Chapitre : Probabilités

Pour Terminales : Maths + Sc Exp + Sc Tech

Prof : Ben Mbarek Mahmoud

Sommaire

1 Language de probabilité

Activité 1

On lance une seule fois un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par $\boldsymbol{\Omega}$ l'ensemble des résultats possibles

1. Déterminer $\boldsymbol{\Omega}$.
2. Déterminer l'ensemble A « avoir un nombre pair »
3. Déterminer l'ensemble B « avoir un nombre divisible par 5 »
4. Déterminer l'ensemble C « avoir un nombre supérieur à 7 »
5. Déterminer l'ensemble D « avoir un nombre impair »
6. Déterminer les ensembles : $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$; $\mathbf{D} \cap \mathbf{A}$ et $\mathbf{D} \cup \mathbf{A}$

Définitions

1. On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.
2. On appelle univers (ou univers des possibles) , l'ensemble des résultats (ou éventualités)possibles d'une expériences aléatoire.Cet ensemble se note $\boldsymbol{\Omega}$.
3. Toute partie $\mathbf{A}$ de $\boldsymbol{\Omega}$ est appelée événement.
4. Si $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}$, on dit que $\mathbf{A}$ est l'événement certain.
5. Si $\mathbf{A}$ est une partie contenant un seul élément de $\boldsymbol{\Omega}$, on dit que $\mathbf{A}$ est un événement élémentaire.
6. L'événement $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ est l'évènement "A et B" . Il est réalisé si les deux événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont réalisés simultanément .
7. L'événement $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ est l'évènement " A ou B" . Il est réalisé si l'un au moins des deux événements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est réalisé.
8. L'ensemble $\mathbf{C}^{\mathbf{A}}$, qu'on note $\overline{\mathbf{A}}$, est l'évènement contraire de $\mathbf{A}$ .Il est réalisé si et seulement si, $\mathbf{A}$ n'est pas réalisé.
9. Deux évènements $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont dits incompatibles ou disjoints s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps .C-à-d si, et seulement, si $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$.
10. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux évènements de $\boldsymbol{\Omega}$ tels que $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ alors $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathbf{B}$ qui n'appartiennent pas à $\mathbf{A}$.

1.1 Rappels

Définition

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω, toute application p de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant :

1. $p(\Omega) = 1$
2. Pour tous évènements A et B tel que $A \cap B = \varnothing$ on a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Remarque

Le triplet $(\Omega; \mathscr{P}(\Omega); p)$ est appelé espace probabilisé fini .

Propriétés

Soit Ω un univers fini. A et B deux évènements de Ω, on a :

1. $0 \leq p(A) \leq 1$
2. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
3. $p(\varnothing) = 0$
4. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
5. Si tous les évènements élémentaires ont la même probabilités, on dit qu'on a une équiprobabilité, on a alors : pour tout $a \in \Omega$, $p(a) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$ et $p(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$ pour tout $A \subset \Omega$

Activité 2

Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules noires et 3 boules vertes, tous les boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hazard 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « Obtenir 3 boules rouges ».
B : « Obtenir 3 boules de même couleurs ».
C : « Obtenir au moins une boules rouges ».

1.2 Dénombrement

Tirage de p jetons d'un sac contenant n jetons avec $p \leq n$.

Type de tirage	Successifs et avec remise	Successifs et sans remise	Simultanément
L'ordre	Intervient	Intervient	N'intervient pas
Un cas possible	Un p-uplet avec possibilité de répétition	Un p-uplet d'éléments deux a deux distincts	Une partie de p éléments
Card(Ω)=	n^p	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \dfrac{n!}{p!.(n-p)!}$

Activité 3

Une urne contient quatre boules rouges, trois boules blanches et deux boules noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, trois boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Obtenir 3 boules rouges ».
B : « Obtenir 3 boules de même couleurs ».
C : « Obtenir au moins une boules rouges ».
D : « Obtenir les deux boules noires ».

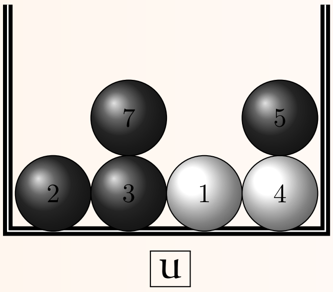
Activité 4

On lance un dé pipé tel que $p_1 = p_3$; $p_2 = p_4$ et $p_5 = p_6 = 2p_1$ où p_i est la probabilité d'apparition de la face portant le chiffre i

1. Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face.
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants :
   a. **A** : « La face apparente porte un nombre paire ».
   b. **B** : « La face apparente porte un nombre supérieur ou égal à 5 ».

Activité 5

Une urne contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7.



1. On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants : **A** :« Les deux boules tirées portent des numéros impaires ».
   B :« Les deux boules tirées sont de la même couleur ".
   C :« Les deux boules tirées portent des numéros impairs et sont de la même couleur ».
   D :« Les deux boules tirées portent des numéros impairs ou sont de la même couleur ».
2. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants : **E** : « Les deux boules tirées sont de parités différentes ».
   F : « Obtenir au moins une boule noire ».

Activité 6

Dans un lycée 80% des élèves aiment le sport, 70% des élèves aiment les mathématiques et 60% des élèves aiment les deux. On choisit au hasard un élève. On considère les évènements suivants :
A :« L'élève choisit aime le sport ou les mathématiques ».
B :« L'élève choisit aime les mathématiques et non le sport ».
C :« L'élève n'aime ni le math ni le sports ».
Calculer $\mathbf{p}(\mathbf{A})$; $\mathbf{p}(\mathbf{B})$ et $\mathbf{p}(\mathbf{C})$

2 Probabilité Conditionnelle

Activité 7

Dans une entreprise, la répartition des 100 agents d'encadrement est donnée dans le tableau suivant :

	Hommes	Femmes
Cadres administratifs	10	20
Cadres techniques	50	20

On choisit, au hasard, une personne parmi ces 100 agents.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « La personne choisie est un cadre administratif ».
   B : « La personne choisie est un homme ».
   C : « La personne choisie est un cadre administratif sachant que c'est un homme ».
2. a. Calculer : $\mathbf{p}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$.

   b. Comparer $\mathbf{p}(\mathbf{C})$ et $\dfrac{\mathbf{p}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})}{\mathbf{p}(\mathbf{B})}$

Activité 8

Dans un lycée 54% des élèves sont des filles, parmi ces filles 80% ont la moyenne, parmi les garçons 72% qui ont la moyenne.
On interroge au hasard un élève. On note G l'événement : « L'élève choisi est un garçon » et M l'événement : « L'élève choisi à la moyenne ».
Calculer la probabilité des événements suivants :
C : « L'élève choisi est une fille et elle à la moyenne ».
D : « L'élève choisi est un garçon qui n'a pas la moyenne ».

