数据结构与算法（一）

张铭 主讲

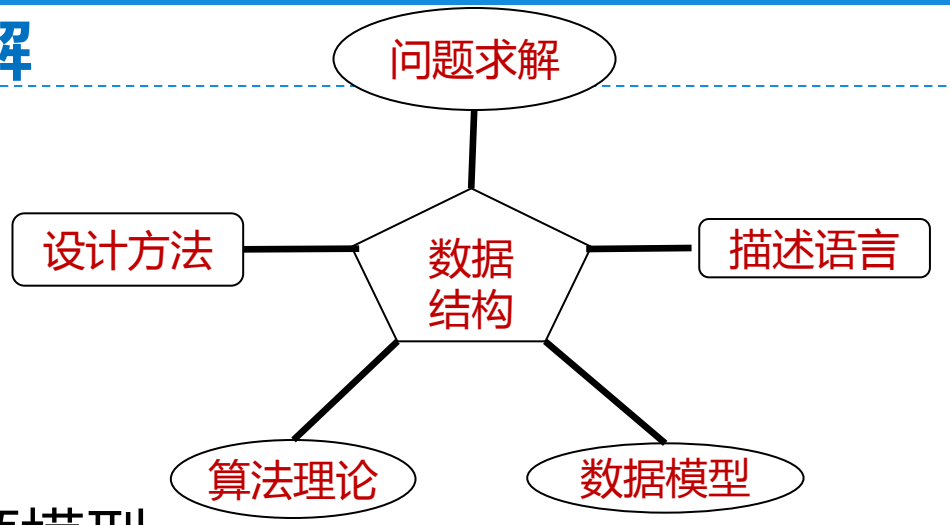
采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008. 6（“十一五”国家级规划教材）

http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg

第1章　概论

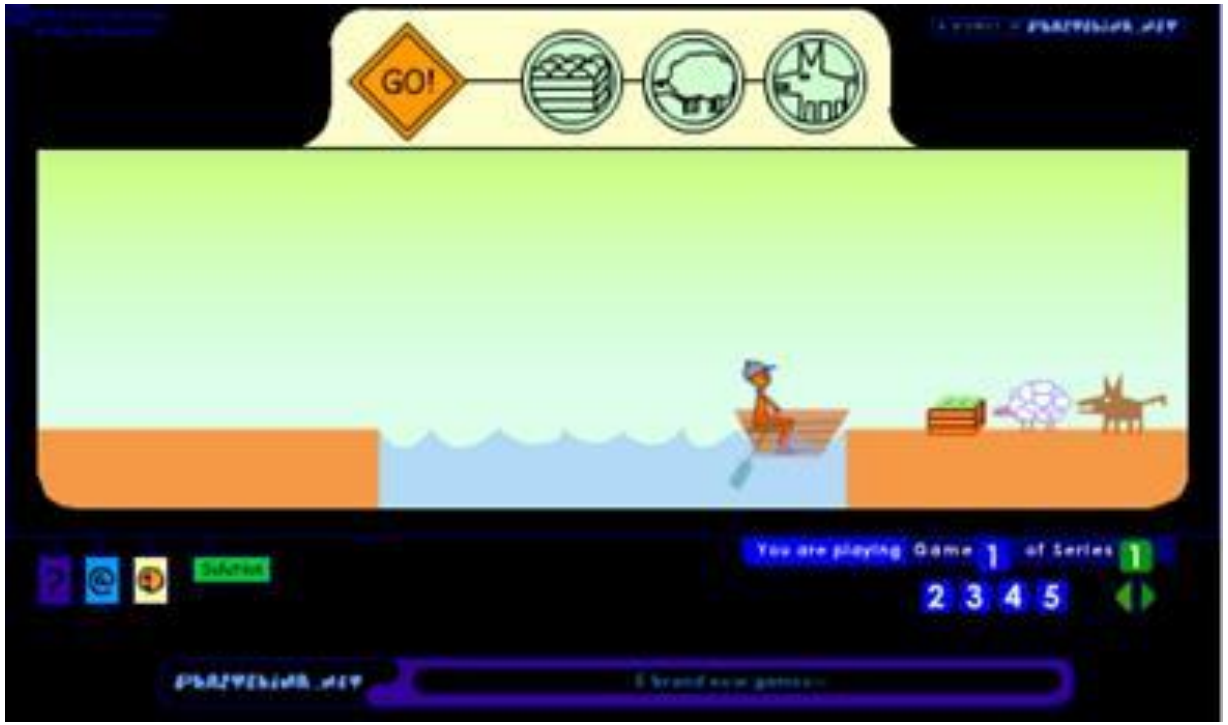
- 问题求解
- 数据结构及抽象数据类型
- 算法的特性及分类
- 算法的效率度量
- 数据结构的选择和评价

