程序设计实习

郭炜　微博 http://weibo.com/guoweiofpku
http://blog.sina.com.cn/u/3266490431
刘家瑛 微博 http://weibo.com/pkuliujiaying

动态规划

最长上升子序列

例题二：最长上升子序列(百练2757)

问题描述

一个数的序列ai，当$a_1 < a_2 < \ldots < a_S$的时候，我们称这个序列是上升的。对于给定的一个序列(a_1，a_2，...，a_N)，我们可以得到一些上升的子序列(a_{i1}，a_{i2}，...，a_{iK})，这里1 <= i1 < i2 < ... < iK <= N。比如，对于序列(1，7，3，5，9，4，8)，有它的一些上升子序列，如(1，7)，(3，4，8)等等。这些子序列中最长的长度是4，比如子序列(1，3，5，8).

你的任务，就是对于给定的序列，求出最长上升子序列的长度。

输入数据

输入的第一行是序列的长度N（1 <= N <= 1000）。第二行给出序列中的N个整数，这些整数的取值范围都在0到10000。

输出要求

最长上升子序列的长度。

输入样例

7

1 7 3 5 9 4 8

输出样例

4

解题思路

1. 找子问题

“求序列的前n个元素的最长上升子序列的长度”是个子问题，但这样分解子问题，不具有“无后效性”

假设F(n) = x,但可能有多个序列满足F(n) = x。有的序列的最后一个元素比 a_{n+1}小，则加上a_{n+1}就能形成更长上升子序列；有的序列最后一个元素不比a_{n+1}小……以后的事情受如何达到状态n的影响，不符合“无后效性”

解题思路

1. 找子问题

“求以a_k（k=1，2，3…N）为终点的最长上升子序列的长度”

一个上升子序列中最右边的那个数，称为该子序列的“终点”。

虽然这个子问题和原问题形式上并不完全一样，但是只要这N个子问题都解决了，那么这N个子问题的解中，最大的那个就是整个问题的解。

2. 确定状态：

子问题只和一个变量-- 数字的位置相关。因此序列中数的位置k 就是“状态”，而状态 k 对应的“值”，就是以a_k做为“终点”的最长上升子序列的长度。

状态一共有N个。

3. 找出状态转移方程：

maxLen（k）表示以a_k做为“终点”的最长上升子序列的长度那么：

初始状态：maxLen（1）= 1

maxLen（k）= max { maxLen（i）：1<=i < k 且 a_i < a_k且 k≠1 } + 1

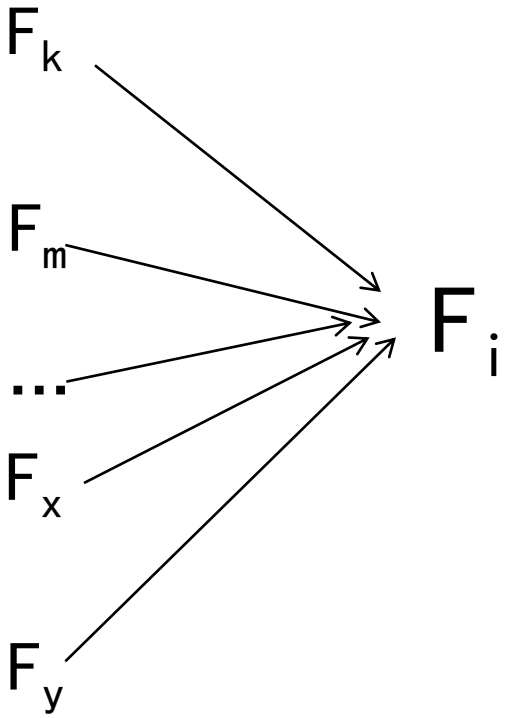
若找不到这样的i，则maxLen(k) = 1

maxLen(k)的值，就是在a_k左边，“终点”数值小于a_k，且长度最大的那个上升子序列的长度再加1。因为a_k左边任何“终点”小于a_k的子序列，加上a_k后就能形成一个更长的上升子序列。