2.1 Définition

Définition — Probabilité Conditionnelle

$(\mathbf{\Omega};\mathscr{P}(\mathbf{\Omega});\mathbf{p})$ un espace probabilisé fini. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux événements de $\mathbf{\Omega}$ tel que $\mathbf{p}(\mathbf{A})\neq 0$, la probabilité que l'événement $\mathbf{B}$ se réalise sachant que $\mathbf{A}$ est réalisé est le réel noté $\mathbf{p}(\mathbf{B}/\mathbf{A})$ ou $\mathbf{p}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$ défini par : $\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{B}/\mathbf{A})=\dfrac{\mathbf{p}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})}{\mathbf{p}(\mathbf{A})}}$

Remarque

$\mathbf{p}(\mathbf{A}\cap\mathbf{B}) = \mathbf{p}(\mathbf{A})\times\mathbf{p}(\mathbf{B}/\mathbf{A}) = \mathbf{p}(\mathbf{B})\times\mathbf{p}(\mathbf{A}/\mathbf{B})$

Théorème Probabilité Conditionnelle

$(\Omega;\mathscr{P}(\Omega);p)$ un espace probabilisé fini. A un événement tel que $p(A)\neq 0$.

L'application : $p_A : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]; B \longmapsto p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ est une probabilité.

2.2 Arbres Pondérés

Lorsque on est en présence dune situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité.

2.2.1 Principe de construction

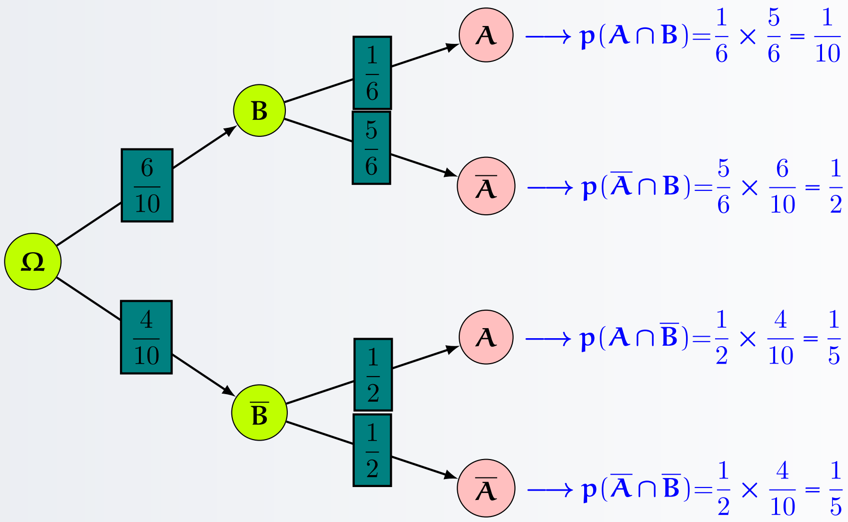
Méthode Règle de construction

1. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
2. La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.
3. La probabilité d'un événement est égal au produit des probabilités de tous les trajets qui mènent à cet événement .

2.2.2 Exemples

Exemple Arbre pondéré

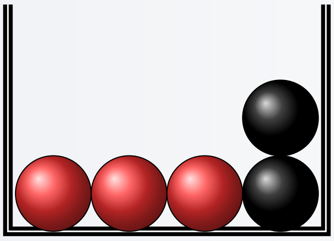
L'arbre de probabilités ci-après modélise la situation de l'activité 7



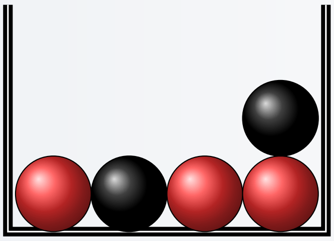
Exemple

Corrigé

Deux urnes contiennent chacune deux boules noires et trois boules rouges. On tire au hasard une boule de $\mathbf{U}_1$, on note sa couleur et on la place dans $\mathbf{U}_2$.
On note $\mathbf{N}_1$ et $\mathbf{N}_2$ les événements « la boule tirée dans $\mathbf{U}_1$ est noire » et « la boule tirée dans $\mathbf{U}_2$ est noire ».
Représenter la situation par un arbre de probabilités.



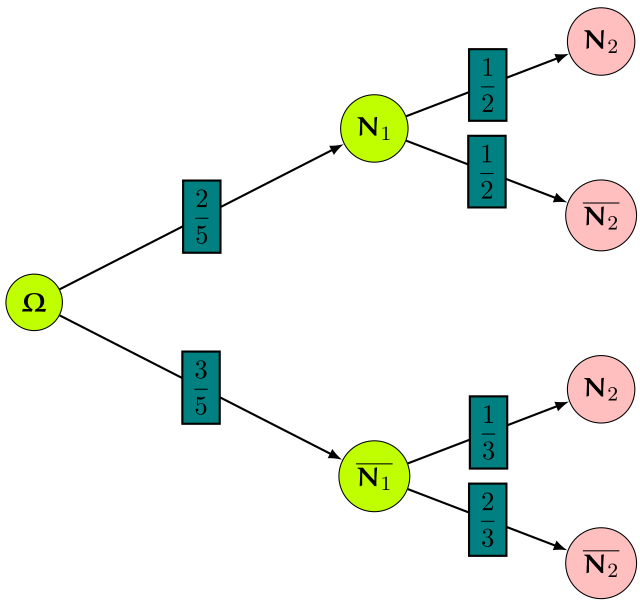
$\boxed{\mathbf{U}_1}$



$\boxed{\mathbf{U}_2}$

Solution

On déduit immédiatement de l'énoncé que $\mathbf{p}(\mathbf{N}_1) = \frac{2}{5}$ et $\mathbf{p}\left(\overline{\mathbf{N}_1}\right) = \frac{3}{5}$.
Si l'événement $\mathbf{N}_1$ est réalisé, alors l'urne $\mathbf{U}_2$ contient 3 boules noires et trois boules rouges.
Sachant que $\mathbf{N}_1$ est réalisé, la probabilité que $\mathbf{N}_2$ se réalise est donc égale à $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. On en déduit que $\mathbf{p}(\mathbf{N}_2 \mid \mathbf{N}_1) = \frac{1}{2}$
D'où l'arbre des probabilités :



2.3 Événements indépendants

2.3.1 Activité

Activité 9

Une boîte contient trois boules rouges et sept boules blanches indiscernables au toucher. On tire, simultanément et au hasard, trois boules de la boîte.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Obtenir une boule rouge ».
   B : « Obtenir au moins une boule blanche ».
2. a. Calculer $p(A/B)$ et $p(B/A)$.
   b. Calculer la probabilité d'obtenir une boule rouge sachant qu'au moins deux boules blanches sont tirées.
3. Comparer $p(A/B)$ à $p(A)$ et $p(B/A)$ à $p(B)$.

Activité 10

On lance simultanément, deux dés parfaits non identiques et on appelle **A** l'évènement « Le premier dé amène un nombre pair » et **B** l'évènement « Le deuxième dé amène un nombre impair ».

