SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Luka Šimek

HARMONIJSKA ANALIZA I SLUČAJNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, 10. rujna 2025.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

...

Poglavlje 1

Slučajni procesi u neprekidnom vremenu

1.1 Osnovni pojmovi

Slučajni proces je indeksirana familija slučajnih veličina $\{X_t : t \in T\}$ na istom vjerojatnosnom prostoru gdje je T neki indeksni skup. On može biti diskretan (npr. $T = \mathbb{N}$ ili $T = \mathbb{Z}$) ili neprekidan (npr. $T = \mathbb{R}$ ili $T = [0, \infty\rangle$). Budući da o elementima T često razmišljamo kao o vremenskim trenucima, govorimo o procesu u diskretnom ili u neprekidnom vremenu. U kontekstu ovog rada podrazumijevamo $T = [0, \infty\rangle$ i koristimo skraćenu notaciju $\{X_t\}$.

Razlikujemo proces od realizacije

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in [0, \infty\rangle, \quad \text{za neki } \omega \in \Omega$$

koju još zovemo *trajektorijom*. Nadalje, kažemo da je slučajni proces $\{X_t\}$ *modifikacija* procesa $\{Y_t\}$ ako je $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ za sve $t \in [0, \infty\rangle$. Primijetimo razliku u odnosu na jači uvjet $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \ \forall t \in [0, \infty\rangle) = 1$ kada procese više načelno ne razlikujemo. Jednakost dvaju procesa po distribuciji znači jednakost svih konačnodiomenzionalnih distribucija.

Slučajne procese obično promatramo preko konačnodimenzionalnih funkcija distribucije $F_{t_1,\dots,t_n}$, $t_j \in T$, koje zadovoljavaju tzv. uvjete suglasnosti Kolmogorova. Dva su važna rezultata koja to opravdaju — teorem Kolmogorova (v. [Sar80, tm. 9.6], alternativa sa suglasnim mjerama [Sat99, tm. 1.8]) koji tvrdi da suglasna familija konačnodimenzionalnih distribucija inducira jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru na σ-algebri cilindara i drugi teorem (v. [Sar80, tm. 9.7]) koji tvrdi da se za takvu familiju uvijek može konstruirati slučajni proces (odn. vjerojatnosni prostor) s upravo tim konačnodimenzionalnim distribucijama. Stoga nam, kao i obično, nije bitan vjerojatnosni prostor u kojem se nalazimo.

Sada ćemo definirati Lévyjeve procese, jednu od najznamenitijih klasa slučajnih procesa. Uvest ćemo Poissonov proces i Brownovo gibanje kao poznate primjere. Pokazat ćemo i vrlo blisku vezu Lévyjevih procesa i beskonačno djeljivih distribucija (definiranih u odjeljku 1.4), koja je potrebna za naš dokaz da Brownovo gibanje postoji. Nakon toga ćemo skrenuti pažnju na teoriju samosličnih procesa i uvesti frakcionalno Brownovo gibanje kao generalizaciju. Prije te definicije, uvedimo još jedan osnovni pojam.

Definicija 1.1.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ je *stohastički neprekidan* ako vrijedi

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0,$$

za svaki $t \geq 0$ i $\varepsilon > 0$.

Definicija 1.1.2. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Lévyjev* ako vrijede uvjeti:

(i) $X_0 = 0$ g.s.,

(ii) $\{X_t\}$ je stohastički neprekidan,

(iii) varijable $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ su nezavisne za sve $n \geq 1$ i $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (nezavisnost inkremenata),

(iv) distribucija varijable $X_{s+t} - X_s$ ne ovisi o s (stacionarnost inkremenata),

(v) Postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ te za svaki $\omega \in \Omega_0$ vrijedi da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ càdlàg[1].

Nadalje, ako ne vrijedi (iv) kažemo da je proces *aditivan.* Ako ne vrijedi (v) tada kažemo da je proces *Lévyjev po distribuciji* odn. *aditivan po distribuciji.*

1.2 Poissonov proces

U ovom odjeljku uvodimo Poissonov proces kao primjer Lévyjevog procesa. Intuitivno, taj proces mjeri broj događaja koji su se dogodili do trenutka t, pri čemu su duljine intervala između uzastopnih događaja distribuirane eksponencijalno. Pritom, eksponencijalnu distribuciju karakterizira tzv. gubitak pamćenja. Poissonov proces

[1] càdlàg, od fr. *continue à droite, limite à gauche*, označava funkciju koja je na cijeloj domeni neprekidna zdesna s limesima slijeva

uvest ćemo kao Lévyjev proces s dodatnim svojstvom da je $X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t)$, a onda konstrukcijom dokazati da takav proces zaista postoji. Kasnije ćemo pokazati da je moguće na taj način odrediti Lévyjev proces i kad se Poissonova distribucija zamijeni bilo kojom beskonačno djeljivom distribucijom.