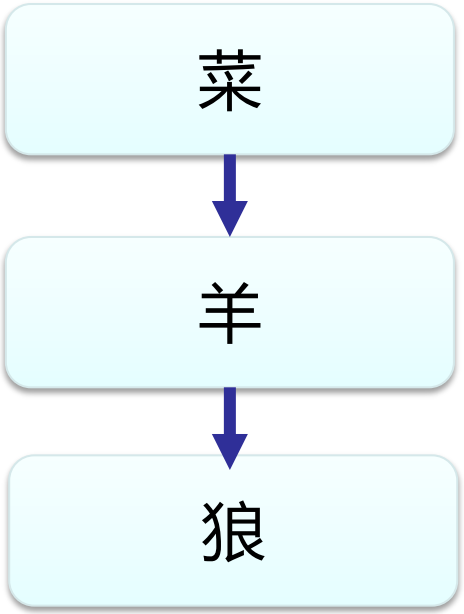
1.1 问题求解



- 编写计算机程序的目的？
  - 解决实际的应用问题
- 问题抽象
  - 分析和抽象任务需求，建立问题模型
- 数据抽象
  - 确定恰当的数据结构表示数学模型
- 算法抽象
  - 在数据模型的基础上设计合适的算法
- 数据结构 + 算法，进行程序设计
  - 模拟和解决实际问题