1. Calculer $p(A)$; $p(B)$ et $p(A \cap B)$.
2. Comparer $p(A \cap B)$ au produit $p(A) \times p(B)$.
3. Calculer $p(A/B)$.

2.3.2 Définition

Définition — Événements indépendants

$(\Omega;\mathscr{P}(\Omega);p)$ un espace probabilisé fini. A et B deux événements.
On dits que A et B sont indépendants si, et seulement, si $\boxed{p(A\cap B)=p(A)\times p(B)}$

Remarque

Si $p(A)\neq 0$ on a : A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $p(B/A)=p(B)$
C'est a dire la réalisation de l'événement A n'a pas d'influence sur celle de B.

Activité 11

On lance, une fois, un dé cubique dont les faces numérotées de 1 à 6. Les faces numérotées 1 ;2 ;3 ;4 et 5 sont blanches et la face numérotée 6 est rouge. Soient A et B les événements définis par :
A : « La face supérieure porte un nombre pair ». B : « La face supérieure est rouge ». Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifiez votre réponse.

3 Principe des probabilités composées

3.1 Activité

Activité 11

Soient Ω un univers, p une probabilité définie sur Ω , A et B deux évènements de Ω.

1. Vérifier que si $p(A) = 0$ alors $p(A\cap B)=0$.
2. On suppose que $p(A)\neq 0$. Montrer que $p(A\cap B)=p(A)\times p(B/A)$
3. Vérifier que si $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$ alors $p(A).p(B/A) = p(B).p(A/B)$.
4. Soient A, B et C trois évènements de Ω tel que $p(A)\neq 0$; $p(B)\neq 0$ et $p(A\cap B)\neq 0$. En utilisant : $p(C/A\cap B)=\dfrac{p(A\cap B\cap C)}{p(A\cap B)}$, montrer que $p(A\cap B\cap C)=p(A).p(B/A).p(C/A\cap B)$

3.2 Théorème

Théorème

Principe de probabilités composées

$(\Omega;\mathscr{P}(\Omega);p)$ un espace probabilisé fini. A, B et C trois événements tels que : $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$, on a :
$p(A\cap B)=p(A)\times p(B/A)$
$p(A\cap B\cap C)=p(A).p(B/A).p(C/A\cap B)$

4 Loi de probabilité totale

4.1 Partition de l'univers

Définition

Partition de l'univers

Ω un ensemble fini. $A_1;A_2;\dots A_n$, n événements de Ω.
$A_1;A_2;\dots A_n$ est une partition de Ω si, et seulement, si :
$A_i\cap A_j=\emptyset$ pour tous $i\neq j$ et $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=\Omega$

4.2 Théorème

Théorème

Formule des probabilités totales

$(\Omega;\mathscr{P}(\Omega);p)$ un espace probabilisé fini. $A_1;A_2;\dots A_n$ des événements formant une partition de Ω tels que pour tout i, $p(A_i)\neq 0$. Alors pour tout événement B, on a :

$$\boxed{p(B)=\sum_{i=1}^{n}p(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i).p(B/A_i)}$$

4.3 Exercices

4.4 Exercice 1

Exemple 1

Une urne contient trois dé équilibré .Deux entre eux sont normaux : ils possèdent six faces numérotées de 1 à 6 . Le troisième est truqué : il possède deux faces numérotées 1 et quatre faces portant le numéro 6 . On prend au hasard un dé dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de ce dé. On considère les événements suivants :
N : « le dé tiré est normal ».
A : « On obtient 1 au premier lancer »
S_n : « On obtient 6 à chacun des n premiers lancers », n désignant un entier naturel non nul.

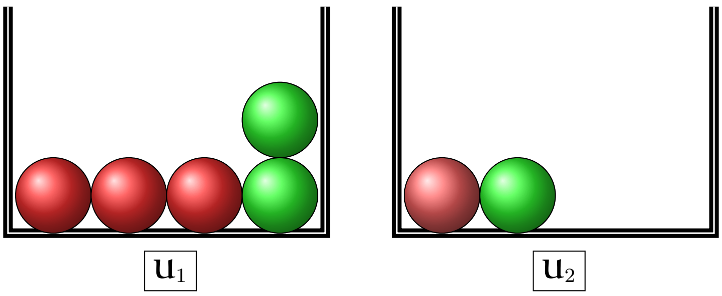
1. Calculer la probabilité de l'événement A.
2. Exprimer la probabilité de S_n, $p(S_n)$ en fonction de n.
3. a) Sachant que l'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n premiers lancers, calculer la probabilité p_n d'avoir tiré le dé truqué
   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

4.5 Exercice 2

Exemple 2

On dispose de deux urnes : U_1 contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes et U_2 contenant une boule rouge et une boule verte.

1. On tire au hasard et simultanément trois boules de U_1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « Avoir trios boules rouges »
   B : « Avoir deux boules rouges et une verte »
   C « Avoir une boule rouge et deux vertes »
2. On place les trois boules tirées de U_1 dans U_2, puis on tire simultanément deux boules de U_2. Soit R : « Avoir deux boules rouges au deuxième tirage » .
   a) Calculer $p(R/A)$, $p(R/B)$ et $p(R/C)$. En déduire $p(R)$.
   b) Calculer $p(A/R)$.



4.6 Exercice 3

Exemple 3

On suppose que, pour tous les jours de septembre, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$. S'il pleut, la probabilité que Monsieur $\mathbf{X}$ arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$. S'il ne pleut pas, la probabilité que Monsieur $\mathbf{X}$ arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité qu'un jour de septembre donné, il pleuve et que Monsieur $\mathbf{X}$ arrive à l'heure à son travail.
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de septembre donné, Monsieur $\mathbf{X}$ arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.
4. Un jour de septembre donné, Monsieur $\mathbf{X}$ arrive à son travail. Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour-là ?
5. Sur une période de quatre jours de septembre, quelle est la probabilité que Monsieur X arrive à l'heure au moins une fois ?

4.7 Exercice 4

Exemple 4

On dispose d'une urne $\mathbf{U}_1$, d'une urne $\mathbf{U}_2$ et d' une pièce de monnaie. L'urne $\mathbf{U}_1$ contient 3 boules blanches et 4 boules rouges. L'urne $\mathbf{U}_2$ contient 5 boules blanches et 3 boules rouges. La pièce de monnaie est truquée de façon que, lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir face soit le double de la probabilité d'obtenir pile.

1. Calculer la probabilité d'obtenir face et la probabilité d'obtenir pile.
2. On considère l'épreuve suivante : on lance la pièce de monnaie :
   - Si le coté visible est face alors on tire simultanément deux boules de $\mathbf{U}_1$.
   - Si le coté visible est pile alors on tire successivement et sans remise quatre boules de $\mathbf{U}_2$.

   Quelle la probabilité d'obtenir une seule boule blanche ?

