SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Šimek

HARMONIJSKA ANALIZA I SLUČAJNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, 10. rujna 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Slučajni procesi su višestruko zanimljivi — iz perspektive drugih znanosti jer se njima modeliraju razne veličine koje se mijenjaju kroz vrijeme, i u teoriji vjerojatnosti jer podrazumijevaju kompliciraniju i bogatiju strukturu nego familije nezavisnih slučajnih varijabli. Zbog njihove velike važnosti, razumno se pitati koji nam sve alati mogu pomoći da ih bolje razumijemo. Harmonijska analiza nameće se kao mogući odgovor. Kao i većina matematičkih disciplina, harmonijska analiza nema strogu definiciju, ali možemo reći da se bavi reprezentacijom funkcija u *frekvencijskoj* domeni, za razliku od uobičajene vremenske. Pogled na taj alternativni prikaz funkcije često može teške probleme u vremenskoj domeni znatno olakšati u frekvencijskoj. Primjer nam je poznat i u teoriji vjerojatnosti — upravo su karakteristične funkcije Fourierove transformacije vjerojatnosnih mjera, a znamo da su u teoriji vjerojatnosti jedan od najvažnijih analitičkih alata.

Uža tema ovog rada je Hölder-regularnost trajektorija frakcionalnog Brownovog gibanja (poglavlje 3). Frakcionalno Brownovo gibanje primjer je *samosličnog* slučajnog procesa, a i generalizacija poznatijeg Brownovog gibanja (koje je također samoslično). Samosličnost kod slučajnih procesa podrazumijeva da se distribucija procesa ne mijenja skaliranjem u vremenu i odgovarajućim skaliranjem po amplitudi. Drugim riječima, slična statistička svojstva vrijede i u malim i u velikim rezolucijama. Samoslični slučajni procesi ponekad se nazivaju i *statistički fraktali*, iako se frakcionalno Brownovo gibanje pojavljuje u radovima Kolmogorova više od dvadeset godina prije no što Mandelbrot uvodi izraz *fraktal* (citirati). Za analizu takvih procesa prirodno pogoduju valići koje detaljno uvodimo u poglavlju 1, o čemu govori ovaj citat iz [AFT00, str. 22.]:

> Štoviše, čim su se pojavile sredinom osamdesetih, gotovo se odmah prepoznalo da su valićne transformacije, zahvaljujući svojoj ugrađenoj multirezolucijskoj strukturi, prirodni alati za otkrivanje samosličnih pojava u signalima, slikama i procesima.

Osim posljednjeg trećeg poglavlja, ovaj rad se sastoji od dva pripremna poglavlja kojima je cilj predstaviti osnovne pojmove, rezultate i tehnike u svojim područjima — redom teoriji valića i teoriji slučajnih procesa u neprekidnom vremenu.

- U prvom poglavlju...
- U drugom poglavlju...
- U trećem poglavlju...

Glavnu literaturu čine [Rud87; Dau92] za prvo poglavlje, [Sat99; EM02; Sar80] za drugo poglavlje i [Šev14; Aya10] za treće poglavlje.

Poglavlje 1

Valići

1.1 Fourierova transformacija

Fourierova transformacija prvi je i temeljni pojam u harmonijskoj analizi. Iako se pojavljuje u više varijanti i konteksta, sve ih povezuje ideja da se funkcija prikaže kao zbroj (superpozicija) komponenti s određenim simetričnim svojstvima. Tu se najčešće podrazumijevaju tzv. frekvencije $x \mapsto e^{ikx}$ gdje $k \in \mathbb{Z}$ ili $k \in \mathbb{R}$. Možemo reći da na taj način dobivamo drugi pogled na funkciju, a njime mnoge probleme puno lakše rješavamo.

Pojedinosti Fourierove transformacije ovise o funkcijskom prostoru na kojem se definira. Pogledajmo prvo $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1)$, pri čemu $\mathbb{S}^1$ možemo poistovjetiti s torusom $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Oboje se može interpretirati i kao prostor periodičkih funkcija na $\mathbb{R}$ s odgovarajućim svojstvom. U [Gog25, §6.2] pokazuje se (pomoću Stone–Weierstrassovog i Luzinovog teorema) da je, uz normalizaciju mjere, $\{x \mapsto e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza (Hilbertovog prostora) $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1)$. Uz oznake $e_k(x) = e^{ikx}$ je stoga za sve $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1)$

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k e_k, \qquad \widehat{f}_k = \langle f, e_k \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-ikx} \,\mathrm{d}\theta$$

i lako se pokaže da je Fourierova transformacija $\mathcal{F}$, definirana s $\mathcal{F}(f) = (\widehat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ za sve $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1)$, izometrički izomorfizam Hilbertovih prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1)$ i $\ell^2(\mathbb{Z})$. Primijetimo kako je u ovom slučaju dovoljno prebrojivo mnogo frekvencija za doći do proizovljne f, umjesto svih iz $\mathbb{R}$. To nije slučaj na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ kojim ćemo se baviti u ovom radu. Štoviše, uopće definirati Fourierovu transformaciju na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ pokazuje se izazovnijim.

Generalizaciju Fourierove transformacije nalazimo na lokalno kompaktnim Hausdorffovim Abelovim grupama (v. [Gog25, §5.4,5.2] za detalje). Neka je G takva grupa s Haarovom mjerom μ. Definiramo prvo *karakter* na G kao neprekidni homomorfizam $\chi\colon G \to (\mathbb{S}^1, \cdot)$. Skup karaktera označavamo $\widehat{G}$ i zovemo *Pontrjaginov dual* od G. Za $f \in \mathrm{L}^1(G)$ definiramo Fourierovu transformaciju $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ sa

$$\widehat{f}(\chi) = \int_G f(x)\overline{\chi(x)} \,\mathrm{d}\mu(x), \quad \chi \in \widehat{G}. \tag{1.1}$$

Najrelevantnije je ovdje da su za $G = \mathbb{R}$ karakteri upravo sve funkcije $x \mapsto e^{i\xi x}$ za $\xi \in \mathbb{R}$. Posebice, $\mathbb{R}$ (kao aditivna grupa) je izomorfan svom Pontrjaginovom dualu. Uz njihovo poistovjećenje, Fourierova transformacija dana s (1.1) jednaka je onoj iz definicije 1.1.1. Simetrična svojstva Fourierove transformacije, koja ćemo vidjeti u nastavku, upravo proizlaze iz njihovog homomorfnog svojstva kao karaktera.

Još svakako vrijedi spomenuti i Fourierovu transformaciju na vjerojatnosnom prostoru. Često se karakteristična funkcija zove Fourierovom transformacijom odgovarajuće vjerojatnosne mjere odn. gustoće ako postoji. To je u principu točno, iako uz konvenciju $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ kao npr. u [Sar80, §13.1] i $\widehat{X}$ danu analogonom (1.2) vrijedi

$$\varphi_X(t) = \sqrt{2\pi}\widehat{X}(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jasno, ova razlika neće ništa bitno promijeniti pa će tako mnoga svojstva Fourierove transformacije funkcija na $\mathbb{R}$ biti zajednička karakterističnim funkcijama. Primijetimo kako je, zbog konačnosti mjere, karakteristična funkcija dobro definirana bez obzira na integrabilnost slučajne varijable X. Situacija na prostorima s Lebesgueovom mjerom bit će kompliciranija. Sada ćemo definirati Fourierovu transformaciju na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i pokazati kako se može proširiti na pogodniji (Hilbertov) prostor $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Definicija 1.1.1. *Fourierova transformacija* $\mathcal{F}\colon \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \to \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ definirana je s

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}\lambda(x), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

za svaku $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Funkcija $\widehat{f}$ zove se *Fourierov transformat* ili također *Fourierova transformacija.*

Komentar 1.1.2. Moguće su varijacije na (1.2). Primijetimo prvo konstantu $1/\sqrt{2\pi}$ — njena poanta je da čuva L^2-normu (jednom kad definiramo Fourierovu transformaciju na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$). Ako želimo uljepšati (1.2) moguće je Lebesgueovu mjeru zamijeniti s $\mu = \lambda/\sqrt{2\pi}$ što je konvencija u [Rud87, §9]. To ćemo u ovom odjeljku napraviti i mi, s tim da, jer najčešće nije bitno, nećemo naglašavati da radimo na prostoru $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ umjesto $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Ipak, radi jasnoće naznačit ćemo mjeru μ u integralima.

Druge moguće varijacije su promjena predznaka u eksponentu od $e^{-i\xi x}$ kao kod karakterističnih funkcija, ili izlučiti faktor 2π iz ξ tj. staviti $\xi = 2\pi\eta$.

Komentar 1.1.3. Kod jednakosti oblika (1.2) prvo pitanje je je li uopće $\widehat{f}$ dobro definirana tj. koje su moguće domene za $\mathcal{F}$. Drugo, koja je slika ili prikladan izbor kodomene?

Najprije, $\widehat{f}$ je dobro definirana jer iz (1.2) zbog $\left|e^{-i\xi x}\right| = 1$ odmah slijedi $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \|f\|_1$ za sve $\xi \in \mathbb{R}$, a iz toga i $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1$. Prethodno ujedno znači da je $\mathcal{F}$ neprekidni linearni operator, ali možemo odabrati puno bolju kodomenu od $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

Dokažimo da je $\widehat{f}$ neprekidna za sve $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Za $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left|e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}\right| \mathrm{d}\mu(x).$$

Iz $\left|e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}\right| \to 0$ za $\eta \to \xi$ po Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji (≤ 2) slijedi i $\left|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)\right| \to 0$. Ovdje zapravo LTDK ne primjenjujemo na neprebrojivi skup funkcija, već koristimo Heineovu karakterizaciju kojom se limes funkcije u točki svodi na limes niza. Ovo pozadinsko značenje podrazumijevat ćemo i ubuduće.

Dokažimo još da $\widehat{f}$ iščezava u beskonačnosti. Iz (1.2) odmah se dobije i

$$\widehat{f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi(x+\pi/\xi)} \,\mathrm{d}\mu(x) = -\int_{\mathbb{R}} f(x - \pi/\xi) e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

gdje se zadnje dobije supstitucijom $x \leftarrow x - \pi/\xi$. Sada miješanjem (1.2) i (1.3) je

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi}{\xi}\right) \right] e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

to jest

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leq \frac{1}{2} \left\|f - f_{\pi/\xi}\right\|_1, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

gdje smo kao u teoremu 1.1.6 označili $f_y = f(\cdot - y)$. Kad u tom teoremu dokažemo da je operator $y \mapsto f_y$ neprekidan, odmah slijedi $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| = 0$ i $\widehat{f} \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$. Izbor kodomene $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ je na neki način i najbolji. Iako $\mathcal{F}$ nije surjekcija, slika joj je gusta u $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ (v. [Rud87, exercise 9.2]).

Sljedeća propozicija daje neka osnovna svojstva Fourierove transformacije.

Propozicija 1.1.4. *Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i neka su α i $\lambda > 0$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

(i) *Ako $g(x) = f(x)e^{i\alpha x}$, tada $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \alpha)$.*

(ii) *Ako $g(x) = f(x - \alpha)$, tada $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-i\alpha\xi}$.*

(iii) *Ako $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i $h = f * g$, tada $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.*

(iv) *Ako $g(x) = \overline{f(-x)}$, tada $\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.*

(v) *Ako $g(x) = f(x/\lambda)$, tada $\widehat{g}(\xi) = \lambda \widehat{f}(\lambda\xi)$.*

(vi) *Ako $g(x) = -ixf(x)$ i $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, tada je $\widehat{f}$ diferencijabilna i $\widehat{f}'(\xi) = \widehat{g}(\xi)$.*

Dokaz. Točke (i), (ii), (iv), (v) trivijalno slijede iz definicije. Primijetimo kako (i) i (ii) pokazuju dualnost između translacije i modulacije (množenja karakterom). Točka (iii) isto lako slijedi raspisom. Potrebna primjena Fubinijevog teorema valjana je zbog $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Naime, opet Fubinijevim teoremom ali za nenegativne funkcije, lako se dobije $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Dokažimo (vi). Za različite $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)}{\xi - \eta} = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} u(x, \eta - \xi) \,\mathrm{d}\mu(x),$$

gdje

$$u(x, \alpha) = \frac{1 - e^{-i\alpha x}}{\alpha}.$$

Iz ocjene $\left|e^{i\theta} - 1\right| \leq |\theta|$ za $\theta \in \mathbb{R}$ (v. [Sar80, str. 514.]) je $|u(x, \alpha)| \leq |x|$ za $\alpha \neq 0$ i $u(x, \alpha) \to -ix$ kad $\alpha \to 0$ vrijedi Taylorovim razvojem. Stoga, po LTDK za $\eta \to \xi$ je

$$\widehat{f}'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-i\xi x} \, \mathrm{d}\mu(x), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

□

Komentar 1.1.5. Nakon točke (vi) možemo se pitati postoji li dualna tvrdnja tj. što je Fourierova transformacija derivacije. Rješenje je dosta jednostavno i to čini Fourierovu transformaciju korisnu u proučavanju diferencijalnih jednadžbi. Ako $f, f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i ako je $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, tada se parcijalnom integracijom jednostavno dobije

$$\widehat{f'}(\xi) = (i\xi)\widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Induktivno, za veće stupnjeve glatkoće $\ell \in \mathbb{N}$ je $\widehat{f^{(\ell)}}(\xi) = (i\xi)^{\ell}\widehat{f}(\xi)$.

S druge strane, ako je f samo diferencijabilna g.s., identitet (1.4) ne mora vrijediti (v. [Rud87, exercise 9.6]). Uzmemo li $f = 1_{[-1,1]}$ je $f' = 0$ g.s. i $\widehat{f'} = 0$, ali

$$(i\xi)\widehat{f}(\xi) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Slijedi teorem u kojem uvodimo operator translacije i dokazujemo njegovu neprekidnost. Primijetimo razliku u odnosu na operatore T_y iz komentara 1.1.13 — ovdje je riječ o operatoru $\mathbb{R} \to \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, a tamo $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Teorem 1.1.6. *Za funkciju f realne varijable i $y \in \mathbb{R}$ definiramo translat f_y sa*

$$f_y(x) = f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za $1 \leq p < \infty$ je preslikavanje $y \mapsto f_y$ uniformno neprekidni operator između $\mathbb{R}$ i $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$.

Dokaz. Fiksirajmo p i $\varepsilon > 0$. Jer je $\mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ (neprekidne funkcije s kompaktnim nosačem) gust[1] u $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, postoji $g \in \mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ sa $\operatorname{supp} g \subseteq [-A, A]$ za neki $A \in \mathbb{R}$ i $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Funkcija g je uniformno neprekidna (neprekidna funkcija na segmentu) pa postoji $\delta \in \langle 0, A\rangle$ takav da

$$|s - t| < \delta \implies |g(s) - g(t)| < (3A)^{-1/p}\, \varepsilon.$$

Iz $|s - t| < \delta$ onda slijedi i

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x - s) - g(x - t)|^p \, \mathrm{d}x < (3A)^{-1}\, \varepsilon^p \,(2A + \delta) < \varepsilon^p,$$

[1] tvrdnju nije teško dokazati, ali može se naći i kao theorem 3.14 u [Rud87]

tj. $\|g_s - g_t\|_p < \varepsilon$. Sada je ključna invarijantnost Lebesgueove mjere na translaciju za

$$\begin{aligned}\|f_s - f_t\|_p &\le \|f_s - g_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|g_t - f_t\|_p \\ &= \|(f-g)_s\|_p + \|g_s - g_t\|_p + \|(g-f)_t\|_p < 3\varepsilon, \quad |s-t| < \delta.\end{aligned}$$

□

Sada ćemo definirati dvije pomoćne funkcije. Definiramo H s

$$H(\xi) = e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

i za svaki $\lambda > 0$ definiramo

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\mu(\xi), \quad x \in \mathbb{R},$$

tako da

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad \text{i} \quad \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = 1. \tag{1.5}$$

Možemo prepoznati $H(\lambda\xi)$ i h_λ kao redom karakterističnu funkciju i gustoću (u odnosu na mjeru μ) centrirane Cauchyjeve distribucije s parametrom λ. Dokazat ćemo tri leme vezane za ove funkcije, da bi nam na kraju bile od koristi u dokazivanju dva glavna teorema ovog odjeljka — teorema inverzije 1.1.10 i Plancherelovog teorema 1.1.11.

Prvu lemu nećemo dokazivati jer slijedi direktnim računom i već viđenom primjenom Fubinijevog teorema.

Lema 1.1.7. *Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, tada je*

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\mu(\xi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lema 1.1.8. *Ako je $g \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ i ako je g neprekidna u nekoj točki $x \in \mathbb{R}$, tada je*

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x) = g(x).$$

Dokaz. Ključno je da

$$h_\lambda(y) = \lambda^{-1} h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right),$$

što je vrlo bliska tvrdnja t. (v) iz prop. 1.1.4. Druga bitna tvrdnja je da zbog (1.5) vrijedi

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) h_\lambda(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

čime dobivamo prvu jednakost u

$$
\begin{aligned}
(g * h_\lambda)(x) - g(x) &= \int_{\mathbb{R}} [g(x-y) - g(x)]\, h_\lambda(y)\, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} [g(x-y) - g(x)]\, \lambda^{-1} h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right) \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} [g(x-\lambda y) - g(x)]\, h_1(y)\, \mathrm{d}\mu(y). \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

Pritom se (1.6) dobije supstitucijom $y \leftarrow \lambda y$. Integrand u (1.6) je dominiran integrabilnom funkcijom $2\,\|g\|_\infty\, h_\lambda(y)$ i konvergira u 0 kad $\lambda \to 0$ za svaki $y \in \mathbb{R}$ pa tvrdnja slijedi preko LTDK. □

Lema 1.1.9. *Ako je $1 \le p < \infty$ i $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, tada*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|f * h_\lambda - f\|_p = 0.$$

Dokaz. Jer je $h \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R})$ za q konjugirani eksponent od p je $f * h_\lambda \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ po Youngovoj nejednakosti. Analogno kao u lemi 1.1.8 počinjemo s

$$(f * h_\lambda)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} [f(x-y) - f(x)]\, h_\lambda(y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

Pomoću Jensenove jednakosti za konveksnu funkciju $x \mapsto |x|^p$ slijedi

$$|(f * h_\lambda)(x) - f(x)|^p \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p\, h_\lambda(y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

Integriranjem po x i primjenom Fubinijevog teorema je i

$$\|f * h_\lambda - f\|_p^p \le \int_{\mathbb{R}} \|f_y - f\|_p^p\, h_\lambda(y)\, \mathrm{d}\mu(y). \qquad (1.7)$$

Označimo $g(y) = \|f_{-y} - f\|_p^p$. Funkcija g je onda omeđena s $2^p\,\|f\|_p^p$ i neprekidna po teoremu 1.1.6 te $g(0) = 0$. Prepoznamo li desnu stranu u (1.7) kao konvoluciju $(g * h_\lambda)(0)$, možemo primijeniti lemu 1.1.8 da zaključimo da desna strana teži u 0 za $\lambda \to 0$. □

Spremni smo dokazati teorem inverzije koji pokazuje kako se iz $\widehat{f}$ vratiti u f.

Teorem 1.1.10. *Neka je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ i $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Ako*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\mu(\xi), \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1.8)$$

tada je $g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ i $f = g$ g.s.