“人人为我”递推型动归程序

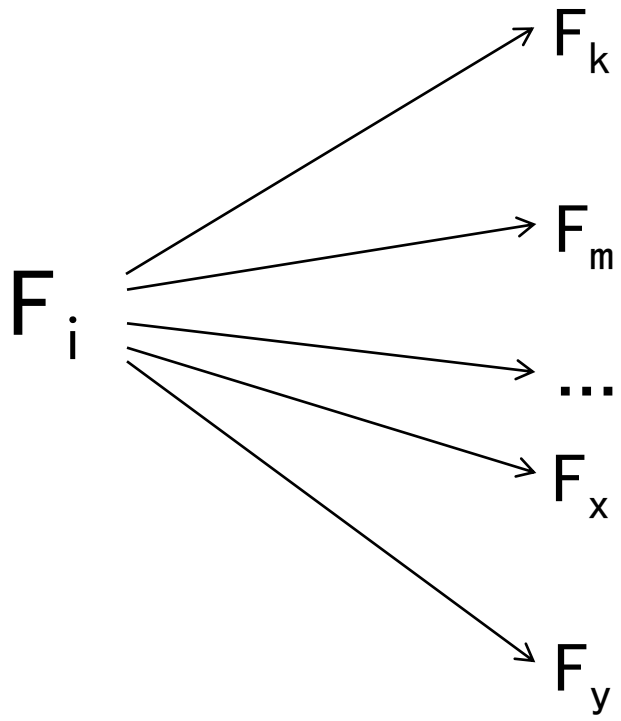
```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int  MAXN =1010;
int a[MAXN];   int maxLen[MAXN];
int main() {
        int N;      cin >> N;
        for( int i = 1;i <= N;++i) {
                cin >> a[i];
                maxLen[i] = 1;
        }
        for( int i = 2; i <= N; ++i) { //每次求以第i个数为终点的最长上升子序列的长度
                for( int j = 1; j < i; ++j)  //察看以第j个数为终点的最长上升子序列
                        if( a[i] > a[j] )
                                maxLen[i] = max(maxLen[i],maxLen[j]+1);
        }
        cout << * max_element(maxLen+1,maxLen + N + 1 );
        return 0;
} //时间复杂度O(N2)
```

“人人为我”递推型动归



状态i的值F_i由若干个值
已知的状态值$F_k, F_m, ..F_y$
推出，如求和，取最大值
……

“我为人人”递推型动归



状态i的值F_i在被更新（不一定是最终求出）的时候，依据F_i去更新（不一定是最终求出）和状态i相关的其他一些状态的值

$F_k, F_m, . . F_y$

“我为人人”递推型动归程序

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int  MAXN =1010;
int a[MAXN];
int maxLen[MAXN];
int main()    {
        int N;      cin >> N;
        for( int i = 1;i <= N;++i) {
                cin >> a[i];
                maxLen[i] = 1;
        }
        for( int i = 1; i <= N; ++i)
                for( int j = i + 1; j <= N; ++j )  //看看能更新哪些状态的值
                        if( a[j] > a[i] )
                                maxLen[j] = max(maxLen[j],maxLen[i]+1);
        cout << * max_element(maxLen+1,maxLen + N + 1 );
        return 0;
} //时间复杂度O(N2)
```

人人为我：

```
for( int i = 2; i <= N; ++i)
    for( int j = 1; j < i; ++j)
        if( a[i] > a[j] )
            maxLen[i] =
                max(maxLen[i],maxLen[j]+1);
```

动归的三种形式

1）记忆递归型

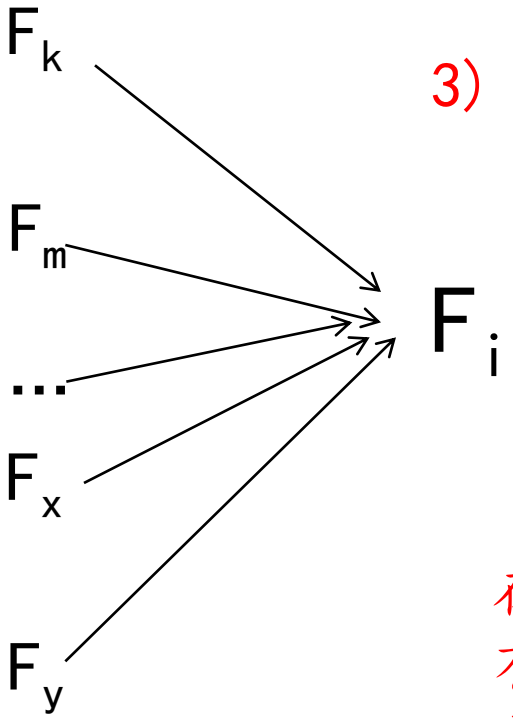
优点：只经过有用的状态，没有浪费。递推型会查看一些没用的状态，有浪费

缺点：可能会因递归层数太深导致爆栈，函数调用带来额外时间开销。总体来说，比递推型慢。

2）“我为人人”递推型

没有什么明显的优势，有时比较符合思考的习惯。个别特殊题目中会比“人人为我”型节省空间。

“人人为我”递推型中的优化



3) “人人为我”递推型

状态i的值F_i由若干个值
已知的状态值$F_k, F_m, ..F_y$
推出，如求和，取最大值
……

在选取最优备选状态的值Fm, Fn, …Fy时，有可能有好的算法或数据结构可以用来显著降低时间复杂度。