NOMBRES COMPLEXES

I. INTRODUCTION ET DEFINITION

Tous les nombres positifs ont une racine carrée, par exemple, 9 a pour racine 3 et –3 et 2 a pour racine $\sqrt{2}$ et -$\sqrt{2}$.
Par contre, aucun réel négatif n'a de racine (réelle).
C'est pour pallier à cette discrimination que furent créer les nombres complexes.

Le nombre *i* :
On appelle ***i*** un nombre dont le carré est –1. On décrète que ***i*** est la racine de -1. Ainsi : $i^2 = -1$
De plus, son opposé -***i*** a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = [(-1) \times i]^2 = (-1)^2 \times i^2 = -1$

Conclusion : Les deux racines de -1 sont deux nombres irréels ***i*** et -***i***.
Le nombre ***i*** est appelé nombre imaginaire.
L forme factorisée de $x^2 + 1$ est $(x + i) . (x - i)$

Un peu d'histoire : le nombre ***i*** a longtemps été noté $\sqrt{-1}$ pour la raison évidente que ***i*** a pour carré -1.
La notation ***i*** fut introduite par Euler en 1777, puis reprise par Gauss au début du XIXème siècle. Cependant le premier à parler de nombre imaginaire fut le très cartésien Descartes en 1637.

Remarques

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
  Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
  Cette équation a une solution notée -1 , élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
  $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
  Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x = 1$ n'a pas de solution.
  Cette équation a une solution notée $\frac{1}{2}$, élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
  C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
  $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
  Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions.
  Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et -$\sqrt{2}$, éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
  $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
  Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solutions.
  Cette équation a deux solutions notées i et -i , solutions de l'ensemble $\mathbb{C}$.

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.
  C'est l'ensemble des nombres de la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
  $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Définition

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers

Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel.
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite.
  Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels.
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées (a ; b).
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif (c'est-à-dire supérieur à 0).

Définition :

Soit un nombre complexe z .
L'écriture $z = a + ib$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
a est appelé partie réelle de z, et b partie imaginaire de z : on note $a = \text{Re}(z)$ et $b = \text{Im}(z)$.

Remarque

- La partie réelle de z et la partie imaginaire de z sont des nombres réels.

Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow (a\ ;\ b) = (a'\ ;\ b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Exercice 01

Soit $z = 2 + 3i$; $z' = i - 5$.
Calculer et écrire sous la forme algébrique $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; zz' ; z^2

$z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$
$z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$
$2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i$
$zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = 2i - 10 - 3 - 15i = - 13 - 13i$
$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

Exercice 02

1°) Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\dfrac{1}{3 + 2i}$ (utiliser l'expression conjuguée).

2°) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes : $\dfrac{1}{1 + i}$; $\dfrac{1}{3 - i}$; $\dfrac{1}{i}$

1°) $(3 + 2i)(3 - 2i) = (3)^2 - -(2i)^2 = 9 - (-4) = 9 + 4 = 13$

La forme algébrique de $\frac{1}{3+2i}$ est $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

2) La forme algébrique de $\frac{1}{1+i}$ est $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

La forme algébrique de $\frac{1}{3-i}$ est $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

La forme algébrique de $\frac{1}{i}$ est $-i$

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE

Un nombre complexe est formé de deux nombres réels. Or deux nombres réels forment un couple de coordonnées. Ainsi, si le plan est muni d'un repère orthonormé on peut repérer tout point par un nombre complexe.

a) Affixe

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

- Au point M de coordonnées (a ; b) , on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
  On dit que $z = a + i b$ est l'affixe de M
- Au vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (a ; b) , on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
  On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de $\vec{V}$
- Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Exercice 03

Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$; $z_5 = i$

$z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$; $z_9 = 2z_1 - 3z_2$; $z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$

Propriétés

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, alors

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

Si $\vec{V}$ a pour affixe z et $\vec{V'}$ pour affixe z', alors $\vec{V} + \vec{V'}$ a pour affixe $z + z'$.

Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe kz.

b) Conjugué

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + ib$.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - ib$.

Remarque

Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice 04

Étant donné un point M d'affixe $z = a + ib$, avec a et b réels.

Placer
- **le point M' d'affixe $z' = a - ib$,**
- **le point M" d'affixe $z'' = -a + ib$,**
- **le point M"' d'affixe $z''' = -a - ib = -z$.**

Exercice 05

Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$.

Calculer $\overline{z}$; $\overline{z'}$; $\overline{z} + \overline{z'}$; $z + z'$; $\overline{z + z'}$; $\overline{z}.\overline{z'}$; zz' ; $\overline{zz'}$.

