devoir de mathématiques TS:4heures

les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre .

la clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Exercice 1 :

On considère ,dans $\mathbb{C}$,l'équation (E) : $z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16 = 0$

1)Montrer que cette équation admet deux racines imaginaires pures .

2)Déterminer les deux réels a et b tels que :

$z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16 = (z^2 + 4)(z^2 + az + b)$

3)En déduire les solutions de (E)

4)Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives : $2i, -2i, 2\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

Montrer que ces points sont sur un même cercle .

exercice 2:

les questions 2) et 3) sont indépendantes

1)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2)a)Déterminer le module et un argument des nombres z_1 et z_2.

b)Déterminer le module et un argument de $(\frac{z_1}{z_2})^2$

3)Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$,(unité:1cm) ,on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$,le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et le point A d'affixe $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a)déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3.

b)Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c)placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

d)calculer $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$

e) soit I le milieu du segment $[M_3M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que $M_1M_3M_5\ M_4$ est un carré.

exercice 3:

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

on note (C) la courbe représentative de u dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 2 cm)

1)a)déterminer la limite de u en $-\infty$

b)montrer que, pour tout x réel, on a :$u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

en déduire la limite de u en $+\infty$

2)a)montrer que $(u(x) + 2x)$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

b)montrer que, pour tout x réel, on a :$u(x) > 0$.

En déduire le signe de $(u(x) + 2x)$

c)interpréter graphiquement ces résultats.

3)a)montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :$u'(x) = \dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}, \forall x \in \mathbb{R}$

b)étudier les variations de u.

4)tracer (C) et son asymptote oblique.

exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$

on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal .

1)étudier la limite de f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on écrira :$xe^{x-1} = \dfrac{1}{e}xe^x$)

2)montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à (C) en$-\infty$.

préciser la position de (C) par rapport à (Δ).

3)a)calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f.

b)dresser le tableau de variations de f'en précisant la limite de f'en $-\infty$.

c)calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x.

d)dresser le tableau de variations de f.

4)soit $I = [1,9;2]$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, notée α.

5)tracer (C) et (Δ)

MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES **Année scolaire : 2009-2010**
Lycée de Nkolnda-Nsimalen **Série : C** **Durée : 4 heures**
Baccalauréat BLANC **Session de MAI 2010**
Coef : 05

Épreuve de Mathématiques

Examinateur : **Romaric Tchapnga**

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.
La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE I **4,5 points**

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.
On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités p_2, p_3 et p_4. 1,5 pt
2. On considère les événements suivants :
   B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,
   U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a. Calculer la probabilité de l'événement B_n. 0,5 pt
   b. Exprimer la probabilité de l'événement U_n en fonction de n. 0,5 pt
   c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité $p_n = \dfrac{n-1}{4} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. 1 pt
3. On pose : $S_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : : $S_n = 1 - \left(\dfrac{n}{2}+1\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. 0,75 pt
   b. Déterminer la limite de la suite (S_n). 0,25 pt

EXERCICE II **4,5 points**

1. Le plan est rapporté à un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit f l'affinité orthogonale de rapport 2 et d'axe (Δ) d'équation $y = x$ et (C) un cercle de centre $A(1 ; 1)$ et de rayon 2.
   a. Déterminer l'expression analytique de f. 1 pt
   b. Montrer que l'image du cercle (C) par f est une conique dont on déterminer l'équation réduite et l'excentricité. 1,5 pt
2. Θ un nombre réel tel que $0 \le \Theta \le \dfrac{\pi}{2}$. On considère l'équation différentielle
   (E) : $(1+\cos 2\Theta)\, y'' - (2\sin 2\Theta)\, y' + 2y = 0$.
   a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
   $(1+\cos 2\Theta)\, z^2 - (2\sin 2\Theta)\, z + 2 = 0$. 0,75 pt

b. Écrire chaque solution sous forme exponentielle. 0,5 pt

c. Déterminer la solution φ de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation : $y = x + 1$. 0,75 pt

PROBLEME **11 points**

Le problème comporte trois parties liées A, B et C.

Partie A : Soient les fonctions f et h définies par $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x^2}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5 pt
   En déduire que la courbe (C_f) de f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations. 0,25 pt
2. Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. 0,5 pt
3. Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses. 0,5 pt
4. On pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$ avec $x > 0$.
   a. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variation. 1 pt
   b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0\,;\,2[$ et $]2\,;\,4[$. Donner un encadrement de la solution α appartenant à $]2\,;\,4[$ d'amplitude 10^{-1}. 0,75pt
   c. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$. 0,5 pt
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ en déduire que (C_f) et (C_h) se coupent en deux points. ((C_h) étant la courbe représentative de h). 0,5 pt
6. Montrer que pour tout $x \geq 4$, on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$. 0,5 pt
7. Trace les courbes (C_f) et (C_h) dans un repère même orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. 1 pt

Partie B :

1. Doit D_f la partie du plan définie par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$. ($\alpha$ est le réel défini à la partie A).
   a. Calculer en unités d'aires, en utilisant une intégration par parties, l'aire $A(\alpha)$ de D_f..0,5 pt
   b. Montrer que $A(\alpha) = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $A(\alpha)$ à 10^{-1} près. 0,5 pt
   c. On fait tourner le domaine D_f autour de l'axe des abscisses. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer en unités de volume, le volume du volume du solide de revolution obtenu. 1 pt
2. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx$.
   a. Montrer que, pour tout $n \geq 4$, on a : $0 \leq I_n \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$. 0,5 pt
   b. En déduire que la suite (I_n) converge et préciser sa limite. 0,5 pt
   c. On pose $S_n = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$. Calculer S_n en fonction de n, puis sa limite. 0,5 pt

Partie C : On considère pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1 + 2\ln x}{x^{2n}}$

1. Déterminer la dérivée f'_n de f_n. 0,5 pt
2. On désigne par x_n la solution de l'équation $f'_n(x) = 0$.
   a. Déterminer le réel x_n en fonction de n. 0,5 pt
   b. Calculer la limite de la suite (x_n). 0,25 pt

Ministère des enseignements secondaires
Lycée de Nkolnda-Nsimalen

Examen : Baccalauréat Blanc
Session : 2012 Série : C
Epreuve : MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures Coefficient : 5
Examinateur : Romaric TCHAPNGA

l'épreuve comporte trois éxercices et un problème. Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3,5 points**

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (m entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
   - **a.** Donner la loi de probabilité de X. **0,75 pt**
   - **b.** Calculer $E(X)$ espérance mathématique, déterminer m pour que $E(X) = 1,2$. **1 pt**
2. Dans la suite de l'exercice on prend $m = 3$; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la 1 ère boule noire tirée.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de Y. **0,75 pt**
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. **1 pt**

EXERCICE II **4,5 points**

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{3+4\text{i}}{5}\overline{z} + \dfrac{1-2\text{i}}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Montrer que : $x' = \dfrac{3x+4y+1}{5}$ et $y' = \dfrac{4x-3y-2}{5}$. **1 pt**
2. - **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5 pt**
   - **b.** Quelle est la nature de l'application f ? **0,5 pt**
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel. **0,5 pt**
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
   - **a.** Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y = 2$.**0,5 pt**
   - **b.** Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y = 2$. **0,75 pt**
5. On considère les points M d'affixe $z = x + \text{i}y$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{lm}(z')$ soient entiers. **0,75 pt**

EXERCICE III **2 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit (C) l'ensemble des point $M(xy)$ du plan tel que : $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ et (Δ) la droite d'équation : $y - 2 = 0$.

1. Déterminer l'expréssion analytique de l'affinité orthogonale t d'axe (Δ) et de rapport 2. **0,75 pt**

2. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de (C). **0,5 pt**

3. Montrer que l'image (C') de (C) par t est une conique dont on précisera l'équation réduite et l'excentricité. **0,75 pt**

PROBLEME **10 points**

Le problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

Partie A : **4,5 points**

1. Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence de $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. **0,25 pt**

2. Soit F l'application définie en x par : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   - **a.** Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**
   - **b.** Étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$. **0,5 pt**
   - **c.** Soit $G : x \longmapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $G'(x)$. **0,75 pt**

3. Montrer que pour tout $x > 1$, $F(x) < \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. **0,5 pt**

4. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par : $U_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   - **a.** Donner le sens de variation de la suite (U_n). **0,5 pt**
   - **b.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_1^n \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. **0,5 pt**
   - **c.** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U_n < 1 - \dfrac{1+\ln n}{n}$. **0,5 pt**
   - **d.** En déduire que la suite (U_n) est convergente et que $\lim U_n \leq 1$. **0,5 pt**

Partie B : **3 points**

Soient E le plan vectoriel réel rapporté à la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, h un endomorphisme de E défini par :

$h(x\vec{i}+y\vec{j}) = \left(-x-\dfrac{1}{2}y\right)\vec{i} + (2x+y)\,\vec{j}$.

1. Montrer que $h\circ h$ est un endomorphisme nul. **0,5 pt**
   h est - il un isomorphisme ? Justifier votre réponse. **0,25 pt**

2. Déterminer $Kerh$ et Imh. Comparer $Kerh$ et Imh. **1 pt**

3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $Kerh$.
   - **a.** Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de E tel que $h(\vec{v}) = \vec{u}$. **0,25 pt**
   - **b.** Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de E. **0,5 pt**
   - **c.** Ecrire la matrice de h dans la base $(\vec{u},\vec{v})$. **0,5 pt**

Partie C : **2,5 points**

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arete 1 tel que $R = \left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ soit un repére orthonormé direct de $\mathscr{W}$. On désigne par I le milieu de $[EF]$ et par J le centre du carré $ADHE$.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$. **0,5 pt**

2. En déduire l'aire du triangle IGA. **0,5 pt**

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGA) dans le repère R. **0,5 pt**

4. Calculer le volume du tétraède $ABIG$ puis, de deux manières différentes, calculer la distance du point B au plan (IGA). **1 pt**

Ministère des enseignements secondaires
Lycée de Nkolnda-Nsimalen

Examen : Baccalauréat Blanc
Session : 2012 Série : C
Epreuve : MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures Coefficient : 5
Examinateur : Romaric TCHAPNGA

l'épreuve comporte trois éxercices et un problème. Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3,5 points**

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (m entier naturel non nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.
   a. Donner la loi de probabilité de X. **0,75 pt**
   b. Calculer $E(X)$ espérance mathématique, déterminer m pour que $E(X) = 1,2$. **1 pt**
2. Dans la suite de l'exercice on prend $m = 3$; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la 1 ère boule noire tirée.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y. **0,75 pt**
   b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y. **1 pt**

EXERCICE II **4,5 points**

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{3+4\mathrm{i}}{5}\overline{z} + \frac{1-2\mathrm{i}}{5}$.

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.
   Montrer que : $x' = \frac{3x+4y+1}{5}$ et $y' = \frac{4x-3y-2}{5}$. **1 pt**
2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. **0,5 pt**
   b. Quelle est la nature de l'application f ? **0,5 pt**
3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel. **0,5 pt**
4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.
   a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$. **0,5 pt**
   b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x-3y=2$. **0,75 pt**
5. On considère les points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.
   Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{lm}(z')$ soient entiers. **0,75 pt**

EXERCICE III **2 points**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Soit (C) l'ensemble des point $M(xy)$ du plan tel que : $x^2+y^2+2x-4y=0$ et (Δ) la droite d'équation : $y-2=0$.

1. Déterminer l'expréssion analytique de l'affinité orthogonale t d'axe (Δ) et de rapport 2. **0,75 pt**

.

Lycée classique et moderne de ngaoundere — Classe : 2nd C
Département de Mathématiques — Durée : 4h
Coeff : 5

Evaluation de la cinquième séquence

L'épreuve comporte deux exercices et un problème divisé en trois parties A,B et C indépendantes.La qualité de la rédaction et le soin apporté dans le tracé des figures seront prises en compte dans l'appréciation de la copie du candidat.

Exercice 1 (4 pts)

1)Prouver que 2003 est un nombre premier (0,5pt)
2)a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $123u + 2003v = 1$ (0,5pt)
b) En déduire un entier k_0 tel que $123k_0 \equiv 1[2003]$ (0,5pt)
c) Montrer que pour tout entier relatif x,
$123x \equiv 456[2003]$ si et seulement si $x \equiv 456k_0[2003]$ (0,5pt)
d) Déterminer l'ensemble des entiers x tel que $123x \equiv 456[2003]$ (0,5pt)
e) Montrer qu'il existe un unique entier n tel que $1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456[2003]$ (0,5pt)
3)Soit a un entier naturel tel que $1 \leq a \leq 2002$.
a)Déterminer le $pgcd(a, 2003)$ et en déduire qu'il existe un entier m tel que $am \equiv 1[2003]$ (0,5pt)
b)Déduire de la question 2a) la solution dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $123x+2003y = 3$ (0,5pt)

Exercice 2 (5pts)

On se propose de déterminer la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - .... + \frac{(-1)^n}{n!}$

On pose, pour tout entier naturel non nul n,$I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e (lnt)^n dt$ et $I_0 = e - 1$
1) a)A l'aide d'une intégration par partie,montrer que $I_1 = -1$ (0,5pt)
b) Montrer que pour tout entier naturel n,on a $I_{n+1} = I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e$ (1pt)
c)Déduire de ce qui précède que,pour tout entier naturel n
$I_n = e[\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - .... + \frac{(-1)^n}{n!}] - 1$ (1pt)
2 a)Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq \int_1^e (lnt)^n dt \leq e-1$ (0,5pt)
b)En déduire que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$ (0,5pt)
c) Quelle est la limite de la suite (I_n) ? (0,5pt)
3) Déduire de ce qui précède la limite de la suite (S_n) (1pt)

Problème (11 pts)

Partie A : (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (0,I,J).
A tout point M d'affixe z différent de 3 on associe le point M' d'affixe z' tel que
$z' = \frac{z^2}{\overline{z}-3}$
où $\overline{z}$ est le conjugué de z.
Soit (H) l'ensemble des points M du plan tel que z' soit réel.
1)Montrer que (H) est la réunion d'une droite et d'une conique dont on déterminera la nature,le centre,les foyers,les directrices et l'exentricité . (2pts)
2) On désigne par f l'application du plan complexe dans lui même qui,à tout point M d'affixe z associe le point $f(M)$ d'affixe $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - 1)$
a)Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f (0,75pt)
On considère l'ensemble (Γ) des points M(x,y) du plan tel que $3x^2 - 6x - y^2 = 0$
b)Détreminer une équation réduite de (Γ) et donner une représentation graphique de (Γ) dans le repère (O,I,J) (1pt)
3)On note (Γ') l'image de (Γ) par f.
a)Préciser la nature,le centre et l'exentricité de (Γ') (0,75pt)

b)Déterminer l'équation cartésienne de (Γ') (0,5pt)

PARTIE B : 4pts

On considère la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1)Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (0,5pt)

2)Etudier les variations de f dans son ensemble de définiton et dresser son tableau de variation (1,25pt)

3) Tracer la courbe (C_f) de la fonction f
dans le plan muni d'un repère orthonormal (O,I,J) unités sur les axes 2cm (0,75pt)

4)On considère l'aire A_λ de la portion du plan délimitée par la courbe (C_f),l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$ $\lambda > 1$
Calculer A_λ et déterminer la limite de A_λ quand λtend vers $+\infty$ (1,5pt)

PARTIE C :3pts

On considère l'équuation différentielle (E) :$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

1)Montrer que $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$ est une solution de (E) (0,5pt)

2)soit g une fonction deux fois dérivable.

a)Montrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation $(E') : y''+2y'+y = 0$. (1pt)

b)Résoudre l'équation (E') et en déduire la solution générale de l'équation (E)

c)Déterminerla fonction h solution de l'équation (E)
vérifiant $h(0) = 1$ et $h'(0) = -2$ (0,5pt)

***Examinateur** : M. Nguema Thierry Stagiaire*
***Encadreur** : M.Tchikaguen Pierre*
"La réussite n'est pas une habitude mais une conquête .Sachons courir après elle !"

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Série : C ; Durée : 4h ; Coef : 5

Exercice 1 : (3 pts)

1. Calculer PGCD(2688 ;3024). (0,5 pt)

2. On donne l'équation $(E) : 8x+9y=-10$.

a. Vérifier que $(1;-2)$ est solution de (E). (0,25 pt)

b. Résoudre l'équation (E). (0,75 pt)

3. $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$est un repère orthogonal de l'espace. $(S) : x+2y-z+2=0$ et $(\pi) : 3x-y+5z=0$ deux plans.

a. Montrer que (S) et (π) sont sécants suivant une droite (D). (0,5 pt)

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (E). (0,5 pt)

c. En déduire l'ensemble (F) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. (0,5 pt)

Exercice 2 : (5 pts)

I. $a \in \mathbb{R}_+^*$; $ABCD$ est un tétraèdre tel que $AB=AC=AD=a$. ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.

1. Quelle est la nature du triangle BCD? (0,25 pt)

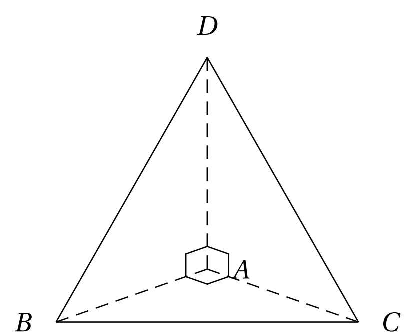
2. Soit H le centre de gravité du triangle BCD.

a. Justifier que (AH) est orthogonal au plan (BCD). (0,5 pt)

b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCD$; puis l'aire S du triangle BCD. (0,75 pt)

c. Exprimer AH en fonction de V et S et en déduire que $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. (0,5 pt)

d. Déterminer le réel α tel que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{AH}$. (0,5 pt)



II. On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge. On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarque que, lorsque on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et les trois autres sont visibles).

1. Calculer la probabilité qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur le tétraèdre. (0,5 pt)

2. Calculer la probabilité que la couleur bleue ne soit visible sur aucun des trois tétraèdres. (0,5 pt)

3. Calculer la probabilité de l'événement E : «les six faces rouges sont visibles». (0,5 pt)

4. On repète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.

a. Calculer la probabilité P_n que l'événement E soit réalisé au moins une fois. (0,75 pt)

b. Calculer la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. (0,25 pt)

Exercice 3 : (2 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives i et $3i$. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distinct de $3i$, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{z-i}{iz+3}$.

1. Vérifier que $OM'=\dfrac{AM}{BM}$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. (0,75 pt)

2. Déterminer et construire l'ensemble (E) image par f des points de la droite d'équation $y=2$. (0,5 pt)

3. Déterminer et construire l'ensemble (F) image par f des points du cercle de diamètre $[AB]$ différent de A et B. (0,5 pt)

Problème : (10 pts) (Ce problème comporte 3 parties indépendantes.)

Partie A : (3 pts)

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'application f d'écriture complexe $z' = i\overline{z} + i$.

1. Montrer que $f = t \circ r \circ s$, s étant la reflexion d'axe $(O, \vec{\imath})$, r la rotation de centre O d'angle à préciser et t la transformation de vecteur $\overrightarrow{u}$ à déterminer. (1,5 pts)
2. En décomposant r, montrer que $r \circ s$ est une symétrie orthogonale d'axe (D) à déterminer. (0,5 pt)
3. Vérifier que f est une symétrie glissée dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,5 pt)

Partie B : (3 pts)

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$. (0,5 pt)
2. Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, où f' désigne la dérivée de f.
   - **a.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E. (0,75 pt)
   - **b.** Soit f un élément de E. Vérifier que pour tout réel x, $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$. (0,5 pt)
   - **c.** En déduire que si f est un élément de E, alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. (0,5 pt)
   - **d.** Déterminer alors l'ensemble E. (0,75 pt)

Partie C : (4 pts)

Soit $f : \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln x \end{array}$ une fonction.

1. **a.** Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (0,75 pt)
   - **b.** Tracer la courbe (C_f) de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité : 5 cm). (0,5 pt)
2. **a.** $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $\int_\lambda^1 \ln x \, dx$, puis en déduire $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)\, dx$ et $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} I(\lambda)$. (1 pt)
   - **b.** Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$.
     - **i.** En utilisant le sens de variation de f sur $]0;1]$, montrer que pour $1 \leq p \leq n-1$, on a : (0,5 pt)
     $$\frac{1}{n} f\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} f(x)\, dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$
     - **ii.** En déduire que $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$ et que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. (1 pt)
   - **c.** En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{3}$. (0,25 pt)

$\text{T}^{\text{ALES}}\text{S}$ - Bac Blanc (4 H) - Le 27/02/2008 - Énoncé

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées.

- Si vous **n'avez pas choisi** l'enseignement de spécialité, vous devez traiter les exercices 1, 2, 3 et 4.
- Si vous **avez choisi** l'enseignement de spécialité, vous devez traiter les exercices 1, 2, 3 et 5.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

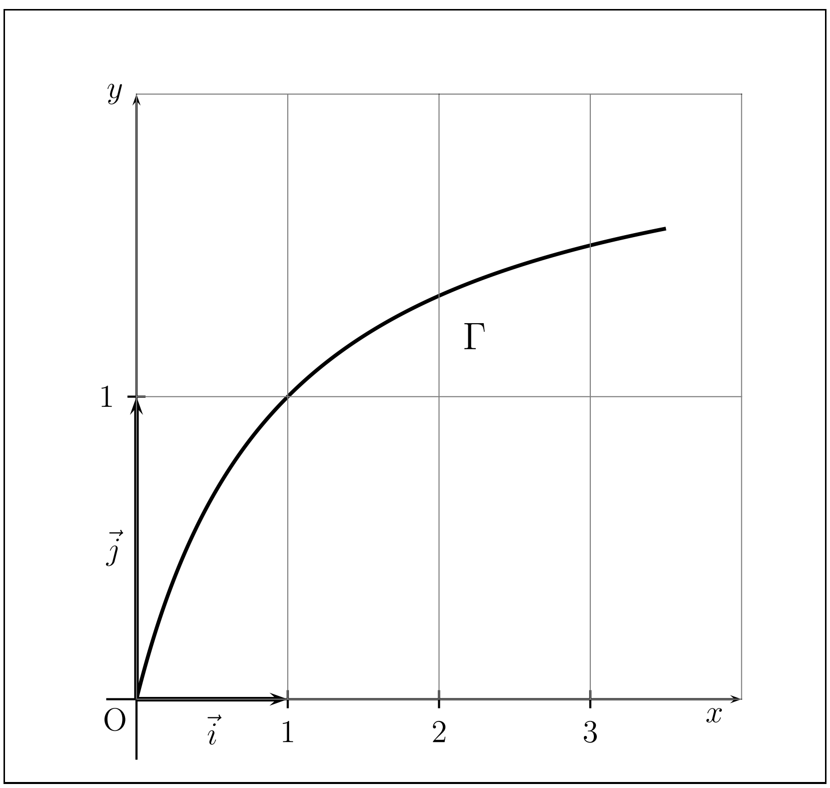
Cet énoncé est à remettre avec la copie.