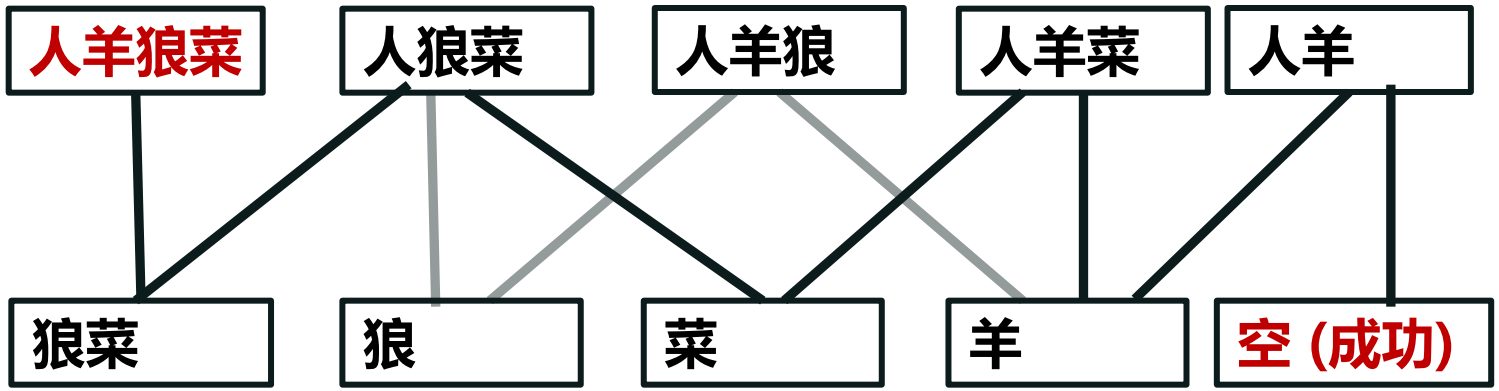
农夫过河

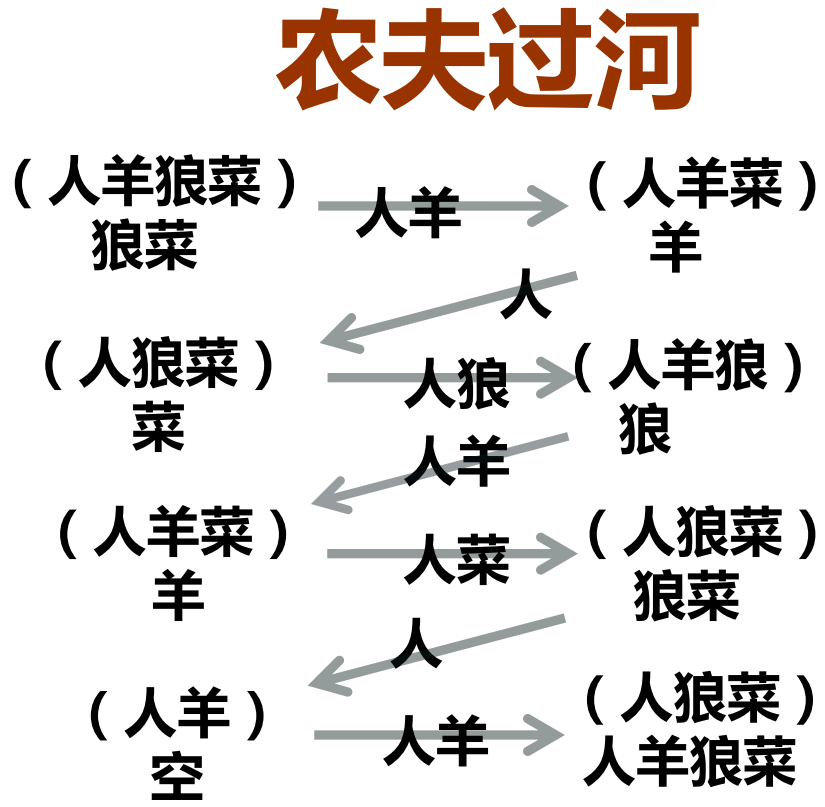




1.1 问题求解

- **问题抽象**：人狼羊菜乘船过河
  - 只有人能撑船
  - 船只有两个位置（包括人）
  - 狼羊、羊菜不能在没有人时共处
- **数据抽象**：图模型
  - 不合理状态：狼羊、人菜、羊菜、人狼、狼羊菜、人
  - 顶点表示“原岸状态”——10种（包括“空”）
  - 边：一次合理的渡河操作实现的状态转变