$\overline{z} = 3 - 5i$

$\overline{z}' = -2 - 3i$

$\overline{z} + \overline{z}' = 3 - 5i - 2 - 3i = 1 - 8i$

$z + z' = 3 + 5i - 2 + 3i = 1 + 8i$

$\overline{z + z'} = \overline{1 + 8i} = 1 - 8i$

$\overline{z}.\overline{z'} = (3 - 5i)(-2 - 3i) = -6 - 9i + 10i + 15i^2 = -6 + i - 15 = -21 + i$

$zz' = (3 + 5i)(-2 + 3i) = -6 + 9i - 10i + 15i^2 = -6 - i - 15 = -21 - i$

$\overline{zz'} = \overline{-21 - i} = -21 + i$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', on a :
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z.\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$

Démonstrations :

Soient les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z = a + ibi$ et $z' = a' + ib'$.
- $\overline{z} = a - ib$ donc $\overline{\overline{z}} = a + ib = z$
- $z.\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$ donc $z.\overline{z}$ est un réel positif .
- $z + z' = a + ib + a' + ib' = (a+a') + i(b+b')$
  comme (a+a') et (b+b') sont des réels, on obtient $\overline{z + z'} = (a+a') - i(b+b') = a - ib + a' - ib' = \overline{z} + \overline{z'}$
- $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + bb'i^2 = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
  comme (aa' - bb') et (ab' + a'b) sont des réels, on obtient $\overline{zz'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$.
  D'autre part $\overline{z}.\overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - ia'b + bb'i^2 = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$ donc $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si z' # 0 $\dfrac{1}{z'} = \dfrac{1}{a' + b'i} = \dfrac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \dfrac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2} = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{-b'}{a'^2 + b'^2}$
  Comme $\dfrac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $\dfrac{-b'}{a'^2 + b'^2}$ sont des réels, on en déduit $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{b'}{a'^2 + b'^2}$
  D'autre part $\overline{z'} = a' - ib'$, donc $\dfrac{1}{\overline{z'}} = \dfrac{1}{a' - b'i} = \dfrac{a' + b'i}{(a' - b'i)(a' + b'i)} = \dfrac{a' + b'i}{a'^2 + b'^2} = \dfrac{a'}{a'^2 + b'^2} + i\dfrac{b'}{a'^2 + b'^2}$
  Donc $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z'}}$

- Si z' # 0 $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$ (d'après la propriété sur le produit)

  $= \overline{z} \times \frac{1}{\overline{z'}}$ (d'après la propriété précédente)

  $= \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

- $\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \mathrm{Re}(z)$; $\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \mathrm{Im}(z)$
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow a + ib - a + ib = 0 \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow$ z réel
- $z = -\overline{z} \Leftrightarrow a + ib = -a + ib \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow$ z imaginaire pur

Exercice 06

1°) Écrire sous la forme algébrique les nombres com plexes suivants :

$$\frac{1}{2 + 7i} \quad ; \quad \frac{4}{\sqrt{3} - i} \quad ; \quad \frac{2 - i}{5 + 3i} \quad ; \quad \frac{i}{1 - 3i} \quad ; \quad \frac{2 + i}{i}$$

2°) Écrire plus simplement le nombre complexe $\frac{\sqrt{7} + 5i}{2\sqrt{7} - 2i} + \frac{2\sqrt{7} - 2i}{\sqrt{7} + 5i}$

1°) $\frac{1}{2 + 7i} = \frac{2 - 7i}{(2 + 7i)(2 - 7i)} = \frac{2 - 7i}{2^2 - (7i)^2} = \frac{2 - 7i}{4 + 49} = \frac{2}{53} - \frac{7}{53}i$

$\frac{4}{\sqrt{3} - i} = \frac{4(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \frac{4(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3}^2 - i^2} = \frac{4(\sqrt{3} + i)}{3 + 1} = \frac{4(\sqrt{3} + i)}{4} = \sqrt{3} + i$

$\frac{2 - i}{5 + 3i} = \frac{(2 - i)(5 - 3i)}{(5 + 3i)(5 - 3i)} = \frac{10 - 6i - 5i + 3i^2}{5^2 - (3i)^2} = \frac{10 - 11i - 3}{25 + 9} = \frac{7}{34} - \frac{11}{34}i$

$\frac{i}{1 - 3i} = \frac{i(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{i - 3i^2}{1^2 - (3i)^2} = \frac{i + 3}{1 + 9} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

$\frac{2 + i}{i} = \frac{(2 + i)(i)}{i^2} = \frac{2i - 1}{-1} = 1 - 2i$

2°) $\frac{\sqrt{7} + 5i}{2\sqrt{7} - 2i} + \frac{2\sqrt{7} - 2i}{\sqrt{7} + 5i} = \frac{(\sqrt{7} + 5i)(2\sqrt{7} + 2i)}{(2\sqrt{7} - 2i)(2\sqrt{7} + 2i)} + \frac{(2\sqrt{7} - 2i)(\sqrt{7} - 5i)}{(\sqrt{7} + 5i)(\sqrt{7} - 5i)}$