Exercice 1. (3 points) On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \end{cases}$$

1/ a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Le graphique ci-dessous représente sur $[0\,;+\infty[$ et dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{2x}{x+1}$.



Placer sur le graphique les points de coordonnées (k, u_k) pour $k = 0$, 1, 2 et 3.

2/ Déduire de la question précédente une conjecture de l'expression de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture.

Exercice 2. (7 points) Soit l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, dérivable sur $\mathbb{R}$.

1/ f est la solution de (E) vérifiant $f(0) = -1$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

a) Calculer $f'(0)$.

b) En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2/ Soit g la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.

a) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

b) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$g'(x) = (2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$$

puis que g est solution de (E).

c) Dresser le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

3/ Soit l'équation différentielle :

$$(F) : y'' + 2\,y' + y = 0$$

où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que g est solution de (F).

b) Montrer que si φ est solution de (E) alors φ est solution de (F).

c) Pour quelle valeur du réel a, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ est-elle solution de (F) ?

d) Peut-on dire que si φ est solution de (F) alors φ est solution de (E) ? Justifier la réponse.

Exercice 3. (4 points) *Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Les quatre questions sont indépendantes. Pour chaque question, il y a deux conclusions correctes. Vous devez indiquer sur votre feuille de copie* ***les deux réponses*** *que vous jugez correctes. Aucune justification n'est demandée.*

Chaque réponse exacte rapporte $0,5$ *point. Chaque réponse fausse enlève* $0,25$ *point. Une abstention ne rapporte aucun point tout comme si plus de deux réponses sont proposées. Un total des points négatif sera ramené à zéro.*

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

1/ Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$ alors :

a) la suite (w_n) tend vers $-\infty$

b) la suite (u_n) est majorée

c) la suite (u_n) tend vers $-\infty$

d) la suite (w_n) n'a pas de limite

2/ Si $u_n \geqslant 1$, $w_n = 2\,u_n$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) alors :

a) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ell$

b) la suite (w_n) tend vers $+\infty$

c) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (w_n - u_n) = \ell$

d) on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

3/ Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = -2$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n = 2$, alors :

a) la suite (v_n) est majorée

b) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 0$

c) la suite (v_n) n'a pas de limite

d) on ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non

4/ Si $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2 + 3}{n^2}$, alors :

a) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} w_n = 0$

b) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n = 2$

c) $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 2$

d) la suite (v_n) n'a pas de limite

Exercice 4. (6 points) ***Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = \frac{3}{2} + 6\mathrm{i} \qquad b = \frac{3}{2} - 6\mathrm{i} \qquad c = -3 - \frac{1}{4}\mathrm{i} \qquad p = 3 + 2\mathrm{i}$$

1/ *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

Montrer que les affixes z et z' d'un point quelconque M du plan et de son image M$'$ par l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport $k \in \mathbb{R}$ sont liées par la relation :

$$z' - \omega = k\,(z - \omega)$$

2/ a) Déterminer l'affixe q du point Q, image du point B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $-1+\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

b) Déterminer l'affixe r du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\dfrac{1}{3}$.

c) Déterminer l'affixe s du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

d) Placer les points A, B, C, P, Q, R et S.

3/ a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calculer le rapport $\dfrac{r-q}{p-q}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

c) En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

4/ Démontrer que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$ dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.

5/ La droite (AP) est-elle tangente à $\mathscr{C}$? Justifier la réponse.

Exercice 5. (4 points)

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques

On rappelle le (petit) théorème de Fermat :

si p est un nombre premier qui ne divise pas l'entier naturel a, alors on a la congruence

$$a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$$

Partie A

1/ a) Prouver que 29 est un nombre premier.

b) Soit $x \in \mathbb{N}$ et n un entier naturel tel que $n \equiv 1 \mod 28$.

En utilisant le théorème de Fermat, prouver que $x^n \equiv x \quad [\,]\, 29$.

2/ On considère l'équation (E) : $17x - 28y = 1$ où $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$. a) Quel théorème permet d'affirmer que l'équation (E) admet au moins un couple solution d'entiers relatifs ? b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un tel couple solution.

Partie B

Soit $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N},\ x < 29\} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ ...\ ;\ 28\}$

Pour $x \in \mathrm{A}$, on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et $g(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29.

3/ a) Prouver que $f(x) \in \mathrm{A}$ et $x^{17} \equiv f(x) \mod 29$.

On admettra (la démonstration est analogue) que $g(x) \in \mathrm{A}$ et $x^5 \equiv g(x) \mod 29$.

b) Pour $x \in \mathrm{A}$, prouver que $g[f(x)] = x$.

4/ Applications :

On attribue à chaque lettre de l'aphabet et aux deux signes « + » et « − », l'entier donné par le tableau ci-dessous :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	+	−
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

a) Bob code le mot « GAUSS » à l'aide de la fonction f et envoie le message codé à Alice.

Voici le codage des deux premières lettres « G » et « A » :

Message initial	G	A
Entier associé	7	1
Utilisation de f	$7^{17} \equiv 24 \mod 29$	$1^{17} \equiv 1 \mod 29$
Message codé	X	A

Compléter son message.

b) Alice reçoit le message suivant, codé par Bob, à l'aide de la fonction f :

J	I	L	L	R

Décrypter ce message à la place d'Alice.

INSTITUT MATAMFEN
BP 4176 YDE

BACC BLANC 3^E SESSION MAI 2004
SERIE : C

MATHEMATIQUES — *Durée : 04h / Coef. : 05*

Le candidat traitera les trois exercices et le problème

EXERCICE 1 : (03pts)

1. a t b sont des entiers naturels tels que
   PGCD (a + b, ab) = p², p étant un entier naturel premier.

1.1 Montrer que p² divise a² **0,25pt**

On remarquera que a² = a(a + b) – ab.

1.2 En déduire que p divise a. **0,5pt**

1.3 Montrer que p divise b. **0,25pt**

1.4 Démontrer que PGCD (a, b) = p ou PGCD(a, b) = p². **0,5pt**

2. On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que PGCD (a + b, ab) = 49 et PPCM (a, b) = 231.

2.1 Soit a et b deux tels entiers. Montrer que PGCD (a, b) ne peut être 49, mais est égal à 7. **0,75pt**

2.2 Quelles sont les solutions du problème posé. **0,75pt**

EXERCICE 2 : (03pts)

Soit ABCDEFGH un cube tel que $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
I est le milieu de [EF] et J le centre du carré ADHE.

1. a) Démontrer que : $\vec{IG} \wedge \vec{IA} = \vec{BJ}$. **0,75pt**

   b) En déduire l'aire a du triangle IGA. **0,75pt**

2. a) Calculer le volume v du tétraèdre ABIG. **0,75pt**

   b) En déduire la distance d du point B au plan (IGA). **0,75pt**

EXERCICE 3: (03pts)

Un tireur vise une cible. La probabilité pour qu'il la touche est 0,7. Il tire 3 fois de suite. On note X le nombre de fois où il atteint la cible.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. **2pts**
2. calculer E(X) et V(X), l'espérance et la variance de X. **1pt**

.

***PROBLEME* : (11pts)**

Les parties I et II sont indépendantes

PARTIE I : (5,25pts)

*ABCD est un carré de sens direct et de centre I. (Γ) est le cercle circonscrit à ce carré.

*t est la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$

*rD est la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$

*r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{-\pi}{4}$

*r_2 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

*On considère les transformations :

$f = t0r_D$; $g_1 = r_10f$; $g_2 = r_20f$

1. Démontrer que f_1, g_1 et g_2 sont des rotations dont on précisera les angles. ***0,75pt***
2. a) Déterminer : f(D) et f(A). Quel est le centre de f ? ***0,75pt***

   b) Déterminer $g_1(D)$ et g_2 (D). ***0,5pt***
3. Soit $A'_1 = g_1(A)$ et $A'_2 = g_2(A)$.
   a) Démontrer en utilisant $g_20g_1^{-1}$, que A est le milieu de [A'_1 A'_2]. ***0,5pt***

   b) Démontrer en déterminant une mesure de $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'_1})$, que A'_1 appartient à la tangente à (Γ) en A . ***0,75pt***
4. a) Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2.

   Démontrer que : $J \in (\Gamma)$; $K \in (\Gamma)$. ***1pt***

   Démontrer que I et J sont diamétralement opposé sur (Γ).

   b) Démontrer que $A'_1 \in$ (JB). ***0,5pt***

   c) Placer A'_1 et A'_2 sur la figure. ***0,5pt***

PARTIE II : (5,75pts)

Soit la fonction F :] 0 ; +∞ [→ IR

$x \rightarrow \quad F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$ et (C_F) sa courbe représentative.

1. Déterminer DF, l'ensemble de définition de F. ***0,25pt***
2. Calculer F'(x) et préciser le sens de variation de F sur] 0 ; +∞ [. ***0,75pt***
3. On pose : $\varphi(x) = F(x) - \ln x$ pour $x > 0$
   a) Démontrer que : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$. ***0,25pt***
   b) Calculer $\varphi(1)$ puis étudier le signe de $\varphi(x)$ sur] 0, 1 [et sur] 1, +∞ [. ***1,25pt***
   c) Calculer alors : $\lim_{x \to 0+} F(x)$; $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. ***1pt***
   d) Construire le tableau de variation de F . ***0,5pt***
4. a) Soit x un réel de l'intervalle] 1, +∞ [.
   Pour tout $t \in [1, x]$, démontrer que : ***0,5pt***
   $$F(x) \geq \frac{1}{x} \int_1^x e^t\,dt.$$
   b) En déduire que : $\frac{F(x)}{x} \geq \frac{e^x - e}{x^2}$ ***0,25pt***
   c) Déterminer alors la branche infinie de (C_F) en +∞. ***0,25pt***
5. Tracer (C_F) dans un repère orthonormé. ***0,75pt***

Nos vœux de réussite vous accompagnent !

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
Collège de l'Espérance – COPES
DISCIPLINE – TRAVAIL – SUCCES
BP : 13450 Yaoundé - Tel : 220 95 21

ANNEE Scolaire 2004/2005
Série C – Coef. 6 – Durée : 4h

BACCALAUREAT BLANC

MATHEMATIQUES

ARITHMETIQUES

EXERCICE I 5pts

On considère les suites (a_n) et (b_n) de finie par : $\forall x \in N$ $a_n = 3n + 2$ et $b_n = 2x + 1$

1- Démontrer que pour tout n, a_n et b_n sont premiers

2- Soit $n \in N$ et l'équation (E) : $a_n x + b_n y = 2$ d'inconnues x et y dans Z.

a) trouves une solution particulière de (E) 0,5pt

b) Résous alors l'équation (E) dans Z^2

3- On suppose n non nul. Démontre que l'équation (E) n'admet pas de solution dans N x N (1pt)

4- Résous dans [0 ; 10] x [-2 ; 1] l'équation $a_1\, x + b_1\, y = 2$ (2pts)

EXERCICE II 5pts

a et b sont deux entiers naturels non nuls. E désigne l'ensemble des entiers relatifs Z tels qu'il existe deux entiers relatifs x et y vérifiant Z = ax + by.
On veut démontrer que le plus petit élément de E est le PGCD de a et b.

1-Démontre que a et b sont deux éléments de E (1pt)

2- On note δ le plus petit élément non nul de E (1pt)

a) Démontre que tout multiple de δ et un élément de E (1pt)

b) Démontre que tout élément Z de E est un multiple de E (1pt)

3- Démontre que δ est le PGCD de a et b. (1pt)

4- Application numérique : Démontre que l'ensemble des multiples de 81 est égal à l'ensemble des entiers relatifs de la forme Z = 9801x + 11664y. (1pt)

PROBLEME
PARTIE A **3pts**

Dans cet exercice, P désigne un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle. Le

plan orienté est muni d'un repère orthonormé discret $(0, \vec{u}, \vec{v})$
l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$ a deux solutions z_1 et z_2 appartenant à l'ensemble C des nombres complexes.
On considère les points A,B,P,M' et M'' d'affices respectives 1 ; -1 ; P ; z_1 et z_2

1- Démontrez sans calculer z_1 et z_2 que :
a) P est le milieu de [M'M''] 0,25pt
b) OM' x OM '' = OB^2 0,25pt
c) la droite (xx') de repère $(O, \vec{u})$ est la bissectrice intérieure de l'angle M'OM''. 0,5pt
2- Démontrer que les parents A, B, M' et M'' sont cocycliques. 0,5pt
3- a) calculer $(z_1 - P)^2$ en fonction de P 0,5pt
b) En déduire que
- PA x PB = $PM'^2 = PM''^2$ 0,5pt
- la droite (M'M'') est la bissectrice extérieure de l'angle APB.
4- Le point P étant donné, donner un programme de construction des points M' et M''. 0,5pt

PARTIE B 3 ,5pts Encadrement de $\sqrt{1 + a}$

1-a) Démontrez que la courbe représentative, sur l'intervalle [0, ∞[de la fonction f :
$f : x \to \frac{1}{1+x}$ au –dessus de sa tangente en tout point. 0,5pt
En déduire que
$\forall \propto \in [0 ; +\infty[, \quad \frac{1}{1+\propto} \geq 1 + \propto$ (1)
2- Soit la fonction g : $x \to \sqrt{1 + x}$ et ∝ un nombre réel strictement positif.
a) déterminer les dérivés premières et secondes de g sur l'intervalle [0 ; + ∞ [0,25pts

b) vérifier que $\forall x \in [0 ; \propto[, \quad \frac{1}{2\sqrt{1+\propto}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur l'intervalle
[0 ; a [démontrer que

$$1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2} \quad (2) \qquad 0{,}5\text{pt}$$

3- Déduire des inégalités (1) et (2) que 0,5pt

$$\forall a \in]0 ; +\infty(, \quad 1 + \frac{a}{2} - \frac{9^2}{4} \leq 1 + a \leq 1 + \frac{a}{2}$$

4- Application

Etablir que : $1{,}0475 \leq \sqrt{1{,}1} \leq 1{,}05$; $5{,}098 \leq \sqrt{26} \leq 5{,}1$ 0,5pt

PARTIE C 3pts

1- Soit la fonction $f : x \rightarrow x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (ζ_f) sa courbe représentative.

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
(ζ_f) admet-elle des tangentes aux points d'abscisse -1 et 1 ? 1pt
b) Démontrer que (ζ_f) admet deux asymptotes, que l'on précisera.
c) Etudier les variations de f et construire (ζ_f) 1pt

2- Soit la fonction $g : \rightarrow x \sqrt{|x^2 - 1|}$ et (ζ_f) sa courbe représentative.
0,5pt

a) démontrer que (ζ_g) et (ζ_f) sont symétriques par rapport au point 0
0,5pt

b) construire (ζ_g) sur le même graphique que (ζ_f)

COLLEGE DE L'ESPERANCE
BP 13450 YAOUNDE
Tel : 220 9521

DISCIPLINE- TRAVAIL- SUCCES
Année scolaire 2005/2006

BAC BLANC
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Classe : Tle D Durée : 4H Coef 4

EXERCICE 1 **5PTS**

1- On considère le polynôme P définie par $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$

a) calculer P(4)

b) déterminer b et c tel que $p(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$

c)résoudre $p(z)= 0$

2- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0 ; \vec{u}\ \vec{v})$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2cm$

soient A, B et C les parts d'affixes respectives $a = 4$; $b = 1 + i\sqrt{3}$; $c = 1 - i\sqrt{3}$

a) placer les points A,B,C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3- Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$

On appelle F l'image de K par la rotation de centre o et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{0B}$

a) Quelles sont les images respectives de F et de G ?

b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4- Soit H quatrième sommet du parallélogramme C0FH

a) Montrer que le quadrilatère COFH est un carré

b) Calculer l'affixe du point H

c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

EXERCICE N°2 **4pts**

1- Soient les fonctions $f : x \rightarrow \sin x - x$ et $g : x \rightarrow \sin x + \frac{x^3}{6} - x$

1-1 Etudiez les variations de f et g sur $[0, +\infty[$ 0,5pt

1-2 Déduire les signes de f et g sur $[0 ; +\infty[$ 0,25pt

1-3 Utiliser les questions précédentes pour établir que 0,5pt

$$x - \frac{x^3}{} \leq \sin \leq x$$

6

2- soit $h(x) = x^4$

2-1 Etablir que $4a^3 \leq h'(x) \leq 4b^3$ 0,5pt

2-2 Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour justifier que

$$4a^3(b-a) \leq b^4 - a^4 \leq 4b^3(b-a)$$ 0,75pts

1- Soit u la fonction définie de [- 1, + ∞ [vers R par $u(x) = (1 + x)^x$ et ζ sa courbe représentative

3-1 Donner le signe de $u'(x)$ sur] –1 , +∞ [0,25pt

3-2 Déterminer la tangente (T) à (ζ) en x = 0

3-3 Etudiez la position de (ζ) par rapport à (T) 0,5pt

3-4 Déduire que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ 0,5pt

<u>PROBLEME</u> Les parties A et B sont indépendants

Partie A 3pts Soit la fonction définie sur [1 , + ∞ [par $f(x)= \sqrt{x-1} - 2$

1- Etudier la continuité de f sur l'intervalle [; + ∞ [0,5pt

2- Justifier que $\forall x \in [1 ; +\infty[$, $f(x) \geq -2$ 0,5pt

2- Démontrer que tout élément β de [- 2 , + ∞ [a un antécédent $\propto$ dans [1 , + ∞[; en

Déduire l'image de f par l'intervalle [1 , + ∞ [

<u>PARTIE B</u>

1-a) Trace la courbe représentative de la fonction f : →tan x sur l'intervalle [0,2π]

b- En déduire que l'équation tan x + x = 0 admet dans cet intervalle deux solutions non nulles α et β

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de ces solutions.

2- Soit f la fonction définie par f(x) = x sin x.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative par (Δ) et (Δ') les droites d'équation y = x et y = -x

a) démontre que f est une fonction paire 0,25pt

Déterminer les abscisse des points d'intersection de (ζ) avec (OI) 0,75pt

b) Démontrer que : $\forall x \in R \; -x \leq f(x) \leq x$ 0,5pt

Donner une interprétation graphique de ce résultat 1pt

c) Déterminer les points d'intersection de (ζ) avec (Δ) [respectivement (Δ')]

démontrer qu'en chacun de ces points, (Δ) [respectivement (Δ')] est tangente à (ζ) 1pt

d) étudier les variations de f sur l'intervalle [0 , 2π) 2pts

Collège Adventiste de Maroua
B.P. 45 Maroua
Tél : 22 29 12 06
Département de Mathématiques

Année Scolaire 2012-2013
Classe : T^{le}C, Coef : **5**
Durée : **3** heures
Prof : M. **Loumsia Yonga A.**

SÉQUENCE N°1 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / OCTOBRE 2012

Exercice 1 [3 pts] **Répondre par *vrai* ou *faux***

1. Soit a, b deux entiers naturels supérieurs à 1, n un entier naturel non nul ; 1pt

$$(a-1)(b-1) \equiv 0\ [n] \Longrightarrow a \equiv 1\ [n] \text{ et } b \equiv 1\ [n].$$

2. soit a, b, k des entiers naturels, et n un entier naturel non nul. 0.5pt×2

a. $a^k \equiv b^k\ [n] \Longrightarrow a \equiv b\ [n]$

b. $ka \equiv kb\ [kn] \Longrightarrow a \equiv b\ [n]$

3. Soit x et y des chiffres non nuls. 0.5pt×2

a. $\overline{yyxxyx}^{10} \equiv 5y + 2x\ [7]$;

b. 7 divise $\overline{yxyxyx}^{10}$

Exercice 2 [3 pts] **Démontrer que :**

1. Pour tout entier naturel non nul n, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$. 1pt

2. Pour tout entier naturel n, $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. 1pt

3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, $2^n > 5(n+1)$. 1pt

Exercice 3 [3 pts]

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1+2\mathrm{i}$, $z_B = 2+\mathrm{i}$ et $z_C = 2+\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})\mathrm{i}$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B et déterminer une mesure des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$. 0.5pt×3

2. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

a. Donner l'écriture complexe de r. 0.5pt

b. Déterminer les images A' et C' des points A et C par r respectivement. 0.25pt×2

c. Quelle est la nature du triangle $A'BC'$. 0.5pt

Problème [11points]

Partie A **: Résolution d'une équation de degré 4 dans $\mathbb{C}$**

Soit l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = 0$, $(z \in \mathbb{C})$

1. Démontrer que si z_0 est solution de (E), alors $\overline{z_0}$ est solution de (E). 1pt

2. a. Déterminer les nombres réels a et b tels que : 1pt

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow z^2\left[\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + a\left(z-\frac{1}{z}\right) + b\right] = 0.$$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + aZ + b = 0$, puis l'équation (E). 1.5pt

3. Démontrer que les images des quatre solutions de (E) appartiennent à un même cercle $(\mathscr{C})$ dont on précisera le centre et le rayon. 2pts

Partie B : Prévision de la pluviométrie

Les recherches de l'institut de prévision de la pluviométrie (I.P.P) ont montré que le volume de pluies tombant en Afrique centrale est le reste (exprimé en milliard de m^3) de la division euclidienne par 7 de la fonction A_n appelée paramètre pluviométrique et définie par : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ où n est l'année en cours.

