SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Šimek

HARMONIJSKA ANALIZA I SLUČAJNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, 10. rujna 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Slučajni procesi su višestruko zanimljivi — iz perspektive drugih znanosti jer se njima modeliraju razne veličine koje se mijenjaju kroz vrijeme, i u teoriji vjerojatnosti jer podrazumijevaju kompliciraniju i bogatiju strukturu nego familije nezavisnih slučajnih varijabli. Zbog njihove velike važnosti, razumno se pitati koji nam sve alati mogu pomoći da ih bolje razumijemo. Harmonijska analiza nameće se kao mogući odgovor. Kao i većina matematičkih disciplina, harmonijska analiza nema strogu definiciju, ali možemo reći da se bavi reprezentacijom funkcija u *frekvencijskoj* domeni, za razliku od uobičajene vremenske. Pogled na taj alternativni prikaz funkcije često može teške probleme u vremenskoj domeni znatno olakšati u frekvencijskoj. Primjer nam je poznat i u teoriji vjerojatnosti — upravo su karakteristične funkcije Fourierove transformacije vjerojatnosnih mjera, a znamo da su u teoriji vjerojatnosti jedan od najvažnijih analitičkih alata.

Uža tema ovog rada je Hölder-regularnost trajektorija frakcionalnog Brownovog gibanja (poglavlje 3). Frakcionalno Brownovo gibanje primjer je *samosličnog* slučajnog procesa, a i generalizacija poznatijeg Brownovog gibanja (koje je također samoslično). Samosličnost kod slučajnih procesa podrazumijeva da se distribucija procesa ne mijenja skaliranjem u vremenu i odgovarajućim skaliranjem po amplitudi. Drugim riječima, slična statistička svojstva vrijede i u malim i u velikim rezolucijama. Samoslični slučajni procesi ponekad se nazivaju i *statistički fraktali*, iako se frakcionalno Brownovo gibanje pojavljuje u radovima Kolmogorova više od dvadeset godina prije no što Mandelbrot uvodi izraz *fraktal* (citirati). Za analizu takvih procesa prirodno pogoduju valići koje detaljno uvodimo u poglavlju 1, o čemu najbolje govori ovaj citat iz [AFT00, str. 22.]:

> Štoviše, čim su se pojavile sredinom osamdesetih, gotovo se odmah prepoznalo da su valićne transformacije, zahvaljujući svojoj ugrađenoj multirezolucijskoj strukturi, prirodni alati za otkrivanje samosličnih pojava u signalima, slikama i procesima.

Osim posljednjeg trećeg poglavlja, ovaj rad se sastoji od dva pripremna poglavlja kojima je cilj predstaviti osnovne pojmove, rezultate i tehnike u svojim područjima — redom teoriji valića i teoriji slučajnih procesa u neprekidnom vremenu.

- U prvom poglavlju...
- U drugom poglavlju...
- U trećem poglavlju...

Glavnu literaturu čine [Dau92] za prvo poglavlje, [Sat99; EM02; Sar80] za drugo poglavlje i [Aya10] za treće poglavlje.

Poglavlje 1

Valići

Poglavlje 2

Slučajni procesi u neprekidnom vremenu

2.1 Osnovni pojmovi

Slučajni proces je indeksirana familija slučajnih veličina $\{X_t : t \in T\}$ na istom vjerojatnosnom prostoru gdje je T neki indeksni skup. On može biti diskretan (npr. $T = \mathbb{N}$ ili $T = \mathbb{Z}$) ili neprekidan (npr. $T = \mathbb{R}$ ili $T = [0, \infty\rangle$). Budući da o elementima T često razmišljamo kao o vremenskim trenucima, govorimo o procesu u diskretnom ili u neprekidnom vremenu. U kontekstu ovog rada podrazumijevamo $T = [0, \infty\rangle$ i koristimo skraćenu notaciju $\{X_t\}$.

Razlikujemo proces od realizacije

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in [0, \infty\rangle\,, \quad \text{za neki } \omega \in \Omega$$

koju još zovemo *trajektorijom*. Nadalje, kažemo da je slučajni proces $\{X_t\}$ *modifikacija* procesa $\{Y_t\}$ ako je $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ za sve $t \in [0, \infty\rangle$. Primijetimo razliku u odnosu na jači uvjet $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \in [0, \infty\rangle) = 1$ kada procese više načelno ne razlikujemo. Jednakost dvaju procesa po distribuciji znači jednakost svih konačnodiomenzionalnih distribucija.

Slučajne procese obično promatramo preko konačnodimenzionalnih funkcija distribucije $F_{t_1,\dots,t_n}$, $t_j \in T$, koje zadovoljavaju tzv. uvjete suglasnosti Kolmogorova. Dva su važna rezultata koja to opravdaju — teorem Kolmogorova (v. [Sar80, tm. 9.6], alternativa sa suglasnim mjerama [Sat99, tm. 1.8]) koji tvrdi da suglasna familija konačnodimenzionalnih distribucija inducira jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru na σ-algebri cilindara i drugi teorem (v. [Sar80, tm. 9.7]) koji tvrdi da se za takvu familiju uvijek može konstruirati slučajni proces (odn. vjerojatnosni prostor) s upravo tim konačnodimenzionalnim distribucijama. Stoga nam, kao i obično, nije bitan vjerojatnosni prostor u kojem se nalazimo.

Sada ćemo definirati Lévyjeve procese, jednu od najznamenitijih klasa slučajnih procesa. Uvest ćemo Poissonov proces i Brownovo gibanje kao poznate primjere. Pokazat ćemo i vrlo blisku vezu Lévyjevih procesa i beskonačno djeljivih distribucija (definiranih u odjeljku 2.4), koja je potrebna za naš dokaz da Brownovo gibanje postoji. Nakon toga ćemo skrenuti pažnju na teoriju samosličnih procesa i uvesti frakcionalno Brownovo gibanje kao generalizaciju. Prije te definicije, uvedimo još jedan osnovni pojam.

Definicija 2.1.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ je *stohastički neprekidan* ako vrijedi

$$\lim_{s \to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0,$$

za svaki $t \geq 0$ i $\varepsilon > 0$.

Definicija 2.1.2. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Lévyjev* ako vrijede uvjeti:

(i) $X_0 = 0$ g.s.,

(ii) $\{X_t\}$ je stohastički neprekidan,

(iii) varijable $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne za sve $n \geq 1$ i $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (nezavisnost inkremenata),

(iv) distribucija varijable $X_{s+t} - X_s$ ne ovisi o s (stacionarnost inkremenata),

(v) Postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ te za svaki $\omega \in \Omega_0$ vrijedi da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ càdlàg[1].

Nadalje, ako ne vrijedi (iv) kažemo da je proces *aditivan*. Ako ne vrijedi (v) tada kažemo da je proces *Lévyjev po distribuciji* odn. *aditivan po distribuciji.*

2.2 Poissonov proces

U ovom odjeljku uvodimo Poissonov proces kao primjer Lévyjevog procesa. Intuitivno, taj proces mjeri broj događaja koji su se dogodili do trenutka t, pri čemu su duljine intervala između uzastopnih događaja distribuirane eksponencijalno. Pritom, eksponencijalnu distribuciju karakterizira tzv. gubitak pamćenja. Poissonov proces

[1] càdlàg, od fr. *continue à droite, limite à gauche*, označava funkciju koja je na cijeloj domeni neprekidna zdesna s limesima slijeva

uvest ćemo kao Lévyjev proces s dodatnim svojstvom da je $X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t)$, a onda konstrukcijom dokazati da takav proces zaista postoji. Kasnije ćemo pokazati da je moguće na taj način odrediti Lévyjev proces i kad se Poissonova distribucija zamijeni bilo kojom beskonačno djeljivom distribucijom.

Definicija 2.2.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}$ je *Poissonov proces s parametrom* $\lambda > 0$ ako je Lévyjev i ako

$$X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t), \quad t > 0. \tag{2.1}$$

Teorem 2.2.2. *Neka je $(W_n)_{n\geq 0}$ slučajna šetnja na $\mathbb{R}$ definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, takva da $T_n = W_n - W_{n-1}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$. Definiramo*

$$X_t(\omega) = n \iff W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{2.2}$$

Tada je $\{X_t\}$ Poissonov proces s parametrom λ.

Dokaz. Ustanovimo prvo da $W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Naime, $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda)$ i $W_n = \sum_{j=1}^n T_j$ pa tvrdnja slijedi po poznatoj lemi o zbroju nezavisnih Γ-distribuiranih varijabli[2]. Sada slijedi $\mathbb{P}(W_n \leq t) \to 0,\ n \to \infty$, što se može dobiti i iz

$$\mathbb{P}(W_n \leq t) \leq \mathbb{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = [\mathbb{P}(T_1 \leq t)]^n \to 0, \grave{}\, n \to \infty.$$

Slijedi da je svaka X_t g.s. dobro definirana preko (2.2). Da je $\{X_t\}$ stohastički neprekidan s càdlàg trajektorijama i $X_0 = 0$ g.s. je trivijalno. Preostaje dokazati (2.1) i da su inkrementi stacionarni i nezavisni.