Dokaz. Po lemi 1.1.7 je

$$(f * h_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\mu(\xi).$$

Integrand zdesna je omeđen s $\left|\widehat{f}(\xi)\right|$ za svaki $\xi \in \mathbb{R}$ pa uz $H(\lambda\xi) \to 1$ za $\lambda \to 0$ zaključujemo da desna strana konvergira prema $g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ po LTDK. Iz leme 1.1.9 i činjenice da konvergencija po normi povlači konvergenciju g.s. nekog podniza, zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} (f * h_{\lambda_n})(x) = f(x) \text{ g.s.},$$

za neki niz $(\lambda_n)_n$ s $\lambda_n \to 0$. Time slijedi $f(x) = g(x)$ g.s.

Tvrdnja da je $g \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ dokaže se analogno istom za $\widehat{f}$ u komentaru 1.1.3. □

Posljedica teorema inverzije je i rezultat koji se ponekad sam naziva *teorem jedinstvenosti*: ako je $\widehat{f} = \widehat{g}$, tada je i $f = g$ g.s.

Teorem inverzije pokazuje još jedno lijepo svojstvo Fourierove transformacije, a to je da je inverz vrlo sličan njoj samoj. Zapravo, da bismo mogli govoriti o pravom inverzu $\mathcal{F}^{-1}$ potrebno je za domenu od $\mathcal{F}$ uzeti prostor na kojemu je $\mathcal{F}$ automorfizam. To ćemo postići Plancherelovim teoremom koji omogućuje da $\mathcal{F}$ proširimo na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, štoviše pokazujući da je riječ o izometričkom izomorfizmu $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Osnovna ideja je prvo se restringirati na $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ što je gust potprostor od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ($\mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ gust je u svakom $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$). Tada svakako postoji jedinstveno neprekidno proširenje na cijeli $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (v. [Gog25, prop. 1.6.8 (iv)]), no i dalje je pitanje kakva će svojstva imati to proširenje.

Teorem 1.1.11. *Postoji izometrički izomorfizam* $\mathcal{F}\colon \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *takav da, uz oznaku* $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$, *vrijedi:*

(i) Ako je $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, *onda je* $\widehat{f}$ *dana s* (1.2).

(ii) Ako je

$$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{i} \quad \psi_A(x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\mu(\xi),$$

onda $\left\|\varphi_A - \widehat{f}\right\|_2 \to 0$ *i* $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$ *kad* $A \to \infty$.

Dokaz. Definirajmo $\mathcal{F}$ na gustom potprostoru $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ s (1.2) i proširimo do operatora na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Da dokažemo da je riječ o izometričkom izomorfizmu dovoljno je sljedeće:

- Vrijedi
$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2\,, \quad f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}). \tag{1.9}$$

  Po neprekidnosti norme, iz (1.9) tvrdnja odmah slijedi za sve $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

- Slika od $\mathcal{F}$ gusta je u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. To je dovoljno da $\mathcal{F}$ bude surjekcija. Neka je $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ proizvoljna i $(f_n)_n$ niz u $\operatorname{im}\mathcal{F}$ takav da $f_n \to f$ i $\mathcal{F}g_n = f_n$ za neku $g_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zbog izometričnosti je niz $(g_n)_n$ također Cauchyjev, pa zbog potpunosti prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ postoji limes $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ te zbog neprekidnosti od $\mathcal{F}$ je $\mathcal{F}g = f$.

Dokažimo prvo (1.9). Neka je $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ fiksna i definirajmo $\widetilde{f}$ sa $\widetilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ i $g = f * \widetilde{f}$. Onda je

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in \mathbb{R},$$

tj. $g(x) = \langle f_{-x}, f\rangle$. Po teoremu 1.1.6 je preslikavanje $x \mapsto f_{-x}$ neprekidno, pa je zbog neprekidnosti skalarnog produkta neprekidna i g. Cauchy–Schwarzova nejednakost daje $|g(x)| \le \|f_{-x}\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2$ tako da je g ograničena. Još je i $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ jer je konvolucija dviju funkcija iz $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Imamo uvjete lema 1.1.7 i 1.1.8 i primjenom dobivamo redom

$$(g * h_\lambda)(0) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda\xi)\widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi), \tag{1.10}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}(g * h_\lambda)(0) = g(0) = \|f\|_2^2. \tag{1.11}$$

Po prop. 1.1.4 t. (iv) slijedi $\widehat{g} = \left|\widehat{f}\right|^2 \ge 0$. Iz (1.10) i (1.11) i po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji ($\widehat{g} \ge 0$ i $H(\lambda\xi) \uparrow 1$ kad $\lambda \downarrow 0$) dobiva se

$$\|f\|_2^2 = \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}} H(\lambda\xi)\widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\mu(\xi) = \left\|\widehat{f}\right\|_2^2.$$

Ovime smo posebice dokazali da je $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ uopće smislen izbor kodomene.

Dokažimo sada da je $\operatorname{im}\mathcal{F}$ gusta u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Ekvivalentno je da je anihilator $(\operatorname{im}\mathcal{F})^\perp$ trivijalan. Neka je $\rho \in (\operatorname{im}\mathcal{F})^\perp$ i $\rho \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (poistovjećujemo Hilbertov prostor s njegovim dualom) i dokažimo $\rho = 0$. Funkcije $x \mapsto e^{i\alpha x}H(\lambda x)$ su u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\lambda > 0$. Njihove Fourierove transformacije dane su s (1.2) i jednake su

$$\int_{\mathbb{R}} H(\lambda x)e^{i(\alpha-x)\xi}\,\mathrm{d}\mu(x) = h_\lambda(\alpha-\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Jasno, one se nalaze u $\operatorname{im}\mathcal{F}$ pa ih ρ poništava:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha-\xi)\overline{\rho(\xi)}\,\mathrm{d}\mu(\xi) = (h_\lambda * \overline{\rho})(\alpha),$$

te zbog proizvoljnosti α i λ po lemi 1.1.9 slijedi $\rho = 0$.

Preostaje t. (ii). Označimo $K_A = 1_{[-A,A]}$. Zbog $K_A f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ je $\varphi_A = \widehat{K_A f}$. Kako $\|f - K_A f\|_2 \to 0$ kad $A \to \infty$, zbog izometričnosti (1.9) slijedi i $\left\|\widehat{f} - \varphi_A\right\|_2 \to 0$ kad $A \to \infty$. Druga tvrdnja dokaže se analogno. $\square$

Komentar 1.1.12.
- Točka (ii) iz teorema 1.1.11 odmah povlači što možemo zvati teoremom inverzije na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: ako su $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, onda

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} \, \mathrm{d}\mu(\xi) \quad \text{g.s.}$$

- Primijetimo kako $\widehat{f}$ u teoremu 1.1.11 nije definiran po točkama već samo kao element $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Drugim riječima, definiran je tek g.s., za razliku od $\widehat{f}$ iz definicije 1.1.1. Također, iako je Fourierova transformacija definirana na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, ne treba ju poistovjećivati s formulom (1.2) koja vrijedi samo za $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

- Poznato je, a dokaže se preko polarizacijskih formula, da izometrički izomorfizam Hilberotovog prostora čuva i skalarni produkt. Dakle, za $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ vrijedi $\langle f, g \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$ što možemo zapisati i kao

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} \, \mathrm{d}\xi. \tag{1.12}$$

Identitet (1.12) može se zvati *Parsevalova jednakost*. Po nekim konvencijama Parsevalova jednakost je naziv analogona (1.9) ili (1.12) na $\mathrm{L}^2(\mathbb{S}^1)$.

Komentar 1.1.13. Fouerierova transformacija lijepo se ponaša u odnosu na neke „geometrijske” transformacije (v. [Kov14, prop. 3]). Dio toga već smo vidjeli u prop. 1.1.4 t. (i) i (ii). Definirajmo sada već viđene[2]

- *translaciju* za $y \in \mathbb{R}^n$ sa $(\mathrm{T}_y f)(x) = f(x - y)$ za $x \in \mathbb{R}^n$ i

- *modulaciju* s $\eta \in \mathbb{R}^n$ sa $(\mathrm{M}_\eta f)(x) = e^{i\langle x, \eta \rangle} f(x)$ za $x \in \mathbb{R}^n$,

gdje $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Možemo im dodati

- *dilataciju* za $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ danu s $(\mathrm{D}_r f)(x) = |r|^{-n/2} f(r^{-1}x)$ za $x \in \mathbb{R}^n$ i

- *rotaciju* u odnosu na ortogonalnu transformaciju S na $\mathbb{R}^n$ danu sa $(\mathrm{R}_S f)(x) = f(S^{-1}x)$ za $x \in \mathbb{R}^n$.

Svi od navedenih operatora su izometrički automorfizmi od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Vrijedi:

$$\mathcal{F}\mathrm{T}_y = \mathrm{M}_{-y}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{M}_\eta = \mathrm{T}_\eta\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{D}_r = \mathrm{D}_{r^{-1}}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}\mathrm{R}_S = \mathrm{R}_S\mathcal{F},$$

za sve $y, \eta \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i ortogonalne transformacije S na $\mathbb{R}^n$.

---

[2] primijetimo da prelazimo na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ za opći n; tamo vrijede analogoni dosadašnjih rezultata, a razlog je da je familija ortogonalnih transformacija trivijalna za $n = 1$

1.2 Osnovno o valićima. Haarov sistem

Nakon Fourierove transformacije, javlja se ideja funkcije dekomponirati s obzirom na neku drugu familiju funkcija. Unatoč brojnim lijepim svojstvima Fourierove transformacije koja smo vidjeli u prošlom odjeljku, možemo naći i dvije mane. Prvo: da daje globalno ponašanje funkcije u frekvencijskoj dimenziji, ali nije osjetljiva na lokalne fenomene. Drugo, da iako su funkcije $x \mapsto e^{i\xi x}$ jednostavne u frekvencijskoj dimenziji, u vremenskoj nemaju kompaktan nosač, a nisu niti integrabilne (osim u smislu temperiranih distribucija). To nas može motivirati da ih zamijenimo funkcijama koje su po tom pitanju bolje. Pokazuje se da je tu uvijek nužan kompromis, tj. inzistiranjem na novim svojstvima izgubit ćemo neka lijepa svojstva koja smo prije imali.

Jedna takva alternativna familija su *valići*. Počnimo od neke funkcije $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ koju zovemo *matični valić*. Zatim, za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$ definiramo

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2}\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da s b pomičemo početni ψ po x-osi, dok smanjenjem a sužavamo ψ i povećavamo amplitudu. Riječ je redom o translaciji i dilataciji, pa u oznakama komentara 1.1.13 možemo pisati i $\psi_{a,b} = \mathrm{D}_a \mathrm{T}_b \psi$. Ta dva operatora onda generiraju *sistem* funkcija pa je pravilnije govoriti o valićima kao sistemu funkcija, dok se za neki konkretni matični valić ψ dobivamo *familiju* $\{\psi_{a,b}\}_{a\neq 0, b\in\mathbb{R}}$.

Pitanje je kakva svojstva mora imati ψ. Zahtjevi se razlikuju ovisno o primjeni, ali vjerojatno najčešći i najosnovniji zahtjev je

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.13}$$

Matični valić ψ koji zadovoljava (1.13) ponekad se zove *dopustiv*. Objasnimo taj uvjet. Uzmimo svakako $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ tako da ima Fourierovu transformaciju. Definiramo *neprekidnu valićnu transformaciju* $\mathcal{T}^{\mathrm{wav}}$ s

$$(\mathcal{T}^{\mathrm{wav}} f)(a,b) = \langle f, \psi_{a,b}\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, |a|^{-1/2}\, \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,\mathrm{d}x, \quad f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}).$$

Riječ je o valićnom analogonu formule (1.2). U ovom radu se nećemo baviti neprekidnom valićnom transformacijom, pa ćemo samo navesti i analogon formule inverzije (1.8):

$$f = C_\psi^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{T}^{\mathrm{wav}} f)(a,b)\psi_{a,b} \frac{\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b}{a^2}, \quad f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}),$$

pri čemu je C_ψ konstanta koja mora biti konačna:

$$C_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\xi|^{-1} \left|\widehat{\psi}(\xi)\right|^2 \mathrm{d}\xi < \infty. \tag{1.14}$$

Ako je $\psi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ je $\widehat{\psi}$ neprekidan pa je jedini način da vrijedi (1.14) da je $\widehat{\psi}(0) = 0$, a to je upravo (1.13) po definiciji 1.1.1. S druge strane, može se pokazati (v. [Dau92, §2.4]) da ako vrijedi (1.13) i jači uvjet od integrabilnosti

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{\alpha} \, \psi(x) \, \mathrm{d}x < \infty \tag{1.15}$$

za neki $\alpha > 0$ da slijedi (1.14). Uvjeti (1.14) i (1.13) su u praksi ekvivalentni jer će se zahtjevi na ψ ipak biti dosta jači nego (1.15).

Ne moramo a i b uzimati neprekidno, već je moguće razmatrati samo diskretnu rešetku. Za $j, k \in \mathbb{Z}$ definirajmo

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.16}$$

tj. $\psi_{j,k} = \mathrm{D}_{2^j} \mathrm{T}_k \psi$. Familija $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ je prebrojiva, a idealno bi bilo kad bi bila ortonormirana baza prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Nije *a priori* jasno da je to ikada moguće, ali pokazat ćemo u drugom dijelu ovog i sljedećem odjeljku da zapravo postoji puno takvih ortonormiranih baza. To je prednost u odnosu na Fourierovu transformaciju jer $x \mapsto e^{ikx}$ za $k \in \mathbb{Z}$ razapinju samo periodičke funkcije. Odsad se bavimo familijama danima s (1.16).

Prije nego damo primjer ortonormirane valićne baze, vratimo se na pitanje svojstava ψ. Tipična poželjna svojstva koja se traže su sljedeća:

- glatkoća, ili, blisko tome, nestajući momenti,
- kompaktan nosač u vremenskoj ili frekvencijskoj dimenziji (tj. kompaktnost od $\operatorname{supp} \psi$ i $\operatorname{supp} \widehat{\psi}$ redom),
- kada nemamo kompaktnost da ψ, neke derivacije od ψ ili $\widehat{\psi}$ padaju nekom brzinom,
- da je ψ parna funkcija (simetrična; ekvivalentno je da je $\widehat{\psi}$ realna) ili da je realan; alternativno, u nekim primjenama korisni su kompleksni valići.

Sljedeći teorem (v. [Dau92, §9]) pokazuje da su uz vrlo razumne zahtjeve ortonormirane baze na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ujedno bezuvjetne baze na drugim funkcijskim prostorima.

Teorem 1.2.1. *Ako je ψ takav da je $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ iz (1.16) ortonormirana bazu na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i ako dodatno vrijede uvjeti*[3]

$$\psi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \qquad \text{i} \qquad |\psi(x)|, |\psi'(x)| \lesssim (1 + |x|)^{-1-\varepsilon},$$

tada je $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ također bezuvjetna baza na $\mathrm{L}^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

[3] oznaka $\lesssim$ u $f(x) \lesssim g(x)$ znači $f(x) \leq Cg(x)$ za neku konstantu $C > 0$ neovisnu o x

Zapravo, isti uvjeti dovoljni su da $\psi_{j,k}$ čine ortonormiranu bazu *Hardy–Littlewoodovog* prostora kojeg ovdje nećemo definirati, a uz nešto jače uvjete i drugih funkcijskih prostora kao što su npr. *Soboljevljevi prostori*.

Poželjna svojstva imaju svoje granice. Najpoznatiji primjer je *princip neodređenosti* koji govori da nije moguće (osim u trivijalnom slučaju) postići da funkcija ima kompaktan nosač i u vremenskoj i u frekvencijskoj dimenziji (v. [Kov14, theorem 4]).

Teorem 1.2.2. *Ako je* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ *takva da su i* $\operatorname{supp} f$ *i* $\operatorname{supp} \widehat{f}$ *kompaktni, tada je* $f = 0$ *g.s.*

Sljedeći teorem (v. [Dau88]) uvodi Daubechiesjine valiće, ali i sugerira ograničenje da ne postoje valići klase C^∞ kompaktnog nosača koji čine ortonormiranu bazu na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Teorem 1.2.3. *Za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *postoji* $\psi \in \mathrm{C}^k_\mathrm{c}(\mathbb{R})$ *takav da je s* (1.16) *dana ortonormirana baza na* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Poznato je i što smo rekli, da tvrdnja ne vrijedi za $k = \infty$. Meyerovi valići koje uvodimo u odjeljku 1.4 nalazit će se taman izvan ovih ograničenja.

U ostatku odjeljka cilj nam je dokazati da Haarovi valići čine ortonormiranu bazu na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Haarovi valići dani su matičnim valićem

$$\psi^{\mathrm{Haar}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2, \\ -1, & 1/2 \le x < 1, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Familija generirana preko (1.17) zapravo je poznata kao ortonormirana baza na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ puno dulje nego što uopće postoji pojam valića. Poznatija je kao *Haarov sistem*, makar po prethodnoj diskusiji na te funkcije doista možemo gledati kao na valiće. Ti valići nemaju lijepa svojstva (imaju kompaktan nosač u vremenskoj dimenziji; ali u frekvencijskoj opadaju sporo; nemaju glatkoću), ali zbog svoje jednostavnosti često igraju didaktičku ulogu. To je slučaj i ovdje — poanta dokaza je motivirati temu sljedećeg odjeljka.

Teorem 1.2.4. *Familija valića* $\left\{\psi^{\mathrm{Haar}}_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\right\}$ *je ortonormirana baza prostora* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. Normiranost lako slijedi direktnim računom. Dokažimo da su $\psi^{\mathrm{Haar}}_{j,k}$ i $\psi^{\mathrm{Haar}}_{j',k'}$ ortogonalni ako $(j,k) \neq (j',k')$. Ako je $j = j'$ su im nosači disjunktni. Neka je bez smanjenja općenitosti $j < j'$. Nosač od $\psi^{\mathrm{Haar}}_{j,k}$ je, do na rub, dijadski interval[4] $\left[2^j k, 2^j(k+1)\right\rangle$ (to vrijedi općenito ako $\operatorname{supp}\psi = [0,1]$). Nosač $\operatorname{supp}\psi^{\mathrm{Haar}}_{j',k'}$ je dijadski interval veće duljine, pa je $\operatorname{supp}\psi^{\mathrm{Haar}}_{j,k}$ cijeli sadržan ili u lijevoj ili u desnoj polovici od $\operatorname{supp}\psi^{\mathrm{Haar}}_{j',k'}$. Na tim polovicama je $\psi^{\mathrm{Haar}}_{j',k'}$ konstantan, pa je skalarni produkt proporcionalan sa $\int_\mathbb{R} \psi^{\mathrm{Haar}}_{j,k}(x)\,\mathrm{d}x = 0$ zbog svojstva (1.13).

[4] dijadski intervali su oni iz familije $\mathcal{D} = \left\{\left[2^j k, 2^j(k+1)\right\rangle : j,k \in \mathbb{Z}\right\}$

Glavni dio dokaza je dokazati da Haarovi valići razapinju potprostor gust u $L^2(\mathbb{R})$. Svaka $f \in L^2(\mathbb{R})$ može se proizvoljno dobro aproksimirati funkcijom f_0 čiji je nosač $I_M := \left[-2^M, 2^M\right]$ i koja je konstantna na dijadskim intervalima $I_{N,\ell} := \left[2^{-N}\ell, 2^{-N}(\ell+1)\right\rangle$ gdje je ℓ takav da $I_{N,\ell} \subseteq I_M$. S $f_{0,\ell}$ označimo skalare takve da

$$f_0 = \sum_{\ell\,:\,I_{N,\ell}\subseteq I_M} f_{0,\ell} 1_{I_{N,\ell}}$$

i analogne oznake koristimo drugdje. Dovoljno je dokazati da se f_0 može proizvoljno dobro aproksimirati Haarovim valićima.