Par exemple $A_{2012} = 2^{2012} + 3^{2012} + 4^{2012} + 5^{2012} + 6^{2012}$ et on a $A_{2012} \equiv 6\ [7]$. On savait donc qu'en 2012, 6 milliards de m^3 de pluies devraient tomber en Afrique centrale. L'objectif de cet exercice est de prévoir la situation de 2016 afin d'éviter d'éventuelles inondations dans certains villages d'Afrique centrale.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Démontrer que : si $a \equiv b\ [7]$ et $c \equiv d\ [7]$ alors $ac \equiv bd\ [7]$. 0.5pt

b. En déduire que : pour $a, b \in \mathbb{Z}^*$, si $a \equiv b\ [7]$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a^n \equiv b^n\ [7]$. 0.5pt

2. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1\ [7]$. 1pt

b. On appelle <u>ordre de a modulo 7</u>, le plus petit entier naturel k, non nul tel que $a^k \equiv 1\ [7]$.

i. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1\ [7]$. 0.5pt

ii. En déduire que k divise 6. 0.5pt

iii. Quelles sont les valeurs possibles de k ? 0.5pt

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a tels que $2 \leqslant a \leqslant 6$. 1pt

3. On considère le paramètre pluviométrique A_n définie par : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
Montrer que $A_{2016} \equiv 5\ [7]$. Quelle volume de pluie peut-on prévoir en 2016 ? 1pt

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
Euclide d'Alexandrie

Collège Adventiste de Maroua
B.P. 45 Maroua
Tél : 22 29 12 06
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2011-2012
Classe : **T^{le}C**, Coef : **5**
Durée : **3** heures
Prof : M. **Loumsia Yonga A.**

SÉQUENCE N°3 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / JANVIER 2012

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4 points]

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, f l'application affine du plan définie par : $f(A) = A$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

1. Déterminer les images par f de A', B' et C'. 1,5pt

2. Déterminer les images par f des droites (AA'), (BB') et (CC'). 1,5pt

3. Déterminer l'expression analytique de f dans le repère $(A,\ B,\ C)$. 1pt

Exercice 2 [5 points]

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. Soient les points $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$; $D(0;4;-1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B, et C sont trois points non alignés. 0,75pt

2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A. 0,5pt

b. Écrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonale à la droite (AC) et passant par A. 0,5pt

c. Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A. 0,5pt

3. a. Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon R$= 5\sqrt{3}$. 0,5pt

b. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $L = (S) \cap (P_2)$. 1pt

4. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC). 0,75pt

b. On rappelle que le volume du tétraèdre $ABCD$ est $V = \frac{1}{3}aire(ABC) \times AD$.
Déterminer alors ce volume. 0,5pt

Problème [11points]

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{2x-2}$ On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
On prendra 5 cm comme unité.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$. 0,25pt

b. Vérifier que pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$ 0,25pt
Déterminer la limite de f en $+\infty$. 0,25pt

2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f. 1,25pt

3. Démontrer que la droite (D) d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe (C). 0,5pt
Étudier la position relative de (C) et de (D). 0,5pt

4. On note A le point de la courbe (C) d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C). 0,5pt

5. a. On note I l'intervalle $[0\ ;\ 0{,}5]$.
Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a. 0,5pt

b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de a. 0,5pt

6. Construire la courbe (C), l'asymptote (D) et la tangente (T). 1,5pt

Partie B :

Détermination d'une valeur approchée de a

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite (u_n) par : $u_o = 0$ et $u_{n+1} = e^{2u_n - 2}$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$
Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ est équivalente à : $g(x) = x$.
En déduire $g(a)$. 0,5pt

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I on a : $|g'(x)| \leqslant \frac{2}{e}$ 0,5pt

3. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I. 0,5pt

4. Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour démontrer que, pour tout entier naturel n :
$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{2}{e}|u_n - a|$ 0,75pt

5. Démontrer, par récurrence que : $|u_n - a| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n$ 1pt

6. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite. 0,75pt

7. Déterminer un entier naturel p tel que : $|u_p - a| < 10^{-5}$ 0,5pt

8. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près : on expliquera l'algorithme utilisé sur la calculatrice. 0,5pt

« *Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.* »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

Classe : **T^{le}C** Durée : 4h ; coef : 5

Mai 2010

Epreuve de Mathématiques. 5$^{\text{ème}}$ séquence

Proposition de correction

Par : **NJIONOU S. P**
pnjionou@yahoo.fr
www.easy-maths.com

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la cohérence dans le raisonnement seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (4pts).

Soit a un entier naturel qui s'écrit $a = r^\alpha s^\beta$ avec r et s deux nombres premiers distincts et α, β deux entiers non nuls. Le but de cet exercice est de montrer que $a^n = p^2$ où n est le nombre de diviseurs de a et p est le produit de tous les diviseurs de a.

1. On suppose que $a = 200$
   1.1 Les diviseurs premiers de a sont 2 et 5. En effet, on peut é écrire $a = 200 = 2^3 \times 5^2$. [0.5pt]
   1.2 Le nombre de diviseurs de a est $n = (3+1) \times (2+1) = 12$.. [0.5pt]
   1.3 Les diviseurs de a sont :
$$\begin{array}{cccc} 2^0 5^0 & 2^1 5^0 & 2^2 5^0 & 2^3 5^0 \\ 2^0 5^1 & 2^1 5^1 & 2^2 5^1 & 2^3 5^1 \\ 2^0 5^2 & 2^1 5^2 & 2^2 5^2 & 2^3 5^2 \end{array}$$
   Leur produit est alors
$$p = (2^0)^3 5^{(0+1+2)} (2^1)^{(3)} 5^{(0+1+2)} (2^2)^{(3)} 5^{(0+1+2)} (2^3)^{(3)} 5^{(0+1+2)} = 2^{3(0+1+2+3)} \times 5^{4(0+1+2)} = 2^{18} \times 5^{12}$$
   1.4 On a $a^n = (2^3 \times 5^2)^{12} = 2^{36} \times 5^{24}$ et $p^2 = (2^{18} \times 5^{12})^2 = 2^{36} \times 5^{24}$ d'où l'égalité. [0.5pt]
2. On suppose à présent que $a = r^\alpha s^\beta$ (r et s premiers distincts) α et β non nuls.
   2.1 Le nombre de diviseurs de a est $n = (\alpha+1)(\beta+1)$. [0.5pt]
   2.2 Les diviseurs de a sont :
$$\begin{array}{cccc} r^0 s^0 & r^1 s^0 & \dots & r^\alpha s^0 \\ r^0 s^1 & r^1 s^1 & \dots & r^\alpha s^1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r^0 s^\beta & r^1 s^\beta & \dots & r^\alpha s^\beta \end{array}$$
   On fait alors le calcul de p de façon astucieuse en calculant d'abord le produit des colones, on obtient alors :
$$p = (r^0)^{\beta+1} \times (s^0 s^1 \dots s^\beta) \times (r^1)^{\beta+1} \times (s^0 s^1 \dots s^\beta) \times \cdots \times (r^\alpha)^{\beta+1} \times (s^0 s^1 \dots s^\beta)$$
   qui se réduit à le forme
$$p = (r^{1+2+\cdots+\alpha})^{\beta+1} \times (s^{1+2+\cdots+\beta})^{\alpha+1}.$$
   La remarque ci-dessous permet alors de retrouver le résultat annoncé.
   2.3 On a d'une clairement
$$a^n = (r^\alpha \times s^\beta)^{(\alpha+1)(\beta+1)} = r^{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)} s^{\beta(\alpha+1)(\beta+1)} = p^2.$$
   .

Exercice 2 (3pts).

On se propose de résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre
$y''(x) + y(-x) = x + \cos x$ $(E3)$;

1. On considère les équations $y''(x) + y(x) = \cos x$ $(E4)$ et $y''(x) - y(x) = x$ $(E5)$
   1.1 L'équation $y''(x)+y(x) = 0$ a pour équation caractéristique $r^2+1 = 0$. Ces solutions sont de la forme $y(x) = A\cos x + B\sin x$. L'équation $y''(x) - y(x) = 0$ a pour équation caractéristique $r^2-1 = 0$. Ces solutions sont de la forme $y(x) = Ce^x+De^{-x}$. A, B, C et D sont des constantes.
   1.2 Il est évident de vérifier que ces fonctions sont effectivement solutions de $(E4)$ et $(E5)$.
   1.3 Les solutions générales de $(E4)$ et $(E5)$ sont respectivement

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x, \quad y_2(x) = Ce^x + De^{-x} - x.$$

2. *On admettra que toute fonction f se décompose de manière unique comme somme de deux fonctions $f = g+h$ telles que g soit paire et h impaire.*
   2.1 $f = g + h$ est solution de $(E3)$ signifie que $(g + h)''(x) + (g + h)(-x) = x + \cos x$. Ce qui signifie que

$$g''(x) + g(-x) + h''(x) + h(-x) = x + \cos x.$$

   Comme g est paire et h impaire, on a $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$ d'où

$$g''(x) + g(x) + h''(x) - h(x) = x + \cos x.$$

   Il est clair que la fonction $x \mapsto g''(x)+g(x)$ est paire et $x \mapsto h''(x)-h(x)$ est impaire. De plus, la fonction $x \mapsto \cos x$ est paire et $x \mapsto x$ est impaire. On a alors par unicité de la décomposition les égalités

$$g''(x) + g(x) = \cos x \qquad h''(x) - h(x) = x.$$

   Réciproquement, si g est solution de $(E4)$ et h solution de $(E5)$, il est facile de voir que $g + h = f$ est solution de $(E3)$.
   2.2 On déduit de tout ce qui précède que la solution générale de $(E3)$ est :

$$y_G(x) = A\cos x + B\sin x + \frac{1}{2}x\sin x + Ce^x + De^{-x} - x, \;\; A, B, C, D \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 (4pts)**.**

1. (a) L'experience consiste à choisir au hasard 10 boules permi 20 et de les mettre dans l'urne A. Il y a au total C_{20}^{10} choix possibles. Mais il y a exactement 1 choix qui contient les 10 boules noires donc la probabilité recherchée est $\dfrac{2}{C_{20}^{10}}$.
   (b) Pour que l'urne noire contienne 5 boules blaches et 5 boules noires, il faut choisir 5 boules noires parmi les 10 boules noires et 5 boules blanches parmi les boules blanches. Il y a alors $C_{10}^5 \times C_{10}^5$ choix possibles. La probabilité recherchée est alors $\dfrac{C_{10}^5 \times C_{10}^5}{C_{20}^{10}}$.
2. (a) Soit les événements :
   - N_1 : « la boule tirée de l'urne A est noire »
   - N_2 ; « la boule tirée de l'urne B est noire »
   - B_1 : « la boule tirée de l'urne A est blanche »
   - B_2 ; « la boule tirée de l'urne B est blanche »

   Alors on a

$$M = (N_1 \cap N_2) \cup (B_1 \cap B_2).$$

   Donc, on déduit d'après la formule des probabilités conditionnelles que

$$P(M) = P(N_1) \times P(N_2|N_1) + P(B_1) \times P(B_2|N_1) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{11} + \frac{4}{10} \times \frac{7}{11} = \frac{29}{55}.$$

   (b) Avec les mêmes notations qu'à la question précédentes, on a :

$$\begin{aligned} P(M) &= P(N_1) \times P(N_2|N_1) + P(B_1) \times P(B_2|N_1) \\ &= \frac{x}{10} \times \frac{11-x}{11} + \frac{10-x}{10} \times \frac{x+1}{11} = \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5). \end{aligned}$$

(c) L'événement M est plus probable que $\overline{M}$ si $P(M) > P(\overline{M}) = 1 - P(M)$, soit $\frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5) > 1 - \frac{1}{55}(-x^2 + 10x + 5)$, après simplification on a $\frac{1}{55}(-2x^2 + 20x - 45) > 0$ qui a pour solution $[0; 5 + \frac{\sqrt{10}}{2}]$, prendre alors $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(d) En étudiant la fonction f sur $[0; 10]$, on a $f'(x) = 0$ qui équivaut à $x = 5$. f est croissante sur $[0; 5]$ et décroissante sur $[5; 10]$ donc atteint son maximum en $x = 5$ et ce maximum est $f(5) = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}$.

Problème (9pts). Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \dfrac{x^2+x+1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité graphique 5 cm).

Partie A. (3pts)

1. **Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.**
On vérifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$. Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

2. **Pour $x > 0$, calculer $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Étudier la limite de cette expression quand x tend vers 0.**
On a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2+x+1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Et d'après l'indication, on a

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x+1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

On peut alors dire que la fonction f est dérivable à droite en 0 et donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente horizontale.

3. **Démontrer que pour tout x de $]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.**
Ce calcul est évident.

4. **Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau des variations de f.**
La dérivée de f s'annule en 1. La fonction dérivée est positive sur $]0; 1[$ et négative sur $]1; +\infty[$. f est donc croissante sur $]0; 1[$ et décroissante sur $]1; +\infty[$. $f(1) = 3\,e^{-1}$. On a le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$3e^{-1}$	↘	1

Partie B. (4pts)

On note g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

1. **Montrer que dans $]0\ ;\ +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ sont équivalentes.**
On vérifie que

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3}e^{-1/x},$$

Ce qui permet de voir, puisque la fonction $x \mapsto e^{-1/x}$ ne s'annule jamais, que $g(x) = 0$ signifie que $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$.

2. **Démontrer que l'équation $x^3+x^2+2x-1=0$ admet une seule racine réelle α dont on justifiera un encadrement à 10^{-2} près.**
La fonction $g(x) = x^3+x^2+2x-1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le lecteur remarquera que $g'(x) = 3x^2+2x+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha)=0$. De plus, $g(0)=-1<0$ et $g(1)>0$ donc $\alpha \in]0;1[$. On a $g(0,5)=0,375>0$ donc $\alpha \in]0;0,5[$, $g(0,25)=-0,421>0$ donc $\alpha \in]0,25;0,5[$; $g(0,375)=-0,05<0$ donc $\alpha \in]0,37;0,5[$, $g(.435)>0$ donc $\alpha \in]0,37;0,44[$.On vérifie ensuite que $g(0,39)<0$ et $g(0,40)>0$ donc $\alpha \in]0,39;0,40[$ et $0,40-0,39=10^{-2}$. On peut prendre $\alpha = 0,39$.

3. **On pose $A = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$. Encadrer A à 2×10^{-1} près (justifier) et montrer que $A = f'(\alpha)$.**
Il est clair que $g(\alpha)=0$, d'où $f(\alpha)-\alpha f'(\alpha)=0$, ainsi $A=f'(\alpha)$. Le lecteur vérifira que $1,99 < A < 2,1$. On pourra étudier la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

4. **Pour tout $a>0$, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a. Montrer que T_a a pour équation $y=Ax$. Tracer T_a, puis la courbe $\mathcal{C}$.**
L'équation de T_a est de la forme $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

5. **Déduire des questions précédentes que de toutes les tangentes T_a à $\mathcal{C}$ (en des points d'abscisses non nulles), seule T_α passe par l'origine O.**
Pour $a=\alpha$, on a d'après ce qui précède, $y = Ax-g(\alpha) = Ax$. donc seule T_α passe par l'origine du repère.

6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (a) **Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$, suivant le réel m donné.**
   - si $m \in]-\infty;0[$, l'équation $f(x)=m$ n'admet aucune solution ;
   - si $m=0$, l'équation admet une solution $x=0$;
   - si $m \in]0;1]$, l'équation admet une unique solution ;
   - si $m \in]1;3e^{-1}[$, l'équation admet deux solutions ;
   - si $m=3e^{-1}$, l'équation admet une solution unique, $x=1$;
   - si $m \in]3e^{-1};+\infty[$, l'équation n'admet aucune solution.

   (b) **Par lecture graphique (et sans justification), donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=mx$ selon le réel m donné.**
   - si $m \in]-\infty;0]$, $f(x)=mx$ admet une solution unique $x=0$;
   - si $m \in]0;A]$, $f(x)=mx$ admet deux solutions dont l'une est nulle ;
   - si $m \in]A;+\infty[$, $f(x)=mx$ admet une solution $x=0$.

Partie C. (2pts)

1. **Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sans calculer explicitement u_n, déterminer le signe de $u_{n+1}-u_n$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.**
On a $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx > 0.$

2. **Démontrer que la fonction h, définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=(x+1)e^{-\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0,\ +\infty[$.**
Il suffit de dériver h pour se rendre compte qu'on a $h'(x)=f(x)$. Ainsi, h est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

3. **Calculer u_n. Interpréter graphiquement le résultat.**
$u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx = \Big[(x+1)e^{-1/x}\Big]_{1/n} = 2e^{-1}-(1+\frac{1}{n})e^{-n}$. Ce nombre représente l'aire du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, les droites d'équation $x=1$, $x=\frac{1}{n}$ et $y=0$.

4. **Étudier la convergence de la suite (u_n).**
Il est alors évident de voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2e^{-1}$.

Si vous trouvez une erreur de frappe dans ce tapuscrit, n'hésitez pas à nous le faire remarquer en nous écrivant à `info@easy-maths.com` *ou à* `pnjionou@yahoo.fr`.

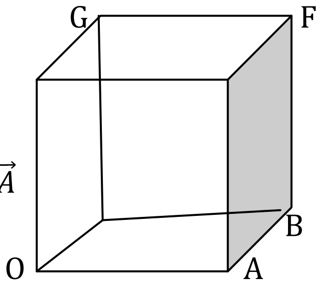
MINESEC/ DRL/DDSM — **Série : C/ Seq : 4**
Lycée de Ndom — **Année 2010/2011**
Département de Mathématiques — **Durée :3h45 ; coef : 5**

Epreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : l'espace (5 points)

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-contre
L'espace est orienté par le repère orthonormal direct.
$(O;\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. On désigne par a un réel strictement positif.



L, M et K sont des points définis par $\overrightarrow{OL} = a\,\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{BK} = a\,\overrightarrow{BF}$

1-a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DM}\ \wedge \overrightarrow{DL}$ ***0,5pt***
b) En déduire l'aire du triangle DLM.
c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonal au plan (DLM). ***0,5pt***

2- On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (DLM)
a) Démontrer que $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OK}$. ***0,5pt***
b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\,\overrightarrow{OK}$.
Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$. ***0,5pt***
En déduire que H appartient au segment [O K]. ***0,25pt***
c) Déterminer les coordonnées de H. ***0,5pt***
d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$. ***0,75pt***

3- A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume de tétraèdre DLMK en fonction de a . **0,5pt**

4- Soit (Π) le plan d'équation *2x+y-z=3*. Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan S_{Π}. **1pt**

Exercice2 : (Suite définie par une intégrale) 4 points

1) On pose que pour tout entier naturel n, non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n\, e^{-x}\, dx.$$

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1. ***0,5pt***
b. Prouver que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \le I_n \le \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\, dx.$$ ***0,75pt***

En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$. ***0,25pt***
c. Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$ ***1pt***

2. On considère la suite $(a_n)n\ \in \mathbb{N}^*$ définie par a_0=0 et $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.
a. Démontrer que $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n\, I_n$. ***1pt***
b. En déduire $\lim_{n\to\infty} a_n$. ***0,5pt***

<u>Problème</u>

<u>Partie A</u> : 6 points

1- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

a) Montrer que f est paire. ***0,25pt***

b) Etudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$. ***0,5pt***

c) Déterminer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. ***0,5pt***

2- On pose pour tout réel x $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$

a) Justifier que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. ***0,25pt***

b) Montrer que F est impaire. ***0,25pt***

c) Montrer que pour tout réel x : $\int_0^x \frac{1}{1+t}\ dt \ \leq \ \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ dt$. ***0,25pt***

d) En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. ***0,5pt***

3- Soit x un réel quelconque. On pose $G(x) = \int_x^{2x} f(t)\ dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$. ***0,5pt***

b) Etudier le sens de variations de G sur $\mathbb{R}$ En déduire, pour tout réel $G(x) \leq ln2$. ***0,5pt***

c) En déduire, pour tout réel $G(x) \leq ln2$. ***0,5pt***

d) Montrer que sur G est une fonction impaire. ***0,25pt***

4- Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

a) Justifier que, pour tout x, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$

b) Montrer que φ est une primitive de f. ***0,5pt***

c) En déduire une écriture de $G(x)$. ***0,25pt***

d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ puis déduire $\lim_{x\to -\infty} G(x)$. ***0,5pt***

<u>Partie B</u> : 7 points

On considère dans le plan l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + y\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$

1- Determiner $f \circ f$. ***1pt***

2- a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. ***0,5pt***

b) Déterminer l'ensemble des points invariants de f. ***0,5pt***

c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. ***0,5pt***

3- On considère le conique (Γ) définie par $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) (centre, foyer, excentricité, directrice). ***1pt***

b) Soit (Γ') l'image de (Γ) par . Ecrire une équation cartésienne de (Γ'). ***1pt***

c) Construire (Γ). ***0,5pt***

Le bonheur, c'est savoir ce que l'on veut et le vouloir passionnément.

Moualeu Dany Pascal
Pleg Maths

Epreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte deux exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1: (Nombres complexes et géométrie): 5points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1cm. On considère la transformation s du plan qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' daffixe z' tel que :

$$z' = -(\sqrt{3}+i)z - 1 + i\,(1+\sqrt{3}).$$

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. (On notera A le centre de cette transformation) ***0,75pt***

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\,i$. Calculer AM_0. En déduire une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}\,,\overrightarrow{AM_0})$. ***0,75pt***

3. On considère la suite de points $(M_n)n \geq 0$ définie pour tout entier naturel n $f(M_n) = M_{n+1}$. On note par z_n l'affixe du point M_n.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$z_n = 2^n\, e^{in\frac{7\pi}{6}}\,(z_0 - i).$$ ***0,75pt***

b. Pour tout entier naturel, calculer AM_n, puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $AM_n \geq 10^2$. ***0,75pt***

4a. On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où $x\ et\ y$ sont des entiers naturels. Après avoir vérifier que (-5, -3) est solution, résoudre (E).

b. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $Im(z) = 1\ et\ Re(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement (Δ) et le représenter. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel que M_n appartenant à la demi-droite d'origine A dirigé par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément. ***1pt***

Exercice 2 : (Transformations du plan). 4points

Soit f l'application du plan P dans P qui, à tout points M de coordonnées $(x\ ,\ y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\ ,\ y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}.$$

1. Démontrer que f est involutive. ***0,5pt***
2. Démontrer que l'ensemble des milieux du segment $[M\,M']$ est une droite fixe. ***0,5pt***
3. Soit B le point de coordonnées $(1,0)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et B' l'image de B par f.

Démontrer que la famille $\left(\overrightarrow{MM'}\,,\overrightarrow{BB'}\right)$ est liée. ***0,25pt***

Reconnaître la transformation usuelle. ***0,25pt***

4. Soit (H) l'hyperbole d'équation : $y = \frac{\sqrt{2}}{2\,x}$ et (H') l'image de (H) par f.

a. Donner une équation de (H'). ***0,5pt***

b. Construire (H) et (H') sur le même graphique. ***1pt***

c. Donner les équations des asymptotes de (H'). ***0,5pt***

d. Donner l'équation de (H') rapporté à ses asymptotes. ***0,5pt***

Problème : 11points

Partie A : (équations différentielles) 2,5points

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = xe^{-x}$ (1)

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$; où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. ***0,5pt***
2. Soient a *et* b deux réels et soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = (ax + b)\, e^{-x}$.

a. Déterminer a *et* b pour que $u$soit solution de (1) . ***0,5pt***

b. Montrer que v est solution de (2) si et seulement si $u + v$ solution de (1). ***0,5pt***

c. En déduire l'ensemble de solution de (1). ***0,5pt***

Partie B : 5points (étude d'une fonction auxiliaire)

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1. Dresser le tableau de variations de g. ***1pt***
2. On suppose que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles.

a. Vérifier que 0 est l'une des solutions. ***0,25pt***

b. L'autre solution est appelée α. Montrer que $-1{,}6 \leq \alpha \leq -1{,}5$. ***0,5pt***

3. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. ***0,5pt***

II) (étude de la fonction principale)

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$.