Definicija 1.2.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}$ je *Poissonov proces s parametrom* $\lambda > 0$ ako je Lévyjev i ako

$$X_t \sim \mathrm{P}(\lambda t), \quad t > 0. \tag{1.1}$$

Teorem 1.2.2. *Neka je $(W_n)_{n\geq 0}$ slučajna šetnja na $\mathbb{R}$ definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, takva da $T_n = W_n - W_{n-1}$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$. Definiramo*

$$X_t(\omega) = n \iff W_n(\omega) \leq t < W_{n+1}(\omega), \quad \omega \in \Omega. \tag{1.2}$$

Tada je $\{X_t\}$ Poissonov proces s parametrom λ.

Dokaz. Ustanovimo prvo da $W_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Naime, $T_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda)$ i $W_n = \sum_{j=1}^n T_j$ pa tvrdnja slijedi po poznatoj lemi o zbroju nezavisnih Γ-distribuiranih varijabli[2]. Sada slijedi $\mathbb{P}(W_n \leq t) \to 0,\ n \to \infty$, što se može dobiti i iz

$$\mathbb{P}(W_n \leq t) \leq \mathbb{P}(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \ldots, T_n \leq t) = [\mathbb{P}(T_1 \leq t)]^n \to 0, \ n \to \infty.$$

Slijedi da je svaka X_t g.s. dobro definirana preko (1.2). Da je $\{X_t\}$ stohastički neprekidan s càdlàg trajektorijama i $X_0 = 0$ g.s. je trivijalno. Preostaje dokazati (1.1) i da su inkrementi stacionarni i nezavisni.

Prvo se dobije iz

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = n) = \mathbb{P}(W_n \leq t < W_n + T_{n+1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 0\leq u\leq t<u+v\}}(x,y)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{(W_n,T_{n+1})} \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\int_0^t x^{n-1}e^{-\lambda x}\int_{t-x}^{\infty} e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

pri čemu koristimo nezavisnost varijabli W_n i T_{n+1} za prelazak na njihove gustoće.

Sličnim izravnim računom možemo dobiti i

$$\mathbb{P}(W_{n+1} > t + s \,|\, X_t = n) = e^{-cs} = \mathbb{P}(T_1 > s), \quad t > 0, s \geq 0, n \geq 0.$$

[2]zbroj je Γ-distribuiran, a prvi parametar (parametar oblika) je zbroj prvih parametara sumanada

Pomoću toga možemo dobiti da $(W_{n+1} - t, T_{n+2}, \dots, T_{n+m})$ uz dano $X_t = n$ ima jednaku distribuciju kao i $(T_1, T_2, \dots, T_m)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m \,|\, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1, T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_n \leq t, W_{n+1} - t > s_1)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m)/\mathbb{P}(X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(W_{n+1} - t > s_1 \,|\, X_t = n)\mathbb{P}(T_{n+2} > s_2, \dots, T_{n+m} > s_m) \\
&\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1)\mathbb{P}(T_2 > s_2, \dots, T_m > s_m) \\
&\quad = \mathbb{P}(T_1 > s_1, T_2 > s_2, \dots, T_m > s_m).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

To nam zatim daje

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t + s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) \\
&\ = \mathbb{P}((W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m} \leq s < (W_{n+1} - t) + T_{n+2} + \cdots + T_{n+m+1}) \\
&\ \overset{(1.3)}{=} \mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_m \leq s < T_1 + \cdots + T_m + T_{m+1}) = \mathbb{P}(W_m \leq s < W_{m+1}) = \mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Sada stacionarnost inkremenata slijedi sumiranjem po $n \geq 0$ jednakosti:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t = m, X_t = n) = \mathbb{P}(X_{t+s} = n + m, X_t = n) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(W_{n+m} \leq t + s < W_{n+m+1} \,|\, X_t = n) = \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{P}(X_s = m).
\end{aligned}$$

Nezavisnost inkremenata slijedi iz

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} - X_{t_0} = n_1, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = n_k) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_0} = n_0, X_{t_1} = n_0 + n_1, \dots, X_{t_k} = n_0 + \cdots + n_k \,|\, X_{t_0} = n_0)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{t_1 - t_0} = n_1, \dots, X_{t_k - t_0} = n_1 + \cdots + n_k)\mathbb{P}(X_{t_0} = n_0)
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi primjenom iste ideje kao u dokazu stacionarnosti. Dokaz se završi indukcijom. □

1.3 Brownovo gibanje

Sada na slični način uvodimo Brownovo gibanje.

Definicija 1.3.1. Slučajni proces $\{X_t\}$ u $\mathbb{R}^d$ je *Brownovo gibanje* (ili *Wienerov proces*) ako je Lévyjev i ako

(i) $X_t \sim \mathrm{N}(0, tI)$ i

(ii) postoji $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i $\omega \in \Omega_0$ povlači da je trajektorija $t \mapsto X_t(\omega)$ neprekidna.

Ovime nismo dokazali da takav proces postoji, što ćemo ostaviti za kasnije. Dana svojstva su nam dovoljna da dokažemo nekoliko osnovnih rezultata o Brownovom gibanju. Dokazat ćemo par nama najznačajnijih rezultata, a drugi se mogu naći u [Sat99, §5]. Spomenimo još kako je svojstvo (i) skupa s Lévyjevosti dovoljno za (ii) po teoremu **??**.