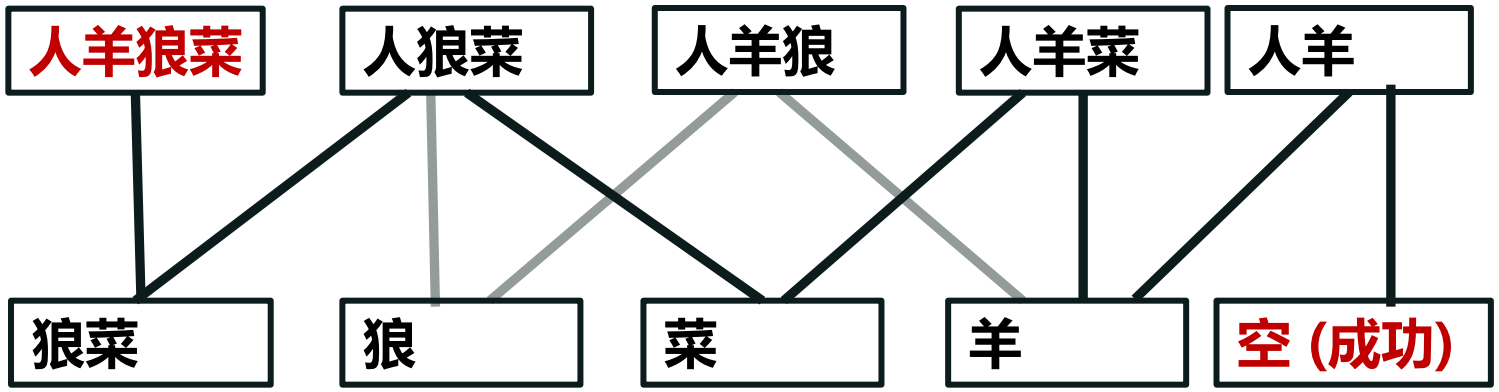




农夫过河

- 数据结构
  - 相邻矩阵
- 算法抽象：
  - 最短路径

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$



思考：问题求解过程

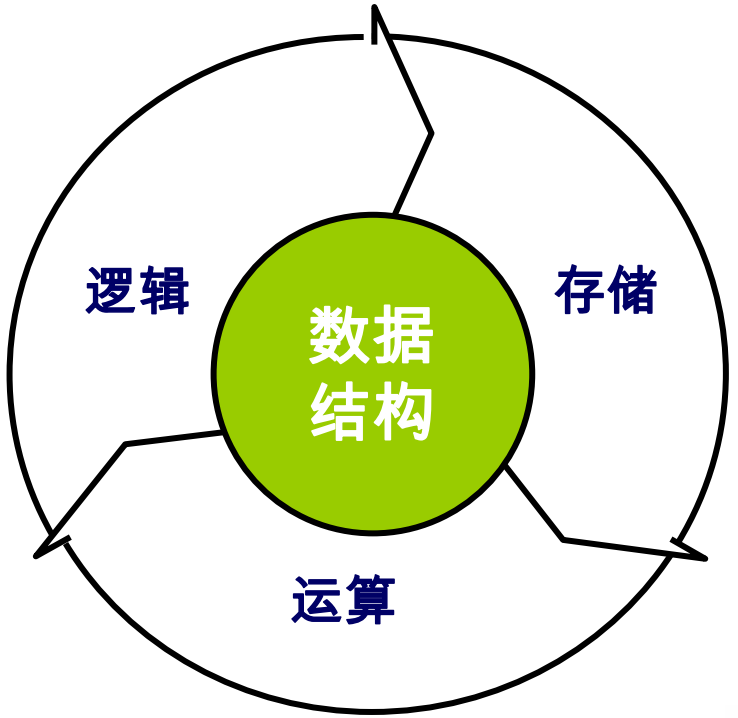
- 农夫过河问题 —— 最短路径模型
  - 问题抽象？
  - 数据抽象？
  - 算法抽象？
  - 不妨编程序模拟实现
- 还有其他模型吗？