1a. Calculer $h'(x)$ et exprimer $h'(x)$ en fonction de $g(x)$. ***0,5pt***

b. En déduire le tableau de variations de h. ***0,75pt***

2a. Montrer que $h(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$. En déduire un encadrement de $h(\alpha)$. ***1pt***

b. Calculer $\int_m^0 xe^x\, dx$ où m est un réel strictement négatif. ***0,5pt***

Partie C : (Suite définie par une intégrale) 4 points

1) On pose que pour tout entier naturel n, non nul :

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - x)^n\, e^{-x}\, dx.$$

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1. ***0,5pt***

b. Prouver que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-x}\, dx.$$ ***0,75pt***

En déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$. ***0,25pt***

c. Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$$ ***1pt***

2. On considère la suite $(a_n)n \in \mathbb{N}^*$ définie par a_0=0 et $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

a. Démontrer que $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. ***1pt***

b. En déduire $\lim_{n\to\infty} a_n$. ***0,5pt***

Le bonheur, c'est savoir ce que l'on veut et le vouloir passionnément.

Moualeu Dany Pascal

Pleg Maths

MINESEC/ DRL/DDSM | **Série : C/ Seq : 6/Devoir 12**
Lycée de Ndom | **Année 2010/2011**
Département de Mathématiques | **Durée :4hrs ; coef : 5**

Epreuve de Mathématiques

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 2. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : 2points

1. On appelle nombre parfait tout entier naturel égal à la somme de ses diviseurs stricts (distinct de lui-même).
   a) Le nombre 28 est-il parfait ? ***0,25pt***
   b) Déterminer un nombre premier p tel que 2^4p soit un nombre parfait. ***0,5pt***
   c) Soient n et p deux entiers naturels, tel que p soit premier . Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que 2^np soit parfait. ***1pt***
2. On lance huit fois de suite un dé pipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on désigne par X la variable aléatoire, qui associe à ces fuit lancers le nombre de multiples de 3 obtenus.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X. ***1pt***
   b) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X. ***0,75pt***

Exercice 2 : 2,5points

On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal ($O;\vec{\imath},\vec{\jmath}$) où l'unité de longueur est 6cm, les points M_θ de coordonnées (x,y) définies par :

$$x=\frac{cos\theta}{2+cos\theta}\ ;\ y=\frac{sin\theta}{2+cos\theta}$$ avec θ élément de $[0,2\pi]$.

1. Calculer en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite (D) d'équation $x=1$. ***1pt***
2. Déduire que, pour tout réel θ élément de $[0,2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse (E) dont on précisera l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées. ***1pt***
3. Tracer l'ellipse (E). ***0,5pt***

Exercice 3 : 4,75points

1. Soit $A(0\,,1,-1)$ et $\vec{n}\,(1,1,1)$ un vecteur de l'espace.
   a) Déterminer l'équation du plan (P) contenant le point A et de vecteur normal $\vec{n}$. ***0,5pt***
   b) Donner l'expression analytique de la réflexion s de base (P). ***1pt***
2. Dans le plan orienté , on considère un carré ABCD de centre O. On suppose que le carré est de sens direct, c'est –à-dire que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\frac{\pi}{2}$. On désigne par r le quart de tour de centre A, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h l'homothétie de centre C de rapport $\sqrt{3}$.
   a) Prouver que $r'=r\circ t$ est une rotation, dont on précisera l'angle. ***0,5pt***
   b) Déterminer les images de A et B par r'. Déduire le centre de r'. ***0,75pt***
3. On pose $f=r'\circ h$
   a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport. ***0,5pt***
   b) Soit I le centre de f. Déterminer l'image de C par f. Prouver que $(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{ID})=\frac{\pi}{2}$ et que $ID=\sqrt{3}IC$. ***1,25pt***

Problème : 11,75points

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A : 2,5points

(E_0) l'équation différentielle $y''+2y'+y=0$.Déterminer toutes les solutions de (E_0) ***0,5pt***

(E) est l'équation différentielle $y''+2y'+y = 2e^{-x}$

a) vérifier que la fonction définie h sur R par $h(x) = x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E) ***0,5pt***

b)Montrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $g = \varphi - h$ est solution de (E_0). ***0,5pt***

c)Déterminer toutes les solutions de (E) ***0,5pt***

Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales $f_0(0) = 4$ et $f'_0(0) = 0$ ***0,5pt***

Partie B : 4,75points

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x+1)\, e^{\frac{-x}{2}}$. On se propose l'équation (1) : $f(x) = x$.

1.a) Calculer $f'(x)$, puis établir le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$. ***1pt***

b) Démontrer que pour réel x positif $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. ***0,5pt***

2. On considère la fonction $(x) = f(x) - x$.

a) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α tel que :
$-0,6 < \alpha < -0,5$. ***0,5pt***

b) Démontrer que l'équation (1) admet une unique solution β tel que $1 < \beta < 2$. ***0,5pt***

3) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $U_n \geq 0$. ***0,5pt***

b) Démontrer que pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}\, |U_n - \beta|$. ***0,5pt***

c) Démontrer que pour tout entier naturel n : $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. ***0,5pt***

d) En déduire la limite de la suite (U_n). ***0,25pt***

e) Donner une valeur approchée de la limite de la suite (U_n) à 10^{-6} près. ***0,5pt***

Partie C : 4,5points

On définie la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_0^1 (1 - x^n)\, \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

On pose $J_0 = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ et pour tout entier naturel non nul $n, J_n = \int_0^1 x^n\, \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

On suppose que $J_0 = \frac{\pi}{4}$

1.a) Calculer J_1. ***0,75pt***

b) Déduire la valeur de I_1 et donner une interprétation géométrique de ce résultat. ***0,5pt***

2. a) Etudier le sens de variations de la suite $(J_n) n \in \mathbb{N}^*$. ***0,5pt***

b) Déduire que les suites $(J_n) n \in \mathbb{N}^*$ et $(I_n) n \in \mathbb{N}^*$ convergent.

3. a)Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $0 \leq J_n \leq \int_0^1 x^n\, dx$. ***0,75pt***

b) Déduire les limites des suites (J_n) et (I_n). ***1pt***

4. a) Démontrer que la fonction v définie sur $[0,1]$ par $V(x) = -\frac{1}{3}\, (1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}$ est une primitive de la fonction $v(x) = x\sqrt{1 - x^2}$ sur $[0, 1]$. ***0,5pt***

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 on :

$(n + 2)J_n = (n - 1)J_{n-2}$. ***0,5pt***

Le bonheur, c'est savoir ce que l'on veut et le vouloir passionnément.

Moualeu Dany Pascal

Pleg Maths

Lycée de BEPANDA
Département de Mathématiques Année scolaire : 2009/2010

Classe : *TleC* Durée : 4h ; coef : 5
Jeudi, 19 *Novembre 2009 8h-12h*
Epreuve de Mathématiques. 2eme séquence

L'épreuve comporte trois exercices et un problème.

Exercice 1 (2pts).

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi[$. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) : $(1-\cos\alpha)z^2 - 2(1+\cos\alpha)z + 1 + \cos\alpha = 0$.

1. Montrer que $\forall\alpha \in]-\pi;\pi[$, (E) n'admet aucune solution imaginaire pure. [0,5pt]
2. Résoudre et discuter suivant les valeurs de α, l'existence des solutions de l'équation (E).[1,5pt]

Exercice 2 (4pts).

L'espace est muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, et C ont pour coordonnées respectives $(3;0;0)$, $(0;3;0)$, et $(0;0;3)$.

1. Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$. En déduire l'équation cartésienne du plan (ABC). [0,75pt]
2. G est le barycentre des points pondérés $(A,2)$, $(B,-1)$ et $(C,-3)$.
   (a) Calculer les coordonnées de G. [0,75pt]
   (b) Calculer AG^2, BG^2 et CG^2. [0,75pt]
3. (E) est l'ensemble des points M de l'espace tel que : $2AM^2 - MB^2 - 3CM^2 = 0$.
   (a) Déterminer (E) et donner son équation cartésienne. [1pt]
   (b) (F) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $4AM^2 - BM^2 - 3CM^2 = 0$.
   Déterminer (F) et donner son équation cartésienne. [1pt]

Exercice 3 (4pts).

Soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, & u_{n+1} = u_n - u_n^2 \\ 0 < u_1 < \frac{1}{2} \end{cases}$

I− 1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). [0,5pt]

2. Soit $f(x) = x - x^2$.
   (a) Etudier les variations de f sur $[0;\frac{1}{2}]$. [0,75pt]
   (b) Déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence , que pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$ [0,5pt]
3. Montrer que (u_n) converge vers 0. [0,25pt]

II− Soit (v_n) définie par $v_n = n \times u_n$. On se propose de montrer que la suite (v_n) est convergente.

1. Vérifier que, pour tout $n \geq 1$; $f(\frac{1}{n+1}) < \dfrac{1}{n+2}$ [0,5pt]

2. Montrer alors par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et déduire que (v_n) est majorée. [0,75pt]
3. Montrer que $v_{n+1} - v_n = u_n[1-(n+1)u_n]$ et déduire le sens de variation de (v_n). [0,5pt]
4. Conclure alors de la convergence de (v_n) vers un nombre réel de $]0;1]$. [0,25pt]

PROBLEME(10pts)

Ce problème comporte 2 parties indépendantes A,B.

Partie 1 (A).

Soit $A_n = 4 \times 10^n - 1$, $B_n = 2 \times 10^n - 1$ et $C_n = 2 \times 10^n + 1$ trois entiers naturels où n est un entier naturel non nul.

1. Montrer que A_n et C_n sont divisibles par 3. [0,5pt]
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de B_n par 3. [0,5pt]
3. Montre que B_3 est un nombre premier. [0,5pt]
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $PGCD(B_n; C_n) = PGCD(C_n, 2)$. [0,5pt]
   (b) En déduire le reste de la division euclidienne de B_n par C_n. B_n et C_n sont-ils premiers entre eux. [0,75pt]
5. (a) En utilisant l'algorithme d'EUCLIDE, montrer qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution particulière de l'équation :$A_3x + B_3y = 1$. [0,75pt]
   (b) En déduire toutes les solutions de l'équation $A_3x + B_3y = -5$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. [0,5pt]

Partie 2 (B).

Soit $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - x^2 + x}{1-x}}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{x^3 - x^2 + x}{1-x} \geq 0$; puis en déduire le domaine de définition D_f de f. [0,5pt]
2. Soit $u(x) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$.
   (a) Etudier les variations de u et donner sa représentation graphique dans un repère (O, I, J) du plan d'unité $1cm$. [1,5pts]
   (b) Déterminer le signe de $u(x)$ sur $[0;1]$. [0,75pt]
3. Calculer la dérivée de f et vérifier que $f'(x) = \dfrac{u(x)}{2(1-x)^2 f(x)}$. [0,75pt]
4. (a) Etudier les variations de f sur $[0;1]$. [1pt]
   (b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthonormé du plan. [0,5pt]
5. (a) Montrer que f est une bijection de $]0;1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera. [0,5pt]
   (b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ de la bijection réciproque. [0,5pt]

Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Maroua Kongola
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2009/2010
Classe : T$^{\text{le}}$C
Coef : 5 ; Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

BACCALAUREAT BLANC / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / MAI 2011

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4 points]

I- Soit a et b deux entiers naturels non nuls tel que $a > b$. On désigne par δ et μ leur pgcd et leur ppcm.

1. Soit n un entier naturel non nul. On donne : $a = (n+1)(2n+1)$ et $b = n(2n+1)$.

a. Déterminer δ et μ en fonction de n. 0.5pt

b. Vérifier que $\delta = a - b$ et $\mu(a+b) = ab\delta$. 0.5pt

2. Réciproquement, soit a et b deux entiers naturels tels que $\delta = a - b$ et $\mu(a+b) = ab\delta$

a. On note a' et b' les entiers naturels tels que : $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.
Démontrer que : $a' - b' = 1$ et $a' + b' = \delta$. 0.5 pt

b. Déduisez-en que δ est un nombre entier impair. 0.5pt

II- L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{k} - \vec{j}$.

1. Démontrer que $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_2)$ est une base de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace. 0.5pt

2. On considère f l'endomorphisme de $\mathscr{W}$ définie par $f(\vec{u}) = (x-y)\vec{e}_1 + (2x-z)\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$.

a. Déterminer la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. 0.5pt

b. Déterminer $Kerf$ et Imf. 2×0.5pt

Exercice 2 [5 points]

Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique 1cm. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$

1. a. Dterminer l'écriture complexe de f. 0.5pt

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f. 1pt

2. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ') son image par f.

a. Dterminer une équation cartésienne de (Γ'). 0.75pt

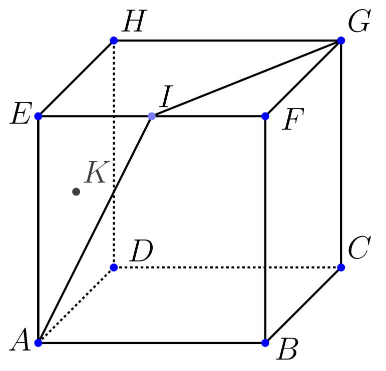
b. Dterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). 0.75pt

c. En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 1pt

d. Construire (Γ) et (Γ') dans le plan. 1pt

Problème [**11points**]

Partie A : Soit le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous : L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. On désigne par I le milieu du segment $[EF]$ et par K le centre du carré $ADHE$.



1. a. Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$. 0.5pt

b. En déduire l'aire du triangle IGA. 0.5 pt

2. a. Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$. 0.5pt

b. Quelle est la distance du point B au plan (AIG) ? 0.5pt

3. Donner une équation cartésienne du plan (AIG). 0.5pt

4. Donner l'expression analytique du demi-tours S d'axe (BK). 0.5pt

5. Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale S' par rapport au plan (AIG). 0.5pt

6. Déterminer l'intersection de la droite (BK) et du plan (AIG). 0.5pt

7. Donner la nature et l'élément caractéristique de $S \circ S'$. 0.5pt

8. Quelle est l'image du triangle IGA par l'application $S \circ S'$? 0.5pt

Partie B :

On considre la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations. 2.5pts

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. 0.5pt

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$. 0.5pt

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite. 0.5pt

3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

a. Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$. 0.5pt

b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n. 0.5pt

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.
Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ? 1pt

Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Maroua Kongola
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2009/2010
Classe : T^{le}C
Coef : 5 ; Durée : 4 h
Prof : M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2009

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 [4points]

Rappel : Soit p un entier naturel, p est dit premier si et seulement si les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p.

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p. 0.5pt
2. Démontrer que $(2p^2+p)^2 < 4S < (2p^2+p+2)^2$. 0.5pt
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.
   - a. Sachant que l'intervalle $]m, m+2[$, $\forall m \in \mathbb{N}$ contient un et un seul entier, l'entier $m+1$; établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. (On pourra utiliser la question 2.) 1pt
   - b. Exprimer n en fonction de p. 0.5pt
   - c. Établir que p vérifie la relation : $3+2p-p^2=0$ (On utilisera le fait que $4S=4n^2$) 1pt
   - d. Déduire de c. p et puis n. 0.5pt

(*Extrait du Bac C 2009 Cameroun*)

Exercice 2 [5points]

1. **Rappel** : On pose $j = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$. Les nombres complexes 1, j et j^2 sont les racines cubiques de 1.
   - a. Calculer $(2+\mathrm{i})^3$. 0.5pt
   - b. En déduire les racines cubiques de $2+11\mathrm{i}$. 1pt
2. Soit a un nombre complexe différent de 1. Démontrer par récurrence sur l'entier n que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : 1pt

$$\frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + \cdots + a^{n-2} + a^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

3. Soit n un entier naturel. On pose $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$
   - a. Montrer que $A + \mathrm{i}B = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$. 0.5pt
   - b. Mettre $A+\mathrm{i}B$ sous forme exponentielle, puis sous forme trigonométrique. 0.5pt×2
   - c. En déduire des expressions plus simple de A et de B. 0.5pt×2

Problème [11points]

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$

Partie A :

On prend pour unité graphique : 4 cm.

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques. 1pt
   b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \frac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$. 1pt
   c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\,(2 - z')$. 1pt
2. a. Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.1pt
   b. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω. 0.5pt
3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = \sigma\,(A_n)\,.$$

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par : 1pt

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

   b. Déterminer l'affixe de A_5. 0.5pt

Partie B :

On note les points A et B les points d'affixes respectives $4+2\mathrm{i}$ et $-2-\mathrm{i}$. On considère l'application f qui, à tout point M différent de B et ayant pour affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 4 - 2\mathrm{i}}{z + 2 + \mathrm{i}}$$

Déterminer puis construire dans le repère les ensembles suivants :

1. E_1 : ensembles des points M tels que $|z'| = 1$; 1.25pt
2. E_2 : ensembles des points M tels que $|z'| = 2$; 1.25pt
3. E_3 : ensembles des points M tels que z' soit réel ; 1.25pt
4. E_4 : ensembles des points M tels que z' soit imaginaire pur. 1.25pt

« Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve. »
EUCLIDE D'ALEXANDRIE

MINESEC/DRL/DDSM	**EPREUVE DE MATHS**	**Devoir 3 : Séquence 2**
LYCEE DE NDOM	**Niveau: Tle; Série :C**	**Année Scolaire 2010/2011**
Dépmt de Mathématiques	**Coef :5**	**Durée :3 hrs**

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages numérotées de 1 à 2.
Le candidat devra obligatoirement traiter l'épreuve. La qualité et le soin apportés au tracé de la courbe seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1: Arithmétique et raisonnement par récurrence (5.5pts)

1. **a-** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n. 0.75pt

   b- Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7(9)$. 0.75pt

2. **a-** Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :$(10)^n \equiv 1(9)$. 0.5pt

   b- On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante : $N \equiv S(9)$. 1.5pt

   c- En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9. 0.25pt

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   –B la somme des chiffres de A ;
   – C la somme des chiffres de B ;
   – D la somme des chiffres de C.

   a- Démontrer la relation suivante : $A \equiv D(9)$. 0.75pt

   b- Sachant que $2005 < 10^4$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que $B \leq 72180$. 1pt

Exercice 2: Fonctions, Limites, Continuité, dérivations:4.75pts

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4\sin^2 x - 3\sin x}{\sin x - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni dun repère orthonormale:

1. Déterminer son ensemble de définition D_f 0.5pt
2. Démontrer que les droite d'équations $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$ sont axe de symétrie de $(\mathcal{C})$ (0.75)pt
3. Etudier la périodicité de f et déduire en justifiant votre réponse sur quel ensemble on peut réduire l'étude de f. 0.75pt
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{\cos x(4\sin^2 x - 8\sin x + 3)}{(\sin x - 1)^2}$. 0.75pt
5. Dresser le tableau de variation de f. 0.5pt
6. Déterminer s'il existe, les extréma relatifs de f sur son domaine d'étude 0.5pt
7. Donner une représentation graphique de f; unité graphique: (ox) : $\Pi/2$ cm; (oy) : 1 cm. 1pt

Problème: 10 points
Le problème est constitué de 2 parties obligatoires
Partie A Nombres Complexes:5points
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$(unité graphique 4cm). Dans l'ensemble C des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2\,i$. On appelle gl'application du plan qui, à tout point M d'affixe z, $M \neq A$, associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{iz - 2}{z + i}$$

1- Démontrer que si z est imaginaire pur, $z' \neq i$, alors z' est imaginaire ***1pt***

2- Déterminer l'ensemble les points invariants par f (on rappelle qu'un point M $_{(z)}$ est invariant ssi $f(z) = z$) ***1pt***

3- Calculer $|z - i| \times |z + i|$. Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon. ***1pt***

4.a- Développer $(z - i)^2$ puis factoriser $z^2 - 2iz - 2$ ***0,5pt***

b- Déterminer et représenter l'ensemble des points Mtels que M' soit le symétrique de Mpar rapport à O. ***0,5pt***

5- Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points z, tels que le module de z'soit égale à 1. ***1pt***

Partie B: **Calcul Vectoriel:5 points**
I- Soit $A(1; 1; 0), B(1; 2; 1)$ et $C(-1; 2; 3)$.

1.a- Montrer que les points A, B et C sont coplanaires. ***0,5pt***

b- Calculer le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis en déduire une équation cartésienne du plan (ABC). ***1pt***

c- Calculer l'aire du triangle ABC ***1pt***

d- Soit (P) le plan d'équation $2x + y - z = 0$ et (Δ) la droite orthogonale à (P) passant par O. Ecrire une équation paramétrique de (Δ). ***0,5pt***

II- Le plan affine euclidien est orienté. ABC est un triangle équilatéral de côté 1 cm. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\Pi}{3}$.
O est le milieu du segment $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1- Construire G et calculer GO. 0.5pt

2.a- Déterminer l'ensemble (S) des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 1.25$. 1pt

b- Représenter (S) sur la figure précédente. 0.5pt

Bon Travail
Moualeu Dany Pascal
Pleg Maths

"*Les mathématiques sont "la science de l'ordre et de la mesure"*"
Réné Descartes
Règles pour la direction de l'esprit

MINESEC
Lycée de Nkolnda–Nsimalen
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire : 2010-2011
Classe : T^{le} C **Durée : 4 heures**
Séquence I **13 Octobre 2010**
Coeff : 05

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric Tchapnga (PLEG)**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I **3 points**

1. Déterminer l'équation de la parabole dont la courbe représentative passe par les points : $A(1\,;\,0)$, $B(2\,;\,-5)$ et $C(3\,;\,-12)$. 0,75 pt
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
   - **a.** Calculer $\mathrm{f}'(x)$, $\mathrm{f}''(x)$ et $\mathrm{f}^{(3)}(x)$. 0,75 pt
   - **b.** Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\mathrm{f}^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n \times n!}{(x+1)^{n+1}}$. 0,75pt
3. Démontrer par recurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1\times 1! + 2\times 2! + 3\times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$. 0,75 pt

EXERCICE II **7 points**

A - 1. **a.** Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est multiple de 7. 0,75 pt

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont des multiples de 7. 0,5 pt

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2. 0,75 pt
3. Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   - **a.** On pose $p = 3k$, quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 7 ? 0,5 pt
   - **b.** Montrer que si $p = 3k+1$, alors A_p est divisible par 7. 0,5 pt
   - **c.** Etudier le cas où $p = 3k+2$. 0,75 pt
4. On cosidère les nombres entiers A et B écrit dans le système binaire
   $A = 1001001000$ et $B = 1000100010000$.
   - **a.** Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. 0,75 pt
   - **b.** Les nombres A et B sont-ils divisibles par 7 ? 0,75 pt

B - Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2+5x \equiv 1[7]$. 0,75 pt

C - En remarquant que $999 = 27 \times 37$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10^{3n} \equiv 1[37]$.
En déduire le reste de la division de $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ par 37. 1 pt

EXERCICE III **1,25 point**

On rappelle que i est le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Calculer i^n suivant les valeurs de l'entier naturel n. 0,5 pt
2. En déduire la valeur de i^{2007}. 0,25 pt
3. Linéariser $\sin^5 x$. 0,5 pt

PROBLEME **8,75 points**

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit R la transformation du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que $z' = e^{i\frac{3\pi}{4}} z$.

