

Harmonijska analiza i slučajni procesi

Diplomski rad

Luka Šimek

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

16. rujna 2025.

- 1 Samosličnost i FBM
- 2 Hölder-regularnost
- 3 Rješenje problema Hölder-regularnosti po točkama

Definicija. Slučajni proces $\{X_t\}$ na \mathbb{R}^d je *samosličan* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da

$$\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{bX_t\}. \quad (1)$$

Definicija. Slučajni proces $\{X_t\}$ na \mathbb{R}^d je *samosličan* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da

$$\{X_{at}\} \stackrel{d}{=} \{bX_t\}. \quad (1)$$

Teorem. Ako je $\{X_t\}$ samosličan, stohastički neprekidan i netrivialan, tada postoji $H \geq 0$ takav da

$$b = a^H$$

za sve a, b iz (1).

Definicija. *Frakcionalno Brownovo gibanje* (FBM) s parametrom $H \in \langle 0, 1 \rangle$ je gaussovki proces $\{B_t^H\}$ u \mathbb{R} definiran s

$$\mathbb{E}B_t^H = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(B_1^H)^2 \right] \left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right), \quad t, s \geq 0.$$

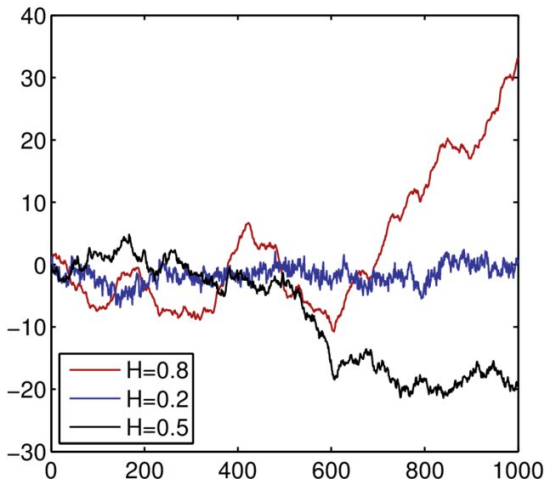
Definicija. *Frakcionalno Brownovo gibanje* (FBM) s parametrom $H \in \langle 0, 1 \rangle$ je gaussovki proces $\{B_t^H\}$ u \mathbb{R} definiran s

$$\mathbb{E}B_t^H = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[(B_1^H)^2 \right] \left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right), \quad t, s \geq 0.$$

- jedinstveni centr. gauss. H -ss. proces sa stacionarnim prirastima
- prirasti korelirani

Parametar H i glatkoća trajektorija



Slika: simulacije FBM za različite H (Bovet 2015.)

Integralne reprezentacije FBM

Mandelbrot–van Ness:

$$B_t^H \stackrel{\text{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[(t-u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right] dB_u, \quad t \geq 0.$$

Harmonizabilna reprezentacija:

$$B_t^H \stackrel{\text{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{(i\xi)^{H+1/2}} d\widehat{B}_\xi, \quad t \geq 0.$$

Teorem. Za svaki $\alpha \in \langle 0, H \rangle$ FBM ima modifikaciju $\{\tilde{B}_t^H\}$ takvu da

$$\sup_{0 \leq s, t \leq T} \frac{|\tilde{B}_t^H - \tilde{B}_s^H|}{|t - s|^\alpha} < \infty, \quad T \geq 0.$$

Teorem. Trajektorije FBM ne zadovoljavaju Hölderov uvjet u smislu prošlog teorema ni za koji $\alpha > H$.

Definicija. Neka je $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ slučajni proces čije su trajektorije g.s. lokalno ograničene i nigdje diferencijabilne. Za proizvoljni $t_0 \in \mathbb{R}$ definira se *kritični točkovni Hölderov eksponent* u t_0

$$\alpha_{t_0} = \sup \left\{ \alpha > 0 : \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{|X_{t_0+h} - X_{t_0}|}{|h|^\alpha} = 0 \right\}.$$

Teorem. Za FBM g.s. vrijedi $\alpha_{t_0} = H$ za sve $t_0 \in \mathbb{R}$.