4.8 Exercice 5

Exemple 5

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k un entier et $1 \leq k \leq 6$). Ce dé à été pipé de telle sorte que : • Les six faces ne sont pas équiprobables. • Les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r. • Les nombres p_1,p_2,p_4 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Montrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ avec $k \in \{1;2;3;4;5;6\}$
2. On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :
   A : « le nombre obtenu est pair ».
   B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 ».
   C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».
   a. Calculer la probabilité de chacun de ces trois événements
   b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égale à, trois sachant qu'il est pair.
   c. les événements A et B sont-ils indépendants ? les événements A et C sont-ils indépendants ?
3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose : d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires, d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et deux boules noires. Le joueur lance le dé.
   ● S'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1
   ● S'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2
   On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsque il tire une boule blanche, on note G cet événement.
   a. Déterminer la probabilité de l'événement G.
   b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

5 Variables aléatoire

Activité

1page 191

Une urne contient deux boules numérotées 4 et trois boules numérotées -2, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. a. Quelle est la probabilité de tirer deux boules numérotées 4 ?
   b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant des numéros différents ?
   c. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même numéro ?
2. On note X l'application qui à tout événement élémentaire associe la somme des numéros des deux boules tirées. Quelles sont les différentes valeurs prises par X ainsi que la probabilité de chaque valeur.

Définition — Variable aléatoire

Ω un univers d'une expérience aléatoire.
Toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire ou aléa numérique .
L'ensemble des valeurs prises par X est noté $X(\Omega)$.
Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, l'événement $\{e \in \Omega$tel que $X(e) = x_i\}$ est noté $(X = x_i)$
L'application $p_X : X(\Omega) \longrightarrow [0;1]$ telque $x_i \longmapsto P(X = x_i)$ est appelée la loi de probabilité de X.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_i = 1}$$

5.1 Espérance mathématique-Variance-Écart type

5.1.1 Espérance Mathématique

Définition — Espérance mathématique

$(\Omega; \mathscr{P}(\Omega); p)$ un espace probabilisé fini.
X une variable aléatoire définie sur Ω.
$X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$.

On appelle espérance mathématique de X ou la moyenne de X le réel défini par $\boxed{\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(X = x_i)}$

Propriétés

X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.

- $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$
- $\boxed{E(\alpha X) = \alpha E(X)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- Si dans jeu, la variable aléatoire X désigne un gain algébrique, alors :
  1. Si $E(X) > 0$, on dit que le jeu est favorable ou gagnant.
  2. Si $E(X) = 0$, on dit que le jeu est équitable.
  3. Si $E(X) < 0$, on dit qu'il s'agit d'un jeu perdant ou défavorable.

5.1.2 Variance et écart type

Activité 13

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω.
Montrer que : $E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)-(E(X))^2$

Définition Variance

X aléa numérique défini sur Ω. On appelle Variance de X le réel positif $\boxed{V(x)=E\left((X-E(X))^2\right)}$

D'après l'activité 13, on peut écrire : $\boxed{E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)-(E(X))^2}$ avec $\boxed{E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X=x_i)}$

Définition Écart type

On appelle écart type de la variable aléatoire X le réel $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

Exemple 2

Une urne contient deux boules rouges numérotées 1;2 ; trois boules noires numérotées 1;1;2 et trois blanches numérotées 1;2;2. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 3 boules.
   a. Calculer la probabilité des événements :
      A : «La somme des numéros est paire» et B : «Une seule des trois boules est rouge» .
   b. Sachant que la somme des numéros est paire, quelle est la probabilité qu'une seule des trois boules tirées soit rouge ?
2. Soit X l'aléa numérique prenant pour valeur la somme des numéros marqués sur les trois boules tirées.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X
3. On tire successivement trois boules de la manière suivante :
   - Si la boule est rouge, elle est remise dans l'urne.
   - Sinon, elle n'est pas remise dans l'urne.

   Calculer la probabilité des événements :
   E :«Obtenir une seule boule rouge»
   F :«Obtenir la boule rouge numéro 1 au deuxième tirage».

5.2 Fonction de répartition

Définition — Fonction de répartition

$(\Omega; \mathscr{P}(\Omega); p)$ un espace probabilisé fini.
X une aléa numérique définie sur Ω.
On appelle fonction de répartition de X l'application :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & [0;1] \\ x & \mapsto & p(X \leq x) \end{array}$$

Exemple 2

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$

Définir la fonction de répartition de X et construire sa courbe.

6 Loi Binomiale

6.1 Activité

Activité 14

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Le dé est truqué de façon que la probabilité d'avoir un nombre pair est le double de celle d'avoir un nombre impair.
On lance le dé un seule fois. On note S l'événement « obtenir un nombre pair »

1. Calculer $p(S)$
2. On jette le dé 5 fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de fois qu'on a réaliser l'événement S.
   a. Donner la loi de probabilité de X
   b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$

6.1.1 Épreuve de Bernoulli

Définition — Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernouilli est une expérience aléatoire qui n'admet que deux issues possibles, l'une est qualifiée de "succès" et l'autre échec.

Définition — Schéma de Bernoulli

On appelle Schéma de Bernoulli de paramètres n et p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Théorème — Loi binomiale

Soit une expérience aléatoire qui possède seulement deux issues S " succès " et $E = \overline{S}$ " échec " tel que $p(S) = p$ et $p(E) = 1 - p$. On répété cette épreuve n fois d'une façon indépendante et on considère la variable aléatoire X qui associe le nombre des succès réalisé au cours des n épreuves alors :

- $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \ldots; n\}$
- $\forall k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$, on a : $\boxed{p(X = k) = C_n^k.p^k (1 - p)^{n-k}}$
- $\boxed{E(X) = n.p}$
- $\boxed{V(X) = n.p.(1 - p)}$
- $\boxed{\sigma(X) = n.p(1 - p)}$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p

Exercice 13 page 204

Exemple

Dans un restaurant 30% choisissent un plat A . Six personnes visitent le restaurant. Soit X la variable aléatoire qui associe le nombre de personnes qui choisissent le plat A sachant que le choix des personnes sont indépendants.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. On considère l'événement : B « Au moins une personne choisit le plat A ». Calculer $p(B)$
3. On suppose que n personne $(n \geq 2)$ visitent le restaurant. Calculer la pro
   a. Calculer la probabilité p_n de l'événement A_n« au moins une personne qui choisie le plat A »
   b. Déterminer la plus petite valeur n_0 de n pour que $p_n \geq 0.99$

6.2 Exercices

Exemple 1

Une société d'assurance répartit ses clients en trois classes.
$\mathbf{C}_1$: Les bons risques
$\mathbf{C}_2$: Les risques moyens
$\mathbf{C}_3$: Les mauvais risques
Les effectifs de ces trois classes représentent 15% des adhérents pour la classe $\mathbf{C}_1$, 60% pour la classe $\mathbf{C}_2$ et 25% pour la classe $\mathbf{C}_3$.
Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours d'une année pour un adhérent de l'une de ces trois classes sont respectivement : 0.1 ; 0.2 et 0.4.