Prvo ćemo dokazati da Brownovo gibanje zadržava istu distribuciju pri širenju u vremenu i odgovarajućem širenju u prostoru. To svojstvo ćemo kasnije zvati *samosličnost.*

Teorem 1.3.2. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}^d$. Tada je $\left\{c^{-1/2}X_{ct}\right\}$ također Brownovo gibanje u $\mathbb{R}^d$ za svaki $c > 0$.*

Dokaz. Neka je $Y_t = c^{-1/2}X_{ct}$. Odmah slijedi $Y \sim \mathrm{N}(0, tI)$. Stohastička neprekidnost, g.s. neprekidnost trajektorija i nezavinost inkremenata lako se svedu na isto za $\{X_t\}$.

Stacionarnost inkremenata također — neka $0 \leq s < t$ pa

$$Y_t - Y_s = c^{-1/2}\left(X_{ct} - X_{cs}\right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} c^{-1/2}X_{ct-cs} \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y_{t-s}.$$

□

Sada ćemo dokazati da u jednoj dimenziji g.s. vrijede dva inače neuobičajena svojstva — nigdje-monotonost i nigdje-diferencijabilnost.[3]

Teorem 1.3.3. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-monotona, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije monotona niti na jednom segmentu.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti dokazujemo samo nigdje-rastućost na segmentu[4] $[a, b] \subset [0, \infty\rangle$. Neka je još $n \geq 2$ proizvoljan i Ω_0 iz definicije 1.3.1. Definiramo

$$A = \{\omega \in \Omega_0 : t \mapsto X_t(\omega) \text{ ne opada na } [a, b]\}$$

i zatim ekvidistantnu particiju segmenta $[a, b]$ s $t_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $0 \leq k \leq n$ te

$$A_n = \{\omega \in \Omega_0 : X_{t_0}(\omega) \leq X_{t_1}(\omega) \leq \cdots \leq X_{t_n}(\omega)\} \in \mathcal{F}.$$

[3]ustvari je dovoljno dokazati nigdje-diferencijabilnost; Lebesgueov teorem o diferencijabilnosti monotonih funkcija govori da je svaka neprekidna monotona funkcija diferencijabilna g.s., v. [Sat99, remark 5.10] za još dovoljnih uvjeta

[4]to možemo jer svaki segment $[a, b]$ možemo smanjiti na $[a', b']$ gdje $a', b' \in \mathbb{Q}$ i onda „ukupni" Ω_1 dobiti kao prebrojivi presjek „lokalnih"

Očito $A \subset A_n$ i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \geq 0\right\}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n} P(X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \geq 0) = 2^{-n} \to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

pa možemo odabrati

$$\Omega_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathcal{F}.$$

□

Komentar 1.3.4. Štoviše, vrijedi

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Inkluzija $\subseteq$ je očita. Za $\supseteq$ pretpostavimo $\omega \in \cap_n A_n \setminus A$. Tada postoje $a \leq s < t \leq b$ takvi da $X_s(\omega) - X_t(\omega) > \varepsilon$ za neki $\varepsilon > 0$. Jer je skup

$$\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n, \quad \Delta_n = \left\{a + \frac{b-a}{n} \cdot k : 0 \leq k \leq n\right\}$$

gust u $[a, b]$ i zbog neprekidnosti trajektorije postoje n i $s', t' \in \Delta_n$ takvi da $X_{s'}(\omega) - X_{t'}(\omega) > \varepsilon/2$. Time smo došli do kontradikcije jer $\omega \notin A_n$.

Teorem 1.3.5. *Neka je $\{X_t\}$ Brownovo gibanje u $\mathbb{R}$. Gotovo sigurno je $t \mapsto X_t(\omega)$ nigdje-diferencijabilna, tj. postoji $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$ i $\omega \in \Omega_1$ povlači da $t \mapsto X_t(\omega)$ nije diferencijabilna niti u jednoj točki $t \in [0, \infty\rangle$.*

Dokaz. Slično kao u prošlom dokazu, ograničimo se na pitanje diferencijabilnosti u nekom $t \in [0, N]$ gdje $N \in \mathbb{N}$. Stavimo

$$A = \{\omega \in \Omega \colon t \mapsto X_t(\omega) \text{ je diferencijabilna u nekom } s \in [0, N]\}$$

i za $M, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}A_{n,M} = \{\omega \in \Omega \colon (\exists s \in [0, N(1 - 1/n)])(&|t - s| \leq 2N/n \\ &\implies |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq M\,|t - s|)\}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Lako se pokaže

$$A \subseteq \bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,M}.$$

Fiksiramo $M \in \mathbb{N}$ i stavimo $A_n = A_{n,M}$. Nadalje uvedimo mrežu $t_k = \frac{Nk}{n}$, $0 \le k \le n$ i definiramo slučajne varijable[5]

$$Y_{n,k} = \max\left\{\left|X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right|, \left|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}\right|, \left|X_{t_{k+2}}, X_{t_{k+1}}\right|\right\}, \quad 0 \le k \le n-2.$$

Definiramo još događaje

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n-2} \left\{Y_{n,k} \le 4MN/n\right\}.$$

Neka je $\omega \in A_n$ i s iz (1.4). Lako se pokaže da je $\omega \in \{Y_{n,k} \le 4MN/n\}$ gdje je k takav da s nije udaljen ni od kojeg ruba segmenta $[t_{k-1}, t_{k+2}]$ za više od $2N/n$. Dakle, $A_n \subseteq B_n$.