Prvo se dobije iz

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t = n) = \mathbb{P}(W_n \leq t < W_n + T_{n+1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\leq u\leq t<u+v\}}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{(W_n,T_{n+1})} \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}\int_{t-x}^{\infty} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

pri čemu koristimo nezavisnost varijabli W_n i T_{n+1} za prelazak na njihove gustoće.

Sličnim izravnim računom možemo dobiti i

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > t + s \,|\, X_t = n) = e^{-cs} = \mathbb{P}(T_1 > s), \quad t > 0, s \geq 0, n \geq 0.$$

[2] zbroj je Γ-distribuiran, a prvi parametar (parametar oblika) je zbroj prvih parametara sumanada

Pomoću toga možemo dobiti da $(W_{n+1} - t, T_{n+2}, \dots, T_{n+m})$ uz dano $X_t = n$ ima jednaku distribuciju kao i $(T_1, T_2, \dots, T_m)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m \,|\, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1 \,|\, X_t = n)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m) \\
&\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1)\mathbb{P}(T_2 > s_2, \dots, T_m > s_m) \\
&\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1, T_2 > s_2, \dots, T_m > s_m). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

To nam zatim daje

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t + s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) \\
&\ = \mathbb{P}((W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m} \leq s < (W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m+1}) \\
&\overset{(2.3)}{=} \mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_m \leq s < T_1 + \cdots + T_m + T_{m+1}) = \mathbb{P}(W_m \leq s < W_{m+1}) = \mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Sada stacionarnost inkremenata slijedi sumiranjem po $n \geq 0$ jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t = m, X_t = n) = \mathbb{P}(X_{t+s} = n + m, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t + s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Nezavisnost inkremenata slijedi iz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \dots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k \,|\, X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_1 - t_0} = n_1, \dots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi primjenom iste ideje kao u dokazu stacionarnosti. Dokaz se završi indukcijom. □

2.3 Brownovo gibanje

Sada na slični način uvodimo Brownovo gibanje.

Definicija 2.3.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Brownovo gibanje* (ili *Wienerov proces*) ako je Lévyjev i ako

(i) $X_t \sim \mathrm{N}(0, tI)$ i

(ii) postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i $\omega \in \Omega_0$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna.

Ovime nismo dokazali da takav proces postoji, što ćemo ostaviti za kasnije. Dana svojstva su nam dovoljna da dokažemo nekoliko osnovnih rezultata o Brownovom gibanju. Dokazat ćemo par nama najznačajnijih rezultata, a drugi se mogu naći u [Sat99, §5]. Spomenimo još kako je svojstvo (i) skupa s Lévyjevosti dovoljno za (ii) po teoremu **??**.

Prvo ćemo dokazati da Brownovo gibanje zadržava istu distribuciju pri širenju u vremenu i odgovarajućem širenju u prostoru. To svojstvo ćemo kasnije zvati *samosličnost*.

Teorem 2.3.2. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}^d$. Tada je $\left\{c^{-1/2}X_{ct}\right\}$ također Brownovo gibanje u $\mathbb{R}^d$ za svaki $c > 0$.*

Dokaz. Neka je $Y_t = c^{-1/2}X_{ct}$. Odmah slijedi $Y \sim \mathrm{N}(0, tI)$. Stohastička neprekidnost, g.s. neprekidnost trajektorija i nezavinost inkremenata lako se svedu na isto za $\{X_t\}$.

Stacionarnost inkremenata također — neka $0 \leq s < t$ pa

$$Y_t - Y_s = c^{-1/2}\left(X_{ct} - X_{cs}\right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} c^{-1/2}X_{ct-cs} \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y_{t-s}.$$

□

Sada ćemo dokazati da u jednoj dimenziji g.s. vrijede dva inače neuobičajena svojstva — nigdje-monotonost i nigdje-diferencijabilnost.[3]

Teorem 2.3.3. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-monotona, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije monotona niti na jednom segmentu.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti dokazujemo samo nigdje-rastućost na segmentu[4] $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$. Neka je još $n \geq 2$ proizvoljan i Ω_0 iz definicije 2.3.1. Definiramo

$$A = \{\omega \in \Omega_0 : t \mapsto X_t(\omega) \text{ ne opada na } [a, b]\}$$

i zatim ekvidistantnu particiju segmenta $[a, b]$ s $t_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $0 \leq k \leq n$ te

$$A_n = \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_0}(\omega) \leq X_{t_1}(\omega) \leq \cdots \leq X_{t_n}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

[3] ustvari je dovoljno dokazati nigdje-diferencijabilnost; Lebesgueov teorem o diferencijabilnosti monotonih funkcija govori da je svaka neprekidna monotona funkcija diferencijabilna g.s., v. [Sat99, remark 5.10] za još dovoljnih uvjeta

[4] to možemo jer svaki segment $[a, b]$ možemo smanjiti na $[a', b']$ gdje $a', b' \in \mathbb{Q}$ i onda „ukupni" Ω_1 dobiti kao prebrojivi presjek „lokalnih"

Očito $A \subset A_n$ i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \geq 0\right\}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n} P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \geq 0) = 2^{-n} \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

pa možemo odabrati

$$\Omega_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}.$$

□

Komentar 2.3.4. Štoviše, vrijedi

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Inkluzija $\subseteq$ je očita. Za $\supseteq$ pretpostavimo $\omega \in \cap_n A_n \setminus A$. Tada postoje $a \leq s < t \leq b$ takvi da $X_s(\omega) - X_t(\omega) > \varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$. Jer je skup

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \Delta_n = \left\{a + \frac{b-a}{n} \cdot k : 0 \leq k \leq n\right\}$$

gust u $[a, b]$ i zbog neprekidnosti trajektorije postoje n i $s', t' \in \Delta_n$ takvi da $X_{s'}(\omega) - X_{t'}(\omega) > \varepsilon/2$. Time smo došli do kontradikcije jer $\omega \notin A_n$.

Teorem 2.3.5. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-diferencijabilna, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije diferencijabilna niti u jednoj točki $t \in [0, \infty\rangle$.*

Dokaz. Slično kao u prošlom dokazu, ograničimo se na pitanje diferencijabilnosti u nekom $t \in [0, N]$ gdje $N \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$A = \{\omega \in \Omega\colon t \mapsto X_t(\omega) \text{ je diferencijabilna u nekom } s \in [0, N]\}$$

i za $M, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}A_{n,M} = \{\omega \in \Omega\colon (\exists s \in [0, N(1 - 1/n)])(&|t - s| \leq 2N/n\\ &\implies |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq M\,|t - s|)\}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Lako se pokaže

$$A \subseteq \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,M}.$$

Fiksiramo $M \in \mathbb{N}$ i stavimo $A_n = A_{n,M}$. Nadalje uvedimo mrežu $t_k = \frac{Nk}{n}$, $0 \leq k \leq n$ i definiramo slučajne varijable[5]

$$Y_{n,k} = \max \left\{ \left| X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right|, \left| X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \right|, \left| X_{t_{k+2}}, X_{t_{k+1}} \right| \right\}, \quad 0 \leq k \leq n-2.$$

Definiramo još događaje

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \{ Y_{n,k} \leq 4MN/n \}.$$

Neka je $\omega \in A_n$ i s iz (2.4). Lako se pokaže da je $\omega \in \{Y_{n,k} \leq 4MN/n\}$ gdje je k takav da s nije udaljen ni od kojeg ruba segmenta $[t_{k-1}, t_{k+2}]$ za više od $2N/n$. Dakle, $A_n \subseteq B_n$.

Uvedimo oznaku $a_n = \mathbb{P}\left(\left|X_{N/n}\right| \leq 4MN/n\right)$. Pomoću stacionarnosti i nezavisnosti inkremenata dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &\leq \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k} \leq 4MN/n) = \mathbb{P}(Y_{n,0}) + \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k}) \\
&= \mathbb{P}\left(|X_{t_1} - X_{t_0}| \leq 4MN/n, |X_{t_2} - X_{t_1}| \leq 4MN/n\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=0}^{3} \left\{ \left| X_{t_{k+\ell}} - X_{t_{k+\ell-1}} \right| \leq 4MN/n \right\} \right) \\
&= a_n^2 + (n-2)a_n^3.
\end{aligned}$$

Želimo odozgo ocijeniti a_n. Prvo iz teorema 2.3.2 imamo $X_{N/n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (N/n)^{1/2} X_1$. Ako gustoću jedinične normalne distribucija ocijenimo odozgo konstantom, imamo

$$a_n = \mathbb{P}\left(|X_1| \leq 4M \left(N/n\right)^{1/2} \right) \lesssim \left(\frac{N}{n} \right)^{1/2}.$$

Iz toga slijedi $\mathbb{P}(B_n) \to 0$, $n \to \infty$ pa i $\mathbb{P}\left(\liminf_n B_n\right) = 0$. Tvrdnja teorema slijedi jer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n \to \infty} A_n \subseteq \liminf_{n \to \infty} B_n.$$

□

[5] za $k = 0$ maknemo prvi element skupa

2.4 Beskonačno djeljive distribucije

U ovom odjeljku uvodimo pojam beskonačno djeljive distribucije odn. mjere.[6] Beskonačno djeljive distribucije su u vrlo bliskoj vezi s Lévyjevim procesima. Naime, dokazat ćemo da

- za svaku beskonačno djeljivu distribuciju μ postoji Lévyjev po distribuciji proces $\{X_t\}$ jedinstven po distribuciji takav da $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$ i
- svaki proces Lévyjev po distribuciji ima modifikaciju koja je Lévyjev proces (u sljedećem odjeljku 2.5).