Prikažimo f_0 u obliku $f_0 = f_1 + \delta_1$ gdje je f_1 funkcija konstantna na intervalima dvostruko veće duljine 2^{-N+1}, a te konstante su prosjeci od f_0 na odgovarajućim intervalima. Drugim riječima $f_{1,\ell} = \frac{1}{2}\left(f_{0,2\ell} + f_{0,2\ell+1}\right)$ za ℓ takav da $I_{N-1,\ell} \subseteq I_M$. Funkcija δ_1 je onda konstanta na intervalima iste duljine kao kod f_0 i štoviše

$$\begin{aligned}
\delta_{1,2\ell} &= f_{0,2\ell} - f_{1,\ell} = \frac{1}{2}\left(f_{0,2\ell} - f_{0,2\ell+1}\right) \\
\delta_{1,2\ell+1} &= f_{0,2\ell+1} - f_{1,\ell} = \frac{1}{2}\left(f_{0,2\ell+1} - f_{0,2\ell}\right) = -\delta_{1,2\ell},
\end{aligned}$$

za ℓ takve da $I_{N,2\ell} \subseteq I_M$. Time smo dobili da je δ_1 linearna kombinacija Haarovih valića:

$$\delta_1(x) = \sum_{\ell\,:\,I_{N,2\ell}\subseteq I_M} \delta_{1,2\ell}\psi^{\mathrm{Haar}}\left(2^{N_1}x - \ell\right), \quad x \in I_M.$$

Postupak možemo ponavljati i dobiti funkcije f_2, f_3 itd. Ponavljanjem postupka ukupno $N + M$ puta dobit ćemo funkciju f_{N+M} kojoj je nosač i dalje I_M, a konstantna je na intervalima $\left[-2^M, 0\right]$ i $\left[0, 2^M\right]$ i tamo jednaka odgovarajućim prosjecima funkcije f_0. Dobiva se

$$f_0 = f_{N+M} + \sum_{k=1}^{N+M} \delta_k = f_{N+M} + \sum_{k=1}^{N+M} \sum_{\ell\,:\,I_{N-k+1,2\ell}\subseteq I_M} c_{-N+k,\ell}\psi^{\mathrm{Haar}}_{-N+k,\ell},$$

pri čemu su $c_{-N+k,\ell}$ skalari.

Možemo nastaviti, tako da f_{N+M+1} ima dvostruko veći nosač I_{M+1}, pri čemu će biti

$$\delta^{N+M+1}(x) = \frac{1}{2}\left[f_{N+M,0}\psi^{\mathrm{Haar}}\left(2^{-M-1}x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[f_{N+M,-1}\psi^{\mathrm{Haar}}\left(2^{-M-1}x + 1\right)\right]., \quad x \in I_{M+1}.$$

Ponavljanjem postupka ukupno K puta dolazimo do funkcije f_{N+M+K} takve da

$$f_{N+M+K}(x) = \begin{cases} 2^{-K} f_{N+M,-1}, & x \in \left[-2^{M+K}, 0\right\rangle, \\ 2^{-K} f_{N+M,0}, & x \in \left[0, 2^{M+K}\right\rangle. \end{cases}$$

Vrijedi

$$\|f_{N+M+K}\|_2 = \sqrt{\left[|f_{N+M,0}|^2 + |f_{N+M,-1}|^2\right] 2^{M-K}} \to 0, \quad K \to \infty,$$

što nam daje i traženu aproksimaciju

$$\sum_{k=1}^{N+M+K} \delta_k \xrightarrow{\mathrm{L}^2} f_0, \quad K \to \infty. \tag{1.18}$$

□

Komentar 1.2.5. Rezultat (1.18) može se činiti paradoksalan. Ako za svaki $\psi_{j,k}$ vrijedi (1.13), isto vrijedi za svaku linearnu kombinaciju. Kako je onda moguće proizvoljnu $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dobiti kao limes funkcija s integralom nula? Ključno je da aproksimacija vrijedi u L^2-normi, ali ne i u L^1-normi — niz (u K) funkcija f_{N+M+K} primjer je niza koji u $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ima (zbog konstrukcije) konstantu normu, ali u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ konvergira u 0.

Komentar 1.2.6. Definirajmo za fiksni $j \in \mathbb{Z}$

$$V_j = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}) : f \text{ konstantna na } \left[2^j k, 2^j(k+1)\right\rangle \text{ za sve } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Lako je dokazati da je V_j zatvoreni potprostor od $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Kad $j \to -\infty$, možemo reći da prostori dopuštaju sve više *detalja* ili sve finiju *rezoluciju*. Istovremeno, prostori V_j su međusobno slični; svaki se može dobiti kao dilatacija bilo kojeg drugog.

U dokazu teorema (1.2.4) dokazali smo

$$\overline{\operatorname{span}} \left\{ \psi^{\mathrm{Haar}}_{j',k} : j' \geq j,\ k \in \mathbb{Z} \right\} = V_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

1.3 Multirezolucijska analiza

1.4 Meyerov sistem

Poglavlje 2

Slučajni procesi u neprekidnom vremenu

2.1 Osnovni pojmovi

Slučajni proces je indeksirana familija slučajnih veličina $\{X_t : t \in T\}$ na istom vjerojatnosnom prostoru gdje je T neki indeksni skup. On može biti diskretan (npr. $T = \mathbb{N}$ ili $T = \mathbb{Z}$) ili neprekidan (npr. $T = \mathbb{R}$ ili $T = [0, \infty\rangle$). Budući da o elementima T često razmišljamo kao o vremenskim trenucima, govorimo o procesu u diskretnom ili u neprekidnom vremenu. U kontekstu ovog rada podrazumijevamo $T = [0, \infty\rangle$ i koristimo skraćenu notaciju $\{X_t\}$.

Razlikujemo proces od realizacije $t \mapsto X_t(\omega)$ za fiksni $\omega \in \Omega$ koju još zovemo *trajektorijom*. Nadalje, kažemo da je slučajni proces $\{X_t\}$ *modifikacija* procesa $\{Y_t\}$ ako je $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ za sve $t \in [0, \infty\rangle$. Primijetimo razliku u odnosu na jači uvjet $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \in [0, \infty\rangle) = 1$ kada procese više načelno ne razlikujemo. Jednakost dvaju procesa po distribuciji, s oznakom $\{X_t\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{Y_t\}$, znači jednakost svih konačnodimenzionalnih distribucija.

Slučajne procese obično promatramo preko konačnodimenzionalnih funkcija distribucije slučajnih vektora $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ $(t_k \in T)$, koje zadovoljavaju tzv. uvjete suglasnosti Kolmogorova. Dva su važna rezultata koja to opravdaju — teorem Kolmogorova (v. [Sar80, tm. 9.6], alternativa sa suglasnim mjerama [Sat99, tm. 1.8]) koji tvrdi da suglasna familija konačnodimenzionalnih distribucija inducira jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru na σ-algebri generiranoj cilindrima i drugi teorem (v. [Sar80, tm. 9.7]) koji tvrdi da se za takvu familiju uvijek može konstruirati slučajni proces (odn. vjerojatnosni prostor) s upravo tim konačnodimenzionalnim distribucijama. Stoga nam, kao i obično, nije bitan vjerojatnosni prostor u kojem se nalazimo.

Sada ćemo definirati Lévyjeve procese, jednu od najznamenitijih klasa slučajnih procesa. Uvest ćemo Poissonov proces i Brownovo gibanje kao poznate primjere. Pokazat ćemo i vrlo blisku vezu Lévyjevih procesa i beskonačno djeljivih distribucija (definiranih u odjeljku 2.4), koja je potrebna za naš dokaz da Brownovo gibanje postoji. Nakon toga ćemo skrenuti pažnju na teoriju samosličnih procesa i uvesti frakcionalno Brownovo gibanje kao generalizaciju u poglavlju 3. Prije te definicije, uvedimo još jedan osnovni pojam.

Definicija 2.1.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ je *stohastički neprekidan* ili *neprekidan po vjerojatnosti* ako vrijedi

$$\lim_{s\to t}\mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0,$$

za svaki $t \geq 0$ i $\varepsilon > 0$.

Definicija 2.1.2. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Lévyjev* ako vrijede uvjeti:

(i) $X_0 = 0$ g.s.,

(ii) $\{X_t\}$ je stohastički neprekidan,

(iii) varijable $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne za sve $n \geq 1$ i $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (nezavisnost prirasta),

(iv) distribucija varijable $X_{s+t} - X_s$ ne ovisi o s (stacionarnost prirasta),

(v) Postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ te za svaki $\omega \in \Omega_0$ vrijedi da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ càdlàg[1].

Nadalje, ako ne vrijedi (iv) kažemo da je proces *aditivan.* Ako ne vrijedi (v) tada kažemo da je proces *Lévyjev po distribuciji* odn. *aditivan po distribuciji.*

2.2 Poissonov proces

U ovom odjeljku uvodimo Poissonov proces kao primjer Lévyjevog procesa. Intuitivno, taj proces mjeri broj događaja koji su se dogodili do trenutka t, pri čemu su duljine intervala između uzastopnih događaja distribuirane eksponencijalno. Pritom, eksponencijalnu distribuciju karakterizira tzv. gubitak pamćenja. Poissonov proces uvest ćemo kao Lévyjev proces s dodatnim svojstvom da je $X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t)$, a onda konstrukcijom dokazati da takav proces zaista postoji. Kasnije ćemo pokazati da je moguće na taj način odrediti Lévyjev proces i kad se Poissonova distribucija zamijeni bilo kojom beskonačno djeljivom distribucijom.

Definicija 2.2.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}$ je *Poissonov proces s parametrom* $\lambda > 0$ ako je Lévyjev i ako

$$X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t), \quad t > 0. \tag{2.1}$$

[1]càdlàg, od fr. *continue à droite, limite à gauche*, označava funkciju koja je na cijeloj domeni neprekidna zdesna s limesima slijeva

Teorem 2.2.2. *Neka je* $(W_n)_{n\geq 0}$ *slučajna šetnja na* $\mathbb{R}$ *definirana na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, takva da* $T_n = W_n - W_{n-1}$ *ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom* $\lambda > 0$*. Definiramo*

$$X_t(\omega) = n \iff W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{2.2}$$

Tada je $\{X_t\}$ *Poissonov proces s parametrom* λ*.*

Dokaz. Ustanovimo prvo da $W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Naime, $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda)$ i $W_n = \sum_{j=1}^n T_j$ pa tvrdnja slijedi po poznatoj lemi o zbroju nezavisnih Γ-distribuiranih varijabli[2]. Sada slijedi $\mathbb{P}(W_n \leq t) \to 0,\ n \to \infty$, što se može dobiti i iz

$$\mathbb{P}(W_n \leq t) \leq \mathbb{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = [\mathbb{P}(T_1 \leq t)]^n \to 0, \grave{}\, n \to \infty.$$

Slijedi da je svaka X_t g.s. dobro definirana preko (2.2). Da je $\{X_t\}$ stohastički neprekidan s càdlàg trajektorijama i $X_0 = 0$ g.s. je trivijalno. Preostaje dokazati (2.1) i da su prirasti stacionarni i nezavisni.

Prvo se dobije iz

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t = n) = \mathbb{P}(W_n \leq t < W_n + T_{n+1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\,:\,0\leq u\leq t<u+v\}}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{(W_n,T_{n+1})} \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}\int_{t-x}^{\infty} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

pri čemu koristimo nezavisnost varijabli W_n i T_{n+1} za prelazak na njihove gustoće.

Sličnim izravnim računom možemo dobiti i

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > t + s \,|\, X_t = n) = e^{-cs} = \mathbb{P}(T_1 > s), \quad t > 0, s \geq 0, n \geq 0.$$

Pomoću toga možemo dobiti da $(W_{n+1} - t, T_{n+2}, \ldots, T_{n+m})$ uz dano $X_t = n$ ima jednaku distribuciju kao i $(T_1, T_2, \ldots, T_m)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m \,|\, X_t = n) \\ &\quad= \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\ &\quad= \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\ &\quad= \mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1 \,|\, X_t = n)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m) \\ &\quad= \mathbb{P}(T_1 > s_1)\mathbb{P}(T_2 > s_2, \ldots, T_m > s_m) \\ &\quad= \mathbb{P}(T_1 > s_1, T_2 > s_2, \ldots, T_m > s_m).\end{aligned} \tag{2.3}$$

To nam zatim daje

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t + s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) \\ &\quad= \mathbb{P}((W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m} \leq s < (W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m+1}) \\ &\quad\overset{(2.3)}{=} \mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_m \leq s < T_1 + \cdots + T_m + T_{m+1}) = \mathbb{P}(W_m \leq s < W_{m+1}) = \mathbb{P}(X_s = m).\end{aligned}$$

[2]zbroj je Γ-distribuiran, a prvi parametar (parametar oblika) je zbroj prvih parametara sumanada

Sada stacionarnost prirasta slijedi sumiranjem po $n \geq 0$ jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t = m, X_t = n) = \mathbb{P}(X_{t+s} = n + m, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t + s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Nezavisnost prirasta slijedi iz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \ldots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k \,|\, X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_1 - t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi primjenom iste ideje kao u dokazu stacionarnosti. Dokaz se završi indukcijom. □

2.3 Brownovo gibanje

Sada na slični način uvodimo Brownovo gibanje.

Definicija 2.3.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Brownovo gibanje* (ili *Wienerov proces*) ako je Lévyjev i ako

(i) $X_t \sim \mathrm{N}(0, tI)$ i

(ii) postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i $\omega \in \Omega_0$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna.

Ovime nismo dokazali da takav proces postoji, što ćemo ostaviti za kasnije. Dana svojstva su nam dovoljna da dokažemo nekoliko osnovnih rezultata o Brownovom gibanju. Dokazat ćemo par nama najznačajnijih rezultata, a drugi se mogu naći u [Sat99, §5]. Spomenimo još kako je svojstvo (i) skupa s Lévyjevosti dovoljno za (ii) po teoremu 2.5.11.

Prvo ćemo dokazati da Brownovo gibanje zadržava istu distribuciju pri širenju u vremenu i odgovarajućem širenju u prostoru. To svojstvo ćemo kasnije zvati *samosličnost*.

Teorem 2.3.2. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}^d$. Tada je $\left\{c^{-1/2}X_{ct}\right\}$ također Brownovo gibanje u $\mathbb{R}^d$ za svaki $c > 0$.*

Dokaz. Neka je $Y_t = c^{-1/2}X_{ct}$. Odmah slijedi $Y \sim \mathrm{N}(0, tI)$. Stohastička neprekidnost, g.s. neprekidnost trajektorija i nezavinost prirasta lako se svedu na isto za $\{X_t\}$.

Stacionarnost prirasta također — neka $0 \leq s < t$ pa

$$Y_t - Y_s = c^{-1/2}\left(X_{ct} - X_{cs}\right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} c^{-1/2}X_{ct-cs} \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y_{t-s}.$$

□

Sada ćemo dokazati da u jednoj dimenziji g.s. vrijede dva inače neuobičajena svojstva — nigdje-monotonost i nigdje-diferencijabilnost.[3]

Teorem 2.3.3. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-monotona, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije monotona niti na jednom segmentu.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti dokazujemo samo nigdje-rastućost na segmentu[4] $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$. Neka je još $n \geq 2$ proizvoljan i Ω_0 iz definicije 2.3.1. Definiramo

$$A = \{\omega \in \Omega_0 : t \mapsto X_t(\omega) \text{ ne opada na } [a, b]\}$$

i zatim ekvidistantnu particiju segmenta $[a, b]$ s $t_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $0 \leq k \leq n$ te

$$A_n = \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_0}(\omega) \leq X_{t_1}(\omega) \leq \cdots \leq X_{t_n}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

Očito $A \subset A_n$ i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \geq 0\}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \geq 0) = 2^{-n} \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

pa možemo odabrati

$$\Omega_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}.$$

□

Komentar 2.3.4. Štoviše, vrijedi

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Inkluzija $\subseteq$ je očita. Za $\supseteq$ pretpostavimo $\omega \in \cap_n A_n \setminus A$. Tada postoje $a \leq s < t \leq b$ takvi da $X_s(\omega) - X_t(\omega) > \varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$. Jer je skup

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \Delta_n = \left\{a + \frac{b-a}{n} \cdot k : 0 \leq k \leq n\right\}$$

gust u $[a, b]$ i zbog neprekidnosti trajektorije postoje n i $s', t' \in \Delta_n$ takvi da $X_{s'}(\omega) - X_{t'}(\omega) > \varepsilon/2$. Time smo došli do kontradikcije jer $\omega \notin A_n$.

[3] ustvari je dovoljno dokazati nigdje-diferencijabilnost; Lebesgueov teorem o diferencijabilnosti monotonih funkcija govori da je svaka neprekidna monotona funkcija diferencijabilna g.s., v. [Sat99, remark 5.10] za još dovoljnih uvjeta

[4] to možemo jer svaki segment $[a, b]$ možemo smanjiti na $[a', b']$ gdje $a', b' \in \mathbb{Q}$ i onda „ukupni” Ω_1 dobiti kao prebrojivi presjek „lokalnih”

Teorem 2.3.5. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-diferencijabilna, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije diferencijabilna niti u jednoj točki $t \in [0, \infty\rangle$.*

Dokaz. Slično kao u prošlom dokazu, ograničimo se na pitanje diferencijabilnosti u nekom $t \in [0, N]$ gdje $N \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$A = \{\omega \in \Omega \colon t \mapsto X_t(\omega) \text{ je diferencijabilna u nekom } s \in [0, N]\}$$

i za $M, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_{n,M} = \{\omega \in \Omega \colon (\exists s \in [0, N(1 - 1/n)])(&|t - s| \leq 2N/n \\ &\implies |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq M\,|t - s|)\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lako se pokaže

$$A \subseteq \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,M}.$$

Fiksiramo $M \in \mathbb{N}$ i stavimo $A_n = A_{n,M}$. Nadalje uvedimo mrežu $t_k = \frac{Nk}{n}$, $0 \leq k \leq n$ i definiramo slučajne varijable[5]

$$Y_{n,k} = \max\left\{\left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right|, \left|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right|, \left|X_{t_{k+2}} - X_{t_{k+1}}\right|\right\}, \quad 0 \leq k \leq n-2.$$

Definiramo još događaje

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \{Y_{n,k} \leq 4MN/n\}.$$

Neka je $\omega \in A_n$ i s iz (2.4). Lako se pokaže da je $\omega \in \{Y_{n,k} \leq 4MN/n\}$ gdje je k takav da s nije udaljen ni od kojeg ruba segmenta $[t_{k-1}, t_{k+2}]$ za više od $2N/n$. Dakle, $A_n \subseteq B_n$.