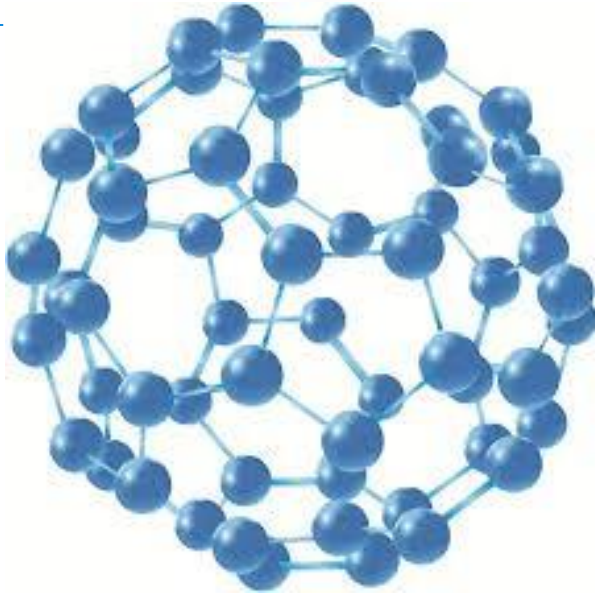
第1章　概论

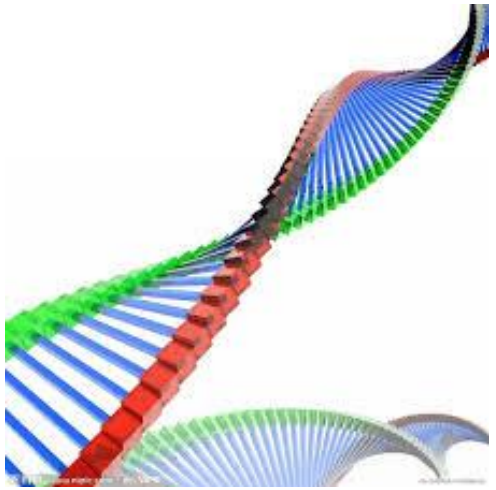
- 问题求解
- 数据结构及抽象数据类型
- 算法的特性及分类
- 算法的效率度量
- 数据结构的选择和评价

1.2 什么是数据结构

- **结构: 实体 + 关系**
- 数据结构:
  - 按照逻辑关系组织起来的一批数据,
  - 按一定的存储方法把它存储在计算机中
  - 在这些数据上定义了一个运算的集合

