SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Šimek

HARMONIJSKA ANALIZA I SLUČAJNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, 10. srpnja 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

...

Poglavlje 1

Slučajni procesi u neprekidnom vremenu

1.1 Osnovni pojmovi

Slučajni proces je indeksirana familija slučajnih veličina $\{X_t : t \in T\}$ na istom vjerojatnosnom prostoru gdje je T neki indeksni skup. On može biti diskretan (npr. $T = \mathbb{N}$ ili $T = \mathbb{Z}$) ili neprekidan (npr. $T = \mathbb{R}$ ili $T = [0, \infty\rangle$). Budući da o elementima T često razmišljamo kao o vremenskim trenucima, govorimo o procesu u diskretnom ili u neprekidnom vremenu. U kontekstu ovog rada podrazumijevamo $T = [0, \infty\rangle$ i koristimo skraćenu notaciju $\{X_t\}$.

Razlikujemo proces od realizacije

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in [0, \infty\rangle\,, \quad \text{za neki } \omega \in \Omega$$

koju još zovemo *trajektorijom*. Nadalje, kažemo da je slučajni proces $\{X_t\}$ *modifikacija* procesa $\{Y_t\}$ ako je $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ za sve $t \in [0, \infty\rangle$. Primijetimo razliku u odnosu na jači uvjet $\mathbb{P}(X_t = Y_t,\ \forall t \in [0, \infty\rangle) = 1$ kada procese više uopće ne razlikujemo.

Slučajne procese obično promatramo preko konačnodimenzionalnih funkcija distribucije $F_{t_1,\dots,t_n}$, $t_j \in T$, koje zadovoljavaju tzv. uvjete suglasnosti Kolmogorova. Dva su važna rezultata koja to opravdaju — teorem Kolmogorova (v. [Sar80, tm. 9.6.]) koji tvrdi da suglasna familija konačnodimenzionalnih distribucija inducira jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru na σ-algebri cilindara i drugi teorem (v. [Sar80, tm. 9.7.]) koji tvrdi da se za takvu familiju uvijek može konstruirati slučajni proces (odn. vjerojatnosni prostor) s upravo tim konačnodimenzionalnim distribucijama. Stoga nam, kao i obično, nije bitan vjerojatnosni prostor u kojem se nalazimo.

Sada ćemo definirati Lévyjeve procese, jednu od najznamenitijih klasa slučajnih procesa. Uvest ćemo Poissonov proces i Brownovo gibanje kao poznate primjere. Pokazat ćemo i vrlo blisku vezu Lévyjevih procesa i beskonačno djeljivih distribucija (definiranih u **??**), koja je potrebna za naš dokaz da Brownovo gibanje (i Lévyjevi procesi općenito) postoji. Nakon toga ćemo skrenuti pažnju na teoriju samosličnih procesa i uvesti frakcionalno Brownovo gibanje kao generalizaciju. Prije te definicije, uvedimo još jedan osnovni pojam.

Definicija 1.1.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ je *stohastički neprekidan* ako vrijedi

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0,$$

za svaki $t \geq 0$ i $\varepsilon > 0$.

Definicija 1.1.2. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Lévyjev* ako vrijede uvjeti:

(i) $X_0 = 0$ g.s.,

(ii) $\{X_t\}$ je stohastički neprekidan,

(iii) varijable $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne za sve $n \geq 1$ i $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (nezavisnost inkremenata),

(iv) distribucija varijable $X_{s+t} - X_s$ ne ovisi o s (stacionarnost inkremenata),

(v) Postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ te za svaki $\omega \in \Omega_0$ vrijedi da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ càdlàg[1].

Nadalje, ako ne vrijedi (iv) kažemo da je proces *aditivan.* Ako ne vrijedi (v) tada kažemo da je proces *Lévyjev po distribuciji* odn. *aditivan po distribuciji.*

1.2 Poissonov proces

U ovom odjeljku uvodimo Poissonov proces kao primjer Lévyjevog procesa. Intuitivno, taj proces mjeri broj doagađaja koji su se dogodili do trenutka t, pri čemu su duljine intervala između uzastopnih događaja distribuirane eksponencijalno. Pritom, eksponencijalnu distribuciju karakterizira tzv. gubitak pamćenja. Poissonov proces uvest ćemo kao Lévyjev proces s dodatnim svojstvom da je $X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t)$, a onda konstrukcijom dokazati da takav proces zaista postoji. Kasnije ćemo pokazati da je moguće na taj način odrediti Lévyjev proces i kad se Poissonova distribucija zamijeni bilo kojom beskonačno djeljivom distribucijom.