$= \frac{14 + 2\sqrt{7}i + 10\sqrt{7}i - 10}{28 + 4} + \frac{14 - 10\sqrt{7}i - 2\sqrt{7}i - 10}{7 + 25}$

$= \frac{4 + 12\sqrt{7}i}{32} + \frac{4 - 12\sqrt{7}i}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

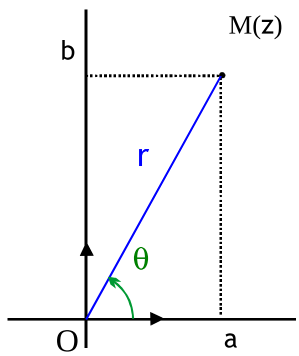
III. FORME TRIGONOMETRIQUE

Rappel

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, soit M un point de coordonnées (a ; b) .
Si M ≠ O, on dit que (r ; θ) est un couple de coordonnées polaires de M lorsque : r = OM et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ $[2\pi]$

On a alors $r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$

Si z est l'affixe de M, $z = a + ib = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



a) Module

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, qui est une forme trigonométrique de z.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + ib et soit M le point d'affixe z.
On appelle module de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$
On note $r = |z|$

Remarque

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
Pour un réel x, $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z".

Exercice 07

1°) Calculer le module de chacun des nombres comple xes :

$z_1 = 3 + 4i$ $\quad z_2 = 1 - i$ $\quad z_3 = 5 - \dfrac{i}{2}$ $\quad z_4 = 3$

$z_5 = i - 4$ $\quad z_6 = i$ $\quad z_7 = -5$ $\quad z_8 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

2°) Donner les formes trigonométriques de :

$z_1 = 1 + i$ $\quad z_2 = \sqrt{3} + i$ $\quad z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad z_4 = i$

1°)

$|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|z_2| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$|z_3| = \left|5 - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{5^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{25 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{101}{4}} = \frac{\sqrt{101}}{2}$$

$|z_5| = |i - 4| = |-4 + 1i| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$|z_6| = |i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

$|z_7| = |-5| = 5$ (-5 $\in$ IR et la valeur absolue de -5 est 5)

$$|z_8| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

2°) La forme trigonométrique de z est une écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = OM = |z|$ et $\theta \in$ IR

- $z_1 = 1 + i$ on a alors $r_1 = |z_1| = OM_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

  On peut écrire $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

- $z_2 = \sqrt{3} + i$ on a alors $r_2 = |z_2| = OM_2 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

  On peut donc écrire $z_2 = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

- $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ on a alors $r_3 = |z_3| = OM_3 = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$

  On peut donc écrire $z_3 = 2\left[\dfrac{1}{2} + i\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

- $z_4 = i$ on a alors $r_4 = |z_4| = OM_4 = |i| = 1$

  On peut écrire $z_4 = 1(0 + 1i) = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$

Propriété

Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\overrightarrow{V}\| = |z|$.

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on a $AB = |z_B - z_A|$.

Exercice 08

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 3i$ et $b = 5 - i$.
Calculer les distances OA , OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

On a $OA = |a| = |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$OB = |b| = |5 - i| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$AB = |b - a| = |5 - i - (2 - 3i)| = |3 + 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

On remarque que OA = AB, donc le triangle OAB est isocèle de sommet principal A.
De plus $OA^2 + AB^2 = OB^2$, on en déduit que le triangle est rectangle en A.
Le triangle OAB est donc rectangle isocèle en A.

Propriétés

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; si $z' \neq 0$ $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z\overline{z} = |z|^2$ (donc $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$) ; si $z \# 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Démonstrations

- Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. On peut écrire :
  $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow z = 0$
- Le point M' d'affixe -z est symétrique du point M par rapport à l'origine O.
  La symétrie conservant les distances on a : OM' = OM donc $|-z| = |z|$
- Le point M'' d'affixe $\overline{z}$ est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O,\vec{u})$.
  La symétrie conservant les distances on a : OM'' = OM donc $|\overline{z}| = |z|$
- Soit $\overrightarrow{V}$ le vecteur d'affixe z et $\overrightarrow{V'}$ le vecteur d'affixe z'.

  On sait que le vecteur $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour affixe z + z'.

