2.

3.2 Obtention d'une conique dégénérée

Plus précisément, une conique "simple" est une conique dégénérée, c'est-à-dire une conique dont la matrice $S(\lambda_0)$ n'est pas inversible. Il y a trois classes de coniques dégénérées : un couple de droites (qui peuvent être confondues), un point seul, ou l'ensemble vide. Ainsi, λ_0 est une racine du polynôme à une inconnue $P(\lambda) = \det S(\lambda)$. En développant par rapport à la dernière colonne, on peut expliciter $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \left((A+\lambda G)(B+\lambda H) - \frac{(C+\lambda I)^2}{4}\right)(F+\lambda L) + \frac{(C+\lambda I)(E+\lambda K)(D+\lambda J) - (B+\lambda H)(D+\lambda J)^2 - (A+\lambda G)(E+\lambda K)^2}{4}.$$

Comme $P(\lambda)$ est un polynôme de degré 3, il admet toujours[5] une racine réelle. On peut obtenir une racine λ_0 numériquement ou via les formules analytiques.

3.3 Identification de la conique dégénérée

3.4 Intersection de la conique dégénérée avec une des coniques de départ

https://math.stackexchange.com/questions/328300/decomposition-of-a-degenerate-conic?rq=1
https://math.stackexchange.com/questions/316849/intersection-of-conics-using-matrix-representation

[5] Presque toujours. En effet, si le terme de degré 3 s'annule, alors le polynôme peut ne pas avoir de racine réelle. Mais cela n'arrive "presque jamais" en un sens qui peut être rendu précis.