Uvedimo oznaku $a_n = \mathbb{P}\left(\left|X_{N/n}\right| \leq 4MN/n\right)$. Pomoću stacionarnosti i nezavisnosti prirasta dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &\leq \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k} \leq 4MN/n) = \mathbb{P}(Y_{n,0}) + \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k}) \\ &= \mathbb{P}\left(|X_{t_1} - X_{t_0}| \leq 4MN/n, |X_{t_2} - X_{t_1}| \leq 4MN/n\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=0}^{3} \left\{\left|X_{t_{k+\ell}} - X_{t_{k+\ell-1}}\right| \leq 4MN/n\right\}\right) \\ &= a_n^2 + (n-2)a_n^3. \end{aligned}$$

Želimo odozgo ocijeniti a_n. Prvo iz teorema 2.3.2 imamo $X_{N/n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (N/n)^{1/2} X_1$. Ako gustoću jedinične normalne distribucija ocijenimo odozgo konstantom, imamo

$$a_n = \mathbb{P}\left(|X_1| \leq 4M\,(N/n)^{1/2}\right) \lesssim \left(\frac{N}{n}\right)^{1/2}.$$

[5] za $k = 0$ maknemo prvi element skupa

Iz toga slijedi $\mathbb{P}(B_n) \to 0$, $n \to \infty$ pa i $\mathbb{P}(\liminf_n B_n) = 0$. Tvrdnja teorema slijedi jer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} B_n.$$

□

2.4 Beskonačno djeljive distribucije

U ovom odjeljku uvodimo pojam beskonačno djeljive distribucije odn. mjere.[6] Beskonačno djeljive distribucije su u vrlo bliskoj vezi s Lévyjevim procesima. Naime, dokazat ćemo da

- za svaku beskonačno djeljivu distribuciju μ postoji Lévyjev po distribuciji proces $\{X_t\}$ jedinstven po distribuciji takav da $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$ i
- svaki proces Lévyjev po distribuciji ima modifikaciju koja je Lévyjev proces (u sljedećem odjeljku 2.5).

Posljedica je da svakom beskonačno djeljivom distribucijom (među kojima su i Poissonova i normalna, v. komentar 2.4.3) možemo odrediti Lévyjev proces kako smo to napravili u definicijama 2.2.1 i 2.3.1. Da dokažemo da Brownovo gibanje postoji još je potrebna i neprekidnost trajektorija, a nju ćemo dokazati u teoremu 2.5.11.

Sada definiramo beskonačno djeljivu distribuciju preko tri ekvivalentne tvrdnje. Da su ekvivalentne lako se vidi jer konvolucija mjere i zbrajanje nezavisnih slučajnih varijabli odgovaraju množenju odgovarajućih karakterističnih funkcija. Ako je μ konačna mjera, s μ^n označavamo n-kratnu konvoluciju μ same sa sobom.

Definicija 2.4.1. Neka je X slučajna varijabla na $\mathbb{R}^d$ i μ odgovarajuća vjerojatnosna mjera. Tada:

(i) kažemo da je μ *beskonačno djeljiva* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji vjerojatnosna mjera μ_n takva da $\mu = \mu_n^n$,

(ii) kažemo da X ima beskonačno djeljivu distribuciju ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje n.j.d. varijable $X_1, \dots, X_n$ takve da

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

(iii) μ je beskonačno djeljiva ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\widehat{\mu}_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da je karakteristična funkcija neke vjerojatnosne distribucije i $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}_n(z)^n$ za svaki $z \in \mathbb{R}^d$.

[6] često poistovjećujemo vjerojatnosnu mjeru i odgovarajuću vjerojatnosnu funkciju distribucije (v. [Sar80, str. 257])

U sljedećoj propoziciji bez dokaza navodimo osnovna svojstva beskonačno djeljivih distribucija (v. [Sat99, §7] i [Sar80, §13,14]). Najvažnije nam je vidjeti da logaritmirajne i potenciranje beskonačno djeljivih mjera ima neka očekivana lijepa svojstva — jedinstvenost, neprekidnost i dobro granično ponašanje.

Propozicija 2.4.2. *(i) Ako su μ_1 i μ_2 beskonačno djeljive, tada je to i $\mu_1 * \mu_2$.*

(ii) Ako je μ beskonačno djeljiva tada $\widehat{\mu}(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{R}^d$.

(iii) Neka je $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $\varphi(0) = 1$ i $\varphi(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{R}^d$. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $f(0) = 0$ i $e^{f(z)} = \varphi(z)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena neprekidna funkcija $g_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $g_n(0) = 1$ i $g_n(z)^n = \varphi(z)$. Vrijedi $g_n(z) = e^{f(z)/n}$. Pišemo $f = \log\varphi$ i $g_n = \varphi^{1/n}$.

(iv) Neka su φ i $(\varphi_n)_n$ kao u uvjetima t. (iii). Ako $\varphi_n \to \varphi$ uniformno na svakom kompaktnom skupu, tada $\log\varphi_n \to \log\varphi$ uniformno na svakom kompaktnom skupu.

(v) Ako je $(\mu_n)_n$ niz beskonačno djeljivih vjerojatnosnih mjera i $\mu_n \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu$, tada je i μ beskonačno djeljiva.

(vi) Ako je μ beskonačno djeljiva, tada je μ^t dobro definirana i beskonačno djeljiva za svaki $t \in [0,\infty\rangle$.

Komentar 2.4.3. Razmotrimo primjere beskonačno djeljivih distribucija.

- Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $X_k \sim \mathrm{N}(\mu/n, \sigma^2/n)$ n.j.d. pa je
$$X_n \overset{\mathrm{d}}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$
Po definiciji slijedi da je normalna distribucija beskonačno djeljiva. Istu ideju možemo primijeniti da dokažemo da su beskonačno djeljive Poissonova, Γ i δ-distribucije. Ekvivalentno je gledati korijene karakterističnih funkcija i vidjeti da odgovaraju istom tipu distribucije s različitim parametrima. Tako su još beskonačno djeljive Cauchyjeva i negativna binomna distribucija.

- Uniformna i binomna distribucija nisu beskonačno djeljive. Za uniformnu karakteristična funkcija ima nultočke (prop. 2.4.2, t. (ii)). Za binomnu to nije slučaj, ali nije beskonačno djeljiva pa to pokazuje da ne vrijedi obrat. U [Sat99] se u kasnijim poglavljima pokazuje da su δ-distribucije jedine beskonačno djeljive distribucije s kompaktnim nosačem.

- Ako je $\{X_t\}$ Lévyjev je $\mathbb{P}_{X_1}$ beskonačno djeljiva. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $t_k = k/n$, $0 \leq k \leq n$ pa
$$X_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) \quad \text{g.s.}$$
Tvrdnja slijedi zbog stacionarnosti i nezavisnosti prirasta.

Slijedi glavni rezultat ovog odjeljka koji smo najavili na početku.

Teorem 2.4.4. *(i) Ako je $\{X_t\}$ Lévyjev po distribuciji, tada je $\mathbb{P}_{X_t}$ beskonačno djeljiva za svaki $t \geq 0$ i $\mathbb{P}_{X_t} = \mathbb{P}^t_{X_1}$.*

(ii) Ako je μ beskonačno djeljiva distribucija, tada postoji Lévyjev proces po distribuciji $\{X_t\}$ takav da $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$.

(iii) Ako su $\{X_t\}$ i $\{X'_t\}$ Lévyjevi procesi po distribuciji takvi da $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X'_1}$, tada $\{X_t\} \overset{\mathrm{d}}{=} \{X'_t\}$.

Dokaz. Dokažimo prvo (i). Da je $\mathbb{P}_{X_t}$ beskonačno djeljiva za sve $t \geq 0$ slijedi istom konstrukcijom kao u komentaru 2.4.3. Iz nje štoviše slijedi $\mathbb{P}_{X_{1/n}} = \mathbb{P}^{1/n}_{X_1}$ i zatim po prop. 2.4.2 je $\mathbb{P}_{X_{m/n}} = \mathbb{P}^{m/n}_{X_1}$. Dakle, tvrdnju smo dokazali za sve $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Neka je sada t iracionalan i $t_n \to t$ gdje $t_n \in \mathbb{Q}$. Stohastičku neprekidnost u t možemo zapisati kao $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$ pa konvergencija vrijedi i po distribuciji te povlači konvergenciju mjera $\mathbb{P}^{t_n}_{X_1} = \mathbb{P}_{X_{t_n}} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathbb{P}_{X_t}$. Također $\mathbb{P}^{t_n}_{X_1} \xrightarrow{\mathrm{w}} P^t_{X_1}$ po prop. 2.4.2, t. (iii). Tvrdnja slijedi zbog jedinstvenosti limesa (npr. prop. 13.7 u [Sar80]).

Sada dokažimo (iii). Po (i) slijedi $X_t \overset{\mathrm{d}}{=} X'_t$ za $t \geq 0$ i po stacionarnosti prirasta $X_{s+t} - X_s \overset{\mathrm{d}}{=} X'_{s+t} - X'_s$ za $s, t \geq 0$. Zbog nezavisnosti komponenti jednako su distribuirani i vektori[7]

$$(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \overset{\mathrm{d}}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1} - X'_{t_0}, \dots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}}) \tag{2.5}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Primjenom izmjerivog preslikavanja

$$(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0, x_0 + x_1, \dots, x_0 + x_1 + \cdots + x_n), \quad x_k \in \mathbb{R}^d$$

na obje strane (2.5) dobivamo

$$(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots X_{t_n}) \overset{\mathrm{d}}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1}, \dots X'_{t_n}).$$

Preostaje (ii). Moramo definirati vjerojatnosni prostor i $\{X_t\}$ na njemu te zatim dokazati da proces ima željena svojstva. Uvedimo uobičajenu konstrukciju (npr. [Sat99, str. 4]): $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty\rangle}$, odgovarajuća σ-algebra generirana cilindrima za $\mathcal{F}$ i za $\omega = (\omega(t))_t$ stavimo $X_t(\omega) = \omega(t)$. Za $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ definiramo vjerojatnosnu mjeru na bazi σ-algebre $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{n+1})$

$$\begin{aligned}\mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) 1_{B_1}(y_0 + y_1) \\ \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n) 1_{B_n}(y_0 + \cdots + y_n),\end{aligned} \tag{2.6}$$

[7] njihove komponente isto mogu biti vektori, tada se radi o blok-zapisu

gdje $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Mjera je dobro definirana po prop. 2.4.2, t. (vi). Familija $\{\mu_{t_0,\dots,t_n}\}$ je suglasna (v. komentar 2.4.5) pa po teoremu Kolmogorova postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$ takva da

$$\mathbb{P}(X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n).$$

Stavimo li $t_0 = t$ i $B_k = \mathbb{R}^d$ za $k \geq 1$ dobivamo da X_t ima distribuciju μ^t. Posebice, $X_0 = 0$ g.s. Za ograničenu izmjerivu funkciju f generalno vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}f(X_0, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} & f(y_0, y_0 + y_1, \dots, y_0 + \cdots + y_n) \\ & \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Neka je $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_k \in \mathbb{R}^d$, fiksan. Definiramo

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_n) &= \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \langle z_k, x_k - x_{k-1} \rangle\right) \quad \text{i} \\ f_k(x_0, \dots, x_n) &= \exp\left(i \langle z_k, x_k - x_{k-1} \rangle\right), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Onda je $f = \prod_k f_k$ te su $\mathbb{E}f(X_0, \dots, X_n)$ i $\mathbb{E}f_k(X_0, \dots, X_n)$ vrijednosti u točki z karakterističnih funkcija od redom $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ i $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$. Najprije se iz (2.7) lako dobije

$$\mathbb{E}f_k(X_0, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \langle z_k, y_k \rangle\right) \mathrm{d}\mu^{t_k - t_{k-1}}(y_k)$$

pa slijedi da $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ ima distribuciju $\mu^{t_k - t_{k-1}}$. Dakle, dokazali smo stacionarnost. Nezavisnost dobijemo jer

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}f(X_0, \dots, X_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \langle z_k, y_k \rangle\right) \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}f_k(X_0, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Na kraju jer $\mu_t \xrightarrow{\text{w}} \mu_0 = \delta_0$ slijedi $X_t \xrightarrow{\text{d}} 0$ i $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ kad $t \downarrow 0$. Zbog stacionarnosti prirasta, to se lako proširi na stohastičku neprekidnost na cijeloj domeni. Dakle, $\{X_t\}$ je Lévyjev po distribuciji. □

Komentar 2.4.5. Razjasnimo par stvari iz dokaza teorema 2.4.4.

- Intuicija iza (2.6) je sljedeća: svakako nas zanima vjerojatnost da $x_k \in B_k$, no preostaje pitanje kako „mjeriti" pojedini skok. Dekomponiranje mjere na komponente koje ovise samo o rasponu $t_k - t_{k-1}$ i mjerenje po prirastima ($y_0 = x_0, y_k = x_k - x_{k-1}$) osiguravaju željena svojstva, a to se i potvrdi formalno.

- Obrazložimo zašto je familija mjera definiranih preko (2.6) suglasna. Kada imamo $1_{B_k} \equiv 1$ za $k < n$ dobiva se konvolucija dviju od mjera, a za $k = n$ funkcija koju integriramo više ne ovisi o y_n pa i mjera μ_n nestaje. Prikažimo prvo bez smanjenja općenitosti za $n = 2$ i $B_1 = \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_0,t_1,t_2}(B_0 \times \mathbb{R}^d \times B_2) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(y_0)\,\mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_2}(y_0 + y_1 + y_2)\,\mathrm{d}\mu^{t_1-t_0}(y_1)\,\mathrm{d}\mu^{t_2-t_1}(y_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(y_0)\,\mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_2}(y_0 + y_2')\,\mathrm{d}(\mu^{t_2-t_1} * \mu^{t_1-t_0})(y_2') \qquad (2.8) \\
&= \mu_{t_0,t_2}(B_0 \times B_2), \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

gdje $y_2' = y_1 + y_2$, a jednakost (2.8) dobijemo preko poznate formule za konvoluciju (npr. [Sar80, §13.4, (6)]). Naime, možemo ju u našem slučaju pisati i kao:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_2-y_0}(y_2')\,\mathrm{d}(\mu^{t_2-t_1} * \mu^{t_1-t_0})(y_2') \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_2}(y_0 + y_1 + y_2)\,\mathrm{d}\mu^{t_2-t_1}(y_2)\,\mathrm{d}\mu^{t_1-t_0}(y_1).
\end{aligned}$$

Za (2.9) nam treba i $\mu^s * \mu^t = \mu^{s+t}$ — po prop. 2.4.2 karakteristična funkcija od μ^{s+t} je $\exp[(t+s)\log\widehat{\mu}]$ što je produkt karakterističnih funkcija od μ^s i μ^t.

Za kraj odjeljka vrijedi spomenuti i temu Lévy–Hinčinove reprezentacije beskonačno djeljivih distribucija odn. njihovih karakterističnih funkcija. Ona nam ovdje nije bila potrebna, no detaljno je obrađena u [Sat99, §8].

2.5 Markovljevi procesi i modifikacije

U ovom odjeljku uvodimo Markovljeve procese. Pokazuje se da su oni generalizacija Lévyjevih i aditivnih procesa, tj. Lévyjevi i aditivni procesi zadovoljavaju Markovljevo svojstvo. Zanima nas ima li Lévyjev po distribuciji proces iz teorema 2.4.4, t. (ii), modifikaciju koja je Lévyjev proces. Pitanje modifikacija s càdlàg ili neprekidnim trajektorijama promatrat ćemo na Markovljevim procesima; dovoljne uvjete dajemo u teoremu 2.5.10.

Najprije uvedimo pojam tranzicijske funkcije. Intuitivno, funkcija mjeri vjerojatnost prijelaza iz točke x u skup B između trenutaka s i t.

Definicija 2.5.1. Preslikavanje $\mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ gdje $x \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i $0 \le s \le t < \infty$ je *tranzicijska funkcija* na $\mathbb{R}^d$ ako

(i) za fiksni x je $B \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

(ii) za fiksni B je $x \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ Borel-izmjeriva,

(iii) vrijedi $\mathbb{P}_{s,s}(x,B) = \delta_x(B)$ i

(iv) zadovoljava relaciju

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_{s,t}(x,\, \mathrm{d}y)\mathbb{P}_{t,u}(y,B) = \mathbb{P}_{s,u}(x,B), \quad u \geq t. \tag{2.10}$$

Dodatno, razmatramo uvjete:

(v) $\mathbb{P}_{s+h,t+h}(x,B)$ ne ovisi o h i

(vi) $\mathbb{P}_{s,t}(x,B) = \mathbb{P}_{s,t}(0,B-x)$.

Ako vrijedi (v) kažemo da je tranzicijska funkcija *vremenski homogena*. Ako vrijedi (vi) kažemo da je *prostorno homogena* ili *invarijantna na translaciju*.

Komentar 2.5.2.

- Jednakost (2.10) zove se identitet Chapman–Kolmogorova.
- Ako familiju $\{\mathbb{P}_{s,t} : 0 \leq s \leq t\}$ čine vremenski homogene tranzicijske funkcije, označavamo ju s $\{\mathbb{P}_t : t \geq 0\}$ gdje $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}_{0,t}$.

Komentar 2.5.3. Za familiju $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ tranzicijskih funkcija i početnu vrijednost $a \in \mathbb{R}^d$ možemo konstruirati proces $\{Y_t\}$ kako slijedi. Tehnika i ideje slične su kao u dokazu teorema 2.4.4 pa ćemo biti manje detaljni. Definiramo na uobičajeni način Ω, $\mathcal{F}$ i $\{Y_t\}$. Za $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ i $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiramo vjerojatnosnu mjeru preko

$$\begin{aligned} &\mu^{(a)}_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(x_0) \cdots 1_{B_n}(x_n) \\ &\qquad\qquad \mathbb{P}_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1},\, \mathrm{d}x_n) \cdots \mathbb{P}_{t_0,t_1}(x_0,\, \mathrm{d}x_1)\mathbb{P}_{0,t_0}(a,\, \mathrm{d}x_0). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Suglasnost takve familije slijedi iz (2.10) te se ona proširi na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^a$ na $\mathcal{F}$.

Slična konstrukcija moguća je za drukčije početno vrijeme $s > 0$. Tada $\Omega^s = (\mathbb{R}^d)^{[s,\infty\rangle}$ i definiramo proces $\{Y_t : t \geq s\}$. Familija mjera

$$\left\{\mu^{(s,a)}_{t_0,\ldots,t_n} : s \leq t_0 < \cdots < t_n\right\}$$

definira se analogno kao u (2.11) i proširi se na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^{s,a}$ na σ-algebri $\mathcal{F}^s$. Možemo iste oznake s $s = 0$ koristiti za objekte iz prošlog paragrafa.

Definicija 2.5.4. Slučajni proces $\{X_t\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je *Markovljev proces sa familijom tranzicijskih funkcija* $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ *i početnom vrijednosti* a ako je po distribuciji jednak procesu $\{Y_t : t \geq 0\}$ definiranom u komentaru 2.5.3. Ako su tranzicijske funkcije vremenski homogene, i sam proces naziva se *vremenski homogenim*. Analogno, za proces $\{X_t : t \geq s\}$ jednak po distribuciji procesu $\{Y_t : t \geq s\}$ na prostoru $(\Omega^s, \mathcal{F}^s, \mathbb{P}^{s,a})$ može se dodati da ima *početno vrijeme* s. Procesi $\{Y_t\}$ zovu se *trajektorijska reprezentacija*.

Vezu Markovljevih s aditivnim i Lévyjevim procesima možemo ukratko i pomalo neprecizno (v. [Sat99, §10]) rezimirati ovako:

- aditivni (po distribuciji) proces odgovara Markovljevom procesu s prostorno homogenom tranzicijskom funkcijom i
- Lévyjev (po distribuciji) proces odgovara Markovljevom procesu s prostorno i vremenski homogenom tranzicijskom funkcijom.

Sljedeća propozicija uvodi varijantu Markovljevog svojstva za ovu vrstu procesa. Većina dokaza je tehnička i temelji se na Lebesgueovoj indukciji pa ga izostavljamo, ali neke stvari pojašnjavamo u komentaru 2.5.6.