Posljedica je da svakom beskonačno djeljivom distribucijom (među kojima su i Poissonova i normalna, v. komentar 2.4.3) možemo odrediti Lévyjev proces kako smo to napravili u definicijama 2.2.1 i 2.3.1. Da dokažemo da Brownovo gibanje postoji još je potrebna i neprekidnost trajektorija, a nju ćemo dokazati u teoremu 2.5.11.

Sada definiramo beskonačno djeljivu distribuciju preko tri ekvivalentne tvrdnje. Da su ekvivalentne lako se vidi jer konvolucija mjere i zbrajanje nezavisnih slučajnih varijabli odgovaraju množenju odgovarajućih karakterističnih funkcija. Ako je μ konačna mjera, s μ^n označavamo n-kratnu konvoluciju μ same sa sobom.

Definicija 2.4.1. Neka je X slučajna varijabla na $\mathbb{R}^d$ i μ odgovarajuća vjerojatnosna mjera. Tada:

(i) kažemo da je μ *beskonačno djeljiva* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji vjerojatnosna mjera μ_n takva da $\mu = \mu_n^n$,

(ii) kažemo da X ima beskonačno djeljivu distribuciju ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje n.j.d. varijable $X_1, \dots, X_n$ takve da

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

(iii) μ je beskonačno djeljiva ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\widehat{\mu}_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da je karakteristična funkcija neke vjerojatnosne distribucije i $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}_n(z)^n$ za svaki $z \in \mathbb{R}^d$.

U sljedećoj propoziciji bez dokaza navodimo osnovna svojstva beskonačno djeljivih distribucija (v. [Sat99, §7] i [Sar80, §13, 14]). Najvažnije nam je vidjeti da logaritmirajne i potenciranje beskonačno djeljivih mjera ima neka očekivana lijepa svojstva — jedinstvenost, neprekidnost i dobro granično ponašanje.

[6] često poistovjećujemo vjerojatnosnu mjeru i odgovarajuću vjerojatnosnu funkciju distribucije (v. [Sar80, str. 257])

Propozicija 2.4.2. *(i) Ako su μ_1 i μ_2 beskonačno djeljive, tada je to i $\mu_1 * \mu_2$.*

(ii) Ako je μ beskonačno djeljiva tada $\widehat{\mu}(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{R}^d$.

(iii) Neka je $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $\varphi(0) = 1$ i $\varphi(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{R}^d$. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $f(0) = 0$ i $e^{f(z)} = \varphi(z)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena neprekidna funkcija $g_n: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $g_n(0) = 1$ i $g_n(z)^n = \varphi(z)$. Vrijedi $g_n(z) = e^{f(z)/n}$. Pišemo $f = \log \varphi$ i $g_n = \varphi^{1/n}$.

(iv) Neka su φ i $(\varphi_n)_n$ kao u uvjetima t. (iii). Ako $\varphi_n \to \varphi$ uniformno na svakom kompaktnom skupu, tada $\log \varphi_n \to \log \varphi$ uniformno na svakom kompaktnom skupu.

(v) Ako je $(\mu_n)_n$ niz beskonačno djeljivih vjerojatnosnih mjera i $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu$, tada je i μ beskonačno djeljiva.

(vi) Ako je μ beskonačno djeljiva, tada je μ^t dobro definirana i beskonačno djeljiva za svaki $t \in [0, \infty\rangle$.

Komentar 2.4.3. Razmotrimo primjere beskonačno djeljivih distribucija.

- Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $X_k \sim \mathrm{N}(\mu/n, \sigma^2/n)$ n.j.d. pa je

$$X_n \overset{\mathrm{d}}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

  Po definiciji slijedi da je normalna distribucija beskonačno djeljiva. Istu ideju možemo primijeniti da dokažemo da su beskonačno djeljive Poissonova, Γ i δ-distribucije. Ekvivalentno je gledati korijene karakterističnih funkcija i vidjeti da odgovaraju istom tipu distribucije s različitim parametrima. Tako su još beskonačno djeljive Cauchyjeva i negativna binomna distribucija.

- Uniformna i binomna distribucija nisu beskonačno djeljive. Za uniformnu karakteristična funkcija ima nultočke (prop. 2.4.2, t. (ii)). Za binomnu to nije slučaj, ali nije beskonačno djeljiva pa to pokazuje da ne vrijedi obrat. U [Sat99] se u kasnijim poglavljima pokazuje da su δ-distribucije jedine beskonačno djeljive distribucije s kompaktnim nosačem.

- Ako je $\{X_t\}$ Lévyjev je $\mathbb{P}_{X_1}$ beskonačno djeljiva. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $t_k = k/n$, $0 \leq k \leq n$ pa

$$X_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \right) \quad \text{g.s.}$$

  Tvrdnja slijedi zbog stacionarnosti i nezavisnosti inkremenata.

Slijedi glavni rezultat ovog odjeljka koji smo najavili na početku.

Teorem 2.4.4. *(i) Ako je X_t Lévyjev po distribuciji, tada je $\mathbb{P}_{X_t}$ beskonačno djeljiva za svaki $t \geq 0$ i $\mathbb{P}_{X_t} = \mathbb{P}^t_{X_1}$.*

(ii) Ako je μ beskonačno djeljiva distribucija, tada postoji Lévyjev proces po distribuciji $\{X_t\}$ takav da $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$.

(iii) Ako su $\{X_t\}$ i $\{X'_t\}$ Lévyjevi procesi po distribuciji takvi da $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X'_1}$, tada $\{X_t\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{X'_t\}$.

Dokaz. Dokažimo prvo (i). Da je $\mathbb{P}_{X_t}$ beskonačno djeljiva za sve $t \geq 0$ slijedi istom konstrukcijom kao u komentaru 2.4.3. Iz nje štoviše slijedi $\mathbb{P}_{X_{1/n}} = \mathbb{P}^{1/n}_{X_1}$ i zatim po prop. 2.4.2 je $\mathbb{P}_{X_{m/n}} = \mathbb{P}^{m/n}_{X_1}$. Dakle, tvrdnju smo dokazali za sve $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Neka je sada t iracionalan i $t_n \to t$ gdje $t_n \in \mathbb{Q}$. Stohastičku neprekidnost u t možemo zapisati kao $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$ pa konvergencija vrijedi i po distribuciji te povlači konvergenciju mjera $\mathbb{P}^{t_n}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_{t_n}} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathbb{P}_{X_t}$. Također $\mathbb{P}^{t_n}_{X_1} \xrightarrow{\mathrm{w}} P^t_{X_1}$ po prop. 2.4.2, t. (iii). Tvrdnja slijedi zbog jedinstvenosti limesa (npr. prop. 13.7 u [Sar80]).

Sada dokažimo (iii). Po (i) slijedi $X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'_t$ za $t \geq 0$ i po stacionarnosti inkremenata $X_{s+t} - X_s \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'_{s+t} - X'_s$ za $s, t \geq 0$. Zbog nezavisnosti komponenti jednako su distribuirani i vektori[7]

$$(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1} - X'_{t_0}, \ldots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}}) \tag{2.5}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Primjenom izmjerivog preslikavanja

$$(x_0, x_1, \ldots x_n) \mapsto (x_0, x_0 + x_1, \ldots, x_0 + x_1 + \cdots + x_n), \quad x_k \in \mathbb{R}^d$$

na obje strane (2.5) dobivamo

$$(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots X_{t_n}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1}, \ldots X'_{t_n}).$$

Preostaje (ii). Moramo definirati vjerojatnosni prostor i $\{X_t\}$ na njemu te zatim dokazati da proces ima željena svojstva. Uvedimo uobičajenu konstrukciju (npr. [Sat99, str. 4]): $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty\rangle}$, odgovarajuća σ-algebra cilindara za $\mathcal{F}$ i za $\omega = (\omega(t))_t$ stavimo $X_t(\omega) = \omega(t)$. Za $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ definiramo vjerojatnosnu mjeru na bazi σ-algebre $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{n+1})$

$$\begin{aligned}\mu_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_1-t_0}(y_1) 1_{B_1}(y_0 + y_1) \\ \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n) 1_{B_n}(y_0 + \cdots + y_n),\end{aligned} \tag{2.6}$$

[7]njihove komponente isto mogu biti vektori, tada se radi o blok-zapisu

gdje $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Mjera je dobro definirana po prop. 2.4.2, t. (vi). Familija $\{\mu_{t_0,\ldots,t_n}\}$ je suglasna (v. komentar 2.4.5) pa po teoremu Kolmogorova postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$ takva da

$$\mathbb{P}(X_{t_0} \in B_0, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = \mu_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n).$$