Neka je ψ Meyerov matični valić. Definiramo

$$\begin{aligned}\Psi_H(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{(i\xi)^{H+1/2}} d\xi, \\ \Psi_{-H}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{\psi}(\xi) (-i\xi)^{H+1/2} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_{-H}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(t) dt = 0.$$

$$2^{(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(2^{j'}t - k') \Psi_{-H}(2^j t - k) dt = \begin{cases} 1, & (j, k) = (j', k') \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Teorem. Neka je

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{(i\xi)^{H+1/2}} d\widehat{B}_\xi, \quad t \in \mathbb{R}$$

i $\varepsilon_{j,k} \stackrel{\text{n.j.d.}}{\sim} N(0, 1)$ definirane sa

$$\varepsilon_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(-2^{-j}\xi) d\widehat{B}_\xi = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) dB_t.$$

Tada je

$$B_t^H = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} 2^{-jH} (\psi_H(2^j t - k) - \psi_H(-k)) \varepsilon_{j,k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

pri čemu konvergencija vrijedi i g.s. uniformno po t na svakom kompaktnom podskupu od \mathbb{R} .

Put do glavnog rezultata I

Definicija. Za $j \in \mathbb{N}$ i $\ell \in \mathbb{Z}$ označimo

$$\nu_j^\ell = \max \{ |\varepsilon_{j, j\ell+m}| : 0 \leq m \leq j-1 \}.$$

Lema. Gotovo sigurno iz $\alpha_{t_0}(\omega_0) > H$ slijedi

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \nu_j^{\ell_j(t_0)}(\omega_0) = 0$$

gdje $\ell_j(t_0) = \max \{ \ell \in \mathbb{Z} : j\ell \leq 2^j t_0 \}.$






Za dokaz se koristi ova formula inverzije:

$$\varepsilon_{j,k} = 2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} B_t^H \Psi_{-H}(2^j t - k) dt \quad \text{g.s.}$$






Lema. Gotovo sigurno za sve $p \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \min \left\{ \nu_j^\ell(\omega) : (p-1)2^j \leq j\ell \leq (p+1)2^j \right\} \geq \frac{1}{2}.$$






Bibliografija I

-  Ayache, A. (2010.). „A mini-course on Wavelets and Fractional Processes”. URL: https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/antoine_ayache/COURSE-WavFrac.pdf (pogledano 7. 7. 2025.).
-  Ayache, A. i M. S. Taqqu (rujan 2003.). „Rate Optimality of Wavelet Series Approximations of Fractional Brownian Motion”. *Journal of Fourier Analysis and Applications* 9, str. 451–471.
-  Bovet, A. (veljača 2015.). „Suprathemal ion transport in turbulent magnetized plasmas”. Disertacija. DOI: [10.5075/epfl-thesis-6527](https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-6527).
-  Daubechies, I. (listopad 1988.). „Orthonormal bases of compactly supported wavelets”. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 41.7, str. 909–996.
-  — (1992.). *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial i Applied Mathematics (SIAM).

Bibliografija II

-  Diez, A. (2016.). „Lévy's construction of Brownian motion”. URL: <https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/Antoine.Diez/brownienlevy.pdf> (pogledano 7. 7. 2025.).
-  Embrechts, P. i M. Maejima (2002.). *Selfsimilar processes*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press.
-  Gogić, I. (2025.). *Uvod u funkcionalnu analizu*. URL: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilja/UFA.pdf> (pogledano 7. 7. 2025.).
-  Kovač, V. (2014.). *Time – frequency analysis and singular integrals*. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/files/skrypt_V.Kovac_UWr.pdf (pogledano 7. 7. 2025.).
-  Pipiras, V. i M. S. Taqqu (srpanj 2002.). „Deconvolution of fractional brownian motion”. *Journal of Time Series Analysis* 23.4, str. 487–501. (Pogledano 7. 7. 2025.).

Bibliografija III

-  Rudin, W. (1987.). *Real and complex analysis*. 3. izdanje. McGraw-Hill.
-  Samko, S. G., A. A. Kilbas i O. I. Marichev (1993.). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. eng. Gordon i Breach Science Publishers.
-  Sarapa, N. (1980.). *Teorija vjerojatnosti*. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Školska knjiga.
-  Sato, K. (1999.). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge Univ. Press.
-  Ševčenko, H. (2014.). *Fractional Brownian motion in a nutshell*. URL: <https://arxiv.org/abs/1406.1956> (pogledano 7.7.2025.).