Propozicija 2.5.5. *Neka je $\{Y_t\}$ trajektorijska reprezentacija Markovljevog procesa s familijom tranzicijskih funkcija $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$. Neka su $0 \le t_0 < \cdots < t_n$ i f ograničena Borel-izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^d$. S $\mathbb{E}^{s,a}$ označimo matematičko očekivanjem s obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^{s,a}$. Tada je $a \mapsto \mathbb{E}^{0,a}[f(Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_n})]$ Borel-izmjeriva za sve $a \in \mathbb{R}^d$ i*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{0,a}&[f(Y_{t_0}, \ldots, Y_{t_n})] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad \mathbb{P}_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) \cdots \mathbb{P}_{t_0,t_1}(x_0, \mathrm{d}x_1)\mathbb{P}_{0,t_0}(a, \mathrm{d}x_0).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Nadalje, ako su $0 \le s_0 < \cdots < s_m \le s$ i g ograničena Borel-izmjeriva funkcija na $\mathbb{R}^d$ vrijedi[8]

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{0,a}&[g(Y_{s_0}, \ldots, Y_{s_m})f(Y_{s+t_0}, \ldots, Y_{s+t_n})] \\ &= \mathbb{E}^{0,a}[g(Y_{s_0}, \ldots, Y_{s_m})\mathbb{E}^{s,Y_s}[f(Y_{s+t_0}, \ldots, Y_{s+t_n})]].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Komentar 2.5.6. Relacija (2.13) zove se Markovljevo svojstvo. Objasnimo prvo bazu Lebesgueove indukcije u dokazu (2.13). Uzimamo

$$f = \prod_{k=0}^{n} 1_{B_k} \quad \text{i} \quad g = \prod_{k=0}^{m} 1_{C_k},$$

gdje su $B_0, \ldots B_n, C_0, \ldots, C_m$ Borelovi. Raspišemo li lijevu stranu od (2.13) preko (2.12) dobivamo da je jednaka

$$\mathbb{P}^{0,a}(Y_{s_0} \in C_0, \ldots, Y_{s_m} \in C_m, Y_{s+t_0} \in B_0, \ldots, Y_{s+t_n} \in B_n). \tag{2.14}$$

zbog (2.11). U (2.14) dodamo još $Y_s \in \mathbb{R}^d$ prije nego raspišemo po (2.11). Unutarnjih $n+1$ integrala je jednako

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} &\prod_{k=0}^{n} 1_{B_k}(y_k)\mathbb{P}_{s+t_{n-1},s+t_n}(y_{n-1}, \mathrm{d}y_n) \\ &\cdots \mathbb{P}_{s+t_0,s+t_1}(y_0, \mathrm{d}y_1)\mathbb{P}_{s,s+t_0}(y_s, \mathrm{d}y_0),\end{aligned}$$

[8] $\mathbb{E}^{s,Y_s}[\cdot]$ znači $h(Y_s)$ gdje je $h(x) = \mathbb{E}^{s,x}[\cdot]$

što po (2.12) i (2.11) za opći s prepoznajemo kao $\mathbb{E}^{s,y_s}[f(Y_{s+t_0},\dots,Y_{s+t_n})]$. Uvrštavanjem natrag u raspis opet primijenimo (2.12) da zaključimo da je upravo riječ o desnoj strani u (2.13).

Intuitivno, Markovljevo svojstvo govori da budućnost ovisi samo o trenutnom stanju procesa, a ne i o prošlima. Preciznije, za predvidjeti budućnost jednako je korisna sadašnjost koliko i svi dosad poznati događaji. Pokažimo kako to doista slijedi iz (2.13). Fiksirajmo $s, t_0, \dots, t_n$, uvedimo pokrate $X = f(Y_{s+t_0},\dots,Y_{s+t_n})$ i $h(x) = \mathbb{E}^{s,x}(X)$ te definirajmo σ-algebru

$$\mathcal{F}_s = \sigma\left(Y_t : 0 \le t \le s\right).$$

Razmotrimo i skup

$$G = \{g(Y_{s_0},\dots,Y_{s_m}) : 0 \le s_0 < \dots < s_m \le s, g \text{ Borelova i ograničena}\}. \tag{2.15}$$

Kad bismo u (2.15) izostavili uvjet da je g ograničena bio bi G jednak skupu svih $\mathcal{F}_s$-izmjerivih varijabli (v. [Sar80, tm. 8.6]). Ipak, budući da svaku g možemo dobiti kao limes ograničenih, lako je dokazati da $\sigma(G) = \mathcal{F}_s$. U novim oznakama (2.13) postaje

$$\mathbb{E}^{0,a}[ZX] = \mathbb{E}^{0,a}[Zh(Y_s)], \quad Z \in G,$$

što se istim principom proširuje na sve Z izmjerive u $\mathcal{F}_s$. Budući da je $h(Y_s)$ očito izmjeriva u $\mathcal{F}_s$, po definiciji uvjetnog očekivanja (v. [Sar80, str. 579]) zaključujemo da je $h(Y_s) = \mathbb{E}^{0,a}[X \mid \mathcal{F}_s]$. No, $h(Y_s)$ je izmjeriva i u $\sigma(Y_s)$ te zbog $\sigma(Y_s) \subseteq \mathcal{F}_s$ opet po definiciji $h(Y_s) = \mathbb{E}^{0,a}[X \mid Y_s]$. Dakle,

$$\mathbb{E}^{0,a}\left[X \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}^{0,a}[X \mid Y_s].$$

Analogno prethodnoj diskusiji, X se može zamijeniti bilo kojom varijablom izmjerivom u $\sigma(Y_t : t \ge s)$. Zbog te općenitosti dobivamo i

$$\mathbb{P}^{0,a}\left[X \in A \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{P}^{0,a}\left[X \in A \mid Y_s\right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Sada možemo krenuti prema glavnom rezultatu odjeljka. Definirajmo najprije nekoliko novih pojmova. Za $x \in \mathbb{R}^d$ neka je $K_\varepsilon(x)$ ε-okolina točke x, tj.[9] $K_x(\varepsilon) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < \varepsilon\right\}$. Neka su $\mathbb{P}_{s,t}$ tranzicijske funkcije na $\mathbb{R}^d$. Definiramo

$$\alpha_{\varepsilon,T}(u) = \sup\{\mathbb{P}_{s,t}(x, K_\varepsilon^c(x)) : x \in \mathbb{R}^d,\ s,t \in [0,T],\ 0 \le t - s \le u\}. \tag{2.16}$$

Nadalje neka je $M \subseteq [0,\infty\rangle$. Za fiksni ω kažemo da $X_t(\omega)$ ima *ε-oscilaciju n puta u M* ako postoje $t_0 < \dots < t_n$ gdje $t_k \in M$ takvi da

$$\left|X_{t_k}(\omega) - X_{t_{k-1}}(\omega)\right| > \varepsilon, \quad 1 \le k \le n.$$

[9]zapis implicira da je $|\cdot|$ norma na $\mathbb{R}^d$ — kako su sve norme ekvivalentne na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, odabir nije bitan

Ako tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, kažemo da ima *beskonačno čestu ε-oscilaciju.* Definiramo još

$$\begin{aligned}
\Omega_2 = \{\omega \in \Omega \colon &\lim_{s\in\mathbb{Q}, s\downarrow t} X_s(\omega) \text{ postoji u } \mathbb{R}^d \text{ za sve } t \geq 0 \text{ i} \\
&\lim_{s\in\mathbb{Q}, s\uparrow t} X_s(\omega) \text{ postoji u } \mathbb{R}^d \text{ za sve } t > 0\}, \\
A_{N,k} = \{\omega \in \Omega \colon &X_t(\omega) \text{ nema beskonačno čestu } \frac{1}{k}\text{-oscilaciju u } [0,N] \cap \mathbb{Q}\}, \\
\Omega_2' = &\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{N,k}, \\
B(p,\varepsilon,M) = \{\omega \in \Omega \colon &X_t(\omega) \text{ ima } \varepsilon\text{-oscilaciju } p \text{ puta u } M\}.
\end{aligned}$$

Pokaže se $\Omega_2' \in \mathcal{F}$. Prije glavnog rezultata, potrebno nam je nekoliko lema.

Lema 2.5.7. *Vrijedi $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$.*

Dokaz. Neka je $\omega \in \Omega_2'$ i pretpostavimo da ne postoji limes zdesna u $t \geq 0$ (analogno za limes slijeva). To znači da postoji niz $(s_n)_n$ racionalnih brojeva takvih da $s_n \downarrow t$ i da ne postoji limes $\lim_n X_{s_n}(\omega)$. To znači da niz $(X_{s_n}(\omega))_n$ nije Cauchyjev tj. postoji $\varepsilon > 0$ takav da

$$(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists m, n \geq n_0 \text{ takvi da } |X_{s_n}(\omega) - X_{s_m}(\omega)| > 2\varepsilon). \tag{2.17}$$

Naći ćemo beskonačno čestu ε-oscilaciju i time kontradikciju. Neka je $s_1' = s_n$ proizvoljan. Tvrdimo da postoji $s_2' = s_m$ gdje $m > n$ takav da $\left|X_{s_1'}(\omega) - X_{s_2'}(\omega)\right| > \varepsilon$. U suprotnom bi bilo

$$\begin{aligned}
|X_{s_m}(\omega) - X_{s_k}(\omega)| &\leq \left|X_{s_m}(\omega) - X_{s_1'}(\omega)\right| + \left|X_{s_1'}(\omega) - X_{s_k}(\omega)\right| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

za sve $m, k > n$ što je u kontradikciji s (2.17). Iteriranjem ovog postupka dolazimo do niza $(s_n')_n$ takvog da $\left|X_{s_k'}(\omega) - X_{s_{k+1}'}(\omega)\right| > \varepsilon$ za $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.5.8. *Ako je $\{X_t\}$ stohastički neprekidan i $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$, tada ima modifikaciju $\{X_t'\}$ takvu da je $t \mapsto X_t'(\omega)$ càdlàg za svaki $\omega \in \Omega$.*

Dokaz. Definiramo

$$X_t'(\omega) = \begin{cases} \lim_{s\in\mathbb{Q}, s\downarrow t} X_s(\omega), & \omega \in \Omega_2', \\ 0, & \omega \notin \Omega_2'. \end{cases}$$

Dokažimo da je $t \mapsto X_t'(\omega)$ neprekidna zdesna. Za $\omega \notin \Omega_2'$ je očito, pa neka $\omega \in \Omega_2'$. Neka je $t \geq 0$ proizvoljan i $(t_n)_n$ takav da $t_n \downarrow t$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo $\delta_n > 0$ takav da $t_n + \delta_n \in \mathbb{Q}$ i takav da desna strana u

$$\left|X_t'(\omega) - X_{t_n}'(\omega)\right| \leq \left|X_t'(\omega) - X_{t_n+\delta_n}(\omega)\right| + \left|X_{t_n+\delta_n}(\omega) - X_{t_n}'(\omega)\right|$$

teži k nuli kad $n \to \infty$. Jasno je da je to moguće po definiciji skupa $\Omega_2 \supseteq \Omega_2'$. Time smo dokazali neprekidnost zdesna, a postojanje limesa slijeva dokaže se sličnom tehnikom.

Preostaje dokazati da je $\{X_t\}$ doista modifikacija polaznog procesa. Neka je $t \geq 0$ i $(s_n)_n$ niz racionalnih brojeva takav da $s_n \downarrow t$. Po stohastičkoj neprekidnosti je $X_{s_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$, a po definiciji procesa $\{X_t'\}$ i $\mathbb{P}(\Omega_2') = 1$ vrijedi $X_{s_n} \xrightarrow{\text{g.s.}} X_t'$. Slijedi $\mathbb{P}(X_t = X_t') = 1$. $\square$

Lema 2.5.9. *Neka je $p \in \mathbb{N}$,*

$$0 \leq s_1 < \cdots < s_m \leq u \leq t_1 < \cdots < t_n \leq v \leq T$$

i $M = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Ako je $\{X_t\}$ Markovljev proces s familijom tranzicijskih funkcija $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ i početnom vrijednosti a, tada

$$\mathbb{E}^{0,a}[Z \cdot 1_{B(p,4\varepsilon,M)}] \leq \mathbb{E}^{0,a}[Z](2\alpha_{\varepsilon,T}(v-u))^p,$$

za svaku $Z = g(X_{s_1}, \ldots, X_{s_m})$, gdje je g Borelova i nenegativna.

Dokaz. Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da je $\{X_t\}$ sam trajektorijska reprezentacija. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po p. Neka je $p = 1$. Definiramo događaje

$$\begin{aligned} C_k &= \left\{ \left| X_{t_j} - X_u \right| \leq 2\varepsilon, \text{ za } 1 \leq j \leq k-1 \text{ i } |X_{t_k} - X_u| > 2\varepsilon \right\}, \\ D_k &= \{|X_v - X_{t_k}| > \varepsilon\}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Događaji C_k su disjunktni. Tvrdimo

$$\begin{aligned} B(1, 4\varepsilon, M) &\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \{|X_{t_k} - X_u| > 2\varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^{n} C_k \\ &\subseteq \{|X_u - X_v| \geq \varepsilon\} \cup \bigcup_{k=1}^{n} (C_k \cap D_k). \end{aligned}$$

Prva inkluzija vrijedi jer ako $\omega \in B(1, 4\varepsilon, M)$ i $4\varepsilon < \left|X_{t_j}(\omega) - X_{t_k}\right| \leq \left|X_{t_j} - X_u\right| + |X_{t_k} - X_u|$ pa je barem jedan od sumanada zdesna $> 2\varepsilon$. Ako $\omega \in C_k$ iz $4\varepsilon \left|X_{t_j} - X_{t_k}\right| \leq \left|X_{t_j} - X_u\right| + |X_u - X_v| + |X_{t_k} - X_v|$ i $|X_u - X_v| < \varepsilon$ slijedi $|X_{t_k} - X_v| > \varepsilon$, stoga vrijedi druga inkluzija. Primjenom matematičkog očekivanja dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{0,a}[Z \cdot 1_{B(1,4\varepsilon,M)}] &\leq \mathbb{E}^{0,a}\left[Z \cdot 1_{\{|X_u - X_v| \geq \varepsilon\}}\right] + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}[Z 1_{C_k} 1_{D_k}] \\ &\leq \mathbb{E}^{0,a}[Z]\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}^{0,a}[Z 1 C_k]\alpha_{\varepsilon,T}(v-u) \\ &\leq 2\mathbb{E}^{0,a}[Z]\alpha_{\varepsilon,T}(v-u), \end{aligned}$$

pri čemu drugu nejednakost dobivamo primjenom Markovljevog svojstva (2.13), nakon čega dobivenu varijablu možemo uniformno ograničiti konstantom $\alpha_{\varepsilon,T}(v-u)$ po definiciji (2.16). Time je dokazana baza indukcije.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $p-1$ i dokažimo da vrijedi za p. Definiramo događaje

$$\begin{aligned} F_k &= \{X_t \text{ ima } 4\varepsilon\text{-oscilaciju } p-1 \text{ puta u } \{t_1, \dots, t_k\} \text{ ali ne i u } \{t_1, \dots, t_{k-1}\}\}, \\ G_k &= \{X_t \text{ ima } 4\varepsilon\text{-oscilaciju jednom u } \{t_{k+1}, \dots, t_n\}\}, \quad 1 \le k \le n. \end{aligned}$$

Događaji F_k su disjunktni i očito

$$B(p-1, 4\varepsilon, M) = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \quad \text{i} \quad B(p, 4\varepsilon, M) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (F_k \cap G_k).$$

Nastavimo kao u dokazu baze te primjenom pretpostavke i slučaja $p = 1$ dobivamo traženo. □

Slijedi glavni rezultat odjeljka koji daje dovoljne uvjete da bi Markovljev proces imao modifikaciju s càdlàg odn. neprekidnim trajektorijama.

Teorem 2.5.10. *Neka je $\{X_t\}$ Markovljev proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s familijom tranzicijskih funkcija $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$. Ako vrijedi*

$$\lim_{u \downarrow 0} \alpha_{\varepsilon,T}(u) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \forall T > 0, \tag{2.18}$$

tada $\{X_t\}$ ima modifikaciju $\{X'_t\}$ takvu da je trajektorija $t \mapsto X'_t(\omega)$ càdlàg za svaki $\omega \in \Omega$. Ako vrijedi jači uvjet

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u} \alpha_{\varepsilon,T}(u) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \forall T > 0, \tag{2.19}$$

tada $\{X_t\}$ ima modifikaciju $\{X'_t\}$ takvu da postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X'_t(\omega)$ neprekidna.

Dokaz. Pretpostavimo prvo (2.18). Po lemi 2.5.8 dovoljno je dokazati $\mathbb{P}(\Omega'_2) = 1$, a za to je opet dovoljno $\mathbb{P}(A^c_{N,k}) = 0$ za sve $N, k \in N$. Fiksirajmo N i k. Po (2.18) odaberimo ℓ takav da $2\alpha_{1/(4k),N}(N/\ell) < 1$. Definiramo $t_j = \frac{Nj}{\ell}$ za $0 \le j \le \ell$ i $I_j = [t_{j-1}, t_j] \cap \mathbb{Q}$ za $j > 0$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c_{N,k}) &= \mathbb{P}\left(X_t \text{ ima } \frac{1}{k}\text{-oscilaciju beskonačno često u } [0, N] \cap \mathbb{Q}\right) \\ &\le \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(X_t \text{ ima } \frac{1}{k}\text{-oscilaciju beskonačno često u } I_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \lim_{p \to \infty} \mathbb{P}\left[B\left(p, \frac{1}{k}, I_j\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Uzmimo fiksni I_j i $\{s_1, \dots, s_n\} \subset I_j$. Po lemi 2.5.9 je

$$\mathbb{P}\left[B\left(p, 1/k, \{s_1, \dots, s_n\}\right)\right] \leq \left(2\alpha_{\frac{1}{4k},N}\left(\frac{N}{\ell}\right)\right)^p.$$

Aproksimirajući I_j odozdo konačnim skupovima ($n \to \infty$) slijedi

$$\mathbb{P}\left[B\left(p, 1/k, I_j\right)\right] \leq \left(2\alpha_{\frac{1}{4k},N}\left(\frac{N}{\ell}\right)\right)^p,$$

što znači da (2.20) teži u 0, a stoga i $\mathbb{P}(A^c_{N,k}) = 0$ kako smo htjeli.

Pretpostavimo sada (2.19). Dovoljno je dokazati da za svaki $N \in \mathbb{N}$ postoji $H_N \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(H_N) = 1$ i

$$H_N \subseteq \left\{X'_t = X'_{t-}, \ \forall t \in \langle 0, N]\right\}.$$

gdje je X'_{t-} limes slijeva u t. Neka je N fiksan i definiramo za $\ell \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$

$$R_{\ell,\varepsilon} = \sum_{j=1}^{\ell} 1_{\left\{\left|X'_{t_j} - X'_{t_{j-1}}\right| > \varepsilon\right\}},$$
$$R_\varepsilon(\omega) = \operatorname{card}\left\{t \in \langle 0, N] : \left|X'_t(\omega) - X'_{t-}(\omega)\right| > \varepsilon\right\}$$

pa je $R_\varepsilon(\omega) \leq \liminf\limits_{\ell\to\infty} R_{\ell,\varepsilon}(\omega)$. Vrijedi

$$\mathbb{E}(R_{\ell,\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(\left|X'_{t_j} - X'_{t_{j-1}}\right| > \varepsilon\right) \leq \ell\alpha_{\varepsilon,N}\left(\frac{N}{\ell}\right).$$

Po (2.19) imamo $\lim\limits_{\ell\to\infty} \mathbb{E}(R_{\ell,\varepsilon}) = 0$ i po Fatouovoj lemi $\mathbb{E}\left(\liminf\limits_{\ell\to\infty} R_{\ell,\varepsilon}\right) = 0$. Stavimo

$$H_N = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\liminf_{\ell\to\infty} R_{\ell,1/k} = 0\right\}.$$

Zadovoljili smo željeni uvjet jer $H_N \subseteq \{R_\varepsilon = 0, \ \forall \varepsilon > 0\}$. □

Sada samo trebamo dokazati da Lévyjev po distribuciji proces zadovoljava (2.18) da bismo mogli pojačati teorem 2.4.4 i zaključiti da postoji 1-1 korespondencija između beskonačno djeljivih distribucija i Lévyjevih procesa. Štoviše, za aditivni proces po distribuciji, koji je Markovljev s prostorno homogenim tranzicijskim funkcijama, imamo:

$$\mathbb{P}_{s,t}(x, K^c_\varepsilon(x)) = \mathbb{P}_{s,t}(0, K^c_\varepsilon(0)) = \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon).$$

Slijedi $\alpha_{\varepsilon,T}(u) \to 0$ kad $u \to 0$. Za taj zaključak nam je zapravo potrebna i uniformnost stohastičke neprekidnosti na segmentu (v. [Sat99, lema 9.6]). Dakle, po teoremu 2.5.10

svaki Lévyjev po distribuciji (aditivan po distribuciji) proces ima modifikaciju s càdlàg trajektorijama, tj. koja je Lévyjev (aditivni) proces.

