Harmonijska analiza i slučajni procesi

Diplomski rad

Luka Šimek

Voditelj rada: prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

19. rujna 2025.

Sadržaj

Samoslični slučajni procesi

Definicija. Slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}^d$ je *samosličan* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da

$$\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t\}\,. \tag{1}$$

Samoslični slučajni procesi

Definicija. Slučajni proces $\{X_t\}$ na $\mathbb{R}^d$ je *samosličan* ako za svaki $a > 0$ postoji $b > 0$ takav da

$$\{X_{at}\} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \{bX_t\}\,. \tag{1}$$

Teorem. Ako je $\{X_t\}$ samosličan, stohastički neprekidan i netrivijalan, tada postoji $H \geq 0$ takav da

$$b = a^H$$

za sve a, b iz (1).

Frakcionalno Brownovo gibanje

Definicija. *Frakcionalno Brownovo gibanje* (FBM) s parametrom $H \in \langle 0, 1\rangle$ je gaussovki proces $\left\{ B_t^H \right\}$ u $\mathbb{R}$ definiran s

$$\mathbb{E} B_t^H = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[(B_1^H)^2 \right] \left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H} \right), \quad t, s \geq 0.$$

Frakcionalno Brownovo gibanje

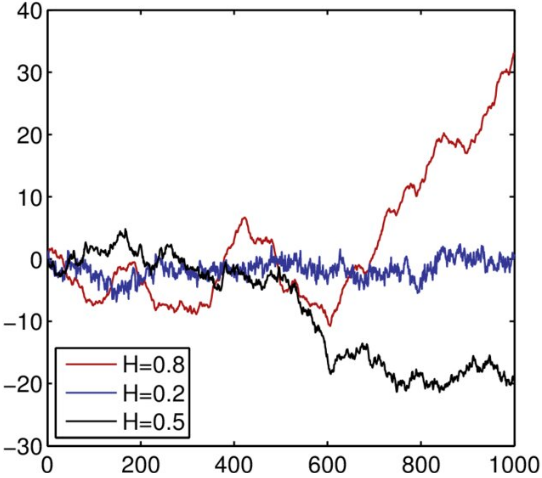
Definicija. *Frakcionalno Brownovo gibanje* (FBM) s parametrom $H \in \langle 0, 1 \rangle$ je gaussovki proces $\left\{ B_t^H \right\}$ u $\mathbb{R}$ definiran s

$$\mathbb{E} B_t^H = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\mathbb{E}(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[(B_1^H)^2 \right] \left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H} \right), \quad t, s \geq 0.$$

- jedinstveni centr. gauss. H-ss. proces sa stacionarnim prirastima
- prirasti korelirani

Parametar H i glatkoća trajektorija



Slika: simulacije FBM za različite H (Bovet 2015.)

Integralne reprezentacije FBM

Mandelbrot–van Ness:

$$B_t^H \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left[(t-u)_+^{H-1/2} - (-u)_+^{H-1/2} \right] \mathrm{d}B_u, \quad t \geq 0.$$

Harmonizabilna reprezentacija:

$$B_t^H \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{(i\xi)^{H+1/2}} \, \mathrm{d}\widehat{B}_\xi, \quad t \geq 0.$$

Uniformna Hölder-regularnost na kompaktnom skupu

Teorem. Za svaki $\alpha \in \langle 0, H\rangle$ FBM ima modifikaciju $\left\{\widetilde{B}_t^H\right\}$ takvu da

$$\sup_{0\leq s,t\leq T} \frac{\left|\widetilde{B}_t^H - \widetilde{B}_s^H\right|}{|t-s|^\alpha} < \infty, \quad T \geq 0.$$

Teorem. Trajektorije FBM ne zadovoljavaju Hölderov uvjet u smislu prošlog teorema ni za koji $\alpha > H$.

Hölder-regularnost po točkama

Definicija. Neka je $\{X_t : \ t \in \mathbb{R}\}$ slučajni proces čije su trajektorije g.s. lokalno ograničene i nigdje diferencijabilne. Za proizvoljni $t_0 \in \mathbb{R}$ definira se *kritični točkovni Hölderov eksponent* u t_0

$$\alpha_{t_0} = \sup \left\{ \alpha > 0 : \ \limsup_{h \to 0} \frac{|X_{t_0+h} - X_{t_0}|}{|h|^{\alpha}} = 0 \right\}.$$

Teorem. Za FBM g.s. vrijedi $\alpha_{t_0} = H$ za sve $t_0 \in \mathbb{R}$.