Uvedimo oznaku $a_n = \mathbb{P}\left(\left|X_{N/n}\right| \le 4MN/n\right)$. Pomoću stacionarnosti i nezavisnosti inkremenata dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &\le \sum_{k=0}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k} \le 4MN/n) = \mathbb{P}(Y_{n,0}) + \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(Y_{n,k}) \\
&= \mathbb{P}\left(|X_{t_1} - X_{t_0}| \le 4MN/n, |X_{t_2} - X_{t_1}| \le 4MN/n\right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=0}^{3} \left\{\left|X_{t_{k+\ell}} - X_{t_{k+\ell-1}}\right| \le 4MN/n\right\}\right) \\
&= a_n^2 + (n-2)a_n^3.
\end{aligned}$$

Želimo odozgo ocijeniti a_n. Prvo iz teorema 1.3.2 imamo $X_{N/n} \overset{\mathrm{d}}{=} (N/n)^{1/2} X_1$. Ako gustoću jedinične normalne distribucija ocijenimo odozgo konstantom, imamo

$$a_n = \mathbb{P}\left(|X_1| \le 4M\,(N/n)^{1/2}\right) \lesssim \left(\frac{N}{n}\right)^{1/2}.$$

Iz toga slijedi $\mathbb{P}(B_n) \to 0$, $n \to \infty$ pa i $\mathbb{P}\left(\liminf_n B_n\right) = 0$. Tvrdnja teorema slijedi jer

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \liminf_{n\to\infty} B_n.$$

□

[5] za $k = 0$ maknemo prvi element skupa

1.4 Beskonačno djeljive distribucije

U ovom odjeljku uvodimo pojam beskonačno djeljive distribucije odn. mjere.[6] Beskonačno djeljive distribucije su u vrlo bliskoj vezi s Lévyjevim procesima. Naime, dokazat ćemo da

- za svaku beskonačno djeljivu distribuciju μ postoji Lévyjev po distribuciji proces $\{X_t\}$ jedinstven po distribuciji takav da $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$ i
- svaki proces Lévyjev po distribuciji ima modifikaciju koja je Lévyjev proces (u sljedećem odjeljku 1.5).

Posljedica je da svakom beskonačno djeljivom distribucijom (među kojima su i Poissonova i normalna, v. komentar 1.4.3) možemo odrediti Lévyjev proces kako smo to napravili u definicijama 1.2.1 i 1.3.1. Da dokažemo da Brownovo gibanje postoji još je potrebna i neprekidnost trajektorija, a nju ćemo dokazati u teoremu **??**.

Sada definiramo beskonačno djeljivu distribuciju preko tri ekvivalentne tvrdnje. Da su ekvivalentne lako se vidi jer konvolucija mjere i zbrajanje nezavisnih slučajnih varijabli odgovaraju množenju odgovarajućih karakterističnih funkcija. Ako je μ konačna mjera, s μ^n označavamo n-kratnu konvoluciju μ same sa sobom.

Definicija 1.4.1. Neka je X slučajna varijabla na $\mathbb{R}^d$ i μ odgovarajuća vjerojatnosna mjera. Tada:

(i) kažemo da je μ *beskonačno djeljiva* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji vjerojatnosna mjera μ_n takva da $\mu = \mu_n^n$,

(ii) kažemo da X ima beskonačno djeljivu distribuciju ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje n.j.d. varijable $X_1, \ldots, X_n$ takve da

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

(iii) μ je beskonačno djeljiva ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\widehat{\mu}_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da je karakteristična funkcija neke vjerojatnosne distribucije i $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}_n(z)^n$ za svaki $z \in \mathbb{R}^d$.

U sljedećoj propoziciji bez dokaza navodimo osnovna svojstva beskonačno djeljivih distribucija (v. [Sat99, §7] i [Sar80, §13, 14]). Najvažnije nam je vidjeti da logaritmirajne i potenciranje beskonačno djeljivih mjera ima neka očekivana lijepa svojstva — jedinstvenost, neprekidnost i dobro granično ponašanje.

[6]često poistovjećujemo vjerojatnosnu mjeru i odgovarajuću vjerojatnosnu funkciju distribucije (v. [Sar80, str. 257])

Propozicija 1.4.2. *(i) Ako su μ_1 i μ_2 beskonačno djeljive, tada je to i $\mu_1 * \mu_2$.*

(ii) Ako je μ beskonačno djeljiva tada $\widehat{\mu}(z) \neq 0$ za svaki $z \in \mathbb{R}^d$.