1. Donner la nature et les élements caractéristiques de la transformation R. 0,5 pt
2. A est le point d'affixe 2. Calculer l'affixe z'_A du point A', image du point A par la transformation R. 0,25 pt
3. Placer les points A et A' sur une figure ainsi que le point I milieu du segment $[AA']$. 0,5 pt
4. En utilisant la nature du triangle OAA', déterminer $mes(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OI})$. 0,5 pt
5. Calculer l' affixe du point I et donner l'écriture trigonométrique de z_I. 0,5 pt
6. Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$. 1 pt

Partie B

Dans le plan complexe est rapporté à un repère ort.honormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'unité graphique 3 cm. Soit A le point d'affixe i. A tout point M du plan distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d(affixe z' défini par $Z = \frac{z^2}{i - z}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = z$. 0,5 pt
2. On pose $z = x + iy$.
   Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y. 1 pt
3. En déduire et construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $M'(z')$ est situé sur l'axe des imaginaires purs. 0,75 pt
4. Etablir une relation liant les distances OM, AM et OM'. 0,25 pt
5. En déduire l'ensemble (E) des points $M(z)$ du plan tels que M et M' soient situés sur un même cercle de centre O. Construire (E). 0,75 pt
6. Dans cette question, on considère le point M situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. Le point $M'(z')$ correspond à M, et G l'isobarycentre des points A, M et M'.
   a. Calculer l'affixe de G en fonction de z. 0,5 pt
   b. Montrer que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon. 0,5 pt
   c. Comparer les mesures des angles $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OG})$ et $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AM})$, effectuer la construction de G et de M'. 1,25 pt

COLLÈGE ALFRED SAKER Année scolaire 2006 / 2007

4ème Séquence / Composition du 2è trimestre

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

EXERCICE 1 : 2,5 Points

1. Soit x un réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. Pour tout entier non nul n, on pose $u_n = \frac{n!}{n^n}$ où n! désigne factoriel n.
   a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 2$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.
   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 : 2,5 Points

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie par :
$G(x) = (x + 2)e^{-x}$; (Γ) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$; Unité sur les axes : 2 cm.

1. a. Etudier la fonction g.
   b. Tracer (Γ).
2. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (Γ), la droite d'équation y = x + 2, Les droites d'équations x = -2 et x = 0.

EXERCICE 3 : 5 Points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1. s est l'application du plan qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') tel que :
$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$$
   Montrer que s est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.
2. On considère la parabole (P) d'équation $y^2 = -2x + 1$.
   a. Déterminer les coordonnées du foyer de (P) et une équation de la directrice (D).
   b. Ecrire l'équation de la tangente au A de coordonnées (0,1).
   c. tracer (P).
   d. Donner l'équation de la parabole (P') image de (P) par s.
3. Soit M un point de (P), H le projeté orthogonal de M sur (D), I le milieu du segment [OH], B le point d'affixe 1 et C le point d'affixe 2.
   a. Montrer $(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HB})\ (\pi)$.
   b. En déduire que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{HO}, \overrightarrow{HC})\ (2\pi)$.
4. On choisit $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MH}) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On désigne par z et h les affixes respectives de M et H.
   a. Montrer que $\frac{z - h}{z} = \frac{h - 2}{h} = e^{i\theta}$
   b. En déduire que $z = \frac{2}{(1 - e^{i\theta})^2}$

EXERCICE 4 : 4 Points

Dans le plan orienté, on considère un cercle (C) de Ω ; A, B et O trois points de (C) tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$; I est le point diamétralement opposé à B sur (C).

1. s est la similitude directe de centre I qui transforme A en B.
   a. Déterminer l'angle de s.
   b. Donner la nature du triangle IAB et préciser le rapport de la similitude s.
2. On appelle G le point défini par la relation $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$. La droite (IG) recoupe (C) en K.
   On appelle s' la similitude directe de centre K qui transforme A en B.
   a. Déterminer l'angle de la similitude de s'.
   b. Montrer que $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}KA$ x KB.
   c. H désigne le projeté orthogonal de A sur la droite (BK). Exprimer $\overrightarrow{KH}$ en fonction de $\overrightarrow{KB}$.
   d. En déduire que $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}KB^2$.
   e. Déterminer le rapport de la similitude s'.

EXERCICE 5 : 6 Points

Pour tout entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$. On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O,I,J).

1. Etudier les variations de f_1 et f_2 (préciser les limites aux bornes et les asymptotes).
2. Préciser les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$. Puis tracer les deux courbes.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int f_n(x)dx$.
   a. On pose $F(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$. Calculer F'(x) et en déduire I_1
   b. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.
   c. Calculer I2 puis l'aire du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

      et les droites d'équations x = 1 et x = e.
4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n :
   $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!})$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq I_n \leq 1$.
   c. En déduire la limite en + ∞ de $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

COLLEGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMEE — Année scolaire 2006 / 2007

$5^{ème}$ *Séquence / 25 Avril 2007*

Tle C	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair.

Exercice 1 : 2,5 points

1. a) déterminer les entiers x et y tels que $14x - 31y = 3$ — 1 pt

   b) Déterminer deux couples d'entiers premiers entre eux solutions de l'équation :
   (E) : $14x - 31y = 3$ — 0,5 pt

2. Trois phares A, B et C lancent un signal lumineux respectivement toutes les 25 secondes, les 30 secondes et les 35 secondes. Un signal simultané se produit à 22 heures. A quelle heure se produira le premier signal simultané après minuit ? — 1 pt

Exercice 2 : 2,5 points

Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.
   a) Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche — 0,5 pt

   b) Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages. — 0,5 pt

2. n étant un nombre entier naturel non nul, on effectue n tirages successifs d'une boules avec remise ; on appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours des ces n tirages une boules blanche uniquement au dernier tirage.

   a) Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et P_4 — 1 pt

   b) Soit $S_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$
   Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer la limite de S_n — 0,5 pt

Exercice 2 : 4 points

ABC est un triangle indirect rectangle en A tel que BC = 2AB et S la similitude directe du plan orienté, de centre B qui transforme C en A.

1. Préciser le rapport et une mesure de l'angle de S. — 0,5 pt

2. Soit (H) l'ensemble des points M du plan vérifiant MB = 2d(M, (AC))

   a) Donner la nature de (H) et préciser ses éléments remarquables — 0,75 pt

   b) Donner la nature puis le foyer et l'excentricité de l'image S(H) de (H) par S

3. Application : A, B et C ont pour affixe respectives $1 + 2i$, $1 + 5i$ et $7 + 2i$ — 0,75 pt

   a) Donner la forme complexe de S — 0,5 pt

   b) Ecrire une équation cartésienne de (H) — 0,75 pt

   c) Construire (H) dans un repère orthonormé du plan complexe — 0,75 pt

Problème 11 points

I.

On note f_n la fonction numérique définie sur IR - $\{-1\}$ par $f_n(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^n}$; $n \in$ IN*.

(C_n) désigne la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé
$(O\,,\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$ (unité graphique 2 cm)

1. Etudier les limites de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et -1 (on tiendra compte de la parité de n pour la limite en -1) — 1 pt
2. Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et étudier, suivant la parité de n, le signe de $f'_n(x)$ — 2 pts
   Dresser le tableau des variations de f_n — 1 pt
3. Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point — 0,5 pt
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement ce résultat. — 0,75 pt
5. a) Donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} — 0,5 pt

   b) En déduire les positions relatives des courbes (C_1) et (C_2) — 0,5 pt
   Représenter graphiquement (C_1) et (C_2) — 1,5 pt

II.

Pour tout n $\in$ IN*, on définit la suite (U_n) par $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$

1. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que pour tout n $\in$ IN*, on a : $U_n \geq 0$. Que peut-on en déduire ? — 1,25 pt
2. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :
   $\dfrac{1}{n-1}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}) \leq U_n \leq \dfrac{e}{n-1}(1-\dfrac{1}{2^{n-1}})$ — 0,75 pt
   En déduire la limite de la suite (U_n) — 0,25 pt
2. Etablir une relation entre U_n et U_{n+1}
   (On pourra utiliser le résultat de la question I.5.a) — 0,5 pt
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{ne^x}{(x+1)^{n+1}} = 1$ — 0,5 pt

COLLEGE INTAC
B.P. 1973 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence

T^{le} C	EPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

L'épreuve comporte deux exercices et un problème reparti sur deux pages

EXERCICE I : 4,5 PTS

Soit $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$, n $\in$ $\mathbb{N}^*$.

1. a. Justifier l'existence de I_n. 0,25 pt

   b. Calculer I_1. 0,75 pt

   c. Démontrer que $\forall n \geq 2$, $I_n = e - nI_{n-1}$. (On pourra effectuer une intégration par parties).

2. Soit n $\in$ $\mathbb{N}^*$, F_n une primitive sur $[0; +\infty[$ de $f_n : x \mapsto (\ln x)^n$.

   a. Démontrer $g : t \mapsto F_n(e^t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. 0,25 + 0,5pt

   b. en déduire que :

      i. $\forall_n \geq \mathbb{N}^*$, $I_n = F_n(e) - F_n(1) = \int_0^1 t^n e^t dt$. 0,75pt

      ii. $\forall_n \geq \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{x+1}$ (on pourra encadrer $t^n e^t$ sur [0,1]). 1 pt

EXERCICE II : 4,5 PTS

On appelle (Γ) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x , y) vérifient :

$X^2 - y^2 + 2xy\sqrt{3} + 2 = 0$

1. On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($i^2 = -1$) et on considère la transformation g du plan dans lui-même

   Qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' = jz.

   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g. 0,75 pt

2. On désigne par (H) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $Re(z^2) = 1$.

   Déterminer la nature de l'ensemble (H) et le construire. 1 pt

3. Montrer qu'un point M du plan d'affixe z appartient à l'ensemble (Γ)

   si et seulement si $Re(jz^2) = 1$. 1 pt

4. Montrer que (H) est l'image de (Γ) par la transformation g. 0,75 pt

5. Déterminer la nature de (Γ). Tracer (Γ) sur le graphique précédent. 1 pt

PROBLEME : 11 PTS

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) unité graphique : 2 cm.

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{1}{2}(x - 1)$.

1. Déterminer une fonction affine h solution de (E) . 0,5pt

2. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction f – h est solution d'une Equation différentielle (E') que l'on précisera. 0,75 pt
3. Résoudre (E'), puis (E) . 0,25 x 2 pt
4. Déterminer la solution f_0 de (E) qui s'annule en 0. 0,25 pt

PARTIE B :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - x - 1$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère (O,I,J).

1. Etudier les variations de f. 1,5pt
2. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet deux solutions dont une notée α est comprise entre 2 et 3. 0,75 pt
3. Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$. 0,75 pt
4. Construire $(\mathcal{C})$. 0,5pt
5. On considère la restriction h de f à $]-\infty; 2\ln 2[$
   a. Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 2\ln 2[$ vers un intervalle I à préciser. 0,5pt
   b. Calculer $(h^{-1})'(0)$. 0,25 pt
   c. Construire dans le repère précédent la courbe $(\mathcal{C}')$ de h^{-1}

      (on tracera la tangente à $(\mathcal{C}')$ au point d'abscisse 0. 0,75 pt
6. On considère la fonction g définie sur $]-1; +\infty[$ par g(x) = 2ln(x + 1).

   On se propose dans cette partie de trouver une valeur approchée du réel α de la question 2.
   a. Montrer que α est solution de l'équation g(x) = x. 0,25 pt
   b. Montrer que pour tout x de $[2; +\infty[$, $g(x) \in [2; +\infty[$ et que $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$. 0,25+0,5pt
   c. On définie la suite (U_n) par $U_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.
      i. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [2; +\infty[$. 0,75 pt
      ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ 0,75 pt
      iii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{2^n}{3}$ 0,5pt
      iv. En déduire que la (U_n) converge vers une limite que l'on précisera. 0,5pt
      v. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près 0,5pt

Collège CHEVREUL
BP. : 4093
DOUALA

BACCALAUREAT BLANC 2006/2007
Série C
Durée : 4h – Coef. 5

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1: /3 pts

Une urne contient deux boules rouges et m boules noires (n entier naturel non-nul), indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'apparition.

1. On tire trois boules successivement avec remise, on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de probabilité de X. Calculer E(X) espérance mathématique, déterminer m pour que E(X) = 1,2.
2. Dans la suite de l'exercice on prend m = 3 ; on tire maintenant les 5 boules de l'urne successivement sans remise. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang de la 1ère boule noire tirée.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y.

EXERCICE 2 : /4 pts

Le plan orienté est rapporté à un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ orthonormé. On désigne par r l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z=(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})(z-1)$

1. Déterminer que r est une rotation dont-on précisera l'angle et le centre.
2. A tout nombre complexe $Z\neq 3$ on associe le nombre complexe $Z=\frac{Z^2}{\overline{Z}-3}$ où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z. On note l'ensemble (H) des points M du plan d'affixe Z tel que Z soit un nombre réel.
   a) Démontrer que (H) est une droite soit une hyperbole (H') dont-on déterminera le centre Ω, les foyers, les directrices et l'excentricité.
   b) Tracer (H') dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$.
3. Démontrer r(H') = H'' est une conique, dont-on précisera la nature, son centre et son excentricité.

EXERCICE 3 : /3 pts

Soit (D) le plan vectoriel rapporté à la base $(\vec{i},\vec{j})$ f est l'endomorphisme de (E) qui associe à $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ le vecteur $f(\vec{u})=(x+\frac{1}{2}y)\vec{i}+(-2x-y)\vec{j}$.

1. Montrer que fof est l'endomorphisme nul. f est-il bijective ? Justifier.
2. Déterminer le noyau (E_1) et l'image (E_2). Comparer E_1 et E_2.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul du noyau de f.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $f(\vec{v})=\vec{u}$.
   b) Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est une base de E.
   c) Ecrire la matrice de f dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

PROBLEME : /10 pts Il possède trois parties indépendantes.

Partie A : Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit E le milieu du segment [CD] et DEFG le carré direct de centre O'.

1. Réaliser une figure en considérant AB = 6 cm.
2. Soit s la similitude directe de centre D qui transforme A en B.
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de s. Préciser l'image de E par s. En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BF})$.
   b) On note (Γ) le cercle circonscrit au carré ABCD et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF) ; placer (Γ) et I sur la figure. Prouver que I appartient à (Γ).
   c) Démontrer que (ID) et (BF) sont orthogonales.

Partie B : Deux entiers naturels a et b s'écrivent dans le système de numérotation de base $n(n\geq 6)$ $a=\overline{2310}^{n}$; $b=\overline{252}^{n}$ On désigne par d le PGCD (a,b).

1. Démontrer que $2x+1$ divise a et b et que d = $2(2x+1)$ et d = $2x+1$ selon que n est pair ou impair.
2. On pose n = 6. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation $ax+by=-26$.

Partie C : Dans toute cette partie, f désigne la fonction numérique de la variable réelle x définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x+1}\ln(x+1)+\ln x$. $(U_n)x\in N^*$ désigne la suite de terme général.

$$U_n=\left(\sum_{k-1}^{n}\frac{1}{k}\right)-lxn=(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})-lxn$$

I.- *Etude et représentation graphique de f : unité : 2 cm.*

1.a. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de f. En déduire le tableau de variations de f.

2.a. Démontrer que f est une bijection de $]0;+\infty[\to]-\infty;0[$

b) Tracer dans un même repère des courbes de f et f^{-1}

c) $\propto$ désigne un réel strictement positif et inférieur à 1. On note (D) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $\propto\leq x\leq 1$ et $f(x)\leq y\leq 0$. En utilisant une intégration par parties, déterminer en fonction de $\propto$ l'aire de (D) en Cm^2.

d) Calculer la limite de cette aire lorsque $\propto\to 0^+$.

II.- *Etude de la convergence de la suite* $(U_n)n\in N^*$

a) Calculer les valeurs exactes de U_1 et U_2

b) Etudier le sens de variations de $(U_n)n\in N^*$ (On pourra utiliser le signe de f).

2.a. Démontrer que $U_n\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{12}-\int_k^{k+1}\frac{1}{E}dt)+\frac{1}{n}$.

b) Pour tous entier $k\in[1;n-1]\forall t\in[k,k+1]$ $\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\leq\frac{1}{k}$.

c) En déduire que $\forall n\in N^*$; $U_n>0$. En déduire que la suite $(U_n)n\in N^*$ est convergente.

Collège Evangélique de New - Bell — Année Scolaire 2006/2007

DEVOIR SURVEILLE N°5_Epreuve de Mathématiques - 4h - TC Coeff. 6

Exercice 1 : (3 Pts)

1 - On considère les équations suivantes, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) $x^2 + 4y^2 = 16$
(2) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$
(3) $4x^2 - y^2 = 16$
(4) $4x - y^2 = 0$

Reconnaître dans chaque cas la courbe (C) correspondante ; préciser ses éléments caractéristiques : axe focal ; foyers axe de symétrie, sommets, asymptotes éventuelles, et tracer (C).

Exercice 2 : (3 Pts)

1 - Intégrer les équations différentielles suivantes :

(E_1) $y' - 3y = x^2$
(E_2) $2y'' - 5y' + 3y = 0$
(E_3) $y'' + 2y' - 3y = x^2 + x$

Exercice 3 : (4 Pts)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et direct avec
$AB = AC = \ell$ où $\ell > 0$
On note D la symétrie de A par rapport à B, O le milieu de [CD] et (Γ) le cercle de diamètre [CD].
On désigne par s la similitude qui transforme D en B et B en C. On se propose de déterminer les éléments caractéristiques de s, notamment son centre I.

1 - a) Déterminer le rapport k et l'angle de s (0,5 Pt)

b) En déduire l'existence de I (0,25 Pt)

2 - Démontrer que $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC}) = \frac{-\pi}{2}\ [2\pi]$ (1)

et que IC = 2 ID (2) (0,5 Pt)

3 - a) A l'aide de (1) démontrer que I appartient à (Γ) (0,5 Pt)

b) En utilisant (2), montrer que $ID = \ell$ (0,5 Pt)

c) Etablir enfin que BI = BC (1 Pt)

4 - a) Prouver que la droite (OB) est la médiatrice de [IC] (0,25 Pt)

b) Préciser la nature du quadrilatère CADI, puis placer I. (0,5 Pt)

Problème : (10 Pts)

A/ Etude de la fonction f qui à x associe $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

a_1) Quel est le domaine de f ? (0,5 Pt)

a_2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. (2 x 0,5 Pt)

a_3) Soit h la fonction définie pour x > 0 par h(x) = 1 + x + lnx

a_4) Prouver que l'équation h(x) = 0 a une solution unique b, et donner un encadrement de b au centimètre près. (0,5 Pt)

a_5) Pour x > 0, exprimer f'(x) à l'aide de h(x). (0,25 Pt)

B/ Etude de l'équation f(x) = 1 sur]0, + ∞[

On définit la fonction g sur les x > 0 par g(x) = $e^{\frac{x+1}{x}}$

b_1) Démontrer que l'équation f(x) = 1, donner une solution unique a, et que 3,5 ≤ a ≤ 3,7 (2 x 0,5 Pt)

b_2) Démontrer que f(x) = 1 équivalent à g(x) = x (0,5 Pt)

Etudier la monotonie de g. (0,5 Pt)

b_3) Démontrer que si K désigne l'intervalle [3,5 ; 3,7] alors $g(K) \subset K$ (0,5 Pt)

b_4) Démontrer que, pour tout x de K, on a $|g'(x)| \leq |g'(3{,}5)| \leq \frac{1}{3}$ (0,5 Pt)

b_5) En déduire que $\forall\ x \in K\ |g(x) - a| \leq \frac{1}{3}\ |x - a|$ (0,5 Pt)

b_6) Si on pose $U_0 = 3{,}5$ et, pour tout x entier naturel, $U_{n+1} = g(U_n)$, démontrer que (U_n) converge et trouver sa limite. (1 Pt)

b_7) Donner une valeur approchée de a au millimètre près. (0,5 Pt)

MINESEC/ DPL/ IPP-SC

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
Année scolaire 2006 / 2007

ÉVALUATIONS HARMONISÉES DE LA 5è SÉQUENCE		CLASSE	Tle	DURÉE	4H
ÉPREUVE	*MATHÉMATIQUES*	SÉRIE	E	COEF.	4

Exercice 1 (4 points)

I.