Funkcije $\Psi_{\pm H}$

Neka je ψ Meyerov matični valić. Definiramo

$$\Psi_H(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{(i\xi)^{H+1/2}} \, \mathrm{d}\xi,$$
$$\Psi_{-H}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \widehat{\psi}(\xi)(-i\xi)^{H+1/2} \, \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi_{-H}(t) \, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

$$2^{(j'+j)/2} \int_{\mathbb{R}} \Psi_H(2^{j'} t - k') \Psi_{-H}(2^j t - k) \, \mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & (j,k) = (j',k') \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Valićna reprezentacija FBM

Teorem. Neka je

$$B_t^H = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{(i\xi)^{H+1/2}} \, \mathrm{d}\widehat{B}_\xi, \quad t \in \mathbb{R}$$

i $\varepsilon_{j,k} \overset{\text{n.j.d.}}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$ definirane sa

$$\varepsilon_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} 2^{-j/2} e^{ik2^{-j}\xi} \widehat{\psi}(-2^{-j}\xi) \, \mathrm{d}\widehat{B}_\xi = \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \, \mathrm{d}B_t.$$

Tada je

$$B_t^H = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} 2^{-jH} \left(\Psi_H(2^j t - k) - \Psi_H(-k) \right) \varepsilon_{j,k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

pri čemu konvergencija vrijedi i g.s. uniformno po t na svakom kompaktnom podskupu od $\mathbb{R}$.

Put do glavnog rezultata I

Definicija. Za $j \in \mathbb{N}$ i $\ell \in \mathbb{Z}$ označimo

$$\nu_j^\ell = \max\left\{|\varepsilon_{j,j\ell+m}| \,:\, 0 \leq m \leq j-1\right\}.$$

Lema. Gotovo sigurno iz $\alpha_{t_0}(\omega_0) > H$ slijedi

$$\limsup_{j\to\infty} \nu_j^{\ell_j(t_0)}(\omega_0) = 0$$

gdje $\ell_j(t_0) = \max\left\{\ell \in \mathbb{Z} :\, j\ell \leq 2^j t_0\right\}$.

Za dokaz se koristi ova formula inverzije:

$$\varepsilon_{j,k} = 2^{j(1+H)} \int_{\mathbb{R}} B_t^H \Psi_{-H}(2^j t - k)\,\mathrm{d}t \quad \text{g.s.}$$

Put do glavnog rezultata II

Lema. Gotovo sigurno za sve $p \in \mathbb{Z}$ vrijedi

$$\liminf_{j\to\infty} \min\left\{\nu_j^\ell :\ (p-1)2^j \le j\ell \le (p+1)2^j\right\} \ge \frac{1}{2}.$$

Dokaz. Za fiksni $p \in \mathbb{Z}$ definiramo

$$B_j = \min\left\{\nu_j^\ell :\ (p-1)2^j \le j\ell \le (p+1)2^j\right\}, \quad j \ge 1.$$

Dobiva se $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(B_j < \frac{1}{2}\right) < \infty$ pa po Borel–Cantellijevoj lemi

$$\mathbb{P}\left(B_j < \frac{1}{2} \text{ za beskonačno mnogo } j\right) = 0.$$

Bibliografija I

- Ayache, A. (2010.). „A mini-course on Wavelets and Fractional Processes”. URL: https://pro.univ-lille.fr/fileadmin/user_upload/pages_pros/antoine_ayache/COURSE-WavFrac.pdf (pogledano 7. 7. 2025.).
- Ayache, A. i M. S. Taqqu (rujan 2003.). „Rate Optimality of Wavelet Series Approximations of Fractional Brownian Motion”. *Journal of Fourier Analysis and Applications* 9, str. 451–471.
- Bovet, A. (veljača 2015.). „Suprathermal ion transport in turbulent magnetized plasmas”. Disertacija. DOI: 10.5075/epfl-thesis-6527.
- Daubechies, I. (listopad 1988.). „Orthonormal bases of compactly supported wavelets”. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 41.7, str. 909–996.
- — (1992.). *Ten lectures on wavelets*. CBMS-NSF Regional conference series in applied mathematics 61. Society for Industrial i Applied Mathematics (SIAM).

Bibliografija II

Diez, A. (2016.). „Lévy's construction of Brownian motion". URL: https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/Antoine.Diez/brownienlevy.pdf (pogledano 7. 7. 2025.).

Embrechts, P. i M. Maejima (2002.). *Selfsimilar processes*. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press.

Gogić, I. (2025.). *Uvod u funkcionalnu analizu*. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilja/UFA.pdf (pogledano 7. 7. 2025.).

Kovač, V. (2014.). *Time – frequency analysis and singular integrals*. URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~vjekovac/files/skrypt_V.Kovac_UWr.pdf (pogledano 7. 7. 2025.).

Pipiras, V. i M. S. Taqqu (srpanj 2002.). „Deconvolution of fractional brownian motion". *Journal of Time Series Analysis* 23.4, str. 487–501. (Pogledano 7. 7. 2025.).

Bibliografija III

- Rudin, W. (1987.). *Real and complex analysis*. 3. izdanje. McGraw-Hill.
- Samko, S. G., A. A. Kilbas i O. I. Marichev (1993.). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. eng. Gordon i Breach Science Publishers.
- Sarapa, N. (1980.). *Teorija vjerojatnosti*. Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu. Školska knjiga.
- Sato, K. (1999.). *Lévy processes and infinitely divisible distributions*. Cambridge studies in advanced mathematics 68. Cambridge Univ. Press.
- Ševčenko, H. (2014.). *Fractional Brownian motion in a nutshell*. URL: https://arxiv.org/abs/1406.1956 (pogledano 7. 7. 2025.).