

# 枚举 — 基本思想

郭 炜 刘家瑛



北京大学



# 枚举

- 基于已有知识进行答案猜测的一种问题求解策略
- 例如: 求小于N的最大素数
  - 找不到一个数学公式, 使得根据N就可以计算出这个素数
  - N-1是素数吗? N-2是素数吗? .....
  - N-K是素数的充分必要条件:
    - N-K不能被任何一个大于1, 小于N-K的素数整除
  - 判断N-K是否是素数的问题
  - 转化为求小于N-K的全部素数



# 枚举

## ■ 解决办法

- 2是素数, 记为 $\text{PRIM}_0$
- 根据 $\text{PRIM}_0, \text{PRIM}_1, \dots, \text{PRIM}_k$ , 寻找比 $\text{PRIM}_k$ 大的最小素数 $\text{PRIM}_{k+1}$
- 如果 $\text{PRIM}_{k+1}$ 大于 $N$ , 则 $\text{PRIM}_k$ 是我们需要找的素数, 否则继续寻找



# 枚举的思想: 猜测

## 枚举

### 从可能的集合中一一列举各元素

- 根据所知道的**知识**, 给一个猜测的答案
- 2是素数

### 枚举算法

- 对问题可能解集合的每一项
- 根据问题给定的检验条件判定哪些是成立的
- 使条件成立的即是问题的解



# 枚举的思想: 猜测

## 枚举过程

- 判断猜测的答案是否正确  
→ 2是小于N的最大素数吗?
- 进行新的猜测: 有两个关键因素要注意
  - 猜测的结果必须是前面的猜测中**没有出现过的**. 每次猜测是素数一定比已经找到的素数大
  - 猜测的过程中要**及早排除错误的**答案. 除2之外, 只有奇数才可能是素数



# 枚举中三个关键问题

## 问题一

给出解空间, 建立简洁的数学模型

可能的情况是什么

→ 模型中变量数尽可能少, 它们之间相互独立

- “求小于 $N$ 的最大素数” 中的条件是 “ $n$ 不能被 $[2, n)$ 中任意一个素数整除”
- 而不是 “ $n$ 不能被 $[2, n)$ 中任意一个整数整除”



# 枚举中三个关键问题

## 问题二

### 减少搜索的空间

- 利用知识缩小模型中各变量的取值范围, 避免不必要的计算

→减少代码中循环体执行次数

- 除2之外, 只有奇数才可能是素数,  $\{2, 2*i+1 | 1 \leq i, 2*i+1 < n\}$



# 枚举中三个关键问题

- ▲ 问题三
- ▲ 采用合适的搜索顺序
- ▲ 搜索空间的遍历顺序要与模型中条件表达式一致
  - 对 $\{2, 2*i+1 | 1 \leq i, 2*i+1 < n\}$ 按照从小到大的顺序





# 中国古代的枚举问题

## 百钱百鸡问题

- 鸡翁一值钱五, 鸡母一值钱三, 鸡雏三值钱一.  
百钱买百鸡, 问鸡翁, 鸡母, 鸡雏各几何

—— 张丘建《算经》

### 求解方法:

- 先构造可能的解的集合  $S=\{(X,Y,Z)|0\leq X,Y,Z\leq 100\}$   
X, Y, Z分别代表买公鸡, 母鸡和小鸡的只数
- 然后验证条件  $X+Y+Z=100$ ,  $5X+3Y+Z/3=100$
- 复杂度:  $O(100^2)$



# 中国古代的枚举问题

## 百钱百鸡问题

```
for (int x=0; x<=100; x++)  
    for (int y=0 ; y<=100-x; y++){  
        z = 100 - x - y;  
        if (z % 3==0) then  
            if (5*x+3*y+z/3==100)  
                then (x,y,z) is solution  
    }
```