[1] càdlàg, od fr. *continue à droite, limite à gauche*, označava funkciju koja je na cijeloj domeni neprekidna zdesna s limesima slijeva

Definicija 1.2.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}$ je *Poissonov proces s parametrom* $\lambda > 0$ ako je Lévyjev i ako

$$X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t), \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Teorem 1.2.2. *Neka je $(W_n)_{n\geq 0}$ slučajna šetnja na $\mathbb{R}$ definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, takva da $T_n = W_n - W_{n-1}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$. Definiramo*

$$X_t(\omega) = n \iff W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{1.2}$$

Tada je $\{X_t\}$ Poissonov proces s parametrom λ.

Dokaz. Ustanovimo prvo da $W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Naime, $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda)$ i $W_n = \sum_{j=1}^n T_j$ pa tvrdnja slijedi po poznatoj lemi o zbroju nezavisnih Γ-distribuiranih varijabli[2]. Sada slijedi $\mathbb{P}(W_n \leq t) \to 0,\ n \to \infty$, što se može dobiti i iz

$$\mathbb{P}(W_n \leq t) \leq \mathbb{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = [\mathbb{P}(T_1 \leq t)]^n \to 0, \grave{} n \to \infty.$$

Slijedi da je svaka X_t g.s. dobro definirana preko (1.2). Da je $\{X_t\}$ stohastički neprekidan s càdlàg trajektorijama i $X_0 = 0$ g.s. je trivijalno. Preostaje dokazati (1.1) i da su inkrementi stacionarni i nezavisni.

Prvo se dobije iz

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t = n) = \mathbb{P}(W_n \leq t < W_n + T_{n+1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq u \leq t < u+v\}}(x,y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{(W_n, T_{n+1})} \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} \int_{t-x}^{\infty} e^{-\lambda y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},\end{aligned}$$

pri čemu koristimo nezavisnost varijabli W_n i T_{n+1} za prelazak na njihove gustoće. Sličnim izravnim računom možemo dobiti i

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > t + s \,|\, X_t = n) = e^{-cs} = \mathbb{P}(T_1 > s), \quad t > 0, s \geq 0, n \geq 0.$$

Pomoću toga možemo dobiti da $(W_{n+1} - t, T_{n+2}, \ldots, T_{n+m})$ uz dano $X_t = n$ ima jednaku distribuciju kao i $(T_1, T_2, \ldots, T_m)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m \,|\, X_t = n) \\ &\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\ &\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\ &\quad = \mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1 \,|\, X_t = n)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \ldots, T_{n+m} > s_m) \\ &\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1)\mathbb{P}(T_2 > s_2, \ldots, T_m > s_m) \\ &\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1, T_2 > s_2, \ldots, T_m > s_m).\end{aligned} \tag{1.3}$$

[2] zbroj je Γ-distribuiran, a prvi parametar (parametar oblika) je zbroj prvih parametara sumanada

To nam zatim daje

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t+s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}((W_{n+1}-t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m} \leq s < (W_{n+1}-t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m+1}) \\
&\quad \overset{(1.3)}{=} \mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_m \leq s < T_1 + \cdots + T_m + T_{m+1}) = \mathbb{P}(W_m \leq s < W_{m+1}) = \mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Sada stacionarnost inkremenata slijedi sumiranjem po $n \geq 0$ jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t = m, X_t = n) = \mathbb{P}(X_{t+s} = n+m, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t+s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Nezavisnost inkremenata slijedi iz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \ldots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k \,|\, X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_1 - t_0} = n_1, \ldots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi primjenom iste ideje kao u dokazu stacionarnosti. Dokaz se završi indukcijom. □

1.3 Brownovo gibanje

Sada na slični način uvodimo Brownovo gibanje.

Definicija 1.3.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je Brownovo gibanje ako je

(i) X_t je normalno distribuirana s očekivanjem $0 \in \mathbb{R}^d$ i kovarijacijskom matricom tI i

(ii) postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i $\omega \in \Omega_0$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna.