1. Quelle est la probabilité qu'un adhérent a eu un accident dans une année ?
2. Si un adhérent a eu un accident dans une année, quelle est la probabilité qu'il soit de la classe $\mathbf{C}_1$?
3. Au cours d'une année, cette société a reçu la déclaration de 1000 accident. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de déclarations provenant d'un adhérent de classe $\mathbf{C}_1$.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer le nombre moyen de déclarations provenant d'un adhérent de classe $\mathbf{C}_1$ pour cette année.

Exemple 2

A : On dispose de deux urnes , U_1 contenant 3 boules blanches et 2 noires et U_2 contenant une blanche et 4 noires.

1. Soit l'épreuve suivante : On tire simultanément et au hasard deux boules de U_1 et successivement sans remise trois boules de U_2. On considère l'aléa numérique X qui prend pour valeur le nombre des boules blanches obtenues.
   - a) Montrer que $p(X=0)=\frac{1}{25}$, puis déterminer la loi de probabilité de X .
   - b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On répète l'épreuve trois fois de suite, en remettant à chaque fois les boules dans leurs urnes respectives. Ensuite :
   - Si on obtient trois fois 5 boules noires, on mélange les 2 urnes et on tire simultanément 2 boules du mélange.
   - Si non on tire une boule de chaque urne.
     Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

B : On considère maintenant n urnes : $U_1;U_2;...;U_n$ tel que :

- l'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 noires.
- Chacune des urnes $U_2;U_3...;U_n$ contient 1 blanche et 4 noires .

On tire une boule de U_1 que l'on remet dans U_2 ; puis une boule de U_2 que l'on remet dans U_3 et ainsi de suite jusqu'à tirer une boule de U_n . Soit E_k l'événement « la boule tirer de U_k est blanche »,$1 \leq k \leq n$.

1. Calculer $p(E_1)$; $p(E_2/E_1)$ et $p(E_2/\overline{E_1})$. En déduire $p(E_2)$.
2. Soit $p_k = p(E_k)$
   - a) Montrer que : $p_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{1}{6}$
   - b) On pose $v_n = p_n - \frac{1}{5}$. Montrer que v est une suite géométrique.
   - c) En déduire p_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

Exemple 3

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher.
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 DT si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 DT si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 DT si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ail tiré deux boules de couleurs différentes.
Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.
   a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   b. Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.
   c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité : $p\left(Y_k = 5\right) = \dfrac{6k}{(k+3)^2}$.
   b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k

2. On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

Exemple 4

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination $\mathbf{A}$, la destination $\mathbf{G}$ et la destination $\mathbf{M}$.

- 50% des clients choisissent la destination $\mathbf{A}$.
- 30% des clients choisissent la destination $\mathbf{G}$.
- 20% des clients choisissent la destination $\mathbf{M}$.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction. Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90% des clients ayant choisi la destination $\mathbf{M}$ sont satisfaits, de même 80% des clients ayant choisis la destination $\mathbf{G}$. On prélève au hasard un questionnaire dans la ile des questionnaires recueillis.
on note :

- $\mathbf{A}$:« Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A »
- $\mathbf{G}$:« Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G »
- $\mathbf{M}$: « Le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M »
- $\mathbf{S}$: « Le questionnaire est celui d'un client satisfait »

1. Traduire les données de l'énoncé par un arbre de probabilité.
2. a. Traduire par une phrase les événements $\mathbf{G} \cap \mathbf{S}$ et $\mathbf{M} \cap \mathbf{S}$ puis calculer les probabilités $\mathbf{p}(\mathbf{G} \cap \mathbf{S})$ et $\mathbf{p}(\mathbf{M} \cap \mathbf{S})$
   b. L'enquête montrer que 72% des clients de l'agence sont satisfaits. Calculer $\mathbf{p}(\mathbf{A} \cap \mathbf{S})$
   c. En déduire $\mathbf{p}(\mathbf{S}/\mathbf{A})$
3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a oublié de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il est choisie.
4. On prélevé successivement au hasard $\mathbf{n}$ questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre des questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.
   a. Calculer la probabilité $\mathbf{p_n}$ de l'événement : « Un seul questionnaire est celui d'un client insatisfait »
   b. Calculer la limite de $\mathbf{p_n}$

Exemple 5

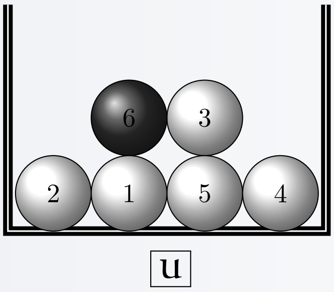
On dispose d'un dé cubique à 6 faces dont quatre faces portent le nombre 2, et deux faces portent le nombre 3 et d'une urne contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.

1. On jette le dé :
   - Si on obtient la face 2, on tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   - Si on obtient la face 3, on tire successivement et avec remise trois boules de l'urne.

   On désigne par $\mathbf{X}$ la variable aléatoire qui indique le nombre de boules blanches obtenues.
   a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathbf{X}$ et calculer $E(\mathbf{X})$
   b. Sachant qu'on a obtenu 2 boules blanches, quelle est la probabilité qu'elles soient accompagnées d'une boule noire.
2. On considère le jeu suivant :
   On tire une boule de l'urne, si elle est blanche le jeu s'arrête, si non on la remet dans l'urne en ajoutant une autre boule noire et on tire une deuxième boule. Si cette boule est blanche le jeu s'arrête, si non on la remet dans l'urne en ajoutant deux autres boules noires et on tire une troisième boule et le jeu s'arrête.
   Soit $\mathbf{Y}$ la variable aléatoire prenant la valeur 0 si aucune boule blanche n'est tirée, si non $\mathbf{Y}$ prend le rang d'apparition de la boule blanche.
   a. Montrer que $p(\mathbf{Y}=0)=\dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de $\mathbf{Y}$.
   b. k personnes effectuent ce jeu de façons indépendantes. $(k \in \mathbb{N}^*)$
   Quelle est la probabilité p_k pour qu'une personne au moins arrive à tirer une boule blanche.
   c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = n + \frac{3}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n - \frac{3}{7}$

Exemple 6

Une urne $\mathbb{U}$ contient cinq boules blanches numérotées : 1; 2; 3; 4 et 5 et une boule noire numérotée 6



1. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.
   a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
      - **A** : « Obtenir trois boules de même couleur »
      - **B** : « Obtenir exactement une boule portant un numéro impair »
   b. Sachant qu'on a obtenu une somme égale à 9, quelle est la probabilité d'avoir les deux couleurs ?
2. On répété l'épreuve précédente cinq fois de suite, en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois une boule noire.
3. On effectue successivement des tirages d'une boule sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne qu'une seule couleur. Soit X l'aléa numérique égale au nombre des tirages effectués. Déterminer la loi de probabilités de X.
4. On suppose que l'urne contient n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n. (avec $n \geq 3$).
   On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne puis on tire une boule de l'urne. Soit Y l'aléa numérique définie comme suit :
   - Si on obtient deux fois le même numéro alors Y prend pour valeur ce numéro.
   - Sinon Y prend pour valeur le plus grand des deux numéros obtenus.

   a. Calculer $p(Y=1)$ et $p(Y=2)$
   b. Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a : $p(Y=k) = \dfrac{2k+1}{n^2}$

Exemple 7

I- On dispose de deux dés notés D_A et D_B.