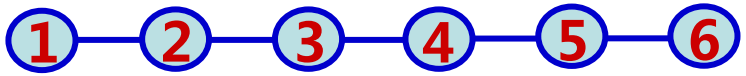




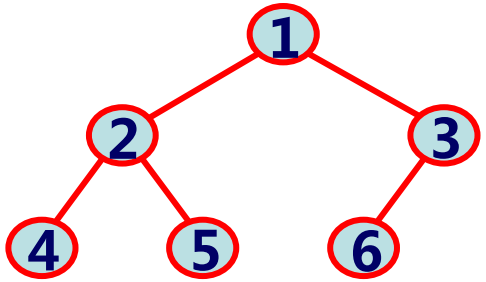


数据结构的逻辑组织

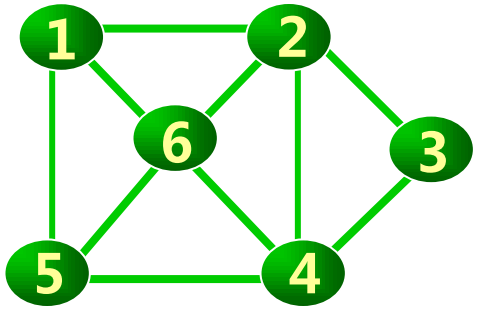
- **线性结构**
  - 线性表（表，栈，队列，串等）



- **非线性结构**
  - 树（二叉树，Huffman树，二叉检索树等）
  - 图（有向图，无向图等）

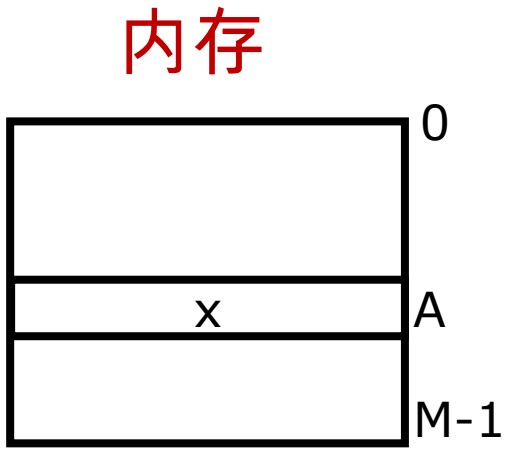


- **图 ⊇ 树 ⊇ 二叉树 ⊇ 线性表**



数据的存储结构

- **逻辑结构到物理存储空间的映射**

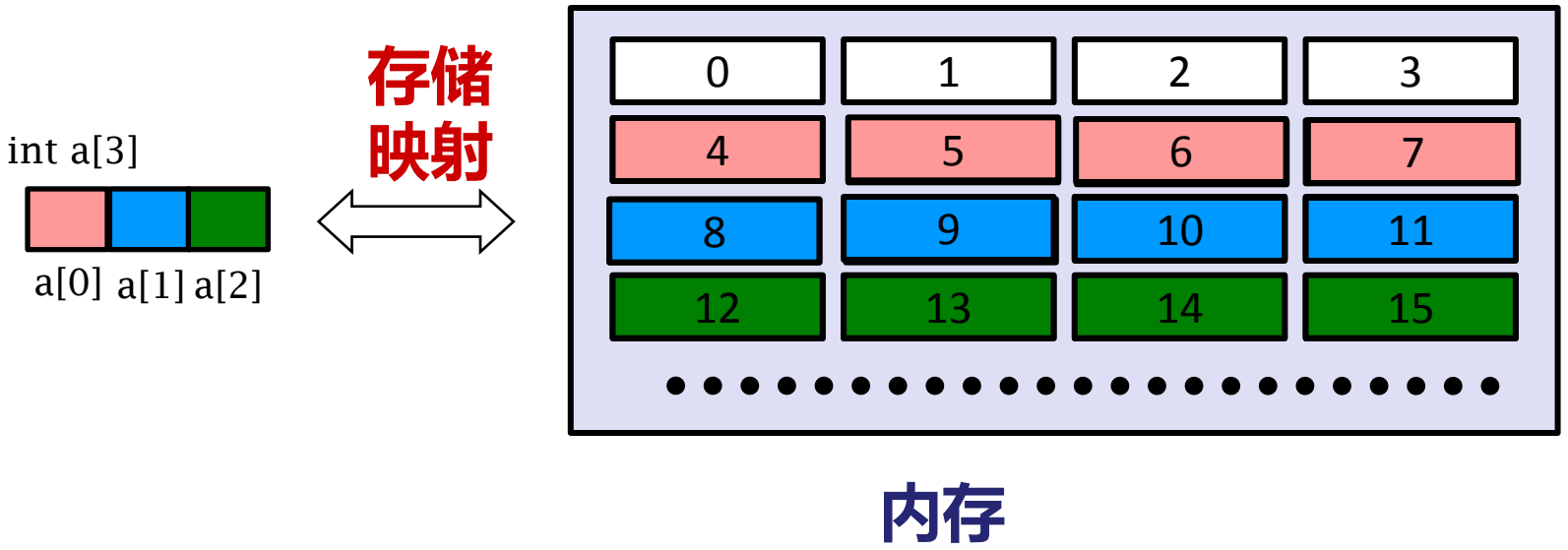


计算机主存储器（内存）

- **非负整数**地址编码，**相邻单元**的集合
  - 基本单位是字节
  - 访问不同地址所需时间基本相同（即随机访问）

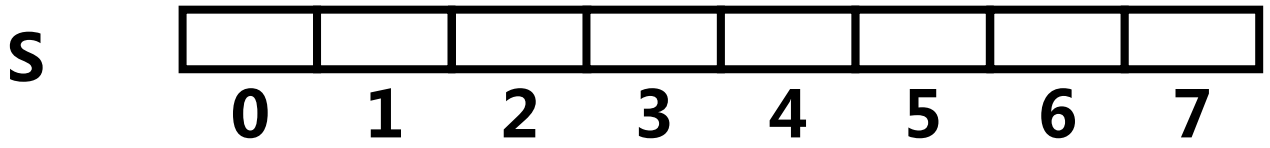
数据的存储结构

- 对逻辑结构（K ，r），其中r∈R
  - 对结点集 K 建立一个从 K 到存储器 M 的单元的映射：K→M，对于每一个结点 j∈K 都对应一个**唯一**的**连续存储**区域c ∈ M