Na korak smo i do dokaza da Brownovo gibanje definirano preko definicije 2.3.1 postoji, no fali još svojstvo (ii) za što bismo trebali dokazati i (2.19). Pokazuje se svaki Lévyjev gaussovski (tj. takav da je svaka konačnodimenzionalna distribucija normalna; to je Brownovo gibanje do na množenje konstantom) proces u $\mathbb{R}$ g.s. ima neprekidne trajektorije, što je tvrdnja sljedećeg teorema. Tvrdnja vrijedi i za aditivni proces u općem $\mathbb{R}^d$ (v. [Sat99, tm. 11.7]). Čak vrijedi i obrat, tj. jedini aditivni procesi s neprekidnim trajektorijama su gaussovski (v. [Sat99, §21]).

Teorem 2.5.11. *Ako je $\{X_t\}$ Lévyjev gaussovski proces na $\mathbb{R}$, tada gotovo sigurno vrijedi da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna.*

Dokaz. Neka je bez smanjenja općenitosti $X_1 \sim \mathrm{N}(0,1)$. Ocjenu

$$\int_c^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \le \int_c^\infty e^{-x^2/2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{c}e^{-c^2/2}, \quad c>0,$$

gdje se jednakost dobije direktno antiderivacijom, iskoristimo za

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_s|>\varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi s}}\int_\varepsilon^\infty e^{-x^2/2s}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\varepsilon/\sqrt{s}}^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2\sqrt{s}}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}e^{-\varepsilon^2/2s}.\end{aligned}$$

Stoga,

$$\frac{1}{u}\alpha_{\varepsilon,T}(u) = \frac{1}{u}\sup_{s\le u,T}\mathbb{P}(|X_s|>\varepsilon) \le \sup_{s\le u,T}\frac{1}{s}\mathbb{P}(|X_s|>\varepsilon) \to 0, \quad u\downarrow 0,$$

čime smo dokazali (2.19). □

2.6 Samosličnost

U ovom odjeljku formalno uvodimo pojam samosličnosti slučajnih procesa koji smo najavili još u uvodu. Za Brownovo gibanje vidjeli smo to svojstvo u teoremu 2.3.2. Osim o samosličnosti, govori se i o nekoliko generalizacija.

Definicija 2.6.1. Kažemo da je slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}^d$:

- *samosličan* ako za svaki $a>0$ postoji $b>0$ takav da

$$\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t\}, \tag{2.21}$$

- *samosličan u širem smislu* ako za svaki $a > 0$ postoje $b > 0$ i $c\colon [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}^d$ takvi da

$$\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t + c(t)\}\,, \tag{2.22}$$

- *polu-samosličan* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji $b > 0$ takav da vrijedi (2.21),
- *polu-samosličan u širem smislu* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji $b > 0$ i $c\colon [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}^d$ takvi da vrijedi (2.22).

Sljedeći teorem je fundamentalan za samosličnost i generalizacije.

Teorem 2.6.2. *Neka je $\{X_t\}$ polu-samosličan u širem smislu, stohastički neprekidan i netrivijalan*[10] *proces na $\mathbb{R}^d$ s X_0 g.s. konstantom. Neka je Γ skup svih a takvih da postoje b i c takvi da vrijedi (2.22).*

(i) Postoji $H > 0$ takav da

$$b = a^H, \quad a \in \Gamma. \tag{2.23}$$

(ii) Skup $\Gamma \cap \langle 1, \infty\rangle$ je neprazan. Neka je a_0 infimum tog skupa.

- *Ako je $a_0 > 1$ je $\Gamma = \{a_0^n \colon n \in \mathbb{Z}\}$ i $\{X_t\}$ nije samosličan u širem smislu.*
- *Ako je $a_0 = 1$ je $\Gamma = \langle 0, \infty\rangle$ i $\{X_t\}$ je samosličan u širem smislu.*

Eksponent H iz (2.23) je važna karakteristika samosličnog slučajnog procesa. Naziva se i Hurstov eksponent. Kada ga želimo naglasiti govorimo o H-samosličnim procesima. Dokazat ćemo manje općenitu verziju teorema, a za to nam je najprije potrebna sljedeća jednostavna lema.

Lema 2.6.3. *Neka je X ne-nul slučajna varijabla na $\mathbb{R}^d$. Ako je $b_1 X \stackrel{\mathrm{d}}{=} b_2 X$ za neke $b_1, b_2 > 0$, onda $b_1 = b_2$.*

Dokaz. Neka je $b_1 < b_2$ bez smanjenja općenitosti i $b = b_1/b_2 < 1$. Tada je $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} bX$ i induktivno $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} b^n X$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Puštanjem $n \to \infty$ dobivamo $X = 0$ g.s. s kontradikcijom. □

Teorem 2.6.4. *Neka je $\{X_t\}$ samosličan, stohastički neprekidan i netrivijalan slučajni proces. Tada postoji $H \geq 0$ takav da vrijedi $b = a^H$ za sve a, b iz (2.21).*

Dokaz. Neka je t takav da je X_t ne-nul varijabla. Ako $b_1 X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{at} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b_2 X_t$ po lemi 2.6.3 slijedi $b_1 = b_2$. Dakle, b u (2.21) je jedinstveno određen s a i možemo ga označavati $b(a)$ (isto se pokazuje da vrijedi za c iz (2.22)). Nadalje vrijedi

$$X_{a_1 a_2 t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b(a_1) X_{a_2 t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b(a_1) b(a_2) X_t,$$

[10] slučajna varijabla je trivijalna ako $\mathbb{P}(X = c) = 1$ za neki c, slučajni proces $\{X_t\}$ je trivijalan ako je svaka X_t trivijalna

ali jasno i $X_{a_1 a_2 t} = b(a_1 a_2) X_t$ iz čega slijedi $b(a_1 a_2) = b(a_1) b(a_2)$. Stoga $X_{a^n t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} b(a)^n X_t$. Za $a < 1$ po stohastičkoj neprekidnosti $X_{a^n t} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_0$ i zato $b(a) \leq 1$. Ako $a_1 < a_2$ je $1 \geq b(a_1/a_2) = b(a_1)/b(a_2)$, tj. $b(a_1) \leq b(a_2)$. Dakle, $a \mapsto b(a)$ je multiplikativna i neopadajuća. Poznato je da je rješenje takve funkcijske jednadžbe dano s $b(a) = a^H$ za neki fiksni $H \geq 0$. $\square$

Komentar 2.6.5. Pojasnimo slučaj $H = 0$ i diskrepanciju između teorema 2.6.2 i 2.6.4. Ako $H = 0$ je $\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{X_t\}$ za svaki $a > 0$. Za svaki $t \geq 0$ posebice $X_t - X_0 \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_{at} - X_0$. Onda i

$$\mathbb{P}(|X_t - X_0| > \varepsilon) = \lim_{a \downarrow 0} \mathbb{P}(|X_{at} - X_0| > \varepsilon) = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

pri čemu druga jednakost vrijedi zbog stohastičke neprekidnosti. Zbog proizvoljnosti ε, slijedi $X_t = X_0$ g.s. Kada bismo još zahtijevali da je X_0 g.s. konstanta kao u teoremu 2.6.2, bio bi proces $\{X_t\}$ trivijalan.

Obratno, ako je $H > 0$ stavimo $t = 0$ pa $X_0 \stackrel{\mathrm{d}}{=} a^H X(0)$, i uz $a \downarrow 0$ dobivamo $X_0 = 0$ g.s. Zbog tih činjenica kod samosličnih procesa često podrazumijevamo stohastičku neprekidnost i $H > 0$.

Kada je riječ o samosličnim Lévyjevim procesima, koristimo i sljedeće pojmove.

Definicija 2.6.6. Kažemo da je beskonačno djeljiva distribucija μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

- *strogo stabilna* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(bz), \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{2.24}$$

- *stabilna* ako za svaki $a > 0$ postoje $b > 0$ i $c \in \mathbb{R}^d$ takvi da

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(bz) e^{i\langle c, z\rangle}, \quad z \in \mathbb{R}^d, \tag{2.25}$$

- *strogo polu-stabilna* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoji $b > 0$ takav da vrijedi (2.24),
- *polu-stabilna* ako za neki $a > 0$, $a \neq 1$, postoje $b > 0$ i $c \in \mathbb{R}^d$ takvi da vrijedi (2.25).

Kažemo da je Lévyjev proces strogo stabilan ili dr. ako je to distribucija $\mathbb{P}_{X_1}$. Lako je dokazati da je Lévyjev proces strogo stabilan, stabilan, strogo polu-stabilan ili polu-stabilan ako i samo ako je redom samosličan, samosličan u širem smislu, polu-samosličan ili polu-samosličan u širem smislu. U [EM02, §1.4] navodi se rezultat analogan teoremu 2.6.2: u (2.24) i (2.25) vrijedi $b = a^{1/\alpha}$ za neki fiksni $\alpha \in \langle 0, 2]$. Za takav α onda se lako pokaže $H = 1/\alpha \geq 1/2$. Parametar α zove se *indeks*, a za proces se kaže da je α-stabilan ili α-polu-stabilan i sl.

Primjerice, lako se vidi da su normalna ($\alpha = 2$) i Cauchyjeva ($\alpha = 1$) distribucija stabilne. Standardna normalna i Cauchyjeva su štoviše strogo stabilne. Sve stabilne distribucije moguće je karakterizirati preko četiriju parametara što je tema u [Sat99, §14]. Zato se često govori o *stabilnoj distribuciji* umjesto *stabilnim distribucijama*.

Svaki samoslični proces sa stacionarnim i nezavisnim prirastima, podrazumijevajući stohastičku neprekidnost i $X_0 = 0$ g.s. (v. komentar 2.6.5) je Lévyjev strogo stabilni proces (uz ev. modifikaciju; odjeljak 2.5). Ipak, nisu svi samoslični procesi Lévyjevi, pa se proučavaju odvojeno samoslični procesi čiji su prirasti jedino stacionarni odn. jedino nezavisni (v. [EM02]).

U slučaju samosličnih procesa sa stacionarnim prirastima, možemo naći vezu s fenomenom *dugoročne zavisnosti* (*pamćenja*; [EM02, §3.2]), koja se konkretno definira sporim opadanjem autokovarijacijske funkcije. Stavimo $J_n = X_{n+1} - X_n$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $\gamma(n) = \mathbb{E}(J_0 J_n)$. U analizi stacionarnih nizova često nam je poželjan uvjet

$$\sum_n |\gamma(n)| < \infty,$$

koji zovemo *kratkoročna zavisnost* te se javlja npr. kod ARMA modela. S druge strane, dokazat ćemo da za $H > 1/2$ red ne konvergira. Osim toga, $H > 1/2$ i $H < 1/2$ impliciraju da su prirasti redom pozitivno odn. negativno korelirani. Najprije, potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.6.7. *Neka je $\{X_t\}$ H-samosličan slučajni proces sa stacionarnim prirastima u $\mathbb{R}$ i $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}(X_t X_s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)\mathbb{E}X_1^2, \quad t, s \geq 0.$$

Dokaz. Iz samosličnosti $X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} t^H X_1$, stoga $\mathbb{E}X_t^2 = t^{2H}\mathbb{E}X_1^2$. Zatim

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}(X_t X_s) &= \mathbb{E}X_t^2 + \mathbb{E}X_s^2 - \mathbb{E}\left(X_t - X_s\right)^2 \\ &= \mathbb{E}X_t^2 + \mathbb{E}X_s^2 - \mathbb{E}X_{|s-t|}^2 \\ &= \mathbb{E}X_1^2\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right). \end{aligned}$$

□

Teorem 2.6.8. *Neka je $\{X_t\}$ H-samosličan sa stacionarnim prirastima, $0 < H < 1$, svaka X_t netrivijalna i $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Tada vrijedi*

$$\gamma(n) = \begin{cases} H(2H-1)n^{2H-2}\mathbb{E}X_1^2 + o(1), & n \to \infty, \quad H \neq 1/2, \\ 0, & n \in \mathbb{N}, \quad H = 1/2. \end{cases}$$

Posljedično,

(i) ako $H < 1/2$ je $\gamma(n) < 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| < \infty$,

(ii) ako $H = 1/2$ je $\gamma(n) = 0$ za $n \in \mathbb{N}$,

(iii) ako $H > 1/2$ je $\gamma(n) > 0$ za $n \in \mathbb{N}$ i $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma(n)| = \infty$.

Dokaz. Za izračunati $\gamma(n)$ prvo primijenimo lemu 2.6.7, a zatim razvijamo u binomni red (smijemo jer $|1/n| \leq 1$ i $2H > 0$) kako slijedi:

$$\begin{aligned}
\gamma(n) &= \frac{1}{2}\left[(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}\right]\mathbb{E}X_1^2 && (2.26)\\
&= \frac{1}{2}n^{2H}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2H} - 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2H}\right]\mathbb{E}X_1^2\\
&= n^{2H}\mathbb{E}X_1^2\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2H}{2k}\frac{1}{n^{2k}}\\
&= H(2H-1)n^{2H-2}\mathbb{E}X_1^2 + \mathbb{E}X_1^2\sum_{k=2}^{\infty}\binom{2H}{2k}n^{2H-2k}. && (2.27)
\end{aligned}$$

Tvrdnje za $H = 1/2$ slijede odmah iz (2.26), a inače iz (2.27): drugi sumand teži u 0 kad $n \to \infty$, ne utječe na konvergenciju niti na predznak ni za koji $n \in \mathbb{N}$.

□

Poglavlje 3

Hölder-regularnost trajektorija frakcionalnog Brownovog gibanja

3.1 Reprezentacija Brownovog gibanja slučajnim redom

U ovom poglavlju ćemo definirati frakcionalno Brownovo gibanje (FBM), koje je svojevrsna generalizacija Brownovog gibanja u kojemu ulogu $1/2$ kao parametra samosličnosti zauzima bilo koji drugi eksponent $0 < H < 1$. Nakon toga ćemo riješiti problem Hölder-regularnosti trajektorija FBM koristeći valiće za razvoj u slučajni red i time pokazati vrijednost harmonijske analize u primjeni na analizu slučajnih procesa. Pojam Hölder-regularnosti uvest ćemo sada.

Definicija 3.1.1. Za funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kažemo da je *Hölder-regularna* s parametrom $0 < \alpha < 1$ ili da zadovoljava *Hölderov uvjet* ako

$$|f(x) - f(y)| \lesssim |x - y|^{\alpha}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Jasno, definiciju je moguće proširiti na funkcije na proizvoljnom metričkom prostoru. Lako se pokaže da je zahtjev (3.1) jači od uniformne neprekidnosti, ali slabiji od Lipschitz-neprekidnosti (time i diferencijabilnosti). Ideja je da se parametrom α kvantificira vrsta glatkoće slabija od diferencijabilnosti. Dobri primjer su funkcije $x \mapsto |x|^{\alpha}$ za $0 < \alpha < 1$ — poznato nam je da te funkcije (korijeni) nisu diferencijabilne u nuli, ali na njihovim grafovima možemo vidjeti da singularitet u nuli postaje sve manje izražen povećanjem α. Uvjet (3.1) postaje jači povećanjem α, pa nam je najzanimljiviji najveći α (supremum) za koji uvjet vrijedi — takav α zove se *kritični Hölderov eksponent.* U slučaju FBM, vidjet ćemo da parametar H odgovara tom kritičnom eksponentu. Opet, za veći eksponent trajektorija ima glađi izgled (v. [Šev14, str. 6]).

U ostatku ovog odjeljka prikazat ćemo ukratko motivacijski primjer reprezentacije Brownovog gibanja pomoću Haarovog sistema.[1] Neka je $\{B_t : t \in [0,1]\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$ nad $[0,1]$. Ono ima jednostavni prikaz pomoću Paley–Wienerovog integrala:

$$B_t = \int_0^1 1_{[0,t]}(s)\,\mathrm{d}B_s.$$

Funkciju $f = 1_{[0,t]}$ želimo razviti u Haarovom sistemu. Na $\mathrm{L}^2([0,1])$ imamo varijantu Haarovog sistema u odnosu na $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:

$$h_0 = 1_{[0,1]}, \qquad h_{j,k}(s) = 2^{j/2} h(2^j s - k), \quad j \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^j - 1$$

gdje $h(s) = 1_{[0,1/2\rangle}(s) - 1_{[1/2,1]}(s)$. Zbog jednostavnog oblika funkcija možemo direktno izračunati:

$$\langle f, h_0 \rangle = t 1_{[0,1]}, \qquad \langle f, h_{j,k} \rangle = 2^{-j/2} \tau(2^j t - k), \quad j \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^j - 1,$$

pri čemu je τ trokutasta funkcija na $[0,1]$ s $\tau(1/2) = 1/2$, čime dobivamo

$$1_{[0,t]}(s) = t 1_{[0,1]}(s) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j/2} \tau(2^j t - k) 2^{j/2} h(2^j s - k).$$

Uvrštavanjem i primjenom izometričnosti Paley–Wienerovog integrala dobivamo najavljenu reprezentaciju

$$B_t = t\varepsilon_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j/2} \tau(2^j t - k) \varepsilon_{j,k}, \tag{3.2}$$

pri čemu

$$\varepsilon_0 = \int_0^1 1_{[0,1]}(s)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \varepsilon_{j,k} = \int_0^1 2^{j/2} h(2^j s - k)\,\mathrm{d}B_s, \quad j \geq 0,\ 0 \leq k \leq 2^j - 1.$$

Lako je pokazati $\varepsilon_0, \varepsilon_{j,k} \sim \mathrm{N}(0,1)$ i da su nezavisni. Vrijedi i da red u (3.2), osim što konvergira za svaki t po normi u $\mathrm{L}^2(\Omega)$, gotovo sigurno konvergira uniformno po t. Ovo je ujedno i temelj za Lévyjevu konstrukciju Brownovog gibanja. Definiramo li slučajni proces desnom stranom u (3.2), slijede svojstva Lévyjevog procesa (v. [Die16]), a reprezentacija je korisna i za daljnje bavljenje trajektorijama.

[1] budući da ćemo na kraju doći do funkcija u tzv. Faber–Schauderovom sistemu, češće se govori o reprezentaciji Faber–Schauderovim sistemom

3.2 Frakcionalno Brownovo gibanje i integralne reprezentacije

Frakcionalno Brownovo gibanje definirat ćemo kao gaussovski proces s odgovarajućom kovarijacijskom strukturom, a zatim ispitati njegova svojstva.