- Le dé D_A comporte 3 faces rouges et 3 faces blanches.
- Le dé D_B comporte 4 faces rouges et 2 faces blanches.

On lance les deux dés. Soit X l'aléa numérique qui représente le nombre des faces rouges obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

II- On choisit un dé au hasard et on le lance.

- Si on obtient une face rouge, on grade le même dé
- Sinon on change le dé

puis on relance le dé et ainsi de suite.
Pour tout entier naturel non nul n, on s=désigne par :
A_n l'événement :« On utilise le dé D_A au $n^{\text{ième}}$ lancer » R_n l'événement : « On obtient une face rouge au $n^{\text{ième}}$ »
On note $a_n = p(A_n)$ et $r_n = p(R_n)$

1. Calculer a_1 et r_1
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$
4. Soit la suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $b_n = a_n - \frac{2}{5}$
   a. Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b. En déduire a_n et $r - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

7 Lois Continues

7.1 Densité

Définition — Densité

a et b deux réels tel que $a < b$.
On appelle densité d'une loi de probabilité toute application définie, continue et positive sur $[a;b]$ vérifiant $\int_a^b f(x)dx = 1$

Si f est définie sur $[a;+\infty[$. La condition $\int_a^b f(x)dx = 1$ est remplacée par $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = 1$

Activité 1

1 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \cos(x)$ est une densité sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

2 Montrer que la fonction g définie par $g(x) = 2\,e^{-2x}$ est une densité sur $[0; +\infty]$

7.2 Loi Uniforme

7.2.1 Définition et Propriétés

Activité

activité 1 page 196

1 a. Soit l'intervalle $I = [-1; 1]$.Quelles est so amplitude ?

b. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{2}$. Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

c. Montrer que pour tout intervalle $[c; d]$ de $[-1; 1]$, on a : $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$

2 Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a; b]$.

a. Quelle valeur doit-on donner à f pour que $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$

b. Montrer que dans ce cas : $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$ pour tout intervalle $[c; d]$ de $[a; b]$

Définition

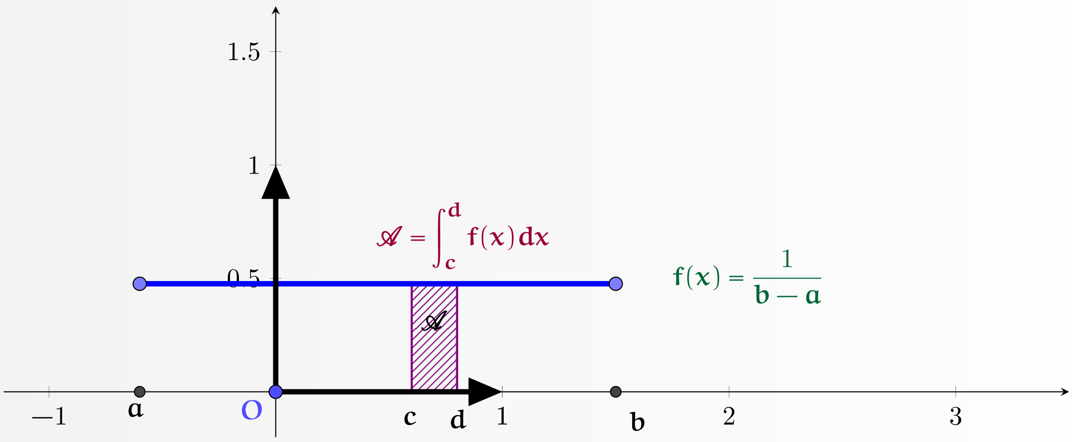
Densité d'une loi uniforme

a et b deux réels tel que $a < b$. la fonction f définie sur $[a; b]$ par $\boxed{f(x) = \frac{1}{b-a}}$ est appelée densité de loi de probabilité uniforme.
On appelle loi de probabilité uniforme définie sur $[a; b]$ l'application p qui à tout intervalle $[c; d]$ de $[a; b]$ associe le réel $\boxed{p([c; d]) = \frac{d-c}{b-a}}$

Remarque

Interprétation graphique

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 1$ l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$; $x = a$; $x = b$ et $y = 0$
- $\displaystyle\int_c^d f(x)dx$ l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}_f$; $x = c$; $x = d$ et $y = 0$



Propriétés

Soit X une variable aléatoire qui suit un loi uniforme sur $[a;b]$ avec $(a < b)$

- $\boxed{p(c \leq X \leq d) = p([c;d]) = 1}$
- $\boxed{p\left(\overline{[c;d]}\right) = 1 - p([c;d])}$
- $\boxed{p(\{c\}) = p([c;c]) = 0}$
- L'espérance mathématique de X est $\boxed{E(x) = \displaystyle\int_a^b x.f(x)dx = \frac{b-a}{2}}$ avec est la fonction de densité de la loi X.

Activité 2

Démonstration

Remarque

Interprétation graphique

On utilise la loi uniforme dans les cas suivants :

- La durée d'attente à un guichet
- Le choit d'un réel dans un intervalle
- Le choit d'un point sur un segment ou sur un cercle...

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X a valeur dans $[a;b]$ suit une une loi de probabilité uniforme si et seulement si $\boxed{p(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}}$

Activité

Activité 2 page 197

Activité

Exercice 27 page 226

Exemple

Exercice corrigé

On place un point aléatoire dans un disque de centre O et de rayon 30 cm. Soit d la distance de ce point O. on suppose que d suit une loi uniforme sur $[0;30]$

1. Quelle est la probabilité pour que d soit égale à 13 ?
2. Quelle est la probabilité pour que d appartienne à l'intervalle $[10;20]$
3. Quelle est la probabilité pour que d soit inférieure à 3 ?
4. On répète l'expérience décrite ci-dessus cinq fois de suite. Calculer la probabilité d'avoir au moins un point dont la distance à O est inférieure à 3 ?