  En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $\|\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}\| \leqslant \|\overrightarrow{V}\| + \|\overrightarrow{V'}\|$ donc $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

- Si z a pour forme algébrique $z = a + ib$ et si z' a pour forme algébrique $z' = a' + ib'$, alors :
  $zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + bb'i^2 = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
  Comme (aa' - bb') et (ab' + a'b) sont des réels, on en déduit que
  $$|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{a^2a'^2 - 2aa'bb' + b^2b'^2 + a^2b'^2 + 2ab'a'b + a'^2b^2}$$
  $$= \sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2} = \sqrt{a^2(a'^2 + b'^2) + b^2(b'^2 + a'^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)}$$
  $$= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = |z|.|z'|$$
- si $z' \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente $|z'| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = \left|z' \times \frac{1}{z'}\right| = |1| = 1$, donc $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$

  et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$
- $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (donc $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$)
- si $z \# 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Exercice 09

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°) Calculer le module des nombres complexes suivants : $(7 + 35i)(3 + 2i)$; $\dfrac{7 - 35i}{3 - 2i}$; $\dfrac{(5 + 3i)(1 + i)}{4 + i}$

2°) Déterminer tous les points M d'affixe z tels que $z\bar{z} = 4$.

3°) On considère le point A d'affixe $2 + 3i$.
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - (2 + 3i)| = 5$.

4°) Soit $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $|j|$. Démontrer que $j^2 = \bar{j}$. En déduire que $j^3 = 1$.
(On dit que j est une racine cubique de 1)

1°) On peut écrire $(7 + 35i)(3 + 2i) = 7(1 + 5i)(3 + 2i)$. Donc

- $|(7 + 35i)(3 + 2i)| = |7| \times |(1 + 5i)| \times |(3 + 2i)| = 7 \times \sqrt{1^2 + 5^2} \times \sqrt{3^2 + 2^2} = 7\sqrt{26}\sqrt{13} = 7\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}$

  On en déduit $|(7 + 35i)(3 + 2i)| = 7 \times 13 \times \sqrt{2} = 91\sqrt{2}$

- $\left|\dfrac{7 - 35i}{3 - 2i}\right| = \dfrac{|7 - 35i|}{|3 - 2i|} = \dfrac{|7| \times |1 - 5i|}{|3 - 2i|} = \dfrac{7\sqrt{1^2 + (-5)^2}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{7\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = \dfrac{7\sqrt{2}\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 7\sqrt{2}$

- $\left|\dfrac{(5 + 3i)(1 + i)}{4 + i}\right| = \dfrac{|5 + 3i| \times |1 + i|}{|4 + i|} = \dfrac{\sqrt{5^2 + 3^2}\ \sqrt{1^2 + 1^2}}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{34}\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = 2$

2°) Soit M un point d'affixe z
On peut écrire $z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow OM = 2$
L'ensemble des points M tels que $z\bar{z} = 4$ est donc le cercle de centre O et de rayon 2.

3°) A étant le point d'affixe $2 + 3i$ et M le point d'affixe z, on sait que $|z - (2 + 3i)| = AM$
Alors $|z - (2 + 3i)| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$
L'ensemble des points M tels que $|z - (2 + 3i)| = 5$ est donc le cercle de centre A et de rayon 5.

4°) $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, donc $|j| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$j^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{2\sqrt{3}}{4}i + \dfrac{3}{4}i^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{j}$

On peut en déduire $j^3 = j \times j^2 = j \times \bar{j} = |j|^2 = 1$

b) Argument

Définition

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique a + ib et soit M le point d'affixe z.

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ [2□]
On note $\theta = \arg(z)$

Remarque

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π.

Exercice 10

Ecrire sous la forme trigonométrique $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$ et $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$

- $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta'$
  $= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')'$
  $= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$

- $\dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)} = \dfrac{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' , on a :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Démonstrations

Si z et z' ont pour arguments respectifs θ et θ' leur forme trigonométrique est :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ avec $r' \in \mathbb{R}_+$.

▪ On a vu (Exercice 10) que : $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$.
On peut en déduire : $zz' = rr'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]$.
Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz') = \theta + \theta' \quad [2\pi]$.
Donc $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$.

▪ On a vu (Exercice 10) que : $\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

On peut en déduire que : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$.

Comme $\frac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta \quad [2\pi]$. Donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$.

▪ On peut écrire $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta) \times \frac{1}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta) \times [\cos(-\theta') + i\sin(-\theta')]$

Donc $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')$ (en utilisant la première propriété)

Alors $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta' + i\sin\theta'} = \frac{r}{r'} \times [\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')]$.

Comme $\frac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' \quad [2\pi]$.

Donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$.

▪ Sachant que $\cos(-\theta) = \cos\theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, on peut écrire : $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
Alors $\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\overline{z}) = -\theta \quad [2\pi]$.
Donc $\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$.

▪ Sachant que $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$, on peut écrire :
$-(\cos\theta + i\sin\theta) = -\cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$.
Alors $-z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r[\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi \quad [2\pi]$.
Donc $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$.