Definicija 3.2.1. Neka je $H \in \langle 0,1 \rangle$. *Frakcionalno Brownovo gibanje* (skraćeno FBM ili fBm) s parametrom H je gaussovki proces $\left\{B_t^H\right\}$ u $\mathbb{R}$ definiran s $\mathbb{E}B_t^H = 0$ za svaki $t \geq 0$ i

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(B_1^H)^2\right]\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \quad t, s \geq 0. \tag{3.3}$$

Razmotrimo svojstva takvog procesa:

- Normalne konačnodimenzionalne distribucije, pa i slučajni proces, jedinstveno su (u smislu distribucije) definirani preko (3.3). Ipak, potrebno je paziti da odgovarajuće kovarijacijske matrice budu pozitivno semidefinitne. To je moguće dokazati direktno, ili je zbog leme 2.6.7 dovoljno dokazati da uopće postoji H-samosličan proces sa stacionarnim prirastima. Alternativno, FBM se može definirati tzv. integralnim reprezentacijama kojima ćemo se baviti vrlo skoro.

- Lako se dobije $B_0^H = 0$ g.s. i s tim je (3.3) ekvivalentno sa

$$\mathbb{E}\left[\left(B_t^H - B_s^H\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[(B_1^H)^2\right]|t-s|^{2H}. \tag{3.4}$$

- Varijacija na definiciju 3.2.1 moguća je ako dodatno pretpostavimo $\operatorname{Var} B_1^H = 1$ kao npr. u [Šev14], čime nestaje faktor $\mathbb{E}\left[(B_1^H)^2\right]$ u (3.3).

- Ako uzmemo $\operatorname{Var} B_1^H = 1$ i $H = 1/2$, riječ je o običnom Brownovom gibanju. Naime, dobije se $\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \min\{t, s\}$, što se lako pokaže da vrijedi i za Brownovo gibanje.

- Za $H = 1$ dobio bi se degenerirani slučaj — kao u dokazu teorema 2.6.8 dobili bismo $\gamma(n) = \mathbb{E}\left[(B_1^H)^2\right]$, tj. autokorelacija je uvijek 1 i $B_t^H = tB_1^H$ g.s.

- Za svaki gaussovski H-samoslični proces sa stacionarnim prirastima nužno vrijedi (3.3) po lemi (2.6.7). Dakle, ako takav proces postoji je jednak FBM.

- Za $H \neq 1/2$ prirasti nisu nezavisni po teoremu 2.6.8, što znači da FBM nije Lévyjev niti aditivni proces. Štoviše, nije ni Markovljev (v. [Šev14]).

- FBM g.s. ima neprekidne i nigdje-diferencijabilne trajektorije. Te tvrdnje slijedit će kad riješimo pitanje Hölder-regularnosti trajektorija.

- FBM je H-samoslično. Za $a > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(B^H_{at}B^H_{as}\right) &= \frac{1}{2}\operatorname{Var} B^H_1\left[(at)^{2H} + (as)^{2H} - (a\,|t-s|)^{2H}\right] \\ &= a^{2H}\mathbb{E}\left(B^H_t B^H_s\right) = \mathbb{E}\left[\left(a^H B^H_t\right)\left(a^H B^H_s\right)\right].\end{aligned}$$

  Ponovo jer kovarijacijska struktura određuje gaussovski proces, slijedi

$$\left\{B^H_{at}\right\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left\{a^H B^H_t\right\}.$$

- FBM ima stacionarne priraste. Tvrdnja se opet dobije direktno preko (3.3). Time smo dokazali sljedeću propoziciju.

Propozicija 3.2.2. *Za dani $H \in \langle 0, 1\rangle$ je FBM jedinstveni (do na množenje konstantom; u smislu distribucije) centrirani gaussovski H-samoslični proces sa stacionarnim prirastima.*

Sada ćemo prijeći na temu integralnih reprezentacija FBM. Općenito, pod izrazom integralna reprezentacija podrazumijevamo prikaz slučajnog procesa stohastičkim integralom nekog drugog procesa (ili determinističke funkcije). U ovom radu uvijek je riječ o integralu determinističke funkcije s obzirom na Brownovo gibanje — dakle o Paley–Wienerovom integralu. Konkretno, želimo prikaz oblika

$$B^H_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_0^t K(u)\,\mathrm{d}B_u \quad \text{ili općenitije} \quad B^H_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} K_t(u)\,\mathrm{d}B_u \tag{3.5}$$

za $K, K_t \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ determinističke integralne jezgre. Primijetimo da u desnoj varijanti (3.5) trebamo Brownovo gibanje za $t \in \mathbb{R}$, što dobijemo npr. spajanjem dva nezavisna Brownova gibanja $\{B_t : t \geq 0\}$ i $\{B_{-t} : t \geq 0\}$.

Slučajni proces definiran kao u (3.5) nužno je centriran i gaussovski. Neka su dani trenuci $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \cdots \leq s_n < t_n$, realni brojevi $a_1, \ldots, a_n$ i step-funkcija h dana s

$$h(u) = \sum_{k=1}^n a_k 1_{[s_k,t_k]}(u), \quad \text{dakle} \quad I(h) = \int_{\mathbb{R}} h(u)\,\mathrm{d}B_u = \sum_{k=1}^n a_k(B_{t_k} - B_{s_k}).$$

Trivijalna je centriranost tj. $\mathbb{E}I(h) = 0$. Da je $I(h)$ normalno distribuiran slijedi jer je suma nezavisnih normalnih varijabli iz familije $\{B_{t_k} - B_{s_k} : k = 1, \ldots, n\}$ uz skaliranja s a_k. Nezavisnost i normalnost vrijedi jer je riječ o prirastima Brownovog gibanja. Oba svojstva će se prenijeti na opću $h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ kao limes step-funkcija. Zbog dokazanog svojstva, dovoljno je dokazati (3.3) ili (3.4) da bismo dokazali da je s (3.5) doista dano FBM (iako, takav dokaz ne govori kako do dotične reprezentacije možemo doći).

Do kraja odjeljka prikazat ćemo dvije takve reprezentacije — prva je *Mandelbrot–van Nessova* ili *(non-anticipative) moving average*, druga se naziva *harmonizabilna* i ona će nam jedina biti potrebna u daljnjem radu. Još jedna, *Volterrinog tipa* može se naći u [Šev14], a od interesa je jer njena jezgra ima kompaktni nosač. U literaturi se uvijek dodaju uz integral i konstante potrebne za normalizaciju varijance. Budući da nam normalizirana varijanca nije bitna, niti ju tražimo u definiciji 3.2.1, konstante ćemo izostaviti. Ipak, vidljive su iz računa i mogu se naći u [Šev14].

Teorem 3.2.3. *(Mandelbrot–van Nessova reprezentacija FBM). Neka je $H \in \langle 0, 1\rangle$ i*[2]

$$K_t(u) = (t-u)_+^{H-1/2} 1_{\langle -\infty, 0\rangle}(u) - (-u)_+^{H-1/2}, \quad t \geq 0.$$

Tada je $\{X_t\}$, definiran s $X_t = I(K_t)$, FBM s parametrom H.

Dokaz. Neka je bez smanjenja općenitosti $t > s \geq 0$. Dokazujemo (3.4). Prvu jednakost dobivamo zbog linearnosti i izometričnosti Paley–Wienerovog integrala:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} \left[(t-u)_+^{H-1/2} - (s-u)_+^{H-1/2}\right]^2 \mathrm{d}u \\ &= (t-s)^{2H} \int_{\mathbb{R}} \left[(u+1)_+^{H-1/2} - (u)_+^{H-1/2}\right]^2 \mathrm{d}u = C(t-s)^{2H}.\end{aligned}$$

Drugu jednakost dobivamo supstitucijom $u \leftarrow \frac{s-u}{t-s}$ nakon čega $(t-s)^{2H}$ izlazi van. Preostaje samo konstatirati da je integral koji stoji iza C doista konačan. □

Teorem 3.2.4. *(Harmonizabilna reprezentacija FBM). Neka je $H \in \langle 0, 1\rangle$ i*

$$K_t(u) = |u|^{-H-1/2} \cdot \begin{cases} \sin tu, & u \geq 0, \\ 1 - \cos tu, & u < 0. \end{cases}$$

Tada je $\{X_t\}$, definiran s $X_t = I(K_t)$, FBM s parametrom H.

Dokaz. Počinjemo kao u prošlom dokazu:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] &= \int_0^\infty \frac{(\sin tu - \sin su)^2}{u^{2H+1}} \mathrm{d}u + \int_{-\infty}^0 \frac{(\cos tu - \cos su)^2}{(-u)^{2H+1}} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \frac{2 - 2\cos(t-s)u}{u^{2H+1}} \mathrm{d}u \\ &= (t-s)^{2H} \int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^{2H+1}} \mathrm{d}u = C(t-s)^{2H}.\end{aligned}$$

Pritom, druga jednakost dobiva se supstitucijom $u \leftarrow -u$ u drugom integralu da se svedu na jedan, zatim se dovršava s $u \leftarrow (t-s)u$. Očito je C opet konačan. □

Komentar 3.2.5. U [Aya10] navodi se sljedeće kao harmonizabilna reprezentacija i to je ona koju ćemo koristiti u nastavku:

$$B_t^H \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{(i\xi)^{H+1/2}} \mathrm{d}\widehat{B}_\xi, \quad \text{gdje} \quad (i\xi)^{H+1/2} = \begin{cases} |\xi|^{H+1/2} e^{i(H+1/2)\pi/2}, & \xi \geq 0, \\ |\xi|^{H+1/2} e^{-i(H+1/2)\pi/2}, & \xi < 0. \end{cases}$$

Dobiva se Fourierovom transformacijom Mandelbrot–van Nessove reprezentacije. Dokaz zahtijeva frakcionalni kalkulus i može se naći u [DO06].

[2] $a_+ = \max\{0, a\}$

3.3 Uniformna Hölder-regularnost na kompaktnom skupu

Do kraja rada bavit ćemo se naslovnom Hölder-regularnosti trajektorija FBM. Već smo neformalno najavili da kritični parametar Hölder-regularnosti odgovara parametru samosličnosti — tvrdnju ćemo precizirati u korolaru 3.3.2, teoremu 3.3.3 i teoremu 3.4.12. Naime, razlikujemo dvije varijante Hölderovog uvjeta. Prvo, uniformno kao u definiciji 3.1.1 ili u danoj točki (v. definiciju 3.4.1). Hölderov uvjet u točki ne mora nužno vrijediti na okolini točke.

Za temu uniformne Hölder-regularnosti neće nam trebati valićne metode. Zato ćemo u ovom poglavlju rješenje prezentirati ukratko i bez dokazivanja svih rezultata, a puno više pažnje posvetiti sljedećem odjeljku 3.4 u kojemu ćemo konačno koristiti valićnu metodu za dokaz glavnog rezultata sadržanog u teoremu 3.4.12.

Posvetimo se onda u ovom odjeljku pitanju uniformne Hölder-regularnosti. Prvo bez dokaza navodimo ključni teorem (v. [Šev14, tm. 3.1]; poznat kao Kolmogorov–Čencovljev teorem o neprekidnosti). Do kraja rada podrazumijevamo fiksni $H \in \langle 0, 1\rangle$.

Teorem 3.3.1. *Ako je $\{X_t\}$ slučajni proces takav da postoje konstante $K, p, \beta > 0$ takve da*

$$\mathbb{E}\left|X_t - X_s\right|^p \leq K \left|t - s\right|^{1+\beta}, \quad t, s \geq 0,$$

tada ima modifikaciju $\{\widetilde{X}_t\}$ takvu da za svaki $\alpha \in \langle 0, \beta/p\rangle$ i $T > 0$ vrijedi da je $\{\widetilde{X}_t\}$ Hölder-regularan s parametrom α na segmentu $[0, T]$, tj.

$$\sup_{0 \leq s, t \leq T} \frac{\left|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s\right|}{\left|t - s\right|^{\alpha}} < \infty.$$

Korolar 3.3.2. *Za svaki $\alpha \in \langle 0, H\rangle$ FBM $\left\{B_t^H\right\}$ ima modifikaciju čije su trajektorije Hölder-regularne s parametrom α na svakom segmentu $[0, T]$.*

Dokaz. Jer je $B_t^H - B_s^H$ normalna varijabla, vrijedi ekvivalencija svih apsolutnih momenata (vidljivo iz eksplicitnih formula; v. [Aya10, str. 16] za referencu) tj. uz (3.4) vrijedi da za sve $p > 2$ postoji konstanta K_p ovisna samo o p takva da

$$\mathbb{E}\left|B_t^H - B_s^H\right|^p = K_p \left[E\left|B_t^H - B_s^H\right|^2\right]^{p/2} = K_p \left|t - s\right|^{pH}.$$

Po teoremu 3.3.1 dobivamo tvrdnju korolara za sve $\alpha \in \langle 0, H - 1/p\rangle$. Kako je p proizvoljan, slijedi i tvrdnja za sve $\alpha \in \langle 0, H\rangle$. □

Dokazali smo da Hölder-regularnost vrijedi za sve parametre $\alpha < H$, ali ne i da ne vrijedi za $\alpha > H$. To jamči sljedeći teorem kojim smo riješili temu ovog odjeljka.

Teorem 3.3.3. *Trajektorije FBM ne zadovoljavaju Hölderov uvjet ni za koji $\alpha > H$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji kompaktni skup $I \subseteq \mathbb{R}$ nepraznog interiora i $\varepsilon > 0$ takav da

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t,s\in I, t\neq s} \frac{\left|B_t^H - B_s^H\right|}{|t-s|^{H+\varepsilon}} < \infty\right) > 0.$$

Sada se pozivamo na zakon nula-jedan za gaussovske procese, rezultat koji nam govori da se razna svojstva trajektorija gaussovskog procesa događaju s vjerojatnosti 0 ili 1 (v. [Aya10, prop. 3.7] za referencu). Posebice je Hölder-regularnost jedno od tih svojstava, pa

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t,s\in I, t\neq s} \frac{\left|B_t^H - B_s^H\right|}{|t-s|^{H+\varepsilon}} < \infty\right) = 1.$$

Po Borellovoj[3](v. [Aya10, prop. 3.7] za referencu) nejednakosti slijedi

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t,s\in I, t\neq s} \frac{\left|B_t^H - B_s^H\right|^2}{|t-s|^{2H+2\varepsilon}}\right) < \infty,$$

no tu dolazimo do kontradikcije zbog (3.4):

$$\lim_{s\to t} \frac{\mathbb{E}\left|B_t^H - B_s^H\right|^2}{|t-s|^{2H+2\varepsilon}} = \lim_{s\to t} |t-s|^{-2\varepsilon} = +\infty.$$

□

3.4 Hölder-regularnost po točkama

Definirat ćemo kritični *točkovni* Hölderov eksponent. Cilj ovog odjeljka je dokazati da je i takav eksponent g.s. jednak H. Odsad ćemo promijeniti konvenciju glede FBM — trenutke odsad čine $t \in \mathbb{R}$ umjesto $t \geq 0$, tj. govorimo o procesu $\left\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\right\}$. To možemo napraviti ako (3.3) tražimo za sve $t, s \in \mathbb{R}$ umjesto $t, s \geq 0$ ili naprosto proširivanjem integralnih reprezentacija na $t \in \mathbb{R}$. Time ćemo se uskladiti s [Aya10] i kasnije postići veću elegantnost. Također, nadalje pod ψ podrazumijevamo Meyerov matični valić (**??**).

Definicija 3.4.1. Neka je $\{X_t\}$ slučajni proces čije su trajektorije gotovo sigurno lokalno ograničene i nigdje diferencijabilne. Za proizvoljni $t_0 \geq 0$ definira se *kritični točkovni Hölderov eksponent* procesa $\{X_t\}$ u t_0 kao slučajna varijabla

$$\alpha_{t_0} = \sup\left\{\alpha > 0 \colon \limsup_{h\to 0} \frac{|X_{t_0+h} - X_{t_0}|}{|h|^\alpha} = 0\right\}.$$

[3] Christer Borell, a ne Émile Borel

Primijetimo da trebamo samo dokazati $\alpha_{t_0} \leq H$ jer za suprotnu nejednakost znamo da vrijedi po prošlom odjeljku (za odgovarjuću modifikaciju, koju možemo podrazumijevati). Prije nego nastavimo, još je korisno definirati dva pojma standardna u frakcionalnom kalkulusu.

Definicija 3.4.2. 1. *Lijeva frakcionalna antiderivacija reda* $H+1/2$ od ψ definira se sa

$$\Psi_H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{(i\xi)^{H+1/2}} \,\mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. *Desna frakcionalna derivacija reda* $H+1/2$ od ψ definira se sa

$$\Psi_{-H}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{\psi}(\xi)(-i\xi)^{H+1/2} \,\mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Komentar 3.4.3. ...

U sljedećem teoremu konačno opet susrećemo teoriju valića na tzv. valićnoj reprezentaciji FBM, iako će direktniju ulogu imati Ψ_H. Ta reprezentacija bit će temelj za našu daljnju analizu.

Teorem 3.4.4. *Neka je FBM dano s (komentar 3.2.5)*

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi}-1}{(i\xi)^{H+1/2}} \,\mathrm{d}\widehat{B}_\xi, \quad t \in \mathbb{R}$$

i $\{\varepsilon_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ *nezavisne jednako distribuirane varijable iz* $\mathrm{N}(0,1)$ *definirane s*

$$\varepsilon_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(-2^{-j}\xi) \,\mathrm{d}\widehat{B}_\xi = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \,\mathrm{d}B_t, \quad j,k \in \mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

Tada $\left\{B_t^H\right\}$ *ima reprezentaciju*

$$B_t^H = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} 2^{-jH} \left(\Psi_H(2^j t - k) - \Psi_H(-k)\right) \varepsilon_{j,k}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

pri čemu konvergencija vrijedi i g.s. uniformno po t *na svakom kompaktnom podskupu od* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Definirajmo prvo $\{\varepsilon_{j,k}\}$ desnom stranom (3.6), tj. $\varepsilon_{j,k} = I(\psi_{j,k})$. Po diskusiji iz odjeljka 3.2, znamo da su varijable $\{\varepsilon_{j,k}\}$ centrirane i normalno distribuirane. Varijancu dobijemo zbog izometričnosti Paley–Wienerovog integrala:

$$\mathbb{E}\varepsilon_{j,k}^2 = \mathbb{E}(I(\psi_{j,k})^2) = \|\psi_{j,k}\|_{\mathrm{L}^2}^2 = 1.$$

Na isti način možemo dobiti nekoreliranost: $\mathbb{E}(\varepsilon_{j,k}\varepsilon_{j',k'}) = \langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = 0$ za $(j,k) \neq (j',k')$. Ako varijable $\{\varepsilon_{j,k}\}$ zajedno čine normalne slučajne vektore, tada je to dovoljno za nezavisnost. To je istina — možemo nastaviti razmatranja iz odjeljka 3.2 pa dokazati i ovo: ako su $f_1, \dots, f_n \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ linearno nezavisne, tada je $(I(f_1), \dots, I(f_n))$ normalni slučajni vektor.

Slijedeći pravila za modulacije i translacije (**??**) dobiva se da je Fourierova transformacija od $\psi_{j,k}$ jednaka $\xi \mapsto -2^{j/2} e^{ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi)$. Konjugacijom, jer je Meyerov valić realan, dobiva se integrand u sredini (3.6). Budući da je integral realan, konjugaciju dodamo bez promjene i time je (3.6) dokazano.