(iii) Neka je $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $\varphi(0) = 1$ i $\varphi(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{R}^d$. Tada postoji jedinstvena neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $f(0) = 0$ i $e^{f(z)} = \varphi(z)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena neprekidna funkcija $g_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ takva da $g_n(0) = 1$ i $g_n(z)^n = \varphi(z)$. Vrijedi $g_n(z) = e^{f(z)/n}$. Pišemo $f = \log \varphi$ i $g_n = \varphi^{1/n}$.

(iv) Neka su φ i $(\varphi_n)_n$ kao u uvjetima t. (iii). Ako $\varphi_n \to \varphi$ uniformno na svakom kompaktnom skupu, tada $\log \varphi_n \to \log \varphi$ uniformno na svakom kompaktnom skupu.

(v) Ako je $(\mu_n)_n$ niz beskonačno djeljivih vjerojatnosnih mjera i $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu$, tada je i μ beskonačno djeljiva.

(vi) Ako je μ beskonačno djeljiva, tada je μ^t dobro definirana i beskonačno djeljiva za svaki $t \in [0, \infty\rangle$.

Komentar 1.4.3. Razmotrimo primjere beskonačno djeljivih distribucija.

- Neka je $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $X_k \sim \mathrm{N}(\mu/n, \sigma^2/n)$ n.j.d. pa je

$$X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_1 + \cdots + X_n.$$

  Po definiciji slijedi da je normalna distribucija beskonačno djeljiva. Istu ideju možemo primijeniti da dokažemo da su beskonačno djeljive Poissonova, Γ i δ-distribucije. Ekvivalentno je gledati korijene karakterističnih funkcija i vidjeti da odgovaraju istom tipu distribucije s različitim parametrima. Tako su još beskonačno djeljive Cauchyjeva i negativna binomna distribucija.

- Uniformna i binomna distribucija nisu beskonačno djeljive. Za uniformnu karakteristična funkcija ima nultočke (prop. 1.4.2, t. (ii)). Za binomnu to nije slučaj, ali nije beskonačno djeljiva pa to pokazuje da ne vrijedi obrat. U [Sat99] se u kasnijim poglavljima pokazuje da su δ-distribucije jedine beskonačno djeljive distribucije s kompaktnim nosačem.

- Ako je $\{X_t\}$ Lévyjev je $\mathbb{P}_{X_1}$ beskonačno djeljiva. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo $t_k = k/n$, $0 \leq k \leq n$ pa

$$X_1 = \sum_{k=0}^{n} \left(X_{t_k} - X_{t_{k-1}}\right) \quad \text{g.s.}$$

  Tvrdnja slijedi zbog stacionarnosti i nezavisnosti inkremenata.

Slijedi glavni rezultat ovog odjeljka koji smo najavili na početku.

Teorem 1.4.4. *(i) Ako je X_t Lévyjev po distribuciji, tada je $\mathbb{P}_{X_t}$ beskonačno djeljiva za svaki $t \geq 0$ i $\mathbb{P}_{X_t} = \mathbb{P}_{X_1}^t$.*

(ii) Ako je μ beskonačno djeljiva distribucija, tada postoji Lévyjev proces po distribuciji $\{X_t\}$ takav da $\mathbb{P}_{X_1} = \mu$.

(iii) Ako su $\{X_t\}$ i $\{X'_t\}$ Lévyjevi procesi po distribuciji takvi da $\mathbb{P}_{X_1} = \mathbb{P}_{X'_1}$, tada $\{X_t\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{X'_t\}$.

Dokaz. Dokažimo prvo (i). Da je $\mathbb{P}_{X_t}$ beskonačno djeljiva za sve $t \geq 0$ slijedi istom konstrukcijom kao u komentaru 1.4.3. Iz nje štoviše slijedi $\mathbb{P}_{X_{1/n}} = \mathbb{P}_{X_1}^{1/n}$ i zatim po prop. 1.4.2 je $\mathbb{P}_{X_{m/n}} = \mathbb{P}_{X_1}^{m/n}$. Dakle, tvrdnju smo dokazali za sve $t \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$. Neka je sada t iracionalan i $t_n \to t$ gdje $t_n \in \mathbb{Q}$. Stohastičku neprekidnost u t možemo zapisati kao $X_{t_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$ pa konvergencija vrijedi i po distribuciji te povlači konvergenciju mjera $\mathbb{P}_{X_1}^{t_n} = \mathbb{P}_{X_{t_n}} \xrightarrow{\mathrm{w}} \mathbb{P}_{X_t}$. Također $\mathbb{P}_{X_1}^{t_n} \xrightarrow{\mathrm{w}} P_{X_1}^t$ po prop. 1.4.2, t. (iii). Tvrdnja slijedi zbog jedinstvenosti limesa (npr. prop. 13.7 u [Sar80]).