Exercice 11

Soit $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

En déduire les formes trigonométriques de $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\overline{z_1}$; $-z_2$; $\frac{(z_1)^2}{\overline{z_2}}$

▪ $z_1 = 2 + 2i$, on a donc $|z_1| = |2 + 2i| = |2||1 + i| = 2\sqrt{1^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$

On peut alors écrire $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

▪ $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, on peut donc écrire $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

▪ On peut alors écrire

$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \times 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

Donc la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$ est : $z_1 \times z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

▪ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

▪ $(z_1)^3 = \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^3 = (2\sqrt{2})^3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^3 = 8 \times 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Donc la forme trigonométrique de $(z_1)^3$ est : $(z_1)^3 = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

▪ La forme trigonométrique de z_1 est $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Donc la forme trigonométrique de $\overline{z_1}$ est $\overline{z_1} = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

▪ La forme trigonométrique de z_2 est $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc la forme trigonométrique de $-z_2$ est $-z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)\right]$

La forme trigonométrique de $-z_2$ est $-z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

▪ On a $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, donc $(z_1)^2 = \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = (2\sqrt{2})^2\left[\cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)\right]$

donc $(z_1)^2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

▪ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\overline{z_2} = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

▪ $\frac{(z_1)^2}{\overline{z_2}} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)/2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{8}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right]$

La forme trigonométrique de $\frac{(z_1)^2}{\overline{z_2}}$ est $4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Remarque

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres.
C'est-à-dire que la fonction $\theta \propto \varphi(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ est telle que $\varphi(\theta + \theta') = \varphi(\theta) \times \varphi(\theta')$.
Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

c) Ecriture exponentielle

Notation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$

Cette notation est appelée notation exponentielle.

Propriétés

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ $\qquad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les formules d'addition :
  $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta'$ et $\sin(\theta + \theta') = \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta'$
- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les formules de duplication :
  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- On peut vérifier que : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les formules d'EULER.
- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée formule de MOIVRE.

Exercice 12

On considère les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1°) Donner la forme exponentielle de Z.
2°) Donner les formes algébriques de z_1 et z_2. En déduire la forme algébrique de Z.
3°) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

1°) On a $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et , donc $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\quad Z$ a pour forme exponentielle $e^{i\frac{\pi}{12}}$

2°) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. La forme algébrique de z_1 est $z_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La forme algébrique de z_2 est $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a $Z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\,\overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1\,\overline{z_2}$ (car z_2 est un nombre complexe de module 1)

Donc $Z = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}i + \dfrac{\sqrt{6}}{4}i + \dfrac{\sqrt{6}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

3°) On sait aussi que $Z = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}$.

On a donc $\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

La forme algébrique d'un nombre complexe étant unique, on en déduit que :

$\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 13

Écrire sous la forme exponentielle ou sous la forme trigonométrique les nombres complexes :

$a = 3 + \sqrt{3}\,i$; $b = \dfrac{\sqrt{2}}{1-i}$; $c = \dfrac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$; $d = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

Avec la TI 89, pour obtenir les nombres complexes sous la forme exponentielle, sélectionner MODE Format Complexe POLAIRE (les angles doivent être exprimés en radians)
Avec la TI 89, pour obtenir les nombres complexes sous la forme algébrique, sélectionner MODE Format Complexe RECTANGULAIRE

▪ $a = 3 + \sqrt{3}\ i$, donc $|a| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^{\ 2}} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Donc $a = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{3}{2\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\, i\right) = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

La forme exponentielle de a est $a = 2\sqrt{3}\ e^{i\frac{\pi}{6}}$

▪ $b = \dfrac{\sqrt{2}}{1 - i}$

On peut exprimer de façon immédiate le numérateur et le dénominateur sous la forme trigonométrique ou exponentielle :

$\sqrt{2} = \sqrt{2}\ e^{i\,0}$ et $1 - i = \sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$

On en déduit $b = \dfrac{\sqrt{2}\ e^{i\,0}}{\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 1\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

La forme trigonométrique de b est $b = \cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}$

La forme exponentielle de b est $b = e^{i\frac{\pi}{4}}$

▪ $c = \dfrac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}}$

Le numérateur et le dénominateur ne peuvent pas s'exprimer de façon simple sous la forme trigonométrique ou exponentielle. Cherchons d'abord la forme algébrique de c.

$c = \dfrac{5 + 11i\sqrt{3}}{7 - 4i\sqrt{3}} = \dfrac{(5 + 11i\sqrt{3})(7 + 4i\sqrt{3})}{(7 - 4i\sqrt{3})(7 + 4i\sqrt{3})} = \dfrac{35 + 20i\sqrt{3} + 77i\sqrt{3} - 44 \times 3}{49 + 16 \times 3} = \dfrac{-97 + 97i\sqrt{3}}{97} = -1 + i\sqrt{3}$

$c = 2\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

La forme exponentielle de c est $c = 2\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$

▪ $d = -2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i \sin\dfrac{\pi}{6}\right) = -2\ e^{i\frac{\pi}{6}}$