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction polynôme Q_n définie par :
$Q_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$ et P_n sa restriction sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. 0,75 pt

   b) Montrer que $\alpha_n \in]0 ; 1[$. 0,25 pt

2. a) Montrer que $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$
   (α_{n+1} étant l'unique solution de l'équation $P_{n+1}(x) = 0$ dans $]0 ; +\infty[$). 0,5 pt

   b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et convergente. 0,5 pt

II.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,2^{k-1}$

1. a) Calculer U_1 et U_2 0,5 pt

   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
   $\sum_{k=1}^{n} k\,2^{k-1} = 2^n(n-1) + 1$ 0,75 pt

2. Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente, de limite $+\infty$. 0,75 pt

Exercice 2 (3,75 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
(E) : $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3})$

1. Résoudre l'équation (E) et exprimer les solutions z' et z" en fonction des nombres complexes $a = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ et $b = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ 1,25 pt

2. a) Mettre a et b sous forme trigonométrique, puis représenter leurs points images respectifs A et B dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O , \vec{u} , \vec{v})$. 1 pt

   b) En déduire une construction simple des points M' et M" images des nombres complexes z' et z" respectivement. 0,5 pt

3. Mettre z' et z" sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$ 1 pt

Exercice 3 (2,25 points)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k})$ une base de E.
Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u}$ (x , y , z) associe le vecteur

$\overrightarrow{u'}$ (x' , y' , z') tel que $\begin{cases} x' = -x + 2z \\ y' = y + 2z \\ z' = 2x + 2y \end{cases}$

1. Démontrer que le noyau de f est une droite vectorielle E_1 de E dont on déterminera une base ($\overrightarrow{e_1}$) 0,75 pt

2. Démontrer que l'image de f est un plan vectoriel E_2 de E dont on déterminera une base ($\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$). 0,75 pt

3. a) Montrer que ($\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$) est une base de E. 0,5 pt
   b) Que peut-on dire des sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 ? 0,25 pt

Problème (10 points)

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A (4,5 points)

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unité graphique 2 cm
Soit f la transformation du plan qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x' , y')
tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}\,x + y \end{cases}$

1. a) Déterminer l'écriture complexe de f. 0,5 pt
   b) En déduire que f est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. 0,75 pt

2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x , y) du plan tels que $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}\,x\,y = 64$ et (Γ')son image par f.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ') 0,75 pt
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ') 0,75 pt
   c) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 0,75 pt
   d) Construire (Γ') et (Γ) dans le plan. 1 pt

Partie B (5,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O,$\vec{I}$, $\vec{J}$)

I.

Soit la fonction numérique f définie sur ℝ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|+x^2}}$

1. Vérifier que f est une fonction paire. 0,25 pt

2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et étudier le signe de f(x)pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ 1 pt

II.

On considère la fonction numérique F : $\mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+|t|+t^2}}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan et (D) la droite d'équation y = x.

1. a) Justifier que F est définie et dérivable sur ℝ. 0,25 pt

b) Démontrer que F est une fonction impaire. 0,5 pt

2. a) Démontrer que pour tout nombre réel positif t, $f(t) \geq \frac{1}{1+t}$.
   En déduire que pour tout nombre réel positif x , $F(x) \geq \ln(1+x)$. 0,5 pt

   b) Déterminer la limite de F en $+\infty$. 0,25 pt

3. Calculer $F'(x)$, pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ et dresser le tableau de variation de F. 0,5 pt

4. a) Démontrer que pour tout nombre réel positif t, $f(t) \leq 1$.
   En déduire que pour tout nombre réel positif x , $F(x) \leq x$ 0,5 pt

   b) Donner une interprétation graphique de ce résultat. 0,25 pt

5. a) Démontrer que pour tout nombre réel t élément de $[1\ ;\ +\infty[$, $f(t) \leq \frac{1}{t}$ 0,25 pt

   b) En déduire que pour tout nombre réel $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $F(x) \leq \int_0^1 f(t)\,dt + \ln x$ 0,5 pt

6. a) Démontrer que (C) admet une branche parabolique. 0,25 pt

   b) Tracer (D) et donner l'allure générale de (C). 0,5 pt

COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence / Baccalauréat Blanc _ Session de mars 2007

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

L'épreuve comporte trois exercices et un problème. Les pages sont numérotées de 1 à 3. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 : 3 Points

Le tableau ci-dessous donne la répartition des élèves de la classe de Terminale C du Collège selon leurs moyennes (arrondies à l'unité près) du 1er trimestre.

Moyennes	8	9	10	11	12
Nombre de garçons	1	4	8	2	1
Nombre de filles	0	0	5	2	2

On représente le nom de chacun des élèves par un numéro de 1 à 25. On inscrit les 25 numéros sur des jetons indiscernables au toucher que l'on met dans un sac.
On tire successivement trois jetons en remettant Chaque fois le jeton tiré dans le sac.
Soit X la variable aléatoire réelle qui associe à chaque triplet de jetons tirés le nombre d'élèves ayant obtenu moyenne (arrondie à l'unité près) supérieure ou égale à 10.

1. Déterminer la loi de probabilité de X. 1,5 pt
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. 1,5 pt
   N.B : On donnera les résultats sous la forme de fraction irréductible.

EXERCICE 2 : 3,5 Points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$. 1,5 pt
   On donnera les solutions sous la forme algébrique.
2. On désigne par A, B et C les images dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé, des solutions de (E) ; (D) la droite d'équation $x = 3$ et (Γ) l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 12 + \frac{3}{4}(x-3)^2$.
   Calculer la distance du point M à la droite (D) puis déterminer et construire (Γ). 2 pts

EXERCICE 3 : 2,5 Points

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B tels que AB = 6 cm.
On désigne par :

- C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
- D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
- S la similitude directe qui transforme A en B et C en D. On note I son centre.

1. Calculer $\frac{IA}{IB}$ et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$. 1 pt
2. En déduire la construction géométrique du point I. 1 pt
3. Démontrer que le point I appartient au cercle circonscrit au triangle ADC. 0,5 pt

Problème : 11 Points

La Partie A est indépendante des parties B et C.

Partie A :

On considère dans IN*x IN*, l'équation (E) : $50x - 11y = 3$.

1. a. Quelles sont les valeurs possibles du PGCD des couples *(x, y)* solutions de l'équation E ? 0.25 pt
   b. Résoudre l'équation (E). 0,75 pt
2. Soit n un entier naturel non nul, on pose : a = 11n + 3 et b = 13n-1.
   a. Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50. 0,25 pt
   b. En s'inspirant de la question 1.b., déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 50. 0,75 pt
   c. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le PGCD de a et b est égal à 25. 1 pt

Partie B :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle] 0 ;+∞ [par : $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I , J).

1. a. Justifier que f est dérivable sur] 0 ; +∞[et calculer $f'(x)$. 0,5 pt
   b. En déduire le sens de variation de f. 0,25 pt
2. a. Pour $x > 0$, Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ à l'aide d'une intégration par parties. 0,5 pt
   b. Démontrer que pour tout $t > 1$, $\frac{\ln t}{2t^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$.
   c. En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) \leq f(x) \leq \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$. 0,25 pt
   d. On admet que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$, donner un encadrement de l. 0,25 pt
3. Soit g la fonction définie sur] 0 ; +∞[par $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{x})$.
   a. Démontrer que g est la fonction nulle sur] 0 ;+∞ [1 pt
   b. En déduire la limite de f en zéro. 0,5 pt
   c. Tracer l'allure de la courbe Γ. 0,5 pt

PARTIE C :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1. a. Démontrer que $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. 0,25 pt
   b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite. 0,25 pt
   c. En remarquant que, pour tout x de [0 ; 1] on a : $\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$.
      Calculer : $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$. 0,25 pt
   d. Calculer U_n au moyen d'une intégration par parties. 0,5 pt
2. Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout $n \geq 2$, on pose : $S_n(x) = 1 - x + ... + (-1)^n x^n$.
   a. Démontrer que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$. 0,25 pt
   b. Démontrer que : $1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$. 0,75 pt
   c. Démontrer que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$. 1 pt
   d. En déduire la valeur exacte de $\int_0^1 x^2 \ln(1+x)$. 0,25 pt
3. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + ... + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$. 0,75 pt

COLLEGE LIBERMANN_DOUALA
B.P. 5351 Tél. 33 42 28 90

Année scolaire 2006 / 2007

5ème Séquence / Devoir surveillé

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 4H

EXERCICE 1 : 4 Points

On considère dans ℂ l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^5 + az^3 + bz^2 + az + 1 = 0$
où a et b sont deux nombres réels

1- Démontrer que si z_0 est une solution de (E), $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$ sont également des solutions de (E)

2- Déterminer a et b sachant que 1 + i est une solution de (E).
3- En déduire trois autres solutions de (E)
4- Achever la résolution de l'équation (E).

EXERCICE 2 : 5 Points

On considère la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice unité I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1- Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $A^{2n} = 2^n \times I$
2- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies comme suit : $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n \end{cases}$

a) Calculer A^7.
b) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

3- E est un plan vectoriel dont une base est B$(\vec{i}, \vec{j})$; f une endomorphisme de F dont la matrice relative à la base B est A.

a. Démontrer que f est bijectif et déterminer la matrice de sa bijection réciproque f^{-1} dans l a base B.
b. Soit α un nombre réel.
Montrer que s'il existe un vecteur non nul u tel que f(u) = α u, alors α = 2 ou α = -2
c. Déterminer deux vecteurs non nuls u_1 et u_2 tels que $f(u_1) = 2u_1$ et $f(u_2) = -2u_2$
d. Démontrer que $B^2 = (u_1 , u_2)$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 3 : 3 Points

Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement trois boules de cette urne, sans remise.

1. Soit k un entier naturel, $3 \leq k \leq n$. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   A_k : « Les trois boules tirées ont un numéro inférieur ou égal à k »
   B_k : « Le plus grand numéro figurant sur les trois boules tirées est k ».
2. On place les n boules au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n : chaque boîte pouvant contenir toutes ces boules. On appelle P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une boule.
   a. Démontrer que $P_n = \frac{n!}{n^n}$
   b. Soit x un nombre réel positif, démontrer que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
   c. En déduire que pour tout n, $\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2$
   d. Démontrer que la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 4 : 8 Points

1. On considère les fonctions f définies de $]0\ ;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
(1) : f est deux fois dérivables et $x^2f''(x) - 2f(x) = 0$ pour $x > 0$.
    a. Soit f une fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ et la fonction g définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^x)$
    Montrer que f vérifie les conditions (1) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = 0$
    b. Trouver toutes les fonction f de $]0\ ;+\infty[$ qui vérifient les conditions (1)
    c. Trouver les fonctions f vérifiant les conditions (1) et qui se prolongent par continuité en 0

2. Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$
    a. Calculer I_0 et I_1
    b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ (2)
    c. En déduire I_2, I_3
    d. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)} \times \frac{\pi}{2}$
    e. Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $I_{2n+1} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)} \times \frac{1}{2n+1}$
    f. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante
    g. A l'aide de (2), établir que pour $n \geq 1$, $\frac{n}{n+1} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$
    h. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$
    i. Soit $W_n = \left(\frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}\right)^2 \times \frac{1}{2n+1}$ pour $n \geq 1$, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \frac{\pi}{2}$

COLLEGE CATHOLIQUE ST CHARLES BORROMEE Année scolaire 2006 / 2007

1ère Séquence – Samedi 14 Octobre 2006

Tle C	DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES (01)	Durée : 3 Heures

Instructions :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez.
La rédaction est importante. Soyez propre et clair. (Cette dernière rubrique est noté sur 1 pt = bonus)

Exercice 1 (4 points) / ≅ 30 min

Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ — 1,5 pt
2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})\sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$
   a) Justifier que pour tout $x \in D_f$, $g(x) = 2\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$ — 0,5 pt
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ — 0,5 pt
   c) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})\right]$ — 1,5 pt

Exercice 2 (4 points) / ≅ 30 min

Soit f la fction définie sur IR par : $f(x) = 4x^3 - 3x - \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer f(-1) ; f($-\frac{1}{2}$) ; f(0) ; f(1) — 1 pt
2. Justifier que l'équation f(x)=0 admet trois solutions distinctes, comprises entre –1 et 1 — 1 pt
3. Posons $x = \cos\alpha$
   a) Exprimer $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$ — 0,5 pt
   b) Déterminer les solutions de l'équation f(x)=0 — 1,5 pt

Exercice 3 (4 points) / ≅ 30 min

On considère un triangle ABC de sens direct et on construit à l'extérieur de ce triangle trois triangles ACQ ,BAR et CBP rectangle et isocèle respectivement en A ,B et C.
Soient P', Q' et R' les milieux respectifs des segments [BP] , [CQ] et [AR].

L'objectif est de montrer que les triangles ABC, PQR et P'Q'R' ont le même centre de gravité.

On considère le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) et soient a ,b , c ,p ,q , r , p' ,q' et r' les affixes respectifs des points A ,B ,C,P,Q,R ,P' ,Q' et R'.

1. Faire une construction illustrant les données précédentes. — 1 pt
2. a) Montrer que $p' = \dfrac{b - ic}{1 - i}$ puis écrire q' en fonction de a et c ; r' en fonction de a et b. — 1 pt
   b) Calculer p'+q'+r' en fonction de a , b et c — 0,5 pt
   puis en déduire que les triangles ABC et P'Q'R' ont le même centre de gravité G d'affixe g. — 0,5 pt
3. Exprimer chacun des complexes p ,q et r en fonction de a ,b et c — 0,5 pt
   puis montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité G. — 0,5 pt

<u>Exercice 4</u> (8 points) / ≅ 60 min

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f'(x) = \dfrac{\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)}{2x^2}$ 0,5 pt

   En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$ (on fera apparaître le calcul des limites) 1 pt

2. On considère la suite numérique (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

   a) Calculer U_1 et U_2 .
   On donnera les résultats sous forme de fraction puis sous forme décimale arrondis à 10^{-5} près 1 pt

   b) Démontrer par récurrence que :

      i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{2} < U_n \leq \frac{3}{2}$ 1 pt

      ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} < U_n$ 1 pt

> Il résulte des questions précédentes que la suite (U_n) est décroissante et minorée.
> Nous établirons plus tard que de telles suites sont convergente et de limite l solution de l'équation $f(x) = x$

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et en déduire la limite l de la suite (U_n) 1 pt

4. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$ 1 pt

   b) En déduire, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 < U_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(U_0 - \sqrt{2}\right)$ 1 pt

   c) En déduire de nouveau la limite de la suite (U_n) 0,5 pt

" La vie est un long fleuve tranquille " a dit quelqu'un .

COLLEGE CHEVREUL
BP 4093 Douala

Année scolaire 2006 / 2007

Evaluation de fin de 1ère Séquence

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 3 Coefficient : 6

L'épreuve comporte quatre exercices obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 : /6,5 pts

1. Démontrer par récurrence que 4^n+6n-1 est divisible par 9. (1 pt)
2. Prouver par récurrence qu'à partir d'un certain rang que l'on précisera, l'inégalité suivante : $3^n<n!$ (1 pt)
3. Calculer la limite de la suite suivante : $U_n=\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+1}}$. (0,5 pt)
4. La suite (U_n) est définie par : $U_0=a(a>0)$ et $U_{n+1}=\sqrt{U_n}$

a) Pour $a>1$:

- démontrer que la suite (U_n) est strictement décroissante. (0,5 pt)
- Etablir que, pour tout entier naturel n : $|U_{n+1}-1|\leq\frac{1}{2}|U_n-1|$ (0,5 pt)
- En déduire la limite de la suite U_n. (0,5 pt)

b) Pour a = 1 :

- Prouver que la suite (U_n) est constante. (0,5 pt)
- Préciser sa limite. (0,5 pt)

c) Pour $0<a<1$:

- Démontrer que la suite (U_n) est strictement croissante. (0,5 pt)
- Etablir que, pour tout entier naturel n $|1-U_{n+1}|\leq\frac{1}{1+a}|1-U_n|$ (0,5 pt)
- En déduire la limite de la suite (U_n). (0,5 pt)

EXERCICE 2 : /3,5 pts

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$; $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

   a) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires. (0,5 pt)
   b) Déterminer le vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormale. (0,5 pt)

2. Soit trois vecteurs non coplanaires $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$; nous nous proposons de construire par la méthode d'Ehrard Schmidt une base orthonormale de l'espace.

   a) Soit $\vec{u}'=u$ et $\vec{v}'=k\vec{u}+\vec{v}$ où $k\in R$. Déterminer k pour que les vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ soient orthogonaux. (0,5 pt)
   b) Soit $\vec{w}'=a\vec{u}'+b\vec{v}'+\vec{w}$ où $a\in R$ et $b\in R$. Déterminer a et b pour que $\vec{w}'$ soit orthogonal à $\vec{u}'$ et à $\vec{v}'$. La base $(\vec{u}',\vec{v}',\vec{w}')$ est donc orthogonale. (1 pt)
   c) Soit $\vec{u}(2;-1;-2)$; $\vec{v}(1;-1;1)$ et $\vec{w}(2;1;-3)$. Calculer $\vec{u}',\vec{v}'$ et $\vec{w}'$ en choisissant les vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}',\vec{v}'$ et $\vec{w}'$ en déduire une base orthonormale de l'espace. (1 pt)

PROBLEME : /10 pts

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A.1. On prend pour point M_0 l'origine O du repère ; soit alors M_1 le point du plan P tel que $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{i}$. On fixe un nombre réel r > 0 et un nombre réel θ dans $R-\{k\pi, k\in Z\}$. Soit M_2 le point du plan P tel que $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=r\|\overrightarrow{M_0M_1}\|$ et $(\overrightarrow{M_0M_1};\overrightarrow{M_1M_2})=\theta$. Calculer l'affixe V_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe V_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$. (1 pt)

2.- Les points M_0, M_1, M_2 ayant été définis ci-dessous pour tout $n\ \geq 1$ dans N on défini le point M_{n+1} à partir des points M_{n-1} et M_n par $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|=r\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\|$ et $(\overrightarrow{M_{n-1}M_n};\overrightarrow{M_nM_{n+1}})=\theta$. On obtient ainsi une suite de points M_0, M_1, M_2 .... M_n et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1]$; $[M_1M_2]$ ...... $[M_nM_{n+1}]$ ... est appelé « polygone »

a) Montrer que $\forall n\geq 1 \qquad V_n=re^{1\theta}V_{n-1}$. (1,5 pt)

b) Déduisez-en pour tout entier naturel $n\geq 0$ l'expression de V_n en fonction de n, r et θ. (1 pt)

c) Dans cette question on suppose $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$. Calculez V_n pour $0\leq n\leq 3$ et placez les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 en prenant 8 cm comme unité de longueur. (1pt x 2)

B.- Dans toute la suite du problème on propose $0<r<1$ et pour tout $n\geq 0$ on note Z_n l'affixe du point M_n.

1. Calculez Z_0 ; Z_1 et Z_2. (0,5pt x 3)

2. Pour tout $n\geq 0$, exprimez V_n en fonction de Z_n et Z_{n+1} ; déduisez-en que pour tout $n\geq 1$; $Z_n=V_0+V_1+....+V_{n-1}$. (0,5pt x é)

3. On rappelle que pour tout nombre complexe $Z\neq 1$:

$1+Z+Z^2+....+Z^{n-1}=\frac{1-Z^n}{1-Z}$. Calculez pour tout $n\geq 0$ Z_n en fonction de n, r et θ. (0,5 pt)

4.a) Démontrez que le module du nombre complexe $Z_n-\frac{1}{1-re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

b) On note Ω le point du plan P d'affixe $w=\frac{1}{1-re^{i\theta}}$. Interprétez géométriquement le résultat de la question a). (1 pt)

LYCEE JOSS - DOUALA
Département de Mathématiques

Année scolaire 2006 / 2007

Evaluation de fin de 1ère Séquence

Tle C	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	Durée : 2
		Coefficient : 6

ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1 1,5 point

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul,on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Démontrer de deux manière différentes que $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)}{6}$

Exercice 2 1,5 point

1. Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls .
   Démontrer que si $ab < c$ alors $a + b \leq c$ — 0,5 pt
2. Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel b. Sachant que $a + b + r = 3025$ et $q = 50$, rétablir la division. — 1 pt

Exercice 3 1,5 point

Soit x, y et z trois entiers naturels tels que l'écriture en base x de y soit $\overline{1000}$

et que l'écriture en base x de z soit $\overline{50}$

1. Montrer que l'on peut, sans connaître x, exprimer y^2 et yz dans le système de base 10 — 0,5 pt
2. Déterminer x pour que $yz = 6480$ dans le système décimal — 0,25 pt
   Ecrire alors $y^2 + yz$, z^4 en base x, puis comparer y^2 et z^4 — 0,75 pt

Exercice 4 4,25 points

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation
   (E) : $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (4 + 6i)z - 8 = 0$
   a) Démontrer que (E) admet une solution réelle et une seule — 0,5 pt
   b) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. — 1,5 pt
   c) Soit A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que A, B et C sont les points d'un cercle dont on déterminera le centre. — 0,75 pt
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 - (2 + 3i)z^4 + (4 + 6i)z^2 - 8 = 0$ — 1,5 pt

Exercice 5 1,25 point

Soit P le polynôme à variable complexe z définie par : $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$

1. Démontrer que si z0 est racine de P, alors $\frac{1}{z_0}$ et $\overline{z_0}$ le sont aussi — 0,25 x 2 pt
2. a) Calculer P(1 + i) — 0,25 pt
   b) Résoudre l'équation P(z) = 0 — 0,5 pt

Bonne Chance

« One of the mysteries of the Great Pyramid (of Egypt) at this point is that many archaeologists and explorers have surveyed it and obtained different measurements of its height »
Max TOTH and Greg NIELSEN in Pyramid Power, 1973 P. 57

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
DELEGATION PROVINCIALE DU LITTORAL
Inspection Provinciale Chargée de l'enseignement des Sciences
Sous-section MATHEMATIQUES

Année scolaire 2006 / 2007

Évaluations harmonisées Provinciales (Littoral) / *3ème Séquence – Décembre 2006*

Tle C / E	Épreuve de MATHÉMATIQUES	Durée : 4H Coef. :

Exercice 1 (5 points)

Dans tout l'exercice, le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. On considère le polynôme complexe P(z) suivant : $P(z) = z^3 - 4z + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. a) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Démontrer que si $P(z_0) = 0$ alors $P(\overline{z_0}) = 0$ — 0,5 pt

   b) On sait que l'équation $P(z) = 0$ admet trois solutions distinctes ou confondues.
   Démontrer qu'elle possède au moins une solution réelle que l'on notera α. — 1 pt

2. a) Déterminer les deux valeurs de λ pour lesquelles l'équation $P(z) = 0$ admet une racine complexe non réelle de module 2. — 1 pt

   b) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ pour chacune des valeurs de λ ainsi trouvées. — 1,5 pt

II. On considère l'application f de $P \setminus \{i\}$ dans P définie par
$f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z - 2 + i}{iz + 1}$.