Sada dokažimo (iii). Po (i) slijedi $X_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'_t$ za $t \geq 0$ i po stacionarnosti inkremenata $X_{s+t} - X_s \stackrel{\mathrm{d}}{=} X'_{s+t} - X'_s$ za $s, t \geq 0$. Zbog nezavisnosti komponenti jednako su distribuirani i vektori[7]

$$(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1} - X'_{t_0}, \ldots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}}) \tag{1.5}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Primjenom izmjerivog preslikavanja

$$(x_0, x_1, \ldots x_n) \mapsto (x_0, x_0 + x_1, \ldots, x_0 + x_1 + \cdots + x_n), \quad x_k \in \mathbb{R}^d$$

na obje strane (1.5) dobivamo

$$(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots X_{t_n}) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1}, \ldots X'_{t_n}).$$

Preostaje (ii). Moramo definirati vjerojatnosni prostor i $\{X_t\}$ na njemu te zatim dokazati da proces ima željena svojstva. Uvedimo uobičajenu konstrukciju (npr. [Sat99, str. 4]): $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{[0,\infty\rangle}$, odgovarajuća σ-algebra cilindara za $\mathcal{F}$ i za $\omega = (\omega(t))_t$ stavimo $X_t(\omega) = \omega(t)$. Za $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ definiramo vjerojatnosnu mjeru na bazi σ-algebre $\mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{n+1})$

$$\begin{aligned}\mu_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} & \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) 1_{B_1}(y_0 + y_1) \\ & \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n) 1_{B_n}(y_0 + \cdots + y_n),\end{aligned} \tag{1.6}$$

[7] njihove komponente isto mogu biti vektori, tada se radi o blok-zapisu

gdje $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Mjera je dobro definirana po prop. 1.4.2, t. (vi). Familija $\{\mu_{t_0,\dots,t_n}\}$ je suglasna (v. komentar 1.4.5) pa po teoremu Kolmogorova postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}$ takva da

$$\mathbb{P}(X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n) = \mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n).$$

Stavimo li $t_0 = t$ i $B_k = \mathbb{R}^d$ za $k \geq 1$ dobivamo da X_t ima distribuciju μ^t. Posebice, $X_0 = 0$ g.s. Za ograničenu izmjerivu funkciju f generalno vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_0, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} & f(y_0, y_0 + y_1, \dots, y_0 + \cdots + y_n) \\ & \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Neka je $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_k \in \mathbb{R}^d$, fiksan. Definiramo

$$\begin{aligned} f(x_0, \dots, x_n) &= \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \langle z_k, x_k - x_{k-1} \rangle\right) \quad \text{i} \\ f_k(x_0, \dots, x_n) &= \exp\left(i \langle z_k, x_k - x_{k-1} \rangle\right), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Onda je $f = \prod_k f_k$ te su $\mathbb{E}f(X_0, \dots, X_n)$ i $\mathbb{E}f_k(X_0, \dots, X_n)$ vrijednosti u točki z karakterističnih funkcija od redom $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ i $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$. Najprije se iz (1.7) lako dobije

$$\mathbb{E}f_k(X_0, \dots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \langle z_k, y_k \rangle\right) \mathrm{d}\mu^{t_k - t_{k-1}}(y_k)$$

pa slijedi da $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ ima distribuciju $\mu^{t_k - t_{k-1}}$. Dakle, dokazali smo stacionarnost. Nezavisnost dobijemo jer

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}f(X_0, \dots, X_n) \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \langle z_k, y_k \rangle\right) \mathrm{d}\mu^{t_1 - t_0}(y_1) \cdots \mathrm{d}\mu^{t_n - t_{n-1}}(y_n) \\ &\quad = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}f_k(X_0, \dots, X_n). \end{aligned}$$

Na kraju jer $\mu_t \xrightarrow{\mathrm{w}} \mu_0 = \delta_0$ slijedi $X_t \xrightarrow{\mathrm{d}} 0$ i $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ kad $t \downarrow 0$. Zbog stacionarnosti inkremenata, to se lako proširi na stohastičku neprekidnost na cijeloj domeni. Dakle, $\{X_t\}$ je Lévyjev po distribuciji. $\square$

Komentar 1.4.5. Razjasnimo par stvari iz dokaza teorema 1.4.4.

- Intuicija iza (1.6) je sljedeća: svakako nas zanima vjerojatnost da $x_k \in B_k$, no preostaje pitanje kako „mjeriti" pojedini skok. Dekomponiranje mjere na komponente koje ovise samo o rasponu $t_k - t_{k-1}$ i mjerenje po inkrementima $(y_0 = x_0, y_k = x_k - x_{k-1})$ osiguravaju željena svojstva, a to se i potvrdi formalno.