Attention, d n'est pas ainsi écrit sous la forme trigonométrique ou exponentielle puisque -2 est un nombre réel négatif.
Sachant que $-1 = e^{i\pi}$, on peut écrire

$d = 2\ e^{i\pi}\ e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\ e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\ e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\ e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

La forme trigonométrique de d est $d = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i \sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$

La forme exponentielle de d est $d = 2\ e^{i\frac{7\pi}{6}}$

IV. EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Exercice 14

1°) On considère l'équation (E) : $z^2 - 4z - 5 = 0$.

a) Montrer que : (E) $\Leftrightarrow$ $(z - 2)^2 - 9 = 0$ $\Leftrightarrow$ $[(z - 2) - 3)][(z - 2) + 3] = 0$.

b) En déduire les solutions de (E).

2°) On considère l'équation (F) : $z^2 - 4z + 13 = 0$.

a) Montrer que : (F) $\Leftrightarrow$ $(z - 2)^2 + 9 = 0$.

b) En remarquant que $9 = -(3i)^2$, trouver les solutions de (F).

Avec la calculatrice TI89, pour résoudre une équation dans IR, on utilise la commande solve() ou en français résol() disponible à partir du menu Algebra (F2).
Pour résoudre une équation dans ℂ, on utilise la commande cSolve() ou en français résolC() disponible à partir du menu Algebra-Complex (F2)

1°) a) On peut écrire $z^2 - 4z = (z-2)^2 - 4$, donc $z^2 - 4z - 5 = (z-2)^2 - 4 - 5 = (z-2)^2 - 9$

On a donc $z^2 - 4z - 5 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (z-2)^2 - 3^2 = 0$

Donc (E) $\Leftrightarrow (z-2)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow [(z-2)-3][(z-2)+3] = 0$

b) On obtient (E) $\Leftrightarrow (z-5)(z+1) = 0 \Leftrightarrow z = 5$ ou $z = -1$

L'équation (E) a donc deux solutions qui sont -1 et 5.

(On aurait pu retrouver ce résultat en utilisant le discriminant)

2°) a) On peut écrire $z^2 - 4z = (z-2)^2 - 4$, donc $z^2 - 4z + 13 = (z-2)^2 - 4 + 13 = (z-2)^2 + 9$

On a donc (F) $\Leftrightarrow (z-2)^2 + 9 = 0$

b) On peut remarquer que $(3i)^2 = -9$, donc $-(3i)^2 = 9$

Alors (F) $\Leftrightarrow (z-2)^2 - (3i)^2 = 0 \Leftrightarrow [(z-2)-3i][(z-2)+3i] = 0$

$\Leftrightarrow (z-2-3i)(z-2+3i) = 0 \Leftrightarrow z = 2+3i$ ou $z = 2-3i$

L'équation (F) a donc deux solutions qui sont $2+3i$ et $2-3i$.

<u>Propriété</u>

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec a # 0) admet dans ℂ deux solutions (

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation.

- si $\Delta \geqslant 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

<u>Démonstration</u>

$$az^2 + bz + c = a\left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

a, b et c étant des réels, $\Delta = b^2 - 4ac$ est aussi un réel.

si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ et on peut écrire $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^{\,2}$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^{\,2} = i^2\sqrt{-\Delta}^{\,2} = (i\sqrt{-\Delta})^2$

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right]$$

$$= a\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées qui sont :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Exercice 15

Résoudre dans ℂ , les équations :

$z^2 - 2z + 5 = 0$; $z^2 + 3z - 4 = 0$; $4z^2 - 4z + 1 = 0$; $2z^2 - 5z + 7 = 0$

- $z^2 - 2z + 5 = 0$

Le discriminant est $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$

$\Delta < 0$, l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ a donc deux solutions complexes conjuguées qui sont :

Soit $z_1 = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = 1 + 2i$

$z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 1 + 2i$

- $z^2 + 3z - 4 = 0$
  Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4(1)(-4) = 9 - 16 = 25 = (5)^2$
  $\Delta > 0$, l'équation $z^2 + 3z - 4 = 0$ a donc deux solutions réelles qui sont
  $z_1 = \dfrac{-3-5}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$ et $z_2 = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
  $z_1 = -4$ et $z_2 = 1$
- $4z^2 - 4z + 1 = 0$
  Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$
  $\Delta = 0$, l'équation $4z^2 - 4z + 1 = 0$ a donc une solution (double) réelle qui est :
  $z_1 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$
- $2z^2 - 5z + 7 = 0$
  Le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(7) = 25 - 56 = -31 = (i\sqrt{31})^2$
  $\Delta < 0$, l'équation $2z^2 - 5z + 7 = 0$ a donc deux solutions complexes conjuguées qui sont :
  $z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$
  Soit $z_1 = \dfrac{5 - i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{5 + i\sqrt{31}}{4}$

V. UTILISATION EN GEOMETRIE

Rappel

La notion de distance correspond au module, la notion d'angle à l'argument.