Stavimo li $t_0 = t$ i $B_k = \mathbb{R}^d$ za $k \geq 1$ dobivamo da X_t ima distribuciju μ^t. Posebice, $X_0 = 0$ g.s. Za ograničenu izmjerivu funkciju f generalno vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_0, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} & f(y_0, y_0 + y_1, \ldots, y_0 + \cdots + y_n) \\ & \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Neka je $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_k \in \mathbb{R}^d$, fiksan. Definiramo

$$\begin{aligned} f(x_0, \ldots, x_n) &= \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \langle z_k, x_k - x_{k-1}\rangle\right) \quad \text{i} \\ f_k(x_0, \ldots, x_n) &= \exp\left(i \langle z_k, x_k - x_{k-1}\rangle\right), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Onda je $f = \prod_k f_k$ te su $\mathbb{E}f(X_0, \ldots, X_n)$ i $\mathbb{E}f_k(X_0, \ldots, X_n)$ vrijednosti u točki z karakterističnih funkcija od redom $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ i $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$. Najprije se iz (2.7) lako dobije

$$\mathbb{E}f_k(X_0, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \langle z_k, y_k\rangle\right) \mathrm{d}\mu^{t_k - t_{k-1}}(y_k)$$

pa slijedi da $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ ima distribuciju $\mu^{t_k - t_{k-1}}$. Dakle, dokazali smo stacionarnost. Nezavisnost dobijemo jer

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}f(X_0, \ldots, X_n) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \langle z_k, y_k\rangle\right) \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n) \\ &\quad = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}f_k(X_0, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

Na kraju jer $\mu_t \xrightarrow{\text{w}} \mu_0 = \delta_0$ slijedi $X_t \xrightarrow{\text{d}} 0$ i $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ kad $t \downarrow 0$. Zbog stacionarnosti inkremenata, to se lako proširi na stohastičku neprekidnost na cijeloj domeni. Dakle, $\{X_t\}$ je Lévyjev po distribuciji. □

Komentar 2.4.5. Razjasnimo par stvari iz dokaza teorema 2.4.4.

- Intuicija iza (2.6) je sljedeća: svakako nas zanima vjerojatnost da $x_k \in B_k$, no preostaje pitanje kako „mjeriti" pojedini skok. Dekomponiranje mjere na komponente koje ovise samo o rasponu $t_k - t_{k-1}$ i mjerenje po inkrementima $(y_0 = x_0, y_k = x_k - x_{k-1})$ osiguravaju željena svojstva, a to se i potvrdi formalno.

- Obrazložimo zašto je familija mjera definiranih preko (2.6) suglasna. Kada imamo $1_{B_k} \equiv 1$ za $k < n$ dobiva se konvolucija dviju od mjera, a za $k = n$ funkcija koju integriramo više ne ovisi o y_n pa i mjera μ_n nestaje. Prikažimo prvo bez smanjenja općenitosti za $n = 2$ i $B_1 = \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} &\mu_{t_0,t_1,t_2}(B_0 \times \mathbb{R}^d \times B_2) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_2}(y_0 + y_1 + y_2)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1)\, \mathrm{d}\mu^{t_2 - t_1}(y_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_2}(y_0 + y_2')\, \mathrm{d}(\mu^{t_2 - t_1} * \mu^{t_1 - t_0})(y_2') \qquad (2.8) \\ &= \mu_{t_0,t_2}(B_0 \times B_2), \qquad (2.9) \end{aligned}$$

gdje $y_2' = y_1 + y_2$, a jednakost (2.8) dobijemo preko poznate formule za konvoluciju (npr. [Sar80, §13.4, (6)]). Naime, možemo ju u našem slučaju pisati i kao:

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_2 - y_0}(y_2')\, \mathrm{d}(\mu^{t_2 - t_1} * \mu^{t_1 - t_0})(y_2') = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_2}(y_0 + y_1 + y_2)\, \mathrm{d}\mu^{t_2 - t_1}(y_2)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1).$$

Za (2.9) nam treba i $\mu^s * \mu^t = \mu^{s+t}$ — po prop. 2.4.2 karakteristična funkcija od μ^{s+t} je $\exp[(t + s) \log \widehat{\mu}]$ što je produkt karakterističnih funkcija od μ^s i μ^t.

Za kraj odjeljka vrijedi spomenuti i temu Lévy–Hinčinove reprezentacije beskonačno djeljivih distribucija odn. njihovih karakterističnih funkcija. Ona nam ovdje nije bila potrebna, no detaljno je obrađena u [Sat99, §8].

2.5 Markovljevi procesi i modifikacije

U ovom odjeljku uvodimo Markovljeve procese. Pokazuje se da su oni generalizacija Lévyjevih i aditivnih procesa, tj. Lévyjevi i aditivni procesi zadovoljavaju Markovljevo svojstvo. Zanima nas ima li Lévyjev po distribuciji proces iz teorema 2.4.4, t. (ii), modifikaciju koja je Lévyjev proces. Pitanje modifikacija s càdlàg ili neprekidnim trajektorijama promatrat ćemo na Markovljevim procesima; dovoljne uvjete dajemo u teoremu 2.5.10.

Najprije uvedimo pojam tranzicijske funkcije. Intuitivno, funkcija mjeri vjerojatnost prijelaza iz točke x u skup B između trenutaka s i t.

Definicija 2.5.1. Preslikavanje $\mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ gdje $x \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i $0 \leq s \leq t < \infty$ je *tranzicijska funkcija* na $\mathbb{R}^d$ ako

(i) za fiksni x je $B \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

(ii) za fiksni B je $x \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ Borel-izmjeriva,

(iii) vrijedi $\mathbb{P}_{s,s}(x, B) = \delta_x(B)$ i

(iv) zadovoljava relaciju

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_{s,t}(x, \mathrm{d}y)\mathbb{P}_{t,u}(y, B) = \mathbb{P}_{s,u}(x, B), \quad u \geq t. \tag{2.10}$$

Dodatno, razmatramo uvjete:

(v) $\mathbb{P}_{s+h,t+h}(x, B)$ ne ovisi o h i

(vi) $\mathbb{P}_{s,t}(x, B) = \mathbb{P}_{s,t}(0, B - x)$.

Ako vrijedi (v) kažemo da je tranzicijska funkcija *vremenski homogena*. Ako vrijedi (vi) kažemo da je *prostorno homogena* ili *invarijantna na translaciju*.

Komentar 2.5.2.

- Jednakost (2.10) zove se identitet Chapman–Kolmogorova.
- Ako familiju $\{\mathbb{P}_{s,t} : 0 \leq s \leq t\}$ čine vremenski homogene tranzicijske funkcije, označavamo ju s $\{\mathbb{P}_t : t \geq 0\}$ gdje $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}_{0,t}$.

Komentar 2.5.3. Za familiju $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ tranzicijskih funkcija i početnu vrijednost $a \in \mathbb{R}^d$ možemo konstruirati proces $\{Y_t\}$ kako slijedi. Tehnika i ideje slične su kao u dokazu teorema 2.4.4 pa ćemo biti manje detaljni. Definiramo na uobičajeni način Ω, $\mathcal{F}$ i $\{Y_t\}$. Za $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ i $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiramo vjerojatnosnu mjeru preko

$$\begin{aligned}
&\mu^{(a)}_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(x_0) \cdots 1_{B_n}(x_n) \\
&\qquad\qquad \mathbb{P}_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) \cdots \mathbb{P}_{t_0,t_1}(x_0, \mathrm{d}x_1)\mathbb{P}_{0,t_0}(a, \mathrm{d}x_0).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Suglasnost takve familije slijedi iz (2.10) te se ona proširi na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^a$ na $\mathcal{F}$.

Slična konstrukcija moguća je za drukčije početno vrijeme $s > 0$. Tada $\Omega^s = (\mathbb{R}^d)^{[s,\infty\rangle}$ i definiramo proces $\{Y_t : t \geq s\}$. Familija mjera

$$\left\{\mu^{(s,a)}_{t_0,\dots,t_n} : s \leq t_0 < \cdots < t_n\right\}$$

definira se analogno kao u (2.11) i proširi se na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^{s,a}$ na σ-algebri $\mathcal{F}^s$. Možemo iste oznake s $s = 0$ koristiti za objekte iz prošlog paragrafa.

Definicija 2.5.4. Slučajni proces $\{X_t\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je *Markovljev proces sa familijom tranzicijskih funkcija* $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ *i početnom vrijednosti* a ako je po distribuciji jednak procesu $\{Y_t : t \geq 0\}$ definiranom u komentaru 2.5.3. Ako su tranzicijske funkcije vremenski homogene, i sam proces naziva se *vremenski homogenim*. Analogno, za proces $\{X_t : t \geq s\}$ jednak po distribuciji procesu $\{Y_t : t \geq s\}$ na prostoru $(\Omega^s, \mathcal{F}^s, \mathbb{P}^{s,a})$ može se dodati da ima *početno vrijeme* s. Procesi $\{Y_t\}$ zovu se *trajektorijska reprezentacija.*

Vezu Markovljevih s aditivnim i Lévyjevim procesima možemo ukratko i pomalo neprecizno (v. [Sat99, §10]) rezimirati ovako:

- aditivni (po distribuciji) proces odgovara Markovljevom procesu s prostorno homogenom tranzicijskom funkcijom i

- Lévyjev (po distribuciji) proces odgovara Markovljevom procesu s prostorno i vremenski homogenom tranzicijskom funkcijom.

