# Ejercicios evaluables

1. Demuéstrese o refútese razonadamente la equivalencia entre los pares de enunciados siguientes:

   *a)* 
   - $\overline{\exists x : \overline{\overline{\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}}}}$
   - $\left[\forall x, \overline{p(x)}\right] \vee \left[\forall x, \overline{q(x)}\right]$

   *b)* 
   - $\overline{\forall x, \exists y : [(p(x,y) \wedge q(x,y)) \rightarrow r(x,y)]}$
   - $\exists x : \left[(\forall y, p(x,y)) \wedge (\forall y, q(x,y)) \wedge \left(\forall y, \overline{r(x,y)}\right)\right]$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz cuadrada dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

   *a)* Obténgase cuatro matrices $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $B^2 = A$.

   Sugerencia: diagonalizar $A$ puede ser de utilidad. Para el proceso de diagonalización, puedes hacer uso de `numpy.linalg.eig` en Python.

   *b)* ¿Crees que las matrices se podrían haber obtenido por tanteo, empleando la fuerza bruta, con un coste computacional similar? ¿Qué nos dice esto, en términos de optimización, acerca de utilizar en determinadas ocasiones estrategias matemáticas en la resolución computacional de problemas?

3. Prográmese el método de *gradient descent* para funciones de $n$ variables. La función deberá tener como parámetros de entradas:

   - El gradiente de la función que se desea minimizar $\nabla f$.
   - Un valor inicial $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.
   - El ratio de aprendizaje $\gamma$ (que se asume constante para cada iteración).
   - Un parámetro de tolerancia `tol` (con el que finalizar el proceso cuando `|f'(x)|<tol`).
   - Un número máximo de iteraciones `maxit`.

   La salida de la función deberá ser la aproximación del $x$ que cumple $f'(x) \approx 0$, correspondiente a la última iteración realizada en el método.

   A continuación, aplica el método a los casos siguientes:

a) $g(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 2y + 1$, con $\boldsymbol{x}_0 = (3, 4)$, $\gamma = 0.01$, `tol=1e-12`, `maxit=1e5`. Contrasta el resultado obtenido numéricamente con el estudio analítico de la función.

b) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 7$

- Aplica el método sobre $f(x)$ con $x_0 = 3$ $\gamma = 0.001$, `tol=1e-12`, `maxit=1e5`.
- Aplica de nuevo el método sobre $f(x)$ con $x_0 = 3$, $\gamma = 0.01$, `tol=1e-12`, `maxit=1e5`.
- Contrasta e interpreta los dos resultados obtenidos en los apartados anteriores y compáralos con los mínimos locales obtenidos analíticamente. ¿Qué influencia puede llegar a tener la elección del ratio de aprendizaje $\gamma$?
- Aplica nuevamente el método sobre $f(x)$ con $x_0 = 3$, $\gamma = 0.1$, `tol=1e-12`, `maxit=1e5`. Interpreta el resultado.
- Finalmente, aplica el método sobre $f(x)$ con $x_0 = 0$, $\gamma = 0.001$, `tol=1e-12`, `maxit=1e5`. Interpreta el resultado y compáralo con el estudio analítico de $f$. ¿Es correcto el resultado? ¿Por qué? ¿A qué se debe el fenómeno?

4. Se dispone de tres cartas con las características siguientes:

- La primera carta es roja por ambos lados.
- La segunda carta es verde por ambos lados.
- La tercera carta es roja por un lado y verde por el otro lado.

Se introducen las tres cartas en una bolsa, se barajan y se extrae una carta completamente al azar, poniéndola sobre la mesa sin mirar y observando posteriormente el lado que ha quedado visible, el cual ha resultado ser de color verde.

a) Intuitivamente, ¿cuál crees que es la probabilidad de que al girar la carta el otro lado resulte ser también verde?

b) Realiza una simulación en Python para este problema, estimando la probabilidad tras realizar una cantidad elevada de simulaciones del problema. La función deberá tener como parámetro de entrada el número de simulaciones $n$ y como parámetro de salida una estimación de la probabilidad $p$. Para simular la extracción de las cartas y del lado visible tras la extracción puedes valerte de `random.randint`. Recuerda que durante la simulación sólo deberán contabilizarse los experimentos en los que la cara visible de la carta obtenida ha sido verde y, sobre estos, estimar la proporción de veces en las que la carta de la que procede ha resultado ser la que es verde por ambas caras.

c) ¿Son los resultados obtenidos consistentes con tu intuición inicial? De no ser el caso, ¿puedes conjeturar el valor correcto de la probabilidad? Una vez realizada, demuestra formalmente que el valor de la probabilidad conjeturada es el correcto y/o porporciona esquemáticamente la explicación de por qué se verifica.