Jer je $\{\psi_{j,k} : j,k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ i Fourierova transformacija izometrija, familija

$$\left\{ \xi \mapsto 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(-2^{-j}\xi) : j,k \in \mathbb{Z} \right\}$$

je također ortonormirana baza prostora $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Sada želimo dekomponirati funkciju $f(\xi) = \frac{e^{it\xi}-1}{(i\xi)^{H+1/2}}$, koja je očito u $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, u toj bazi:

$$f(\xi) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}(t) 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(-2^{-j}\xi), \tag{3.8}$$

gdje

$$\begin{aligned} c_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi}-1}{(i\xi)^{H+1/2}} e^{-ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= 2^{-jH} \left(\Psi_H(2^j t - k) - \Psi_H(-k) \right), \end{aligned}$$

a zadnja jednakost dobiva se supstitucijom $\xi \leftarrow 2^{-j}\xi$. Integriranjem (3.8) po ξ, zamjenom sume i integrala (dominirana konvergencija zbog $\Psi_H, \widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) i izometričnosti Paley–Wienerovog integrala dobiva se (3.7).

Time smo dokazali da konvergencija u (3.7) vrijedi u $\mathrm{L}^2(\Omega)$, ali ne i g.s. uniformno po t na kompaktu. Dokaz te tvrdnje oslanja se na dva teorema izvan opsega ovog rada i može se naći u [Aya10, tm. 3.15].

□

Slijedi zanimljiva lema koja nam omogućava da cijelu familiju slučajnih varijabli ocijenimo jednom zajedničkom. Iz te perspektive ju možemo zvati slučajnom konstantom. Dokaz je adaptiran iz [AT03, str 459.]. Primijetimo da tražimo da su varijable jednako distribuirane, ali ne i da su nezavisne.

Lema 3.4.5. *Neka je $\{\varepsilon_{j,k}\}$ familija jednako distribuiranih $\mathrm{N}(0,1)$ varijabli. Tada postoji Ω_1^* s $\mathbb{P}(\Omega_1^*) = 1$ takav da*

$$|\varepsilon_{j,k}(\omega)| \le C_1(\omega) \sqrt{\log(2 + |j| + |k|)}, \quad \omega \in \Omega_1^*,\ j,k \in \mathbb{Z}.$$

gdje je C_1 slučajna varijabla čiji je svaki moment konačan.

Dokaz. Gledajmo prvo $\mathbb{N}$-indeksiranu familiju $\{\varepsilon_n\}$ i dokažimo analognu tvrdnju

$$|\varepsilon_n(\omega)| \le C(\omega) \sqrt{\log(2+n)}. \tag{3.9}$$

Koristeći ocjenu iz dokaza teorema 2.5.11 je:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|\varepsilon_n| > a\sqrt{\log(2+n)}\right) \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} (2+n)^{-a^2/2},$$

što konvergira ako odaberemo $a > \sqrt{2}$. Po Borel–Cantellijevoj lemi

$$\mathbb{P}\left(|\varepsilon_n| > a\sqrt{\log(2+n)} \text{ za beskonačno mnogo } n \in \mathbb{N}\right) = 0$$

pa za Ω_1^* stavimo komplement tog događaja, tj. na Ω_1^* je dobro definirano vrijeme zaustavljanja

$$T(\omega) = \min\left\{n \in \mathbb{N} \colon m \geq n \implies |\varepsilon_m(\omega)| \leq a\sqrt{\log(2+m)}\right\}.$$

Ideja je sada C odabrati tako da u (3.9) pokrije onih konačno n za koje tvrdnja već ne vrijedi. Nije očito da takva varijabla ima sve momente konačne. Ipak, možemo gledati i veću slučajnu konstantu

$$\widetilde{C}(\omega) = \max_{0 \leq m \leq T(\omega)} |\varepsilon_m(\omega)|, \quad \omega \in \Omega_1^*$$

i dokazati da su joj svi momenti konačni kako slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\widetilde{C}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\max_{0 \leq m \leq T} |\varepsilon_m|^p \, 1_{\{T=n\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[|\varepsilon_1|^p \, 1_{\{T=1\}}\right] + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\varepsilon_m|^p \, 1_{\left\{|\varepsilon_{n-1}| > a\sqrt{\log(n+1)}\right\}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\,|\varepsilon_1|^p + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} \sigma_{2p}^{1/2} \mathbb{P}\left(|\varepsilon_{n-1}| > a\sqrt{\log(n+1)}\right)^{1/2} \\
&\lesssim \mathbb{E}\,|\varepsilon_1|^p + \sigma_{2p}^{1/2} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^{-a^2/4+1} < \infty \quad \left(\text{za } a > 2\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Pritom, druga nejednakost se dobije Hölderovom nejednakosti, uz oznaku $\sigma_{2p} = \mathbb{E}\,|\varepsilon_m|^{2p}$ (ne ovisi o m). Za treću primjenimo istu ocjenu repa normalne distribucije kao prije i koristimo jednaku distribuiranost.

Jedan način za prelazak na $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-indeksiranu familiju je sljedeći: uzmemo bijekciju $f \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ takvu da

$$n = f(j,k) \implies n \lesssim |j| + |k|.$$

To svojstvo ima uobičajena bijekcija (v. [AT03, lema 2] za eksplicitnu definiciju). Traženo se dobije iz (3.9) uz odgovarajuću izmjenu konstante.

□

Sljedeća propozicija, koju ćemo navesti bez dokaza (oslanja se na lemu; v. [Aya10, prop. 3.17] za referencu), daje ocjenu FBM preko valićne reprezentacije. Koristit ćemo ju samo da jednom opravdamo zamjenu poretka integracije.

Propozicija 3.4.6. *U oznakama teorema 3.4.4 i leme 3.4.5, postoji slučajna varijabla C_2 sa svim momentima konačnima takva da za sve $t \in \mathbb{R}$ i $\omega \in \Omega_1^*$ vrijedi*

$$\begin{aligned} \left|B_t^H(\omega)\right| &\leq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} 2^{-jH} \left|\Psi_H(2^j t-k) - \Psi_H(-k)\right| \left|\varepsilon_{j,k}(\omega)\right| \\ &\leq C_2(\omega)(1+|t|)^H \sqrt{|\log|\log(2+|t|)||}. \end{aligned}$$

Nakon toga, dokazat ćemo još neke korisne tvrdnje o $\Psi_{\pm H}$ i zatim dokazati svojevrsnu inverziju formule (3.7).

Lema 3.4.7. *(i) Vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_{-H}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

(ii) Za sve parove (j,k) i (j',k') cijelih brojeva

$$2^{(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(2^{j'}t-k')\Psi_{-H}(2^j t-k)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & (j,k)=(j',k') \\ 0, & \textit{inače.} \end{cases} \tag{3.10}$$

Dokaz. Za (i) imamo

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_{-H}(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\widehat{\Psi}_{-H}(0) = 0,$$

zbog $\widehat{\Psi}_{-H}(\xi) = (-i\xi)^{H+1/2}\widehat{\psi}(\xi)$ (**??**) i $\widehat{\psi}$ iščezava u okolini nule. Analogno se dokaže tvrdnja za Ψ_H.

Zatim (ii) dobivamo iz

$$\begin{aligned} &2^{(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(2^{j'}t-k')\Psi_{-H}(2^j t-k)\,\mathrm{d}t \\ &= 2^{-(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik'2^{-j'}\xi}(i2^{-j'}\xi)^{-H-1/2}\widehat{\psi}(2^{-j'}\xi)\overline{e^{-ik2^{-j}\xi}(-i2^{-j}\xi)^{H+1/2}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)}\,\mathrm{d}\xi \qquad (3.11) \\ &= 2^{(H+1/2)(j'-j)-(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik'2^{-j'}\xi}\widehat{\psi}(2^{-j'}\xi)\overline{e^{-ik2^{-j}\xi}\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)}\,\mathrm{d}\xi \\ &= 2^{(H+1/2)(j'-j)+(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} \psi(2^{j'}t-k')\psi(2^j t-k)\,\mathrm{d}t. \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Jednakost (3.11) dobije se Plancherelovim teoremom (**??**) i rezultatima iz komentara **??**. Opet primjenimo Plancherelov teorem da dobijemo (3.12). Na kraju dobivamo skalarni produkt dvaju valića i rezultat slijedi zbog ortonormiranosti familije. □

Propozicija 3.4.8. *U oznakama teorema 3.4.4 i leme 3.4.7, vrijedi*

$$\varepsilon_{j,k}(\omega) = 2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} B_t^H(\omega)\Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t, \quad \omega \in \Omega_1^*.$$

Dokaz. Računamo:

$$\begin{aligned}
&2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} B_t^H \Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \\
&= 2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{j',k' \in \mathbb{Z}} 2^{-j'H} \varepsilon_{j',k'} \Big(\Psi_H(2^{j'}t - k') - \Psi_H(-k') \Big) \right] \Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \quad (3.13)\\
&= \sum_{j',k' \in \mathbb{Z}} 2^{j+(j-j')H} \varepsilon_{j',k'} \int_{\mathbb{R}} \Big(\Psi_H(2^{j'}t - k') - \Psi_H(-k) \Big) \Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j',k' \in \mathbb{Z}} 2^{j+(j-j')H} \varepsilon_{j',k'} \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(2^{j'}t - k') \Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \quad (3.14)\\
&= \varepsilon_{j,k} \quad (\text{za } \omega \in \Omega_1^*)\,. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Zamjenu sume i integrala u (3.13) možemo opravdati teoremom o dominiranoj konvergenciji — prvo propozicijom 3.4.6 (zbog koje se zadržavamo na $\omega \in \Omega_1^*$) i zbog $\Psi_{-H} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (komentar **??**). Daljnje jednakosti dobiju se pomoću leme 3.4.7, naime

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_H(-k)\Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t = 0, \quad j \neq 0,$$

jer je riječ o (3.10) za $j' = 0$, daje (3.14) i direktna primjena daje (3.15). □

Sada smo spremni krenuti prema glavnom teoremu. Definirat ćemo novu varijablu kao maksimum jednog podskupa familije $\{\varepsilon_{j,k}\}$. Lema 3.4.11 daje jedan opći rezultat, a lema 3.4.10 dat će kontradiktorni rezultat uz pretpostavku $\alpha_{t_0} > H$.

Definicija 3.4.9. Za $\varepsilon_{j,k}$ iz teorema 3.4.4, za svaki $j \in \mathbb{N}$ i $\ell \in \mathbb{Z}$ označimo

$$\nu_j^\ell = \max\left\{ |\varepsilon_{j,j\ell+m}| : 0 \leq m \leq j-1 \right\}.$$

Lema 3.4.10. *Pretpostavimo da za neki $\omega \in \Omega_1^*$ (iz leme 3.4.5) i neki $t_0 \in \mathbb{R}$ vrijedi $\alpha_{t_0}(\omega_0) > H$. Tada*

$$\limsup_{j \to \infty} \nu_j^{\ell_j(t_0)}(\omega_0) = 0,$$

za $\ell_j(t_0) = \max\left\{ \ell \in \mathbb{Z} \colon j\ell \leq 2^j t_0 \right\}$.

Dokaz. Pretpostavka $\alpha_{t_0}(\omega_0) > H$ znači da postoje konstante $c_0 > 0$ i $\varepsilon_0 > 0$ takve da

$$\left| B_t^H(\omega_0) - B_{t_0}^H(\omega_0) \right| \leq c_0 \left| t - t_0 \right|^{H+\varepsilon_0}.$$

Ocijenimo $|\varepsilon_{j,k}|$ počevši kombinacijom leme 3.4.7 i propozicije 3.4.8:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_{j,k}(\omega_0)| &= 2^{j(1+H)} \left| \int_{\mathbb{R}} \left[B_t^H(\omega_0) - B_{t_0}^H(\omega_0)\right] \Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq 2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} \left|B_t^H(\omega_0) - B_{t_0}^H(\omega_0)\right| \left|\Psi_{-H}(2^j t - k)\right| \,\mathrm{d}t \\
&\leq c_0 2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} |t - t_0|^{H+\varepsilon_0} \left|\Psi_{-H}(2^j t - k)\right| \,\mathrm{d}t \\
&= c_0 2^{jH} \int_{\mathbb{R}} \left|2^{-j}s - (t_0 - 2^{-j}k)\right|^{H+\varepsilon_0} |\Psi_{-H}(s)| \,\mathrm{d}s \\
&\leq c_1 2^{-j\varepsilon_0} \left(1 + \left|2^j t_0 - k\right|\right)^{H+\varepsilon_0}, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

gdje $c_1 > 0$ ne ovisi o j i k. Pretpostavimo nadalje da je $j \geq 1$ i k oblika $k = j\ell_j(t_0) + m$ za $0 \leq m \leq j-1$. Ekvivalentno je definiciji $\ell_j(t_0)$ da

$$0 \leq 2^j t_0 - j\ell_j(t_0) < j,$$

što daje

$$\left(1 + \left|2^j t_0 - j\ell_j(t_0) - m\right|\right)^{H+\varepsilon_0} \leq (2j)^{H+\varepsilon_0}.$$

S tim iz (3.16) slijedi

$$\nu_j^{\ell_j(t_0)}(\omega_0) = \max\left\{\left|\varepsilon_{j,j\ell_j(t_0)+m}\right| : 0 \leq m \leq j-1\right\} \leq c_1 2^{-j\varepsilon_0}(2j)^{H+\varepsilon_0}$$

i $\limsup_{j\to\infty} \nu_j^{\ell_j(t_0)}(\omega_0) = 0.$ □

Lema 3.4.11. *Postoji $\Omega_2^* \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_2^*) = 1$ i da za sve $p \in \mathbb{Z}$ vrijedi*

$$\liminf_{j\to\infty} \min\left\{\nu_j^\ell(\omega) \colon (p-1)2^j \leq j\ell \leq (p+1)2^j\right\} \geq \frac{1}{2}, \quad \omega \in \Omega_2^*.$$

Dokaz. Definirajmo

$$B_j = \min\left\{\nu_j^\ell \colon (p-1)2^j \leq j\ell \leq (p+1)2^j\right\} \quad \text{i} \quad A_j = \left\{B_j < \frac{1}{2}\right\}, \quad j \geq 1.$$

Fiksirajmo $p \in \mathbb{Z}$ i, koristeći da su $\varepsilon_{j,k}$ n.j.d. varijable jedinične normalne distribucije, za svaki $j \geq 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_j) &\leq \sum_{(p-1)2^j \leq j\ell \leq (p+1)2^j} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=0}^{j-1} \left\{|\varepsilon_{j,j\ell+m}| < \frac{1}{2}\right\}\right) \\
&\leq \left[\frac{(p+1)2^j}{j} - \frac{(p-1)2^j}{j} + 1\right] \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1/2}^{1/2} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^j \lesssim j^{-1} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^j,
\end{aligned}$$

gdje zadnju ocjenu dobivamo ocjenjujući odozgo gustoću $\mathrm{N}(0,1)$ konstantom. Slijedi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) < \infty \quad \text{i} \quad \mathbb{P}\left(B_j < \frac{1}{2} \text{ za beskonačno mnogo } j\right) = 0$$

po Borel–Cantellijevoj lemi. Dobili smo traženo po definiciji limesa inferiora. □

Došli smo do glavnog teorema koji lagano slijedi iz prošlih lema.

Teorem 3.4.12. *Postoji $\Omega^* \in \mathcal{F}$ s $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$ takav da za kritični točkovni Hölderov eksponent frakcionalnog Brownovog gibanja zadovoljava*

$$\alpha_{t_0}(\omega) = H, \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R},\ \forall \omega \in \Omega^*.$$

Dokaz. Stavimo $\Omega^* = \Omega_1^* \cap \Omega_2^*$. Ako postoje $\omega_0 \in \Omega^*$ i $t_0 \in \mathbb{R}$ takvi da $\alpha_{t_0}(\omega_0) > H$, lako se pokaže da je zaključak iz leme 3.4.10 u kontradikciji s definicijom događaja Ω_2^*. □

Komentar 3.4.13. Primijetimo da naš izbor događaja Ω^* ne ovisi o t_0. Ovako, tvrdnja $\alpha_{t_0}(\omega) = H$ vrijedi istovremeno za sve $t_0 \in \mathbb{R}$ dok god $\omega \in \Omega^*$. U suprotnom, tvrdnja bi se donekle trivijalizirala (v. [Aya10, str. 18.]). Naime, ako za gaussovski proces $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ s g.s. neprekidnim trajektorijama, neke $t_0 \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ vrijedi

$$\limsup_{h \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}\,|X_{t_0+h} - X_{t_0}|^2}{|h|^{2\delta+\varepsilon}} = +\infty, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{3.17}$$

tada postoji događaj $\Omega_{t_0}^*$ s $\mathbb{P}(\Omega_{t_0}^*) = 1$ takav da $\alpha_{t_0}(\omega) \le \delta$ za sve $\omega \in \Omega_{t_0}^*$. Tvrdnja se dokaže gotovo jednako kao teorem 3.3.3. Jasno, (3.17) za $\delta = H$ slijedi iz (3.4).

Bibliografija

[AFT00] P. Abry, P. Flandrin i M. Taqqu. „Self-Similarity and Long-Range Dependence Through the Wavelet Lens". (Svibanj 2000.).

[AT03] A. Ayache i M. S. Taqqu. „Rate Optimality of Wavelet Series Approximations of Fractional Brownian Motion". *Journal of Fourier Analysis and Applications* 9 (rujan 2003.), str. 451–471.

[Aya10] A. Ayache. „A mini-course on Wavelets and Fractional Processes". (2010.). URL: https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/antoine_ayache/COURSE-WavFrac.pdf.

[Dau88] I. Daubechies. „Orthonormal bases of compactly supported wavelets". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 41.7 (listopad 1988.), str. 909–996.

[Dau92] I. Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial i Applied Mathematics (SIAM), 1992.

[Die16] A. Diez. „Lévy's construction of Brownian motion". (2016.). URL: https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/Antoine.Diez/brownienlevy.pdf.

[DO06] V. Dobrić i F. M. Ojeda. „Fractional Brownian fields, duality, and martingales". *High Dimensional Probability*. IMS Lecture Notes–Monograph Series 51 (2006.), str. 77–95.

[EM02] P. Embrechts i M. Maejima. *Selfsimilar processes*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, 2002.

[Gog25] I. Gogić. *Uvod u funkcionalnu analizu*. 2025. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilja/UFA.pdf.

[Kov14] V. Kovač. *Time – frequency analysis and singular integrals*. 2014. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/files/skrypt_V.Kovac_UWr.pdf.

[Rud87] W. Rudin. *Real and complex analysis*. 3. izdanje. McGraw-Hill, 1987. ISBN: 9780070542341.

[Sar80] N. Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Školska Knjiga, 1980.

[Sat99] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge Univ. Press, 1999.

[Šev14] H. Ševčenko. *Fractional Brownian motion in a nutshell*. 2014. URL: https://arxiv.org/abs/1406.1956.

Sažetak

U ovom radu...

Summary

In this thesis...

Životopis

Luka Šimek rođen je 2000. u Zagrebu gdje završava XV. gimnaziju 2019. Tijekom školovanja ističe se na natjecanjima, prvenstveno drugim mjestom na državnom natjecanju iz matematike (2016., Primošten) i brončanom medaljom na individualnom dijelu Srednjoeuropske matematičke olimpijade (2017., Vilnius).

Preddiplomski studij matematike na zagrebačkom PMF-u upisuje 2019. Završetkom preddiplomskog studija 2022. upisuje diplomski studij Matematičke statistike. Tijekom preddiplomskog studija radi kao demonstrator iz kolegija Matematička analiza (1 i 2) i Programiranje (1 i 2).