Sljedeća propozicija uvodi varijantu Markovljevog svojstva za ovu vrstu procesa. Većina dokaza je tehnička i temelji se na Lebesgueovoj indukciji pa ga izostavljamo, ali neke stvari pojašnjavamo u komentaru 2.5.6.

Propozicija 2.5.5. *Neka je* $\{Y_t\}$ *trajektorijska reprezentacija Markovljevog procesa s familijom tranzicijskih funkcija* $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$. *Neka su* $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ *i* f *ograničena Borel-izmjeriva funkcija na* $\mathbb{R}^d$. *S* $\mathbb{E}^{s,a}$ *označimo matematičko očekivanjem s obzirom na vjerojatnosnu mjeru* $\mathbb{P}^{s,a}$. *Tada je* $a \mapsto \mathbb{E}^{0,a}[f(Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n})]$ *Borel-izmjeriva za sve* $a \in \mathbb{R}^d$ *i*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{0,a}[f(Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n})] \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0, \dots, x_n) \\ &\qquad\qquad \mathbb{P}_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) \cdots \mathbb{P}_{t_0,t_1}(x_0, \mathrm{d}x_1)\mathbb{P}_{0,t_0}(a, \mathrm{d}x_0).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Nadalje, ako su $0 \leq s_0 < \cdots < s_m \leq s$ i g ograničena Borel-izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^d$ vrijedi[8]

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{0,a}[g(Y_{s_0}, \ldots, Y_{s_m}) f(Y_{s+t_0}, \ldots, Y_{s+t_n})] \\ &\quad = \mathbb{E}^{0,a}[g(Y_{s_0}, \ldots, Y_{s_m}) \mathbb{E}^{s,Y_s}[f(Y_{s+t_0}, \ldots, Y_{s+t_n})]].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Komentar 2.5.6. Relacija (2.13) zove se Markovljevo svojstvo. Objasnimo prvo bazu Lebesgueove indukcije u dokazu (2.13). Uzimamo

$$f = \prod_{k=0}^{n} 1_{B_k} \quad \text{i} \quad g = \prod_{k=0}^{m} 1_{C_k},$$

gdje su $B_0, \ldots B_n, C_0, \ldots, C_m$ Borelovi. Raspišemo li lijevu stranu od (2.13) preko (2.12) dobivamo da je jednaka

$$\mathbb{P}^{0,a}(Y_{s_0} \in C_0, \ldots, Y_{s_m} \in C_m, Y_{s+t_0} \in B_0, \ldots, Y_{s+t_n} \in B_n). \tag{2.14}$$

zbog (2.11). U (2.14) dodamo još $Y_s \in \mathbb{R}^d$ prije nego raspišemo po (2.11). Unutarnjih $n+1$ integrala je jednako

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{k=0}^{n} 1_{B_k}(y_k) \mathbb{P}_{s+t_{n-1}, s+t_n}(y_{n-1}, \,\mathrm{d}y_n) \\ \cdots \mathbb{P}_{s+t_0, s+t_1}(y_0, \,\mathrm{d}y_1) \mathbb{P}_{s, s+t_0}(y_s, \,\mathrm{d}y_0),\end{aligned}$$

što po (2.12) i (2.11) za opći s prepoznajemo kao $\mathbb{E}^{s,y_s}[f(Y_{s+t_0}, \ldots, Y_{s+t_n})]$. Uvrštavanjem natrag u raspis opet primijenimo (2.12) da zaključimo da je upravo riječ o desnoj strani u (2.13).

Intuitivno, Markovljevo svojstvo govori da budućnost ovisi samo o trenutnom stanju procesa, a ne i o prošlima. Preciznije, za predvidjeti budućnost jednako je korisna sadašnjost koliko i svi dosad poznati događaji. Pokažimo kako to doista slijedi iz (2.13). Fiksirajmo $s, t_0, \ldots, t_n$, uvedimo pokrate $X = f(Y_{s+t_0}, \ldots, Y_{s+t_n})$ i $h(x) = \mathbb{E}^{s,x}(X)$ te definirajmo σ-algebru

$$\mathcal{F}_s = \sigma\left(Y_t \colon 0 \leq t \leq s\right).$$

Razmotrimo i skup

$$G = \{g(Y_{s_0}, \ldots, Y_{s_m}) \colon 0 \leq s_0 < \cdots < s_m \leq s, g \text{ Borelova i ograničena}\}. \tag{2.15}$$

Kad bismo u (2.15) izostavili uvjet da je g ograničena bio bi G jednak skupu svih $\mathcal{F}_s$-izmjerivih varijabli (v. [Sar80, tm. 8.6]). Ipak, budući da svaku g možemo dobiti

[8] $\mathbb{E}^{s,Y_s}[\cdot]$ znači $h(Y_s)$ gdje je $h(x) = \mathbb{E}^{s,x}[\cdot]$

kao limes ograničenih, lako je dokazati da $\sigma(G) = \mathcal{F}_s$. U novim oznakama (2.13) postaje

$$\mathbb{E}^{0,a}[ZX] = \mathbb{E}^{0,a}[Zh(Y_s)], \quad Z \in G,$$

što se istim principom proširuje na sve Z izmjerive u $\mathcal{F}_s$. Budući da je $h(Y_s)$ očito izmjeriva u $\mathcal{F}_s$, po definiciji uvjetnog očekivanja (v. [Sar80, str. 579]) zaključujemo da je $h(Y_s) = \mathbb{E}^{0,a}[X \mid \mathcal{F}_s]$. No, $h(Y_s)$ je izmjeriva i u $\sigma(Y_s)$ te zbog $\sigma(Y_s) \subseteq \mathcal{F}_s$ opet po definiciji $h(Y_s) = \mathbb{E}^{0,a}[X \mid Y_s]$. Dakle,

$$\mathbb{E}^{0,a}\left[X \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}^{0,a}[X \mid Y_s].$$

Analogno prethodnoj diskusiji, X se može zamijeniti bilo kojom varijablom izmjerivom u $\sigma(Y_t : t \geq s)$. Zbog te općenitosti dobivamo i

$$\mathbb{P}^{0,a}\left[X \in A \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{P}^{0,a}\left[X \in A \mid Y_s\right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Sada možemo krenuti prema glavnom rezultatu odjeljka. Definirajmo najprije nekoliko novih pojmova. Za $x \in \mathbb{R}^d$ neka je $K_\varepsilon(x)$ ε-okolina točke x, tj.[9] $K_x(\varepsilon) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < \varepsilon\right\}$. Neka su $\mathbb{P}_{s,t}$ tranzicijske funkcije na $\mathbb{R}^d$. Definiramo

$$\alpha_{\varepsilon,T}(u) = \sup\{\mathbb{P}_{s,t}(x, K_\varepsilon^c(x)) : x \in \mathbb{R}^d,\ s,t \in [0,T],\ 0 \leq t - s \leq u\}. \tag{2.16}$$

Nadalje neka je $M \subseteq [0, \infty\rangle$. Za fiksni ω kažemo da $X_t(\omega)$ ima *ε-oscilaciju n puta u M* ako postoje $t_0 < \cdots < t_n$ gdje $t_k \in M$ takvi da

$$\left|X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega)\right| > \varepsilon, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Ako tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, kažemo da ima *beskonačno čestu ε-oscilaciju.* Definiramo još

$$\begin{aligned}
\Omega_2 = \{\omega \in \Omega :\ & \lim_{s \in \mathbb{Q}, s \downarrow t} X_s(\omega) \text{ postoji u } \mathbb{R}^d \text{ za sve } t \geq 0 \text{ i} \\
& \lim_{s \in \mathbb{Q}, s \uparrow t} X_s(\omega) \text{ postoji u } \mathbb{R}^d \text{ za sve } t > 0\},
\end{aligned}$$

$$A_{N,k} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ nema beskonačno čestu } \frac{1}{k}\text{-oscilaciju u } [0,N] \cap \mathbb{Q}\},$$

$$\Omega_2' = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{N,k},$$

$$B(p, \varepsilon, M) = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \text{ ima } \varepsilon\text{-oscilaciju } p \text{ puta u } M\}.$$

Pokaže se $\Omega_2' \in \mathcal{F}$. Prije glavnog rezultata, potrebno nam je nekoliko lema.

[9] zapis implicira da je $|\cdot|$ norma na $\mathbb{R}^d$ — kako su sve norme ekvivalentne na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, odabir nije bitan

Lema 2.5.7. *Vrijedi* $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$.