Calculer $z' + i$ en fonction de z.
Soit B le point d'affixe i. Déterminer l'image par f du cercle de centre B et de rayon $2\sqrt{2}$. — 1 pt

Exercice 2 (5 points) / Série C uniquement

1. Soient a et b deux nombres réels non nuls.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :
   $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-i}b^{i-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ — 1 pt
2. Démontrer en utilisant les congruences que pour tout entier naturel n, le n nombre entier
   $A = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17. — 0,75 pt
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne le point A(12 ;18).
   On désigne par B un point de l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$ et C un point de l'axe $\left(O, \vec{j}\right)$ tels que
   $\text{mes}\,\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)} = \dfrac{\pi}{2}$. On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

   a) Démontrer que le couple (x , y) est une solution de l'équation (E) : $2X + 3Y = 78$ — 1 pt

   b) Trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 dans $\mathbb{Z}$, à partir de la définition de B et C. — 0,5 pt

   c) Déterminer tous les couples (x , y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). — 1 pt

   d) Déterminer tous les couples (B , C) de points tels que x et y soient des nombres entiers relatifs vérifiant $-6 \leq x \leq 21$ et $-5 \leq y \leq 14$. — 0,75 pt

Exercice 2 (5 points) / Série E uniquement

Soit u la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $u(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$

Soient h et h_1 les fonctions numériques de la variable réelle x définie par : $h(x) = u(\tan x)$ et $h_1(x) = \dfrac{\sin x - 3\cos x}{\sin x - \cos x}$

1. a) Ecrire h(x) en fonction de tan x et en déduire l'ensemble de définition de h, noté D_h — 0,25 pt + 0,5 pt

   b) On note D_{h_1} l'ensemble de définition de h_1.

   Montrer que $D_{h_1} = D_h$ et que h et h_1 coïncide sur D_h — 0,75 pt

2. a) Montrer que h est périodique, de période π . — 0,25 pt

   b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier les variations de la fonction h sur $D_E = \left[0\ ,\ \dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}\ ,\ \pi\right]$ — 0,25 pt

3. a) Etudier les variations de h sur D_E et dresser son tableau de variations — 1,5 pt

   b) Tracer la courbe représentative (C_h) de h sur D_E dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = 0{,}5$ cm — 1 pt

   c) Déduire de ce qui précède le tracé de (C_h) sur D_h

   Note : On admettra que la représentation graphique de h présente une inflexion au point de coordonnées $\left(\dfrac{3\pi}{4}\ ,\ 2\right)$

Exercice 3 (5 points)

L'espace $(\mathcal{E})$ est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les points A(1 ; 0 ; 0) ; B(1 ;-1 ; 1) ; C (-2 ; 0 ; 1) ; D(-2 ; 1 ; 0) et M(x ; y ; z).

1. On considère le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.
   Déterminer le triplet (x, y, z) de coordonnées de M pour que l'on ait simultanément $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$ — 1,25 pt

2. Déterminer le lieu géométrique des points G_λ, barycentres des points pondérés
   (A, λ) ; $(B, \lambda-1)$; $(C, 1-2\lambda)$; $(D, 1)$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$
   (Indication : ABCD est un parallélogramme non aplati). — 1,25 pt

3. Soit H un point de $(\mathcal{E})$ tel que ABCH soit un tétraèdre,I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [CH]. Soit α un réel et H_α le barycentre lorsqu'il existe des points pondérés $(A, 2\alpha+1)$; (B, α) ; $(C, \alpha-2)$; $(H, -3)$.

   a) Montrer que H_α est un point du plan (IJK)
   On rappelle que pour tout point M de $(\mathcal{E})$ on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ — 1,5 pt

   b) Soit E le milieu de [IJ] et F le barycentre des points pondérés (J,1) ; (K ;-3).
   Montrer que H_α est un point de la droite (EF). — 1 pt

Exercice 4 (5 points)

I. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a , b]$, $a < b$, telle que $f([a , b]) \subset [a , b]$.
On suppose de plus qu'il existe un réel $k \in]0 ; 1[$ tel que :
pour tout $x \in [a , b]$, on a $|f'(x)| \leq k$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[a , b]$.
   (On pourra considérer la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$) 1,25 pt
2. Déduire de 1.) que l'équation $x^3 - 4x + 2 = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0 ;1]$ 1,25 pt

II. Soit g la fonction numérique définie de $]0 ; 2[$ vers $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto \tan\left[\frac{\pi}{2}(x - 1)\right]$.

1. a) Justifier que g est une bijection $]0 ; 2[$ sur $\mathbb{R}$. 1 pt
   b) Soit h la fonction réciproque de g. Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. 0,5 pt
2. On considère la fonction $k : x \mapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Calculer $k'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puis en déduire explicitement $k(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$. 1 pt

REPUBLIQUE DU CAMEROUN	**REPUBLIC OF CAMEROON**
Paix – Travail – Patrie	***Peace – Work – Fatherland***
MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES	**MINISTRY OF SECONDARY EDUCATION**
-------------------------------	-------------------------------
INSPECTION GENERALE DES ENSEIGNEMENTS	**GENERAL INSPECTORATE OF EDUCATION**
-------------------------------	-------------------------------
INSPECTION DE PEDAGOGIE CHARGEE DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES	**INSPECTORATE OF PEDAGOGY IN CHARGE OF SCIENCES**
SOUS SECTION MATHEMATIQUES	

BACCALAUREAT C
EPREUVE ZERO DE MATHEMATIQUES Durée : 4 h

L'épreuve comporte trois exercices et un problème sur deux pages numérotées 1 et 2. L'utilisation de la calculatrice et du matériel usuel de géométrie est autorisée.

Exercice 1 (3,5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit Ψ la transformation du plan qui au point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-5x+12y-24}{13} \\ y' = \dfrac{12x+5y+16}{13} \end{cases}.$$

I/ 1. Déterminer l'ensemble (D) des points M du plan invariants par Ψ. **0,5 pt**

2. Soit M un point du plan n'appartenant pas à (D). **0,5 pt**

a) Montrer que la droite (MM') est perpendiculaire à (D). **0,5 pt**

b) Montrer que le milieu K du segment [MM'] appartient à (D). **0,5 pt**

3. En déduire la nature de la transformation Ψ. **0,5 pt**

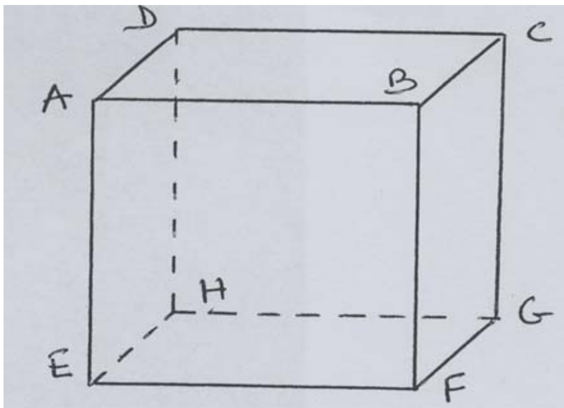
II/ 1. Déterminer l'ensemble (D_1) des points M du plan pour lesquels Ψ(M) est un point de l'axe $(O, \vec{u})$. **0,5 pt**

2. Déterminer les points de (D_1) dont les coordonnées sont des entiers. **0,5 pt**

III/ Déterminer l'ensemble (D_2) des points M(x, 2) pour lesquels Ψ(M) a des coordonnées entières. **0,5 pt**

Exercice 2 (3,25 points)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. **0,5pt**



1. Le repère $R = (E, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$ est-il direct ?

2. a) Déterminer dans ce repère, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$. **0,25 pt**

b) En déduire l'aire du triangle *ACF*. **0,75 pt**

3. a) Déterminer dans le repère *R* les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. **0,5pt**

b) En déduire le volume du tétraèdre *ABCF*. **0,75 pt**

4. Calculer de deux manières différentes la distance du point *B* au plan (*ACF*). **0,5 pt**

Exercice 3 (3,25 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (*Unité sur les axes 2 cm*).

1. Soient ($\mathcal{H}$) et ($\mathcal{E}$) les courbes définies respectivement par :

($\mathcal{H}$) : $9x^2 - 36x - 4y^2 = 0$

$(\mathscr{E}) : 9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

a) Déterminer les équations réduites de $(\mathscr{H})$ et de $(\mathscr{E})$. **0,5 pt**

b) En déduire la nature de chacune de ces courbes. **0,5 pt**

c) Préciser, pour chaque courbe, quand c'est possible, l'axe focal, les sommets, les asymptotes et l'excentricité. **1 pt**

2. Soit $(\mathscr{T})$ la courbe d'équation $4y^2 = |9x^2 - 36x|$.

a) Montrer que $(\mathscr{T})$ est la réunion de deux coniques. **0,25 pt**

b) Tracer $(\mathscr{T})$. **1 pt**

Problème (10 points)

Soit f la fonction définie sur E = $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

A/ 1. a) Calculer les limites de f aux bornes de E. **1 pt**

b) Vérifier que pour tout x de E, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}\right)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat. **0,5 pt**

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **0,75 pt**

3. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$. **1,5 pt**

B/ 1. Montrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $f(x) \in [0 ; 1]$. **0,5 pt**

2. a) En calculant $f''(x)$, montrer que la dérivée f' de f est croissante sur $[0 ; 1]$. **0,5 pt**

b) En déduire que pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$. **0,5 pt**

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0, 1]$ une solution unique α. **0,25 pt**

d) Prouver que pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|x - \alpha|$. **0,5 pt**

3. Soit (u_n) la suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2} \end{cases}.$$

a) Etudier le sens de variation de la suite (u_n). **0,5 pt**

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$. **0,5 pt**

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un nombre l et que $0 \leq l \leq 1$. **0,5 pt**

4. a) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha| \text{ et que } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$ **0,5 pt**

b) En déduire la limite l de la suite (u_n). **0,5 pt**

C/ Soit t un réel strictement inférieur à -3. On note I_t l'aire de la portion du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = t$ et $x = -3$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[t ; -3]$, on a $-e^x \leq \dfrac{e^x}{x+2} \leq \dfrac{e^x}{t+2}$. **0,5 pt**

2. En déduire que $\dfrac{e^t - e^{-3}}{t+2} \leq I_t \leq e^{-3} - e^t$. **0,5 pt**

3. Donner un encadrement de $\lim\limits_{t\to-\infty} I_t$. **0,5 pt**

Baccalauréat blanc février 2008

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A. R. O. C.
Pré-requis : forme algébrique d'un nombre complexe

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur, si et seulement si : $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel, si et seulement si : $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z \times \overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal . On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c et dont le centre du cercle circonsrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a+b+c$.

Partie B : étude d'un cas particulier
On pose $a = 3+\text{i}$; $b = -1+3\text{i}$; $c = -\sqrt{5}-\text{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a+b+c$, puis vérifier graphiquement que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Partie C : étude du cas général
ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :
$$a \times \overline{a} = b \times \overline{b} = c \times \overline{c}.$$
2. On pose $\omega\overline{b} \times c - b \times \overline{c}$.
   a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans la partie A, démontrer que ω est un imaginaire pur.
   b. Verifier l'égalité $(b+c)\left(\overline{b}-\overline{c}\right) = \omega$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{\omega}{|b-c|^2}$.
   c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.
3. Soit H le point d'affixe $a+b+c$.
   a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AH}}$ et $\overrightarrow{\text{CB}}$.
   b. Prouver que $\left(\overrightarrow{\text{CB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.
   (On admet de même que $\left(\overrightarrow{\text{CA}}\ ;\ \overrightarrow{\text{BH}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier relatif).
   c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

EXERCICE 2 **4 points**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

a. Étudier le sens de variation de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal . (On prendra comme unité 2 cm).

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\ \vec{\imath}\right)$ d'abscisses respectives $u_0,\ u_1,\ u_2$ et u_3.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2},\ f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

d. Prouver que la suite (u_n) converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$. En déduire sa valeur.

EXERCICE 3 **5 points**

non spécialité mathématiques

Un parachutiste tombe à la vitesse de 55 m.s^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$ en secondes) à ce moment-là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $v(t)$ la vitesse en m.s^{-1} et $d(t)$ la distance parcourue en mètres à l'instant t.

On admet que y est solution de l'équation différentielle $v'(t) = 10\left(1 - \dfrac{v^2(t)}{25}\right)$: (E)

Par ailleurs, il a été établi que la distance parcourue à l'instant t est : $d(t) = \dfrac{1}{v(t) - 5}$.

1. Expliquer pourquoi, pour un temps suffisamment grand, là vitesse du parachutiste est stabilisée.

On se propose donc de trouver une équation différentielle vérifiée par d et de la résoudre afin de déterminer la vitesse du parachutiste, lorsque celle-ci est stabilisée.

2. Questions de cours :

a. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' - my = 0$.

b. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle : $y' - my = b$.

3. **a.** Montrer que : $v(t) = \dfrac{1}{d(t)} + 5$.

b. Exprimer $v'(t)$ en fonction de $d(t)$ et de $d'(t)$.

c. Exprimer $v^2(t)$ en fonction de $d(t)$.

d. Prouver que y est solution de (E) si et seulement si, d est solution de l'équation : (E$'$) $\quad d' = 4d + 0,4$.

4. Donner la valeur de $v(0)$, puis calculer $d(0)$.

En déduire l'expression de la distance $d(t)$ parcourue à l'instant t.

5. Exprimer alors $v(t)$ en fonction de t ; puis calculer la limite de $v(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln\left(e^x + kx\right) - x.$$

Soit $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k, dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A. Étude de la fonction f_1 définie sur $[0\,;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$.

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f_1(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f_1.

Partie B. Étude et propriétés des fonctions f_k. (rappel : k est un par215amètre réel strictement positif)

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f_k(x) = \ln\left(1+k\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction f_k.
   b. Établir que pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   c. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a $f_k(x) \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{e}}$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_k à $\mathscr{C}_k$ au point O.
4. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_p$, et $\mathscr{C}_m$.
5. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ainsi que leurs tangentes respectives T_1 et T_2 en O.

EXERCICE 5 **5 points**

Spécialité mathématiques

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}$.
   a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad [7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad [7]$ équivaut à $x \equiv 4 \quad [7]$.
   c. Si a est un élément de A, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad [7]$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
   On considère l'ensemble $A_p = \{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.
   a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad [p]$.
   b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1 \quad [p]$.
   c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \quad [p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.
   d. Application : $p = 31$.
   Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1 \quad [31]$ et $3x \equiv 1 \quad [31]$.
   À l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation
   $6x^2 - 5x + 1 = 0 \quad [31]$.

Lycée de Bepanda
Département de Mathématiques Année scolaire : 2009/2010

Classe : $T^{le}C$ Durée : 4h ; coef : 5

Epreuve de Mathématiques. 4^{eme} séquence

L'épreuve comporte deux exercices et un problème à deux parties I et II.

Exercice 1 (4,5pts).

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. u est le nombre complexe $-\frac{1}{2}(1+i)$. On construis la suite A_n de la façon suivante : $A_0 = 0$; A_1 est le nombre complexe d'affixe i puis pour tout entier naturel $n \geq 2$, A_n est l'image de A_{n-2} par la similitude directe de centre A_{n-1} de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{5\pi}{4}$. On note Z_n ml'affixe du point A_n.

1. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $Z_n - Z_{n-1} = u(Z_{n-2} - Z_{n-1})$ (1) [0,5pt]
   (b) Démontrer à partir de (1) par récurrence que $Z_n - Z_{n-1} = (-u)^{n-1}.i$ (2) [0,5pt]
   (c) Déduire de (2) que $\forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$, $Z_n = \dfrac{i(1-(-u)^n)}{1+u}$. [0,5pt]
   (d) Montrer que $Z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ [0,5pt]
2. S est la similitude direct qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2. [0,5pt]
   (a) Montrer que S est unique. [0,5pt]
   (b) Déterminer l'écriture complexe de S et en déduire tous ses éléments caractéristiques.[1pt]
3. On pose $S_4 = SOSOSOS$.
   (a) Donner l'écriture complexe de S_4 et en déduire sa nature . [0,5pt]
   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$ Ω, A_n, A_{n+1} sont alignés (Ici, Ω est le centre de S). [0,5pt]

Exercice 2 (4,5pts).

a est un réel strictement positif, f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_a(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+a^2}{x}\right)$ et $(\mathcal{C}_a)$ sa courbe représentative sur la plan muni du repère orthonormal (O, I, J) d'unité $2\,cm$.

1. Etudier en fonction de a les variations de la fonction f_a. [1pt]
2. On note h l'homothétie de centre O et de rapport a qui transfome $M(x;y)$ en $M'(x';y')$
   (a) Donner l'expression analytique de h. [0,5pt]
   (b) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_a)$ est l'image de $(\mathcal{C}_1)$ par h. [0,5pt]
3. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ et on considère la suite x_n définie par :$x_0 = 2,\ x_1 = g(x_0)$ et pour tout n supérieur ou égal à 1, $x_n = g(x_{n-1})$.
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > 1$. [0,5pt]
   (b) On pose $x_n = 1 + \frac{1}{U_n}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = 2U_n(1+U_n)$. [0,25pt]
   (c) Prouver par récurrence que : pour tout $n \geq 1$
      i. U_n est un entier positif. [0,25pt]

ii. U_n est divisible par 2^{n+1} et non par 2^{n+2}. [0,5pt]

(d) Déduire que 1 est le seul reste de la division euclidienne de U_n par 3. [0,5pt]

(e) Démontrer que :pour tout $n \geq 2$, U_n est divisible par 5 et non par 25. [0,5pt]

PROBLEME(11pts)

I− (Γ_m) est l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) pour tout m un nombre réel,

$$(2-m)x^2 + m^2y^2 + 2(2-m)x - (2-m)(m^2-1) = 0.$$

1. Déterminer les valeurs de m pourque (Γ_m) existe. [0,25pt]
2. Dans la suite de l'exercice (Γ_m) existe.
   (a) Pour quelles valeurs de m (Γ_m) est-il un cercle ? [0,25pt]
   (b) On suppose par la suite que (Γ_m) n'est pas un cercle. Donner l'équation réduite de (Γ_m). [0,5pt]
3. On suppose que (Γ_m) a pour équation réduite $\dfrac{(x+1)^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{2-m} = 1$
   (a) Pour quelles valeurs de m (Γ_m) est-elle :
      i. Une parabole ? [0,25pt]
      ii. Un ellipse ? [0,25pt]
      iii. Une hyperbole ? [0,25pt]
   (b) On pose $m = 3$. Déterminer pour (Γ_3)
      i. L'excentricité . [0,25pt]
      ii. Les coordonnées de ses foyers F et F' dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ puis dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\Omega(-1; 0)$. [0,5pt]
      iii. Construire (Γ_3) et ses asymptotes. [0,5pt]

II− '

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$. Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa dérivée et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rappoté à un repère orthonormal (O, I, J).

1. Démontrer que la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$ est $+\infty$. [0,5pt]
2. Démontrer que la limite de f en $+\infty$ est 0; puis interpréter graphiquement le résultat. [0,5pt]
3. Pour tout x de $]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$. [0,5pt]
4. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f. [0,25pt]
5. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.(Unité de graphique : $2cm$) [1pt]

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. Interpréter géometriquement u_n. [0,25pt]
2. Montrer que si $n \leq t \leq n+1$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ et en déduire que pour tout entier naturel n non nul,$f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$. [0,75pt]
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante. [0,25pt]
4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite. [0,5pt]

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1. (a) Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et calculer $F'(x)$. [0,5pt]
   (b) En déduire le sens de variation de F. [0,5pt]
2. (a) Démontrer que, pour tout t de I à déterminer $t + 2 \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$. [0,5pt]
   (b) En déduire que, pour tout x de $[1; +\infty[$; on a $F(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$. [0,5pt]
   (c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$; $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$. [1pt]
   (d) En déduire que, pour tout x de $[1; +\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$. [0,5pt]

!!!!!!!! BONUS !!!!!!!!

On note, pour tout entier n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de la limite. [1pt]

LYCEE DE BIYEM-ASSI
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
`www.easy-maths.org` **ANNEE SCOLAIRE : 2010-2011**

DEVOIR SEQUENTIEL N° 1

Classe : T^le^ C ; Durée : 2h30 ; Coef : 06

Exercice 1 : (6 points)

1. On considère l'ensemble $E = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.
   Déterminer les paires $\{a;b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1. [$2pts$]
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   - **a.** Montrer que l'entier $(n-1)!+1$ n'est pas paire. [$1pt$]
   - **b.** Montrer que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15. [$1pt$]
3. - **a.** Le nombre $2^{11}-1$ est-il premier ? [$0,5pt$]
   - **b.** Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Montrer que $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1. [$1,5pts$]

Exercice 2 : (5 points)

Soit n un entier naturel.

1. - **a.** Déterminer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7. [$1,5pts$]
   - **b.** En déduire que pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7. [$0,5pt$]
2. - **a.** Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ est divisible par 7. [$0,5pt$]
   - **b.** En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division euclidienne par 7. [$0,5pt$]
   - **c.** Calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7. [$1pt$]

Problème : (9 points)

I. f est la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. [$0,5pt$]
2. Déterminer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$. [$1pt$]
3. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1 et donner une interprétation graphique des résultats. [$1,5pts$]
4. Justifier pourquoi on peut étudier la fonction f sur $]0;1]$. [$0,75pt$]
5. - **a.** Démontrer que $\forall x \in]0;1]$, $f'(x) = \dfrac{-1-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.
   - **b.** Dresser le tableau de variation de f sur $]0;1]$.
6. Soit $k \in [1;+\infty[$. Démontrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1]$. [$0,75pt$]
7. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathcal{D}_f$. [$1pt$]

II. g est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-a}$ où $a \in \mathbb{R}$. On note $g^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de g.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$. [$1,5pts$]

MINESEC
Lycée de Japoma
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire 2011-2012
Classe : T ^{le} C Durée : 4 heures
Baccalauréat blanc, Mai 2012
Coef 5

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **3 points**

Une boîte contient 8 cubes : $\begin{cases} \text{1 gros rouge et 3 petits rouges} \\ \text{2 gros verts et 1 petit vert} \\ \text{1 petit jaune} \end{cases}$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».
   - **a.** Calculer la probabilité de A. [0,25pt]
   - **b.** Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$. [0,25pt]
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.
   - **a.** Déterminer la loi de probabilité de X. [0,75pt]
   - **b.** Calculer l'espérance mathématique de X. [0,5pt]
3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.
   - **a.** Déterminer P_n en fonction de n. [0,75pt]
   - **b.** Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,99$. [0,5pt]

EXERCICE 2 **3 points**

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On considère l'application f du plan dans lui même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} 2x' = x - \sqrt{3}y \\ 2y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$.
   - **a.** Déterminer l'écriture complexe de f. [0,5pt]
   - **b.** Déduire la nature et les caractéristiques de f. [0,5pt]
2. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$31x^2 + 21y^2 + 10\sqrt{3}xy + (36\sqrt{3} - 16)x + (16\sqrt{3} + 36)y = 12$$

   et (Γ') son image par f.

a. Déterminer une équation de (Γ'). [0,5pt]

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). [0,5pt]

c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). [0,5pt]

d. Construire (Γ) et (Γ') dans le plan. [0,5pt]

EXERCICE 3 — 4 points

Soit a *un entier naturel qui s'écrit* $a = r^{\alpha}s^{\beta}$ *avec* r *et* s *deux nombres premiers distincts et* α, β *deux entiers non nuls. Le but de cet exercice est de montrer que* $a^n = p^2$ *où* n *est le nombre de diviseurs de* a *et* p *est le produit de tous les diviseurs de* a.