Propriétés

Soient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ d'affixes respectives z et z' dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Si z et z' ont pour formes trigonométriques :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, Alors :

- $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta = \arg z \quad [2\pi]$.
- $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$.

Démonstration

En utilisant la relation de Chasles sur les angles, on peut écrire :
$(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = (\overrightarrow{V}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{V'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{V'}) - (\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$.

Propriétés

A, B, C et D étant des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe de repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a : $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.
- $\dfrac{CD}{AB} = \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$
  $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$
  $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$

Démonstrations

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a $AB = |z_B - z_A|$.

  De plus on a vu précédemment que $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \arg(z)$ $[2\pi]$, z étant l'affixe de $\overrightarrow{V}$.

  On en déduit donc : $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ $[2\pi]$.

- $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{|z_D - z_C|}{|z_B - z_A|} = \left|\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$

On a vu précédemment que $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \arg z' - \arg z$ $[2\pi]$, z étant l'affixe de $\overrightarrow{V}$ et z' l'affixe de $\overrightarrow{V'}$.
On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$ $[2\pi] = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ $[2\pi]$.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$

  et enfin, les nombres complexes imaginaires purs (non nuls) sont les nombres complexes ayant pour argument $\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$ (modulo 2π), c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$ (modulo π)

- A, B et C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$
  $\Leftrightarrow$ $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$, $k \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

  et enfin, les nombres réels (non nuls) sont les nombres complexes ayant pour argument 0 ou π (modulo 2π), c'est-à-dire 0 (modulo π).

Exercice 16

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a = 1$, $b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$
Calculer $\dfrac{c - a}{b - a}$ et l'écrire sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC.

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+\sqrt{3}+i-1}{1+2i-1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{(\sqrt{3}+i)i}{2i^2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{-2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

On sait que $\dfrac{AC}{AB} = \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|$ donc $\dfrac{AC}{AB} = \left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc $AC = AB$

et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$ $[2\pi]$ donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

On en déduit que le triangle ABC est équilatéral .

Exercice 17

Le plan complexe est rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère la translation t de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $w = 2 + i$, l'homothétie h de centre A d'affixe $a = 2 + 4i$ et de rapport $-\dfrac{3}{2}$ et la rotation r de centre B d'affixe $b = 1 - i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit M le point d'affixe z.

1) Soit M_1 d'affixe z_1 l'image de M par t.

Donner l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM_1}$. En déduire l'expression de z_1 en fonction de z.

2) Soit M_2 d'affixe z_2 l'image de M par h.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM_2}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AM}$. En déduire l'expression de z_2 en fonction de z.

3) Soit M_3 d'affixe z_3 l'image de M par r.

Déterminer $\dfrac{BM_3}{BM}$ et $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3})$. En déduire le module et l'argument de $\dfrac{z_3 - b}{z - b}$.

En déduire l'expression de z_3 en fonction de z.

4°) Utiliser les résultats précédents pour trouver les affixes des images par t, h et r du point O .

1°) M_1 est l'image de M par t, on a donc $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$ et par conséquent $\overrightarrow{MM_1}$ a pour affixe 2 + i .

Sachant que $\overrightarrow{MM_1}$ a pour affixe $z_1 - z$, on en déduit que $z_1 - z = 2 + i$

Donc $z_1 = z + 2 + i$

2°) M_2 est l'image de M par h, on a donc par définition $\overrightarrow{AM_2} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AM}$.

Sachant que $\overrightarrow{AM_2}$ a pour affixe $z_2 - a$ et que $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z - a$, on en déduit

$z_2 - a = -\dfrac{3}{2}(z - a)$, donc $z_2 - 2 - 4i = -\dfrac{3}{2}(z - 2 - 4i) = -\dfrac{3}{2}z + 3 + 6i$

donc $z_2 = -\dfrac{3}{2}z + 3 + 6i + 2 + 4i = -\dfrac{3}{2}z + 5 + 10i$

3°) M_3 est l'image de M par r, on a donc par définition $BM_3 = BM$ et $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

Donc $\dfrac{BM_3}{BM} = 1$ et $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

On sait que $\dfrac{BM_3}{BM} = \left|\dfrac{z_3 - b}{z - b}\right|$ et $(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM_3}) = \arg\left(\dfrac{z_3 - b}{z - b}\right)$

On en déduit que $\dfrac{z_3 - b}{z - b}$ a pour module 1 et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$

On a donc $\dfrac{z_3 - b}{z - b} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z_3 - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - b)$

c'est-à-dire $z_3 - 1 + i = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1 + i)$

donc $z_3 = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1 - i = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