Dokaz. Neka je $\omega \in \Omega_2'$ i pretpostavimo da ne postoji limes zdesna u $t \geq 0$ (analogno za limes slijeva). To znači da postoji niz $(s_n)_n$ racionalnih brojeva takvih da $s_n \downarrow t$ i da ne postoji limes $\lim_n X_{s_n}(\omega)$. To znači da niz $(X_{s_n}(\omega))_n$ nije Cauchyjev tj. postoji $\varepsilon > 0$ takav da

$$(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists m, n \geq n_0 \text{ takvi da } |X_{s_n}(\omega) - X_{s_m}(\omega)| > 2\varepsilon). \tag{2.17}$$

Naći ćemo beskonačno čestu ε-oscilaciju i time kontradikciju. Neka je $s_1' = s_n$ proizvoljan. Tvrdimo da postoji $s_2' = s_m$ gdje $m > n$ takav da $\left|X_{s_1'}(\omega) - X_{s_2'}(\omega)\right| > \varepsilon$. U suprotnom bi bilo

$$\begin{aligned}|X_{s_m}(\omega) - X_{s_k}(\omega)| &\leq \left|X_{s_m}(\omega) - X_{s_1'}(\omega)\right| + \left|X_{s_1'}(\omega) - X_{s_k}(\omega)\right| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

za sve $m, k > n$ što je u kontradikciji s (2.17). Iteriranjem ovog postupka dolazimo do niza $(s_n')_n$ takvog da $\left|X_{s_k'}(\omega) - X_{s_{k+1}'}(\omega)\right| > \varepsilon$ za $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.5.8. *Ako je* $\{X_t\}$ *stohastički neprekidan i* $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$, *tada ima modifikaciju* $\{X_t'\}$ *takvu da je* $t \mapsto X_t'(\omega)$ *càdlàg za svaki* $\omega \in \Omega$.

Dokaz. Definiramo

$$X_t'(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{s \in \mathbb{Q}, s \downarrow t} X_s(\omega), & \omega \in \Omega_2', \\ 0, & \omega \notin \Omega_2'. \end{cases}$$

Dokažimo da je $t \mapsto X_t'(\omega)$ neprekidna zdesna. Za $\omega \notin \Omega_2'$ je očito, pa neka $\omega \in \Omega_2'$. Neka je $t \geq 0$ proizvoljan i $(t_n)_n$ takav da $t_n \downarrow t$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\delta_n > 0$ takav da $t_n + \delta_n \in \mathbb{Q}$ i takav da desna strana u

$$\left|X_t'(\omega) - X_{t_n}'(\omega)\right| \leq |X_t'(\omega) - X_{t_n+\delta_n}(\omega)| + \left|X_{t_n+\delta_n}(\omega) - X_{t_n}'(\omega)\right|$$

teži k nuli kad $n \to \infty$. Jasno je da je to moguće po definiciji skupa $\Omega_2 \supseteq \Omega_2'$. Time smo dokazali neprekidnost zdesna, a postojanje limesa slijeva dokaže se sličnom tehnikom.

Preostaje dokazati da je $\{X_t\}$ doista modifikacija polaznog procesa. Neka je $t \geq 0$ i $(s_n)_n$ niz racionalnih brojeva takav da $s_n \downarrow t$. Po stohastičkoj neprekidnosti je $X_{s_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$, a po definiciji procesa $\{X_t'\}$ i $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$ vrijedi $X_{s_n} \xrightarrow{\text{g.s.}} X_t'$. Slijedi $\mathbb{P}(X_t = X_t') = 1$. □

Lema 2.5.9. *Neka je $p \in \mathbb{N}$,*

$$0 \leq s_1 < \cdots < s_m \leq u \leq t_1 < \cdots < t_n \leq v \leq T$$

i $M = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Ako je $\{X_t\}$ Markovljev proces s familijom tranzicijskih funkcija $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ i početnom vrijednosti a, tada

$$\mathbb{E}^{0,a}[Z \cdot 1_{B(p,4\varepsilon,M)}] \leq \mathbb{E}^{0,a}[Z](2\alpha_{\varepsilon,T}(v-u))^p,$$

za svaku $Z = g(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$, gdje je g Borelova i nenegativna.

Dokaz. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $\{X_t\}$ sam trajektorijska reprezentacija. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po p. Neka je $p = 1$. Definiramo događaje

$$\begin{aligned}
&C_k = \left\{ \left| X_{t_j} - X_u \right| \leq 2\varepsilon, \text{ za } 1 \leq j \leq k-1 \text{ i } |X_{t_k} - X_u| > 2\varepsilon \right\}, \\
&D_k = \{|X_v - X_{t_k}| > \varepsilon\}, \quad 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

Događaji C_k su disjunktni. Tvrdimo

$$\begin{aligned}
B(1, 4\varepsilon, M) &\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{|X_{t_k} - X_u| > 2\varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \\
&\subseteq \{|X_u - X_v| \geq \varepsilon\} \cup \bigcup_{k=1}^{n} (C_k \cap D_k).
\end{aligned}$$

Prva inkluzija vrijedi jer ako $\omega \in B(1, 4\varepsilon, M)$ i $4\varepsilon < \left| X_{t_j}(\omega) - X_{t_k} \right| \leq \left| X_{t_j} - X_u \right| + |X_{t_k} - X_u|$ pa je barem jedan od sumanada zdesna $> 2\varepsilon$. Ako $\omega \in C_k$ iz $4\varepsilon \left| X_{t_j} - X_{t_k} \right| \leq \left| X_{t_j} - X_u \right| + |X_u - X_v| + |X_{t_k} - X_v|$ i $|X_u - X_v| < \varepsilon$ slijedi $|X_{t_k} - X_v| > \varepsilon$, stoga vrijedi druga inkluzija. Primjenom matematičkog očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{0,a}[Z \cdot 1_{B(1,4\varepsilon,M)}] &\leq \mathbb{E}^{0,a}\left[Z \cdot 1_{\{|X_u - X_v| \geq \varepsilon\}}\right] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}[Z 1_{C_k} 1_{D_k}] \\
&\leq \mathbb{E}^{0,a}[Z]\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}[Z 1 C_k]\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) \\
&\leq 2\mathbb{E}^{0,a}[Z]\alpha_{\varepsilon,T}(v-u),
\end{aligned}$$

pri čemu drugu nejednakost dobivamo primjenom Markovljevog svojstva (2.13), nakon čega dobivenu varijablu možemo uniformno ograničiti konstantom $\alpha_{\varepsilon,T}(v-u)$ po definiciji (2.16). Time je dokazana baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $p-1$ i dokažimo da vrijedi za p. Definiramo događaje

$$F_k = \{X_t \text{ ima } 4\varepsilon\text{-oscilaciju } p-1 \text{ puta u } \{t_1, \dots, t_k\} \text{ ali ne i u } \{t_1, \dots, t_{k-1}\}\},$$
$$G_k = \{X_t \text{ ima } 4\varepsilon\text{-oscilaciju jednom u } \{t_{k+1}, \dots, t_n\}\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Događaji F_k su disjunktni i očito

$$B(p-1, 4\varepsilon, M) = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \quad \text{i} \quad B(p, 4\varepsilon, M) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (F_k \cap G_k).$$

Nastavimo kao u dokazu baze te primjenom pretpostavke i slučaja $p=1$ dobivamo traženo. □

Slijedi glavni rezultat odjeljka koji daje dovoljne uvjete da bi Markovljev proces imao modifikaciju s càdlàg odn. neprekidnim trajektorijama.

Teorem 2.5.10. *Neka je $\{X_t\}$ Markovljev proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s familijom tranzicijskih funkcija $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$. Ako vrijedi*

$$\lim_{u \downarrow 0} \alpha_{\varepsilon,T}(u) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall T > 0, \tag{2.18}$$

tada $\{X_t\}$ ima modifikaciju $\{X'_t\}$ takvu da je trajektorija $t \mapsto X'_t(\omega)$ càdlàg za svaki $\omega \in \Omega$. Ako vrijedi jači uvjet

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u} \alpha_{\varepsilon,T}(u) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall T > 0, \tag{2.19}$$

tada $\{X_t\}$ ima modifikaciju $\{X'_t\}$ takvu da postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X'_t(\omega)$ neprekidna.