Solution

1. $p(d = 13) = 0$
2. $p(10 \leq d \leq 20) = \frac{20-10}{30} = \frac{1}{3}$
3. $p(0 \leq d \leq 3) = \frac{3-0}{30} = \frac{1}{10}$
4. On note X la variable aléatoire qui associe le nombre de fois d'obtenir un point dont la distance est

inférieur à 3. X suit un loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = p(0 \leq d \leq 3) = \frac{1}{10}$. Il s'agit donc de calculer $p(X \geq 1)$

$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{10}\right)^5 = 0.41$

Activité

$a < b$ et $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Calculer : $\int_a^b x f(x)\,dx$ et $\int_a^b x^2 f(x)\,dx$

Remarque

$$\boxed{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

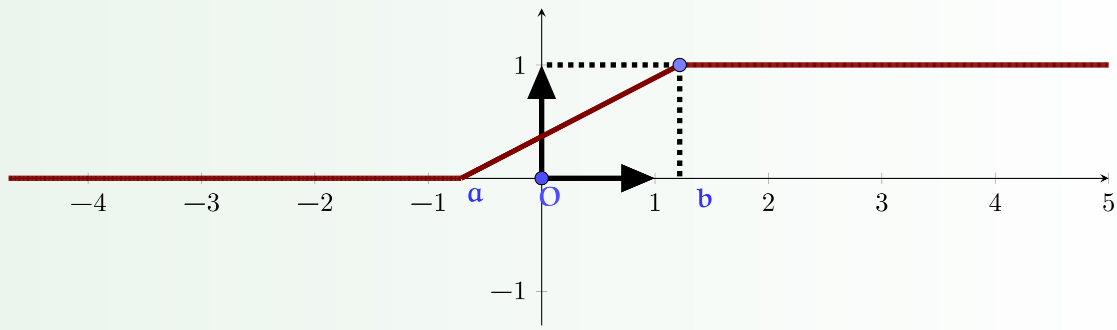
7.2.2 Fonction de répartition

Définition Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire a valeur dans $[a;b]$ $(a < b)$ qui suit la loi uniforme. La fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 \quad \text{si } x < a \\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{si } x \in [a;b] \\ F(x) = 1 \quad \text{si } x > b \end{cases}$$

est appelée fonction de répartition.



7.3 Exercices

Exemple 1

$\mathbf{X}$ est la variable aléatoire de la loi continue et uniforme sur $[0;1]$. Donner la probabilité des événements suivants :

1. $\mathbf{p}(0.4 < \mathbf{X} < 0.6)$
2. $\mathbf{p}(\mathbf{X} > 0.35)$
3. $\mathbf{p}\left(\mathbf{X} \in \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]\right)$
4. $\mathbf{p}(\mathbf{X} = 0.5)$

Exemple 2

Un livreur a promis de passer chez un client entre 10 **h** et 11 **h**. On suppose que la probabilité de son passage est uniformément répartie.

1. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 10 **h** 10 **min** ?
2. Quelle la probabilité qu'il arrive entre 10 **h** 20 **min** et 10 **h** 40 **min**.
3. Sachant que le client a attendu le livreur 15 **min**, quelle est la probabilité qu'il arrive dans les dix prochaines minutes ?
4. Donner la durée moyenne d'attente.

Exemple 3

1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, on a :$E(2X) =$

(a) $2np$ | (b) $4np$ | (c) $np(1-p)$

2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p, on a :$V(2X) =$

(a) $np(1-p)$ | (b) $2np(1-p)$ | (c) $4np(1-p)$

3 Le choix d'un réel de l'intervalle $[-1;4]$ se fait suivant la loi uniforme. La probabilité pour qu'il soit un entier naturel est :

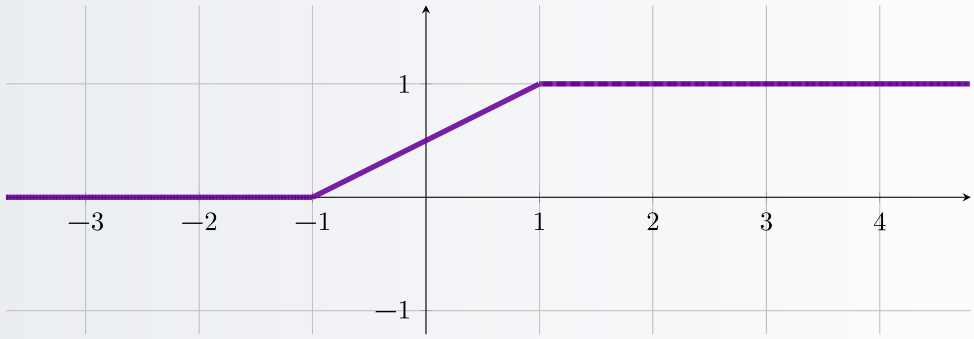
(a) 0 | (b) 1 | (c) $\frac{5}{6}$

4 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme dont la courbe de sa fonction de répartition donné ci-dessous. La fonction de densité $f(x)$ de X est :

(a) $\frac{1}{2}$ | (b) $\frac{1}{4}$ | (c) e^{-2x}

5 $p\left(X \leq \frac{3}{4}\right) =$

(a) $\frac{3}{4}$ | (b) $\frac{7}{8}$ | (c) $\frac{3}{8}$



7.4 Loi exponentielle

7.4.1 Définitions et propriétés

Activité

Soit λ un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

1. Montrer que f est une densité.
2. Calculer $\int_c^d f(x)dx$ avec c et d deux réels positifs.

Définition

$\lambda > 0$.

- La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\boxed{f(x) = \lambda e^(-\lambda x)}$ est appelée densité de loi exponentielle
- On appelle loi de probabilité exponentielle l'application p qui à tout intervalle $[c;d]$ de $[0;+\infty[$, on associe le réel $\boxed{p([c;d]) = \int_c^d f(x)dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}$
- A tout intervalle $[c;+\infty[$ de $[0;+\infty[$, on associe le réel $\boxed{p([c;+\infty[) = e^{-\lambda c}}$

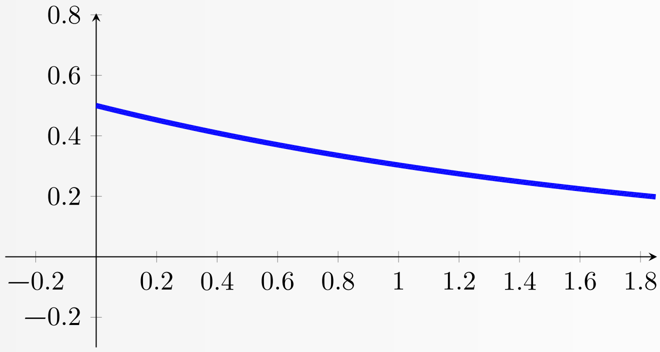
Propriétés

- $\boxed{p(\{c\}) = 0}$
- $\boxed{p([0;c]) = 1 - e - \lambda c}$
- $\boxed{p([c;+\infty[) = 1 - p([0;c])}$

Remarque

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on a : $f'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x} < 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	λ $\searrow$	0



λ est l'ordonnée à l'origine.