4°) O a pour affixe 0. Les résultats précédents permettent de donner les affixes de t(O), h(O) et r(O).

t(O) a pour affixe $z_1 = 0 + 2 + i$ donc t(O) a pour affixe $2 + i$

h(O) a pour affixe $z_2 = -\dfrac{3}{2} \times 0 + 5 + 10i$ donc h(O) a pour affixe $5 + 10i$

r(O) a pour affixe $z_3 = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 0 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

donc r(O) a pour affixe $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

Propriétés

- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z + b$ où b est un nombre complexe fixé, est la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe b.
- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = k(z - \omega)$ où k est un nombre réel non nul fixé et ω un nombre complexe fixé, est l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k.
- L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ où α est un nombre réel fixé et ω un nombre complexe fixé, est la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle α.

Remarque

L'expression de z' en fonction de z est appelée écriture complexe de l'application.

Démonstrations

- Si le point M' a pour affixe $z' = z + b$, alors $z' - z = b$, donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{V}$
  L'application est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$.
- Si le point M' a pour affixe z' avec $z' - \omega = k(z - \omega)$, alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$
  L'application est donc l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
- Si le point M' a pour affixe z' avec $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$, alors $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\alpha}$.

  Donc $\left|\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \alpha\ [2\pi]$

  On en déduit que $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M} = 1$ et $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi]$, c'est-à-dire $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha\ [2\pi]$.
  L'application est donc la rotation de centre Ω et d'angle α.

Exercice 18

Reconnaître la transformation du plan qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' avec :

$z' = z - 3 + 2i$ $\qquad z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z$ $\qquad z' = -z$

$z' - i = 2(z - i)$ $\qquad z' = -iz$ $\qquad z' + 1 = iz + i$.

- $z' = z - 3 + 2i$ est de la forme $z' = z + b$ avec $b = -3 + 2i$
  L'application est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe $b = -3 + 2i$
- $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z \iff z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z \iff z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z \iff z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - 0)$

  L'application est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
- $z' = -z \iff (z' - 0) = (-1)(z - 0)$
  L'application est l'homothétie de centre O et de rapport -1 .
  C'est aussi la rotation de centre O et d'angle π : on peut écrire $(z' - 0) = e^{i\pi}(z - 0)$
  et aussi la symétrie centrale de centre O.
- $z' - i = 2(z - i)$
  L'application est l'homothétie de centre Ω d'affixe i et de rapport 2 .
- $z' = -iz \iff z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z$

  L'application est la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
- $z' + 1 = iz + i \iff z' + 1 = i(z + 1) \iff z' + 1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z + 1)$
  L'application est la rotation de centre Ω d'affixe -1 et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 19

Donner l'écriture complexe des transformation suivantes :

translation de vecteur $\overrightarrow{V}(1;2)$,
homothétie de centre A d'affixe -1 + i et de rapport -3
rotation de centre B d'affixe 3 - i et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{V}(1\,;\,2)$ a pour affixe $1 + 2i$
  L'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ est donc $z' = z + 1 + 2i$
- L'homothétie de centre A d'affixe -1 + i et de rapport -3 est caractérisée par :
  $z' - (-1 + i) = -3\,[z - (-1 + i)]$ c'est-à-dire $z' + 1 - i = -3z - 3 + 3i$
  donc $z' = -3z - 3 + 3i - 1 + i$
  L'écriture complexe de l'homothétie de centre A d'affixe -1 + i et de rapport -3 est $z' = -3z - 4 + 4i$

- La rotation de centre B d'affixe 2 - 4i et d'angle $\frac{\pi}{6}$ est caractérisée par :

$z' - (2 - 4i) = e^{i\frac{\pi}{6}}[z - (2 - 4i)]$ c'est-à-dire $z' - 2 + 4i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z - 2 + 4i) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - i + 2i^2$

donc $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - i - 2 + 2 - 4i$

La rotation de centre B d'affixe 2 - 4i et d'angle $\frac{\pi}{6}$ a pour écriture complexe :

$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - 5i$

Exercice 20

Étant donnés A(1 + i) et B(2 - 3i), déterminer les affixes des points M tels que ABM soit un triangle équilatéral.

Étant donnés deux points distincts A et B, il existe deux points C et D répondant à la question.
On peut caractériser C comme étant l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D comme étant l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

C étant l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a :

$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$ donc $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A$

$z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 3i - 1 - i) + 1 + i = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - 4i) + 1 + i$

$= \frac{1}{2} - 2i + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 1 + i = \frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$

D étant l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, on a : $z_D - z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

donc $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) + z_A = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 3i - 1 - i) + 1 + i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - 4i) + 1 + i$

$= \frac{1}{2} - 2i - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} + 1 + i = \frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$

Il y a donc deux points M tels que ABM soit un triangle équilatéral, ce sont les points d'affixe

$\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ et $\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$