- Obrazložimo zašto je familija mjera definiranih preko (1.6) suglasna. Kada imamo $1_{B_k} \equiv 1$ za $k < n$ dobiva se konvolucija dviju od mjera, a za $k = n$ funkcija koju integriramo više ne ovisi o y_n pa i mjera μ_n nestaje. Prikažimo prvo bez smanjenja općenitosti za $n = 2$ i $B_1 = \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_0,t_1,t_2}(B_0 \times \mathbb{R}^d \times B_2) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_2}(y_0 + y_1 + y_2)\, \mathrm{d}\mu^{t_1-t_0}(y_1)\, \mathrm{d}\mu^{t_2-t_1}(y_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(y_0)\, \mathrm{d}\mu^{t_0}(y_0) 1_{B_2}(y_0 + y_2')\, \mathrm{d}(\mu^{t_2-t_1} * \mu^{t_1-t_0})(y_2') \qquad (1.8) \\
&= \mu_{t_0,t_2}(B_0 \times B_2), \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

gdje $y_2' = y_1 + y_2$, jednakost (1.8) dobijemo preko poznate formule za konvoluciju (npr. [Sar80, §13.4, (6)]). Naime, možemo ju u našem slučaju pisati i kao:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_2 - y_0}(y_2')\, \mathrm{d}(\mu^{t_2-t_1} * \mu^{t_1-t_0})(y_2') \\
&\qquad\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_2}(y_0 + y_1 + y_2)\, \mathrm{d}\mu^{t_2-t_1}(y_2)\, \mathrm{d}\mu^{t_1-t_0}(y_1).
\end{aligned}$$

Za (1.9) nam treba i $\mu^s * \mu^t = \mu^{s+t}$ — po prop. 1.4.2 karakteristična funkcija od μ^{s+t} je $\exp[(t+s)\log \widehat{\mu}]$ što je produkt karakterističnih funkcija od μ^s i μ^t.

Za kraj odjeljka vrijedi spomenuti i temu Lévy–Hinčinove reprezentacije beskonačno djeljivih distribucija odn. njihovih karakterističnih funkcija. Ona nam ovdje nije bila potrebna, no detaljno je obrađena u [Sat99, §8].

1.5 Markovljevi procesi i modifikacije

U ovom odjeljku uvodimo Markovljeve procese. Pokazuje se da su oni generalizacija Lévyjevih i aditivnih procesa, tj. Lévyjevi i aditivni procesi zadovoljavaju Markovljevo svojstvo. Zanima nas ima li Lévyjev po distribuciji proces iz teorema 1.4.4, t. (ii), modifikaciju koja je Lévyjev proces. Pitanje modifikacija s càdlàg ili neprekidnim trajektorijama promatrat ćemo na Markovljevim procesima; dovoljne uvjete dajemo u teoremu **??**.

Najprije uvedimo pojam tranzicijske funkcije. Intuitivno, funkcija mjeri vjerojatnost prijelaza iz točke x u skup B između trenutaka s i t.

Definicija 1.5.1. Preslikavanje $\mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ gdje $x \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ i $0 \leq s \leq t < \infty$ je *tranzicijska funkcija* na $\mathbb{R}^d$ ako

(i) za fiksni x je $B \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

(ii) za fiksni B je $x \mapsto \mathbb{P}_{s,t}(x, B)$ Borel-izmjeriva,

(iii) vrijedi $\mathbb{P}_{s,s}(x, B) = \delta_x(B)$ i

(iv) zadovoljava relaciju

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}_{s,t}(x,\, \mathrm{d}y)\mathbb{P}_{t,u}(y, B) = \mathbb{P}_{s,u}(x, B), \quad u \geq t. \tag{1.10}$$

Dodatno, razmatramo uvjete:

(v) $\mathbb{P}_{s+h,t+h}(x, B)$ ne ovisi o h i

(vi) $\mathbb{P}_{s,t}(x, B) = \mathbb{P}_{s,t}(0, B - x)$.

Ako vrijedi (v) kažemo da je tranzicijska funkcija *vremenski homogena.* Ako vrijedi (vi) kažemo da je *prostorno homogena* ili *invarijantna na translaciju.*

Komentar 1.5.2.

- Jednakost (1.10) zove se identitet Chapman–Kolmogorova.
- Ako familiju $\{\mathbb{P}_{s,t} : 0 \leq s \leq t\}$ čine vremenski homogene tranzicijske funkcije, označavamo ju s $\{\mathbb{P}_t : t \geq 0\}$ gdje $\mathbb{P}_t = \mathbb{P}_{0,t}$.
- Za familiju $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ tranzicijskih funkcija i početnu vrijednost $a \in \mathbb{R}^d$ možemo konstruirati proces $\{Y_t\}$ kako slijedi. Tehnika i ideje slične su kao u dokazu teorema 1.4.4 pa ćemo biti manje detaljni. Definiramo na uobičajeni način Ω, $\mathcal{F}$ i $\{Y_t\}$. Za $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ i $B_0, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiramo vjerojatnosnu mjeru preko

$$\begin{aligned}\mu^{(a)}_{t_0,\ldots,t_n}&(B_0 \times \cdots \times B_n)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B_0}(x_0) \cdots 1_{B_n}(x_n)\\ &\qquad \mathbb{P}_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1},\, \mathrm{d}x_n) \cdots \mathbb{P}_{t_0,t_1}(x_0,\, \mathrm{d}x_1)\mathbb{P}_{0,t_0}(a,\, \mathrm{d}x_0).\end{aligned} \tag{1.11}$$

  Suglasnost takve familije slijedi iz (1.10) te se ona proširi na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^a$ na $\mathcal{F}$.