Ovime nismo dokazali da takav proces postoji, što ćemo ostaviti za kasnije. Dana svojstva su nam dovoljna da dokažemo nekoliko zanimljivih osnovnih rezultata o Brownovom gibanju. Dokazat ćemo par nama najznačajnijih rezultata, a drugi se mogu naći u [Sat99, §5]. Spomenimo još kako je svojstvo (i) dovoljno za (ii). (dodati jos kasnije)

Prvo ćemo dokazati da Brownovo gibanje zadržava istu distribuciju pri širenju u vremenu i odgovarajućem širenju u prostoru. To svojstvo ćemo kasnije zvati samosličnost.

Teorem 1.3.2. *Neka je* $\{X_t\}$ *Brownovo gibanje u* $\mathbb{R}^d$*. Tada je* $\left\{c^{-1/2}X_{ct}\right\}$ *također Brownovo gibanje u* $\mathbb{R}^d$ *za svaki* $c > 0$*.*

Dokaz. Neka je $Y_t = c^{-1/2}X_{ct}$. Odmah slijedi $Y \sim \mathrm{N}(0, tI)$. Stohastička neprekidnost, g.s. neprekidnost trajektorija i nezavinost inkremenata lako se svedu na isto za $\{X_t\}$.

Stacionarnost inkremenata također — neka $0 \le s < t$ pa $Y_t - Y_s = c^{-1/2}\left(X_{ct} - X_{cs}\right) \overset{d}{=} c^{-1/2}X_{ct-cs}$. Slijedi i $Y_t - Y_s \overset{d}{=} Y_{t-s}$. □

Sada ćemo dokazati da u jednoj dimenziji g.s. vrijede dva inače neuobičajena svojstva — nigdje-monotonost i nigdje-diferencijabilnost[3].

Teorem 1.3.3. *Neka je* $\{X_t\}$ *Brownovo gibanje u* $\mathbb{R}$*. Gotovo sigurno je* $t \mapsto X_t(\omega)$ *nigdje-monotona, tj. postoji* $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ *takav da* $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ *i* $\omega \in \Omega_1$ *povlači da* $t \mapsto X_t(\omega)$ *nije monotona niti na jednom segmentu.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti dokazujemo samo nigdje-rastućost na segmentu[4] $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$. Neka je još $n \ge 2$ proizvoljan i Ω_0 iz definicije 1.3.1. Definiramo

$$A = \{\omega \in \Omega_0 : t \mapsto X_t(\omega) \text{ ne opada na } [a, b]\}$$

i zatim ekvidistantnu particiju segmenta $[a, b]$ s $t_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $0 \le k \le n$ te

$$A_n = \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_0} \le X_{t_1} \le \cdots \le X_{t_n}\} \in \mathcal{F}.$$

Očito $A \subset A_n$ i

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &\le \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \left\{X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \ge 0\right\}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \ge 0) = 2^{-n} \to 0, \quad n \to \infty
\end{aligned}$$

pa možemo odabrati

$$\Omega_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}.$$

□

[3] ustvari je dovoljno dokazati nigdje-diferencijabilnost; Lebesgueov teorem o diferencijabilnosti monotonih funkcija govori da je svaka neprekidna monotona funkcija diferencijabilna g.s., v. [Sat99, remark 5.10] za još dovoljnih uvjeta

[4] to možemo jer svaki segment $[a, b]$ možemo smanjiti na $[a', b']$ gdje $a', b' \in \mathbb{Q}$ i onda „ukupni” Ω_1 dobiti kao prebrojivi presjek „lokalnih”

Komentar 1.3.4. Štoviše, vrijedi

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Inkluzija $\subseteq$ je očita. Za $\supseteq$ pretpostavimo $\omega \in \cap_n A_n \setminus A$. Tada postoje $a \le s < t \le b$ takvi da $X_s(\omega) - X_t(\omega) > \varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$. Jer je skup

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \Delta_n = \left\{ a + \frac{b-a}{n} \cdot k : 0 \le k \le n \right\}$$

gust u $[a, b]$ i zbog neprekidnosti trajektorije postoje n i $s', t' \in \Delta_n$ takvi da $X_{s'}(\omega) - X_{t'}(\omega) > \varepsilon/2$. Time smo došli do kontradikcije jer $\omega \notin A_n$.