Définition

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[0;+\infty[$. On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ si :

- $\boxed{p(c \le X \le d) = p([c;d]) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}}$
- $\boxed{p(X \ge c) = e^{-\lambda c}}$

7.4.2 Fonction de répartition

Activité

3 page 199

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ sachant que $p(X \geq 10) = 0.5$
2. Déterminer alors $p(0 \leq X \leq 10)$, $p(100 \leq X \leq 300)$ et $p(X \geq 300)$
3. On considère l'application :

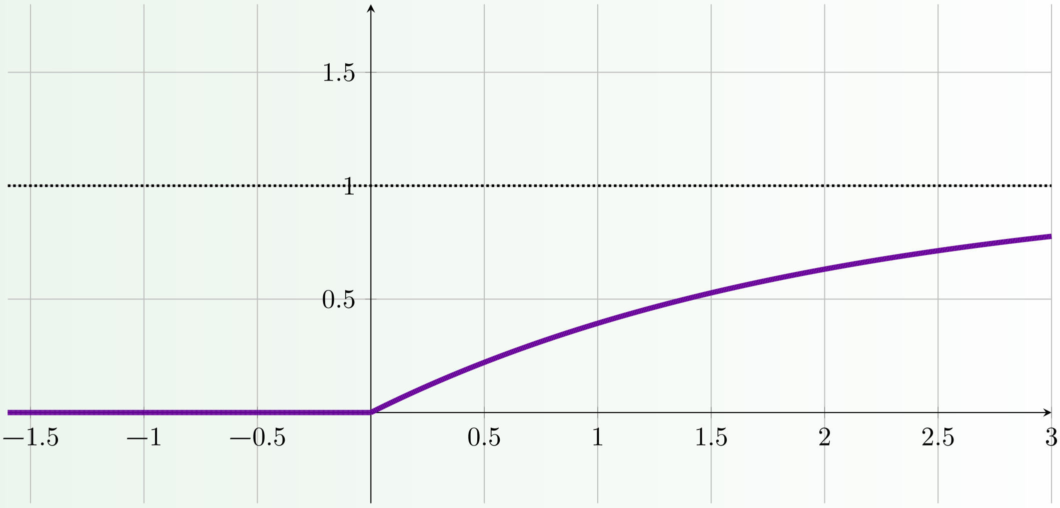
$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ & & x & \longmapsto & F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ p(0 \leq X \leq x) & \text{si } x \in [0;+\infty[\end{cases} \end{array}$$

   a. Déterminer l'expression de F
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$
   c. Représenter F

Définition

X variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On appelle fonction de répartition de X la fonction F :

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0;1] \\ & & x & \longmapsto & F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ p(0 \leq X \leq x) & \text{si } x \in [0;+\infty[\end{cases} \end{array}$$



Exemple

Corrigé

La durée, en minutes, d'une conversation téléphonique est variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$. Vous arrivez à une cabine et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous. Quelle est la probabilité que vous attendiez :

1. Plus de dix minutes ?
2. Entre dix et vingt minutes ?

Solution

Notons X la variable aléatoire qui désigne la durée de conversation de votre prédécesseur. X suit une loi exponentielle de paramètre 0.1

1. L'événement « attendre plus de dix minutes » signifie $(X > 10)$.
   Donc $p(X > 10) = e^{-0.1\times 10} = e^{-1} \approx 0.368$
2. « Attendre entre dix et vingt minute » signifie $(10 \leq X \leq 20)$
   Donc $p(10 \leq X \leq 20) = e^{-10\times 0.1} - e^{-20\times 0.1} = e^{-1} - e^{-2}$

7.5 Exercices

Exemple 1

La durée d'attente à une caisse de supermarché est assimilée à une loi exponentielle. La variable aléatoire égale au délai d'attente suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.04$

1. Quelle est la probabilité qu'un client attende moins de cinq minutes ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 15 minutes ?

Exemple 2

La durée de vie d'un composant électronique est variable aléatoire T (exprimée en jours) qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.0004$. Calculer :

1. $p(T \leq 300)$
2. $p(T \geq 300)$
3. $p\left(\{T \geq 200\} |_{\{T \geq 500\}}\right)$

Exemple 3

La durée de vie, exprimé en heurs d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.00026$

1. Calculer $p(X \leq 1000)$ et $p(X > 1000)$
2. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, qu'elle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ?

Exemple 4

On admet que la durée de vie, exprimée en années, d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.2$.

1. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0.4}$
2. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours de deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
3. On test successivement 10 capteurs fonctionnant d'une manière indépendantes.
   Dans cette question, les probabilités seront arrondies à la sixième décimale.
   a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.
   b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il ait au moins un capteur qui ne tombe en panne au cours des deux premières années.

Exemple 5

La durée de vie X, exprimée en années, d'un élément radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. a. Exprimer $p(X < t)$ en fonction de t et λ.
   b. On appelle demi-vie ou période de l'élément radioactif le nombre T définie par $p(X < T) = \frac{1}{2}$.
   Montrer que $T = \frac{\ln(\lambda)}{2}$
2. On considère N_0 atomes non désintégrés à l'instant $t = 0$ et on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre d'atome désintégrés à un instant t fixé avec $t > 0$. On suppose que les intégration sont indépendantes.
   a. Quelle est la loi suivie par Y ? Préciser ses paramètres.
   b. Quel est le nombre d'atomes désintégrées à l'instant t ?
   c. Pour quelle valeur t (en fonction de λ) le nombre moyen d'atome désintégrés est-il égale à $\frac{N_0}{2}$ Que remarque-t-on ?
3. a. Le carbone 14 a une demi-vie égale à 5700 années. Déterminer λ à 10^{-6} prés.
   b. Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 ne soit pas désintégrée au bout de 200 ans.
4. a. L'actinium 237 est un élément radioactif et 28% des atomes d'actinium ne sont pas désintégrées après 40 années. Déterminer λ à 10^{-3} et la demi-vie, en années, de l'actinium.
   b. Quelle est la probabilité à 10^{-2} près qu'un atome d'actinium non désintégrée après 40 années vive encore 40 années de plus ?

Exemple 6

Une usine fabrique des appareils électroniques identiques de deux types. Type $\mathbf{A}$ "premier choix" et type $\mathbf{B}$ "deuxième choix" telle que 40% de la production est de type $\mathbf{A}$ et le reste et de type $\mathbf{B}$. La durée de vie exprimée en heures d'un appareil de type $\mathbf{A}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 10^{-3}$ et celle de type $\mathbf{B}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 5 \times 10^{-3}$.
Dans tout l'exercice les résultats seront arrondis à 10^{-2} prés.

1. On achète un appareil au hasard sans connaître le type, on désigne par X la variable aléatoire indiquant la durée de vie de cet appareil.
   - a. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+$; on a : $p(X \geq t) = \frac{2}{5}e^{-\lambda_1 . t} + \frac{3}{5}e^{-\lambda_2 . t}$
   - b. Déterminer la probabilité pour que la durée de vie de cet appareil dépasse 500 heures.
   - c. Sachant que l'appareil acheté a dépassé 500 heures, quelle est la probabilité pour qu'il soit du deuxième choix ?
2. On pose $g(x) = \frac{1}{5}\int_0^x t\left(2\lambda_1 . e^{-\lambda_1 . t} + 3\lambda_2 . e^{-\lambda_2 . t}\right) dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $g(x)$ en fonction de x et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
3. Un client achète n appareils électroniques $(n \geq 2)$ du modèle précédent sans connaître le type. Soit Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre des appareils dont la durée de vie dépasse 500 heures.
   - a. Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer $E(Y)$
   - b. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n qu'au moins un appareil fonctionne plus que 500 heures.
   - c. Déterminer la plus petite valeur n_0 de n pour laquelle $p_n \geq 0.999$