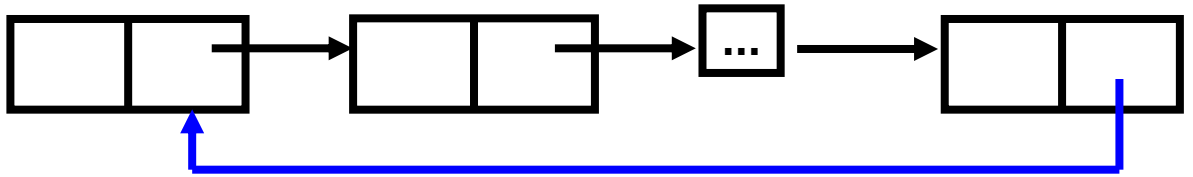


数据的存储结构

- 关系元组 $(j_1, j_2) \in r$
  (其中 j_1，$j_2 \in K$ 是结点)
  - 顺序：存储单元的顺序地址



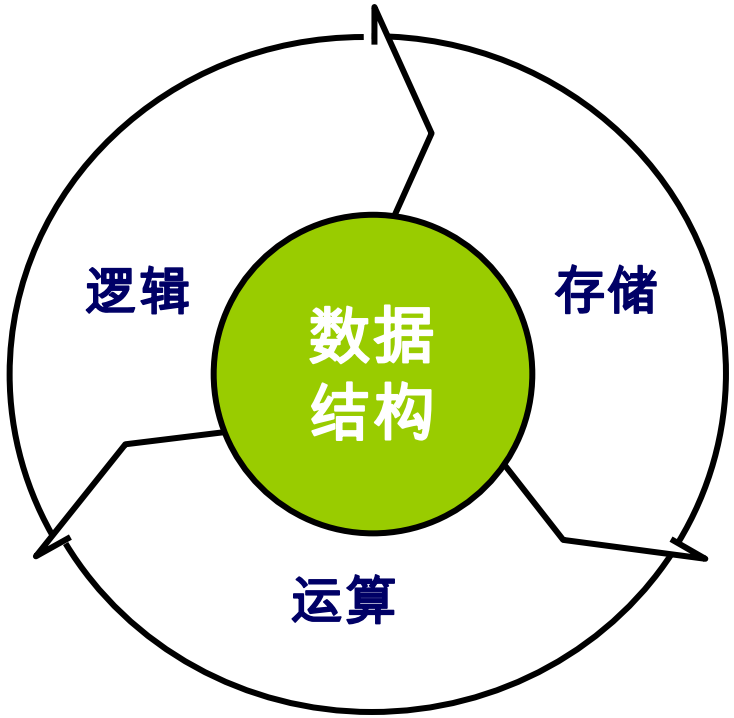
  - 链接：指针的地址指向关系



- 四类：**顺序、链接、索引、散列**

抽象数据类型

- 简称**ADT** (Abstract Data Type)
  - 定义了一组运算的数学模型
  - 与物理存储结构无关
  - 使软件系统建立在数据之上(面向对象)



- **模块化**的思想的发展
  - 隐藏运算实现的细节和内部数据结构
  - 软件复用

ADT 不关心存储细节

—— 例，C++版本括号匹配算法

```
void BracketMatch(char *str) {
  Stack<char> S; int i; char ch;
  // 栈可以是顺序或链式的，都一样引用
  for(i=0; str[i]!='\0'; i++)  {
      switch(str[i])  {
        case '(':   case '[':   case '{':
              S.Push(str[i]); break;
        case ')':  case ']':   case '}':
           if (S.IsEmpty( )) {
            cout<<"右括号多余!";
               return;
           }
           else {
               ch = S.GetTop( );
               if (Match(ch,str[i]))
                   ch = S.Pop( );
               else {
                   cout << "括号不匹配!";
                   return;
                }
              } /*else*/
            }/*switch*/
          }/*for*/
          if (S.IsEmpty( ))
              cout<<"括号匹配!";
          else cout<<"左括号多余" ;
      }
```