1. On suppose que $a = 200$
   - **a.** Montrer que a n'a que deux facteurs premiers distincts dans sa décomposition. Que valent alors r et s dans ce cas? [0.5pt]
   - **b.** Quel est le nombre de diviseurs n de a. [0.5pt]
   - **c.** Déterminer p, produit de tous les diviseurs de a. [0.5pt]
   - **d.** Vérifier qu'on a bien $a^n = p^2$ [0.5pt]
2. On suppose à présent que $a = r^{\alpha}s^{\beta}$ (r et s premiers distincts) α et β non nuls.
   - **a.** Déterminer n le nombre de diviseurs de a. [0.5pt]
   - **b.** Déterminer le produit p de tous les diviseurs de a. [0,75pt]
     (On montrera que $p = r^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\beta+1)}{2}} s^{\frac{\beta(\beta+1)(\alpha+1)}{2}}$)
   - **c.** Déduire alors que $a^n = p^2$. [0,75pt]

On rappelle que $1 + 2 + ... + \alpha = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}$. *On démontre de manière générale que si un enier non nul* n *admet* k *diviseurs, le produit* p *de ces diviseurs est défini par* $p^2 = n^k$.

PROBLEME — 10 points

Partie A : Résolution d'une équation différentielle — [2 points]

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée $(H) : y'(x) + y(x) = 0$. [0,5pt]
2. On pose $u(x) = y(x)e^x$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si u est solution d'une équation différentielle de la forme $u'(x) = q(x)$ où q est une fonction que l'on déterminera. [1pt]
3. Déterminer u et en déduire les solutions de (E). Quelle est la solution qui prend la valeur $\ln 2$ en 0? [0,5pt]

Partie B : étude d'une fonction f et construction de sa courbe — [3 points]

Onconsidère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'unité graphique est 1cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** On rappelle que : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$. [0,25pt]
   - **b.** Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$. [0,25pt]
     Déterminer la limite de f en $+\infty$. [0,25pt]
   - **c.** En Déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera. [0,25pt]
2. On considère la fonction g définie sur l'inntervalle $]-1; +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. [0,25pt]

b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$. [0,25pt]

3. **a.** Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(e^x)$, f' désignant la fonction dérivée de f. [0,5pt]

b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations. [0,5pt]

4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$. [0,5pt]

Partie C : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ **[2,5 points]**

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Etudier le sens de variations de la fonction $F(x)$. [0,25pt]

2. **a.** Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+e^t} = 1 - \dfrac{e^t}{1+e^t}$

et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+e^t}\,dt$. [0,5pt]

b. En déduire à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$. [0,5pt]

c. Vérifier que $F(x)$ peut sécrire sous les formes suivantes : [0,5pt]

$$\begin{array}{lrcl} (1) & F(x) & = & x - \ln(1+e^x) - f(x) + 2\ln 2. \\ (2) & F(x) & = & \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2. \end{array}$$

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$. [0,5pt]

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Donner une interpretation graphique de ce résultat. [0,25pt]

Partie D : Etude d'une suite **[2,5 points]**

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} e^{-k}\ln(1+e^k).$$

1. Hachurer sur la reprŕesentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n. [0,5pt]

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). [0,5pt]

3. **a.** Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a : [0,5pt]

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt.$$

b. Comparer u_n et $F(n)$. [0,5pt]

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? [0,5pt]

Faites les mathématiques et elles vous feront du bien

Année scolaire : 2010-2011
Classe : T^{le} C **Durée : 4 heures**
Baccalauréat blanc **Mai 2011**
Coef : 05

Épreuve de Mathématiques

Examinateur : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **2 points**

On considère l'équation :

$$8X + 5Y = 100 \quad [E']$$

d'inconnue le couple d'entiers relatifs $(X,\ Y)$.

1. Résoudre $[E']$. [1pt]
2. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge (*L'histoire ne révèle pas ce qu'ils faisaient*). Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ? [1pt]

EXERCICE 2 **5 points**

I- Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$. Unité graphique 2cm. Soit f la transformation du plan qui à tout point $M(x, y)$ associe le point M' tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de f. [0,5pt]

   b. En déduire que f est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. [0,5pt]

2. Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ') son image par f.

   a. Déterminer une équation de (Γ'). [0,5pt]

   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ'). [0,5pt]

   c. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ). [0,5pt]

   d. Construire (Γ) et (Γ') dans le plan. [0,5pt]

II- On considère la parabole $(\mathscr{P})$ d'équation $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. On considère trois points A, M et N appartenant à la parabole $(\mathscr{P})$ d'ordonnées respectives a, m et n et tels que $(AM)\perp(AN)$.

1. Déterminer les abscisses des points A, M et N. [0,5pt]
2. Démontrer que les droites (AM) et (AN) sont perpendiculaires si et seulement si [0,5pt]

$$4p^2 + a^2 + a(m + n) + mn = 0.$$

3. Déterminer une équation de la droite (MN) et montrer que ces droites passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées. [0,5pt]
4. Déterminer le lieu de I lorsque A décrit $(\mathscr{P})$. [0,5pt]

EXERCICE 3 **5 points**

On considère trois urnes U, V et W contenant chacne des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0,4$; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0,5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0,7$.

I- On tire une boule de U, une boule de V et une boule de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules. Soit (E) la conique d'équation $\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c \frac{y^2}{b^2} = 1$ et (u_n) la suite définie de façon récurrente par $au_{n+1} = bu_n + c$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité pour que :

1. (E) soit un cercle ; [0,5pt]
2. (E) soit une ellipse ; [0,5pt]
3. (E) soit une hyperbole équilatère ; [0,5pt]
4. (u_n) soit une suite arithmétique. [0,5pt]

II- Un jeu consiste à tirer une boule de chaque urne :

- Dans U, une boule n°1 tirée fait gagner 40 F tandis que la n°2 fait perdre 60F ;
- Dans V, une boule n°1 tirée fait gagner 50 F tandis que la n°2 fait perdre 50F ;
- Dans W, une boule n°1 tirée fait gagner 70 F tandis que la n°2 fait perdre 30F ;

1. Quelles sont les sommes possibles qu'un joueur peut avoir à l'issu de ce jeu ? [0,5pt]
2. On appelle X la variable aléatoire réelle donnant la somme algébrique (en franc) obtenue par un joueur à la fin des tirage.
   a. Définir la loi de probabilité de X. [0,5pt]
   b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. [0,5pt]
3. Déterminer la probabilité pour qu'à la fin des trois tirages, un joueur ait une somme algébrique strictement positive ($P(X > 0)$). [0,5pt]
   Lorsque $X > 0$, on dit que le joueur a gagné, et dans le cas contraire le joueur a perdu.
4. On réitère le jeu n fois et on appelle Y la variable aléatoire donnant le nombre de fois que le joueur gagne au cours de n tirages.
   a. Déterminer la loi de probabilité de Y. [0,5pt]
   b. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de Y. [0,5pt]

PROBLEME **8 points**

Partie A[**1,5 point**] *(Valeur approchée d'un zéro)*

On définit la fonction $r(x) = x + e^{3x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} r(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} r(x)$. [0,5pt]
2. Calculer la dérivée $r'(x)$ de $r(x)$ et en déduire le tableau de variations de r. [0,25pt]
3. Déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r(\alpha) = 0$. [0,25pt]
4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. [0,5pt]

Partie B [**1 point**] *(Etude d'une fonction intermédiaire)*

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1 - 3x}{x + e^{3x}}$.

5. Déterminer l'ensemble de définition de g. [0,5pt]
6. Etudier le signe de g sur son ensemble de définition. [0,5pt]

Partie C [**2,5 points**] *(Etude d'une fonction)*

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + e^{3x}) - 3x$.

7. Déterminer l'ensemble de définition de f. (On pourra utiliser le réel α de la partie précédente). [0,5pt]
8. Calculer la dérivée de f et en déduire le tableau de variation de f. [1pt]
9. Construire f dans un repère orthogonal. (Unité sur les axes 3cm). [1pt]

Partie D[**3points**] *(Suite définie par une intégrale)*

On considère la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^n f(x)dx$.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$. [0,5pt]
11. Montrer que la suite (I_n) est croissante. [0,5pt]
12. On définit la suite (J_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $J_n = \int_0^n xe^{-3x}dx$.
    - **a.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$. [0,5pt]
    - **b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq J_n$. [0,5pt]
    - **c.** Montrer que la suite (J_n) est convergente et déterminer sa limite. (*On pourra proceder par une intégration par partie*). [0,5pt]
    - **d.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \frac{1}{9}$. [0,25pt]
    - **e.** La suite (I_n) est-elle convergente ? [0,25pt]

Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve.
Euclide d'Alexandrie

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **3 points**

(C) est un cercle de centre O et A un point de (C). Soit M un point de (C) et P le point tel que $[MP]$ est un diamètre de (C). La droite (AP) et la parallèle à (OA) passant par M se coupent en un point N.

1. Faire une figure. [0,75pt]

2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaire. [0,75pt]

3. Montrer qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur qui transforme M en N. [0,75pt]

4. En déduire le lieu géométrique des points N lorsque M parcourt (C). [0,75pt]

EXERCICE 2 **4 points**

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :
a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2. **a.** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4. L'ensemble des points M du plan tels que : $\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$ est :

a. la médiatrice de [AC].

b. le cercle circonscrit au carré ABCD.

c. la médiatrice de [AI].

d. le cercle inscrit dans le carré ABCD.

EXERCICE 3 **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = -3.$$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle. [0.75pt]
2. Placer les points A, B et C. [0.75pt]
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral. [0.5pt]

Partie B. Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'aflixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}\mathrm{i}z^2$. On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. **a.** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′. [0.75pt]
   b. Placer les points A′, B′ et C′ . [0.25pt]
   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′. [0.5pt]
   d. Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G′ le point associé à G par f.
   Déterminer les affixes des points G et G′. [0.5pt]
   Le point G′ est-il l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′ ? [0.5pt]
2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole) [0.5pt]

EXERCICE 4 **8 points**

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - |x-1|}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. [0.5pt]
2. Ecrire f sans symbole de valeurs absolues et calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition. [1.5pt]
3. Etudier la continuité de la dérivabilité de f sur son domaine de définition. [2pt]
4. Dresser le tableau de variation de f. [0.5pt]
5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On prendra pour unité sur les axes $1cm$. [1pt]
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dont on déterminera les signes. On notera α la plus petite des deux solutions. [1pt]
7. Déterminer par la dichotomie une valeur approchée de α à 10^{-2} près. [0.5pt]
8. Discuter suivant le réel m le nombre de solutions de l'équation $(1-m)x^2 - 2mx - |x-1| = m$. [1.5pt]

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »Franįs Bacon.

MINESEC
Lycée de Japoma
Département de Mathématiques
www.easy-maths.org

Année scolaire 2012-2013
Classe : T^le C Durée : 4 heures
Séquence 2, Novembre 2012
Coef 5

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Njionou Patrick, S.**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 (Arithmétique) **8 points**

Partie A.(4 points)

Dans toute cette partie, x et y désignent deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$. S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $PGCD(x, y) = y - x$.

1. Calculer $PGCD(363, 484)$. [0,5pt]

2. Le couple $(363, 484)$ appartient-il à S ? [0,5pt]

3. Soit n un entier naturel non nul. Le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse. [0,5pt]

4. **a.** Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$. [0,5pt]

b. En déduire que pour tout couple (x, y) de S on a [1pt]

$$PPCM(x, y) = k(k+1)(y-x).$$

5. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228. [0,5pt]

b. En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $PPCM(x; y) = 228$. [0,5pt]

Partie B. (4 points)

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle [1 ; 46].

1. On considère l'équation

$$(E): \quad 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de (E). [0,5pt]

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ solutions de (E). [0,5pt]

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1\ (47)$. [0,5pt]

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $ab \equiv 0\ (47)$ alors $a \equiv 0\ (47))$ ou $b \equiv 0\ (47)$. [0,5pt]

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1\ (47)$ alors $a \equiv 1\ (47)$ ou a $a \equiv -1\ (47)$. [0,5pt]

3. **a.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1\ (47)$. [0,5pt]

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que
$p \times inv(p) \equiv 1\ (47)$.
Par exemple :
$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1\ (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1\ (47)$,
$inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1\ (47)$.

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$? [0,5pt]

c. Montrer que $46! \equiv -1\ (47)$. [0,5pt]

EXERCICE 2 (Nombres complexes) **8 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A : On note P le point d'affixe $p = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. **a.** Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1. [0,5pt]

   b. Faire une figure et construire les points P et Q. [0,5pt]

2. **a.** Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure. [1pt]

   b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ. [0,5pt]

Partie B : On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c. On suppose que l'origine O du repère $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1$. [1,5pt]

   b. Montrer que $a + b + c = 0$. [0,5pt]

   c. Montrer que $\left|\dfrac{b}{a}\right| = \left|\dfrac{b}{a} + 1\right| = 1$. [0,5pt]

   d. En utilisant la **partie A**, en déduire que $\dfrac{b}{a} = p$ ou $\dfrac{b}{a} = q$. [0,5pt]

2. Dans cette question, on admet que $\dfrac{b}{a} = p$ et $\dfrac{c}{a} = q$.

   a. Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. [0,75pt]

   b. Montrer que $\dfrac{q-1}{p-1} = \dfrac{c-a}{b-a}$. [0,75pt]

   c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC. [1pt]

EXERCICE 3 (Calculs vectoriel) **6 points**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapprte 1 point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ 2\ ;\ -4)$ et $(-3\ ;\ 4\ ;\ 1)$.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -8+2t \\ y & = & 7-t \\ z & = & 6+t \end{array}\right.\ t \in \mathbb{R}$.
   - Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont sécants.
   - Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ n'ont aucun point en commun.
   - La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
   - Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.
2. On note $\mathcal{P}'$ le plan d'équarion $x + 4y - 3z + 4 = 0$.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles et distincts.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}$.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}$.
3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :
   - une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1\ ;\ 3\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$,

- une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
- le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{2}=0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-3\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right\|=5$ est :

- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5\,;\,5\,;\,\dfrac{7}{2}\right)$,
- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(5\,;\,-5\,;\,-\dfrac{7}{2}\right)$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z-5=0$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{3}=0$.

5. A et B sont deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tel que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|=12$ est :

- la droite passant par A et perpendiculaire à (AB),
- la sphère ce centre le milieu de $[AB]$ et de rayon IA,
- un cercle de rayon AB,
- aucune proposition n'est juste.

6. Soit dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ les points $A(2,3,5)$; $B(1,4,-5)$; $C(3,9,1)$ et $D(1,-1,1)$.

- la distance du point D au plan (ABC) est : 3,
- l'aire du triangle ABC est 25
- l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\|(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})\wedge\overrightarrow{MA}\|=12$ est la sphère de centre le barycentre G du système $\{(A,1);\ (B,2);\ (C,1)\}$ et de rayon GB.
- l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{BC}$ est le plan (ABC)

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »Françis Bacon.

Lycée de Japoma
Département de Mathématiques | Année scolaire : 2009/2010

Classe : $\mathbf{T^{le}C}$ Durée : 2h ; coef : 5
27 Avril 2010
Epreuve de Mathématiques. 5$^{\text{ème}}$ séquence blanche
Examinateur : **NJIONOU S. P**

L'épreuve comporte quatre exercices. La qualité de la rédaction et la cohérence dans le raisonnement seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (5pts)**.** Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chance d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier naturel n non nul, on considère les événements suivants :

A_n : « Alice atteint la cible au n$^{\text{ième}}$ lancer »
B_n : « Alice rate la cible au n$^{\text{ième}}$ lancer »

On pose $p_n = P(A_n)$. Pour les question 1. et 2., on pourra éventuellement utiliser un pondéré.

1. Déterminer P_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $n \geq 2$, $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.
3. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme u_1 et la raison q.
   (b) Ecrire u_n puis p_n en fonction de n.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 2 (5pts)**.** Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1\ ;\ 46]$.

1. On considère l'équation
$$(E) : \quad 23x + 47y = 1$$
   où x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Donner une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de (E).
   (b) Déterminer l'ensemble des couples $(x,\ y)$ solutions de (E).
   (c) En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \quad (47)$.
2. Soient a et b deux entiers relatifs.
   (a) Montrer que si $ab \equiv 0 \quad (47)$ alors $a \equiv 0 \quad (47))$ ou $b \equiv 0 \quad (47)$.
   (b) En déduire que si $a^2 \equiv 1 \quad (47)$ alors $a \equiv 1 \quad (47)$ ou a $a \equiv -1 \quad (47)$.
3. (a) Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1[47]$. Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1[47]$. Par exemple :
   – $inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1[47]$
   – $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1[47]$
   – $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1[47]$.
   (b) Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

(c) Montrer que $46! \equiv -1[47]$.

Exercice 3 (5pts). Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

- (P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
- (Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
- (R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne $x - y + 1 = 0$. On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.
2. (a) Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x - y + 1 & = & 0 \\ -y + z + 2 & = & 0 \\ -x + z + 1 & = & 0 \end{array}\right.$

   (b) En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).

   (c) Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD). En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).
3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).
   On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$, $\left(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{k}\right)$ *et* $\left(O\ ;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   (a) Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

   (b) Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

Exercice 4 (5pts). On se propose d'étudier les courbes Γ représentées dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ par une équation du type

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

où A, B, C, D, E, F, sont des réels fixés, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Cercles, paraboles, ellipses, hyperboles, sont des courbes Γ. Si $B \neq 0$, il existe un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ tel que l'équation de Γ dans ce repère ne comporte pas de terme en XY (*terme rectangle*).

Soit $\widehat{(\vec{\imath}, \vec{I})} = \widehat{(\vec{\jmath}, \vec{J})} \equiv \theta[2\pi]$. Pour tout point $M(x, y)$ du plan : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = X\vec{I} + Y\vec{J}$.

1. Démontrer que $x = X\cos\theta - Y\sin\theta$; $\qquad y = X\sin\theta + Y\cos\theta$.
2. Démontrer que le coefficient de XY est $(C - A)\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta$.
3. Discuter suivant que $C = A$ ou $C \neq A$, les valeurs de θ pour lesquelles le terme XY disparait.
4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des courbes du second degré suivantes :
   - $(\Gamma_1) : 5x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$.
   - $(\Gamma_2) : 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$.
   - $(\Gamma_3) : 2x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0$.

On peut donc toujours supposer que $B = 0$.

Classe : $\mathbf{T^{le}C}$ Durée : 4h ; coef : 5
Mars 2010
Epreuve de Mathématiques. 4ème séquence
Examinateur : **NJIONOU S. P**

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la cohérence dans le raisonnement seront prises en compte lors de l'évaluation de la copie.

Exercice 1 (4pts).
On considère la suite de nombres réels $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ vérifiée pour tout entier naturel n.
Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. [0.5pt]
2. On admet qu'il existe une suite $(a_n)_n$ unique telle que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = \frac{3a_n - 1}{3a_n - 2}.$$
   (a) Montrer que $a_0 = 1$. [0.25pt]
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de a_{n+1}, puis de a_n et en déduire que la suite $(a_n)_n$ vérifie pour tout n entier naturel, la relation : $a_{n+1} = 3a_n - 1$. [1pt]
3. Soit (b_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $b_n = a_n - \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que la suite $(b_n)_n$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $b_0 = \frac{1}{2}$. [0.75pt]
   (b) Calculer b_n en fonction de n. [0.5pt]
   (c) En déduire l'expression de a_n, puis celle de u_n en fonction de n. [0.75pt]
   (d) Déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. [0.25pt]

Exercice 2 (5pts).
On donne la propriété suivante :
« par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.
On a placé :
les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.
le milieu K de [IJ].
On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).

Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F. En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales. [0.5pt]

   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK). [0.5pt]
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP). [0.5pt]
4. (a) Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires. [0.5pt]
   (b) En déduire que les points F, P et K sont alignés. [0.5pt]

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).

On note $(x\ ;\ y\ ;\ 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J. [0.5pt]
2. (a) Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ). [0.5pt]
   (b) Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{G}N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{G}N} \cdot \overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ en fonction de x et y. [0.5pt]
   (c) Déterminer les coordonnées du point N. [0.5pt]
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe. [0.5pt]

Problème (11pts).

Partie A. *Résolution d'une équation différentielle*

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) \quad : \qquad xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

1. (a) Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E') \quad : \quad y' = 2y + 8$. [1pt]
   (b) Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E). [1pt]
2. (a) Résoudre l'équation $y' = 2y$. [0.5pt]
   (b) Déterminer une solution particulière de l'équation $y' = 2y + 8$. [0.5pt]
   (c) Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E). [0.75pt]
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $\mathrm{A}(\ln 2\ ;\ 0)$? Si oui la préciser. [0.25pt]

Partie B. *Etude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(e^{2x} - 4)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. [0.5pt]
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. [1pt]
3. Calculer la dérivée de f et en déduire son tableau de variation. [1pt]
4. Montrer que la courbe (C_f) représentative de f admet une asymptote oblique (T) en $-\infty$ dont on déterminera une équation. [0.5pt]
5. Construire (C_f) et (T) dans un même repère. [0.5pt]

Partie C. *Calcul d'une aire*

On considère toujours la fonction f définie dans la partie B ci-dessus.

1. Soit $h(x) = xe^{2x}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $H(x) = (ax+b)e^{2x}$ soit une primitive de h sur $\mathbb{R}$. [1pt]
2. Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. [1pt]
3. Evaluer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et interpréter sa valeur. [1pt]

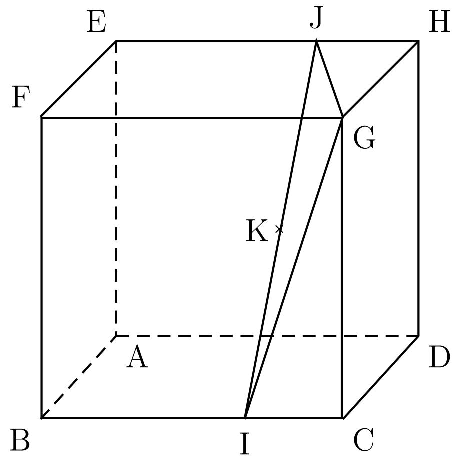
« Il faut d'abord faire ce qu'on sait faire, ensuite, faire ce qu'on peut faire. »

Travaillez, travaillez par vous même, c'est là la clé du succès.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Exercice 2



Nom(s) et prénom(s) :...