Teorem 1.3.5. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-diferencijabilna, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije diferencijabilna niti u jednoj točki $t \in [0, \infty\rangle$.*

Dokaz. Slično kao u prošlom dokazu, ograničimo se na pitanje diferencijabilnosti u nekom $t \in [0, N]$ gdje $N \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$A = \{\omega \in \Omega \colon t \mapsto X_t(\omega) \text{ je diferencijabilna u nekom } s \in [0, N]\}$$

i za $M, n \in \mathbb{N}$

$$A_{n,M} = \{\omega \in \Omega \colon (\exists s \in [0, N(1 - 1/n)])(|t - s| \le 2N/n \implies |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le M\,|t - s|)\}\,. \tag{1.4}$$

Lako se pokaže

$$A \subseteq \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,M}.$$

Fiksiramo $M \in \mathbb{N}$ i stavimo $A_n = A_{n,M}$. Nadalje uvedimo mrežu $t_k = \frac{Nk}{n}$, $0 \le k \le n$ i definiramo slučajne varijable[5]

$$Y_{n,k} = \max\left\{ \left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right|, \left|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right|, \left|X_{t_{k+2}}, X_{t_{k+1}}\right| \right\}, \quad 0 \le k \le n-2.$$

Definiramo još događaje

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \{Y_{n,k} \le 4MN/n\}\,.$$

[5]za $k = 0$ maknemo prvi član skupa

Neka je $\omega \in A_n$ i s iz (1.4). Lako se pokaže da je $\omega \in Y_{k,n}$ gdje je k takav da s nije udaljen ni od kojeg ruba segmenta $[t_{k-1}, t_{k+2}]$ za više od $2N/n$. Dakle, $A_n \subseteq B_n$.

Uvedimo oznaku $a_n = \mathbb{P}\left(\left|X_{N/n}\right| \leq 4MN/n\right)$. Pomoću stacionarnosti i nezavisnosti inkremenata dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &\leq \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k} \leq 4MN/n) = \mathbb{P}(Y_{n,0}) + \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k}) \\
&= \mathbb{P}\left(|X_{t_1} - X_{t_0}| \leq 4MN/n, |X_{t_2} - X_{t_1}| \leq 4MN/n\right) + \\
&+ \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=0}^{3} \left\{\left|X_{t_{k+\ell} - X_{t_{k+\ell-1}}}\right| \leq 4MN/n\right\}\right) \\
&= a_n^2 + (n-2)a_n^3.
\end{aligned}$$

Želimo odozgo ocijeniti a_n. Prvo iz teorema 1.3.2 imamo $X_{N/n} \stackrel{d}{=} (N/n)^{1/2} X_1$. Ako gustoću jedinične normalne distribucija ocijenimo odozgo konstantom, imamo

$$a_n = \mathbb{P}\left(|X_1| \leq 4M\,(N/n)^{1/2}\right) \lesssim \left(\frac{N}{n}\right)^{1/2}.$$

Iz toga slijedi $\mathbb{P}(B_n) \to 0$, $n \to \infty$ pa i $\mathbb{P}\left(\liminf_n B_n\right) = 0$. Tvrdnja teorema slijedi jer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} B_n.$$

□

1.4 Beskonačno djeljive distribucije

Bibliografija

[Aya10] Antoine Ayache. „A mini-course on Wavelets and Fractional Processes". (2010.).

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial i Applied Mathematics (SIAM), 1992.

[EM02] Paul Embrechts i Makoto Maejima. *Selfsimilar processes*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, 2002.

[Sar80] Nikola Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Školska Knjiga, 1980.

[Sat99] Ken-iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge Univ. Press, 1999.

Sažetak

...

Summary

...

Životopis

Luka Šimek rođen je 2000. u Zagrebu gdje završava XV. gimnaziju 2019. Tijekom školovanja ističe se na natjecanjima, prvenstveno drugim mjestom na državnom natjecanju iz matematike (2016., Primošten) i brončanom medaljom na individualnom dijelu Srednjoeuropske matematičke olimpijade (2017., Vilnius).

Preddiplomski studij matematike na zagrebačkom PMF-u upisuje 2019. Završetkom preddiplomskog studija 2022. upisuje diplomski studij Matematičke statistike. Tijekom preddiplomskog studija radi kao demonstrator iz kolegija Matematička analiza (1 i 2) i Programiranje (1 i 2).