Slična konstrukcija moguća je za drukčije početno vrijeme $s > 0$. Tada $\Omega^s = (\mathbb{R}^d)^{[s,\infty\rangle}$ i definiramo proces $\{Y_t : t \geq s\}$. Familija mjera

$$\left\{\mu^{(s,a)}_{t_0,\dots,t_n} : s \leq t_0 < \cdots < t_n\right\}$$

definira se analogno kao u (1.11) i proširi se na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}^{s,a}$ na σ-algebri $\mathcal{F}^s$. Možemo iste oznake s $s = 0$ koristiti za objekte iz prošlog paragrafa.

Definicija 1.5.3. Slučajni proces $\{X_t\}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je *Markovljev proces sa familijom tranzicijskih funkcija* $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$ *i početnom vrijednosti* a ako je po distribuciji jednak procesu $\{Y_t : t \geq 0\}$ definiranom u komentaru 1.5.2. Ako su tranzicijske funkcije vremenski homogene, i sam proces naziva se *vremenski homogenim.* Analogno, za proces $\{X_t : t \geq s\}$ jednak po distribuciji procesu $\{Y_t : t \geq s\}$ na prostoru $(\Omega^s, \mathcal{F}^s, \mathbb{P}^{s,a})$ može se dodati da ima *početno vrijeme* s. Procesi $\{Y_t\}$ zovu se *trajektorijska reprezentacija.*

Vezu Markovljevih s aditivnim i Lévyjevim procesima možemo ukratko i pomalo neprecizno (v. [Sat99, §10]) rezimirati ovako:

- aditivni (po distribuciji) proces odgovara Markovljevom procesu s prostorno homogenom tranzicijskom funkcijom i

- Lévyjev (po distribuciji) proces odgovara Markovljevom procesu s prostorno i vremenski homogenom tranzicijskom funkcijom.

Sljedeća propozicija uvodi pojam Markovljevog svojstva. Kao i obično, ideja je da na budućnost utječe samo sadašnjost, a ne ni najneposrednija prošlost.

Propozicija 1.5.4. *Neka je* $\{Y_t\}$ *trajektorijska reprezentacija Markovljevog procesa s familijom tranzicijskih funkcija* $\{\mathbb{P}_{s,t}\}$*. Neka su* $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ *i* f *ograničena Borel-izmjeriva funkcija na* $\mathbb{R}^d$*. S* $\mathbb{E}^{s,a}$ *označimo matematičko očekivanjem s obzirom na vjerojatnosnu mjeru* $\mathbb{P}^{s,a}$*. Tada je* $a \mapsto \mathbb{E}^{0,a}[f(Y_{t_0}, \dots, Y_{t_n})]$ *Borel-izmjeriva za sve* $a \in \mathbb{R}^d$ *i*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{0,a}[f(Y_{t,0}, \dots, Y_{t_n})] \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0, \dots, x_n) \\
&\qquad\qquad\qquad \mathbb{P}_{t_{n-1},t_n}(x_{n-1}, \mathrm{d}x_n) \cdots \mathbb{P}_{t_0,t_1}(x_0, \mathrm{d}x_1)\mathbb{P}_{0,t_0}(a, \mathrm{d}x_0).
\end{aligned}$$

Nadalje, ako su $0 \leq s_0 < \cdots < s_m \leq s$ *i* g *ograničena Borel-izmjeriva funkcija na* $\mathbb{R}^d$ *vrijedi*[8]

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{0,a}[g(Y_{s_0}, \dots, Y_{s_m}) f(Y_{s+t_0}, \dots, Y_{s+t_m})] \\ &\quad = \mathbb{E}^{0,a}[g(Y_{s_0}, \dots, Y_{s_m}) E^{s,Y_s}[f(Y_{s+t_0}, \dots, Y_{s+t_n})]].\end{aligned}$$

[8] $\mathbb{E}^{s,Y_s}[\cdot]$ znači $h(Y_s)$ gdje je $h(x) = E^{s,x}[\cdot]$

Bibliografija

[Aya10] Antoine Ayache. „A mini-course on Wavelets and Fractional Processes". (2010.).

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial i Applied Mathematics (SIAM), 1992.

[EM02] Paul Embrechts i Makoto Maejima. *Selfsimilar processes*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, 2002.

[Sar80] Nikola Sarapa. *Teorija vjerojatnosti*. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Školska Knjiga, 1980.

[Sat99] Ken-iti Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge Univ. Press, 1999.

Sažetak

...

Summary

...

Životopis

Luka Šimek rođen je 2000. u Zagrebu gdje završava XV. gimnaziju 2019. Tijekom školovanja ističe se na natjecanjima, prvenstveno drugim mjestom na državnom natjecanju iz matematike (2016., Primošten) i brončanom medaljom na individualnom dijelu Srednjoeuropske matematičke olimpijade (2017., Vilnius).

Preddiplomski studij matematike na zagrebačkom PMF-u upisuje 2019. Završetkom preddiplomskog studija 2022. upisuje diplomski studij Matematičke statistike. Tijekom preddiplomskog studija radi kao demonstrator iz kolegija Matematička analiza (1 i 2) i Programiranje (1 i 2).