Dokaz. Pretpostavimo prvo (2.18). Po lemi 2.5.8 dovoljno je dokazati $\mathbb{P}(\Omega'_2) = 1$, a za to je opet dovoljno $\mathbb{P}(A^c_{N,k}) = 0$ za sve $N, k \in N$. Fiksirajmo N i k. Po (2.18) odaberimo ℓ takav da $2\alpha_{1/(4k),N}(N/\ell) < 1$. Definiramo $t_j = \frac{Nj}{\ell}$ za $0 \leq j \leq \ell$ i $I_j = [t_{j-1}, t_j] \cap \mathbb{Q}$ za $j > 0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c_{N,k}) &= \mathbb{P}\left(X_t \text{ ima } \frac{1}{k}\text{-oscilaciju beskonačno često u } [0,N] \cap \mathbb{Q}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(X_t \text{ ima } \frac{1}{k}\text{-oscilaciju beskonačno često u } I_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \lim_{p \to \infty} \mathbb{P}\left[B\left(p, \frac{1}{k}, I_j\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Uzmimo fiksni I_j i $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset I_j$. Po lemi 2.5.9 je

$$\mathbb{P}\left[B\left(p, 1/k, \{s_1, \ldots, s_n\}\right)\right] \leq \left(2\alpha_{\frac{1}{4k},N}\left(\frac{N}{\ell}\right)\right)^p.$$

Aproksimirajući I_j odozgo konačnim skupovima ($n \to \infty$) slijedi

$$\mathbb{P}\left[B\left(p, 1/k, I_j\right)\right] \leq \left(2\alpha_{\frac{1}{4k},N}\left(\frac{N}{\ell}\right)\right)^p,$$

što znači da (2.20) teži u 0, a stoga i $\mathbb{P}(A^c_{N,k}) = 0$ kako smo htjeli.

Pretpostavimo sada (2.19). Dovoljno je dokazati da za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $H_N \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(H_N) = 1$ i

$$H_N \subseteq \left\{X'_t = X'_{t-},\ \forall t \in \langle 0, N]\right\}.$$

gdje je X'_{t-} limes slijeva u t. Neka je N fiksan i definiramo za $\ell \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$

$$R_{\ell,\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\ell} 1_{\left\{\left|X'_{t_j} - X'_{t_{j-1}}\right| > \varepsilon\right\}},$$
$$R_\varepsilon(\omega) = \operatorname{card}\left\{t \in \langle 0, N] : \left|X'_t(\omega) - X'_{t-}(\omega)\right| > \varepsilon\right\}$$

pa je $R_\varepsilon(\omega) \leq \liminf_{\ell\to\infty} R_{\ell,\varepsilon}(\omega)$. Vrijedi

$$\mathbb{E}(R_{\ell,\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(\left|X'_{t_j} - X'_{t_{j-1}}\right| > \varepsilon\right) \leq \ell\alpha_{\varepsilon,N}\left(\frac{N}{\ell}\right).$$

Po (2.19) imamo $\lim_{\ell\to\infty} \mathbb{E}(R_{\ell,\varepsilon}) = 0$ i po Fatouovoj lemi $\mathbb{E}\left(\liminf_{\ell\to\infty} R_{\ell,\varepsilon}\right) = 0$. Stavimo

$$H_N = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left\{\liminf_{\ell\to\infty} R_{\ell,1/k} = 0\right\}.$$

Zadovoljili smo željeni uvjet jer $H_N \subseteq \{R_\varepsilon = 0,\ \forall \varepsilon > 0\}$. □

Sada samo trebamo dokazati da Lévyjev po distribuciji proces zadovoljava (2.18) da bismo mogli pojačati teorem 2.4.4 i zaključiti da postoji 1-1 korespondencija između beskonačno djeljivih distribucija i Lévyjevih procesa. Štoviše, za aditivni proces po distribuciji, koji je Markovljev s prostorno homogenim tranzicijskim funkcijama, imamo:

$$\mathbb{P}_{s,t}(x, K^c_\varepsilon(x)) = \mathbb{P}_{s,t}(0, K^c_\varepsilon(0)) = \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon).$$

Slijedi $\alpha_{\varepsilon,T}(u) \to 0$ kad $u \to 0$. Za taj zaključak nam je zapravo potrebna i uniformnost stohastičke neprekidnosti na segmentu (v. [Sat99, lema 9.6]). Dakle, po teoremu 2.5.10 svaki Lévyjev po distribuciji (aditivan po distribuciji) proces ima modifikaciju s càdlàg trajektorijama, tj. koja je Lévyjev (aditivni) proces.

Na korak smo i do dokaza da Brownovo gibanje definirano preko definicije 2.3.1 postoji, no fali još svojstvo (ii) za što bismo trebali dokazati i (2.19). Pokazuje se svaki Lévyjev gaussovski (tj. takav da je svaka konačnodimenzionalna distribucija normalna) proces u $\mathbb{R}$ g.s. ima neprekidne trajektorije, što je tvrdnja sljedećeg teorema. Tvrdnja vrijedi i za aditivni proces u općem $\mathbb{R}^d$ (v. [Sat99, tm. 11.7]). Čak vrijedi i obrat, tj. jedini aditivni procesi s neprekidnim trajektorijama su gaussovski (v. [Sat99, §21]).

Teorem 2.5.11. *Ako je $\{X_t\}$ Lévyjev gaussovski proces na $\mathbb{R}$, tada gotovo sigurno vrijedi da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna.*

Dokaz. Neka je bez smanjenja općenitosti $X_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$. Ocjenu

$$\int_c^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \le \int_c^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{c}e^{-\frac{c^2}{2}}, \quad c>0,$$

gdje se jednakost dobije direktno antiderivacijom, iskoristimo za

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_s|>\varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi s}}\int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{-x^2}{2s}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varepsilon/\sqrt{s}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \le \frac{2\sqrt{s}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\varepsilon^2}{2s}}.\end{aligned}$$

Stoga,

$$\frac{1}{u}\alpha_{\varepsilon,T}(u) = \frac{1}{u}\sup_{s\le u,T}\mathbb{P}(|X_s|>\varepsilon) \le \sup_{s\le u,T}\frac{1}{s}\mathbb{P}(|X_s|>\varepsilon) \to 0, \quad u\downarrow 0,$$

čime smo dokazali (2.19). □

2.6 Samosličnost

U ovom odjeljku formalno uvodimo pojam samosličnosti slučajnih procesa koji smo najavili još u uvodu. Za Brownovo gibanje vidjeli smo to svojstvo u teoremu 2.3.2. Osim o samosličnosti, govori se i o nekoliko generalizacija.

Definicija 2.6.1. Kažemo da je slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}^d$:

- *samosličan* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da

$$\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t\}, \tag{2.21}$$

- *samosličan u širem smislu* ako za svaki $a > 0$ postoje $b > 0$ i $c\colon [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}^d$ takvi da

$$\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t + c(t)\}, \tag{2.22}$$

- *polu-samosličan* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji $b > 0$ takav da vrijedi (2.21),
- *polu-samosličan u širem smislu* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji $b > 0$ i $c\colon [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}^d$ takvi da vrijedi (2.22).

Sljedeći teorem je fundamentalan za samosličnost i generalizacije.

Teorem 2.6.2. *Neka je $\{X_t\}$ polu-samosličan u širem smislu, stohastički neprekidan i netrivijalan*[10] *proces na $\mathbb{R}^d$ s X_0 g.s. konstantom. Neka je Γ skup svih a takvih da postoje b i c takvi da vrijedi (2.22).*

(i) Postoji $H > 0$ takav da

$$b = a^H, \quad a \in \Gamma. \tag{2.23}$$

(ii) Skup $\Gamma \cap \langle 1,\infty\rangle$ je neprazan. Neka je a_0 infimum tog skupa.

- *Ako je $a_0 > 1$ je $\Gamma = \{a_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ i $\{X_t\}$ nije samosličan u širem smislu.*
- *Ako je $a_0 = 1$ je $\Gamma = \langle 0,\infty\rangle$ i $\{X_t\}$ je samosličan u širem smislu.*

Eksponent H iz (2.23) je važna karakteristika samosličnog slučajnog procesa. Naziva se i Hurstov eksponent. Kada ga želimo naglasiti govorimo o H-samosličnim procesima. Dokazat ćemo manje općenitu verziju teorema, a za to nam je najprije potrebna sljedeća jednostavna lema.

Lema 2.6.3. *Neka je X ne-nul slučajna varijabla na $\mathbb{R}^d$. Ako je $b_1 X \stackrel{\mathrm{d}}{=} b_2 X$ za neke $b_1, b_2 > 0$, onda $b_1 = b_2$.*

Dokaz. Neka je $b_1 < b_2$ bez smanjenja općenitosti i $b = b_1/b_2 < 1$. Tada je $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} bX$ i induktivno $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} b^n X$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Puštanjem $n \to \infty$ dobivamo $X = 0$ g.s. s kontradikcijom. □

[10]slučajna varijabla je trivijalna ako $\mathbb{P}(X = c) = 1$ za neki c, slučajni proces $\{X_t\}$ je trivijalan ako je svaka X_t trivijalna

Teorem 2.6.4. *Neka je $\{X_t\}$ samosličan, stohastički neprekidan i netrivijalan slučajni proces. Tada postoji $H \geq 0$ takav da vrijedi $b = a^H$ za sve a, b iz (2.21).*

Dokaz. Neka je t takav da je X_t ne-nul varijabla. Ako $b_1 X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{at} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b_2 X_t$ po lemi 2.6.3 slijedi $b_1 = b_2$. Dakle, b u (2.21) je jedinstveno određen s a i možemo ga označavati $b(a)$ (isto se pokazuje da vrijedi za c iz (2.22)). Nadalje vrijedi

$$X_{a_1 a_2 t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b(a_1) X_{a_2 t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b(a_1) b(a_2) X_t,$$

ali jasno i $X_{a_1 a_2 t} = b(a_1 a_2) X_t$ iz čega slijedi $b(a_1 a_2) = b(a_1) b(a_2)$. Stoga $X_{a^n t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b(a)^n X_t$. Za $a < 1$ po stohastičkoj neprekidnosti $X_{a^n t} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_0$ i zato $b(a) \leq 1$. Ako $a_1 < a_2$ je $1 \geq b(a_1/a_2) = b(a_1)/b(a_2)$, tj. $b(a_1) \leq b(a_2)$. Dakle, $a \mapsto b(a)$ je multiplikativna i neopadajuća. Poznato je da je rješenje takve funkcijske jednadžbe dano s $b(a) = a^H$ za neki fiksni $H \geq 0$. $\square$

Komentar 2.6.5. Pojasnimo slučaj $H = 0$ i diskrepanciju između teorema 2.6.2 i 2.6.4. Ako $H = 0$ je $\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{X_t\}$ za svaki $a > 0$. Za svaki $t \geq 0$ posebice $X_t - X_0 \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{at} - X_0$. Onda i

$$\mathbb{P}(|X_t - X_0| > \varepsilon) = \lim_{a \downarrow 0} \mathbb{P}(|X_{at} - X_0| > \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

pri čemu druga jednakost vrijedi zbog stohastičke neprekidnosti. Zbog proizvoljnosti ε, slijedi $X_t = X_0$ g.s. Kada bismo još zahtijevali da je X_0 g.s. konstanta kao u teoremu 2.6.2, bio bi proces $\{X_t\}$ trivijalan.

Obratno, ako je $H > 0$ stavimo $t = 0$ pa $X_0 \stackrel{\mathrm{d}}{=} a^H X(0)$, i uz $a \downarrow 0$ dobivamo $X_0 = 0$ g.s. Zbog tih činjenica kod samosličnih procesa često podrazumijevamo stohastičku neprekidnost i $H > 0$.

Kada je riječ o samosličnim Lévyjevim procesima, koristimo i sljedeće pojmove.

Definicija 2.6.6. Kažemo da je beskonačno djeljiva distribucija μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

- *strogo stabilna* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da
$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(bz), \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{2.24}$$
- *stabilna* ako za svaki $a > 0$ postoje $b > 0$ i $c \in \mathbb{R}^d$ takvi da
$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(bz) e^{i\langle c, z\rangle}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{2.25}$$
- *strogo polu-stabilna* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji $b > 0$ takav da vrijedi (2.24),

- *polu-stabilna* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoje $b > 0$ i $c \in \mathbb{R}^d$ takvi da vrijedi (2.25).

Kažemo da je Lévyjev proces strogo stabilan ili dr. ako je to distribucija $\mathbb{P}_{X_1}$. Lako je dokazati da je Lévyjev proces strogo stabilan, stabilan, strogo polu-stabilan ili polu-stabilan ako i samo ako je redom samosličan, samosličan u širem smislu, polu-samosličan ili polu-samosličan u širem smislu. U [EM02, §1.4] navodi se rezultat analogan teoremu 2.6.2: u (2.24) i (2.25) vrijedi $b = a^{1/\alpha}$ za neki fiksni $\alpha \in \langle 0, 2]$. Za takav α onda se lako pokaže $H = 1/\alpha \geq 1/2$. Parametar α zove se *indeks*, a za proces se kaže da je α-stabilan ili α-polu-stabilan i sl.

Primjerice, lako se vidi da su normalna ($\alpha = 2$) i Cauchyjeva ($\alpha = 1$) distribucija stabilne. Standardna normalna i Cauchyjeva su štoviše strogo stabilne. Sve stabilne distribucije moguće je karakterizirati preko četiriju parametara što je tema u [Sat99, §14]. Zato se često govori o *stabilnoj distribuciji* umjesto *stabilnim distribucijama*.

Svaki samoslični proces sa stacionarnim i nezavisnim inkrementima, podrazumijevajući stohastičku neprekidnost i $X_0 = 0$ g.s. (v. komentar 2.6.5) je Lévyjev strogo stabilni proces (uz ev. modifikaciju; odjeljak 2.5). Ipak, nisu svi samoslični procesi Lévyjevi, pa se proučavaju odvojeno samoslični procesi čiji su inkrementi jedino stacionarni odn. jedino nezavisni (v. [EM02]).

U slučaju samosličnih procesa sa stacionarnim inkrementima, možemo naći vezu s fenomenom *dugoročne zavisnosti* (*pamćenja*; [EM02, §3.2]), koja se konkretno definira sporim opadanjem autokovarijacijske funkcije. Stavimo $J_n = X_{n+1} - X_n$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\gamma(n) = \mathbb{E}(J_0 J_n)$. U analizi stacionarnih nizova često nam je poželjan uvjet

$$\sum_n \gamma(n) < \infty,$$

koji zovemo *kratkoročna zavisnost* te se javlja npr. kod ARMA modela. S druge strane, dokazat ćemo da za $H > 1/2$ red ne konvergira. Osim toga, $H > 1/2$ i $H < 1/2$ impliciraju da su inkrementi redom pozitivno odn. negativno korelirani. Najprije, potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.6.7. *Neka je $\{X_t\}$ H-samosličan slučajni proces sa stacionarnim inkrementima u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)\mathbb{E}X_1^2, \quad t, s \geq 0.$$

Dokaz. Iz samosličnosti $X_t \overset{\mathrm{d}}{=} t^H X_1$, stoga $\mathbb{E}X_t^2 = t^{2H}\mathbb{E}X_1^2$. Zatim

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}(X_t X_s) &= \mathbb{E}X_t^2 + \mathbb{E}X_s^2 - \mathbb{E}\left(X_t - X_s\right)^2 \\ &= \mathbb{E}X_t^2 + \mathbb{E}X_s^2 - \mathbb{E}X_{|s-t|}^2 \\ &= \mathbb{E}X_1^2 \left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \end{aligned}$$

□

Teorem 2.6.8. *Neka je $\{X_t\}$ H-samosličan sa stacionarnim inkrementima, $0 < H < 1$, svaka X_t netrivijalna i $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Tada vrijedi*

$$\gamma(n) \begin{cases} \sim H(2H-1)n^{2H-2}\mathbb{E}X_1^2, & n \to \infty, \quad H \neq 1/2, \\ = 0, & n \in \mathbb{N}, \quad H = 1/2. \end{cases}$$

Posljedično,

(i) ako $H < 1/2$ je $\gamma(n) < 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| < \infty$,

(ii) ako $H = 1/2$ je $\gamma(n) = 0$ za $n \in \mathbb{N}$,

(iii) ako $H > 1/2$ je $\gamma(n) > 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| = \infty$.

Dokaz. Za izračunati $\gamma(n)$ prvo primijenimo lemu 2.6.7, a zatim razvijamo u Taylorov red (smijemo jer $|1/n| \leq 1$ i $2H > 0$) kako slijedi:

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= \frac{1}{2}\left[(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right]\mathbb{E}X_1^2 && (2.26) \\ &= \frac{1}{2}n^{2H}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2H}\right]\mathbb{E}X_1^2 \\ &= n^{2H}\mathbb{E}X_1^2 \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2H}{2k}\frac{1}{n^{2k}} \\ &= H(2H-1)n^{2H-2}\mathbb{E}X_1^2 + \mathbb{E}X_1^2\sum_{k=2}^{\infty}\binom{2H}{2k}n^{2H-2k}. && (2.27) \end{aligned}$$

Tvrdnje za $H = 1/2$ slijede odmah iz (2.26), a inače iz (2.27): drugi sumand teži u 0 kad $n \to \infty$, ne utječe na konvergenciju niti na predznak.

□

Poglavlje 3

Hölder-regularnost trajektorija frakcionalnog Brownovog gibanja

Bibliografija

[AFT00] Patrice Abry, Patrick Flandrin i M. Taqqu. „Self-Similarity and Long-Range Dependence Through the Wavelet Lens". (Svibanj 2000.).

[Aya10] Antoine Ayache. „A mini-course on Wavelets and Fractional Processes". (2010.).

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial i Applied Mathematics (SIAM), 1992.

[EM02] Paul Embrechts i Makoto Maejima. *Selfsimilar processes*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, 2002.

[Sar80] Nikola Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Školska Knjiga, 1980.

[Sat99] Ken-iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge Univ. Press, 1999.

Sažetak

U ovom radu...

Summary

In this thesis...

Životopis

Luka Šimek rođen je 2000. u Zagrebu gdje završava XV. gimnaziju 2019. Tijekom školovanja ističe se na natjecanjima, prvenstveno drugim mjestom na državnom natjecanju iz matematike (2016., Primošten) i brončanom medaljom na individualnom dijelu Srednjoeuropske matematičke olimpijade (2017., Vilnius).

Preddiplomski studij matematike na zagrebačkom PMF-u upisuje 2019. Završetkom preddiplomskog studija 2022. upisuje diplomski studij Matematičke statistike. Tijekom preddiplomskog studija radi kao demonstrator iz kolegija Matematička analiza (1 i 2) i Programiranje (1 i 2).