C 的顺序栈括号匹配算法 (与链式略不同)

```
void BracketMatch(char *str) {
  SeqStack S; int i; char ch;
  InitStack(&S);
  for(i=0; str[i]!='\0'; i++)  {
      switch(str[i])  {

       case '(':    case '[':    case '{':
            Push(&S,str[i]); break;

       case ')':   case ']':    case '}':
            if (IsEmpty(&S)) {
                printf("\n右括号多余!");
                return;
            }
            else {
                GetTop (&S,&ch);
                if (Match(ch,str[i]))
                    Pop(&S,&ch);
                else {
                    printf("\n括号不匹配!");
                    return;
                }
              } /*else*/
           }/*switch*/
         }/*for*/
         if (IsEmpty(&S))
             printf("\n括号匹配!");
         else printf("\n左括号多余" );
      }
```

C 的链式栈括号匹配算法 (与顺序栈不同)

```
void BracketMatch(char *str) {
  LinkStack S; int i; char ch;
  InitStack(/*&*/S);
  for(i=0; str[i]!='\0'; i++)  {
      switch(str[i])  {

       case '(':    case '[':    case '{':
            Push(/*&*/S, str[i]);
            break;

       case ')':  case ']':    case '}':
            if (IsEmpty(S)) {
                printf("\n右括号多余!");
                return;
            }
            else {
                GetTop (/*&*/S,&ch);
                if (Match(ch,str[i]))
                    Pop(/*&*/S,&ch);
                else {
                    printf("\n括号不匹配!");
                    return;
                }
            } /*else*/
        }/*switch*/
    }/*for*/
    if (IsEmpty(/*&*/S))
        printf("\n括号匹配!");
    else printf("\n左括号多余" );
}
```

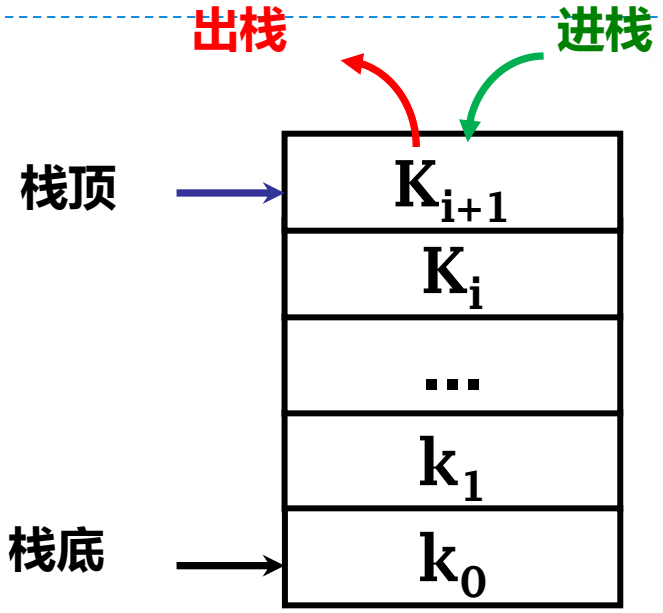
抽象数据类型ADT

- 抽象数据结构二元组

  <数据对象D，数据操作P>

- 先定义逻辑结构，再定义运算
  - **逻辑结构**：数据对象及其关系
  - **运算**：数据操作

例：栈的抽象数据类型ADT



- 逻辑结构：线性表
- 操作特点：限制访问端口
  - 只允许在一端进行插入、删除操作
  - 入栈（ push ）、出栈（ pop ）、取栈顶（ top ）
    判栈空（ isEmpty ）

```
template <class T>                  // 栈的元素类型为 T
class Stack {
public:                             // 栈的运算集
    void clear();                   // 变为空栈
    bool push(const T item);        // item入栈，成功返回真，否则假
    bool pop(T & item);             // 弹栈顶，成功返回真，否则返回假
    bool top(T& item);              // 读栈顶但不弹出，成功真，否则假
    bool isEmpty(;                  // 若栈已空返回真
    bool isFull();                  // 若栈已满返回真
};
```

思考：关于抽象数据类型ADT

- 怎么体现逻辑结构？
- 抽象数据类型等价于类定义 ？
- 不用模板来定义可以描述 ADT 吗？

第1章 概论

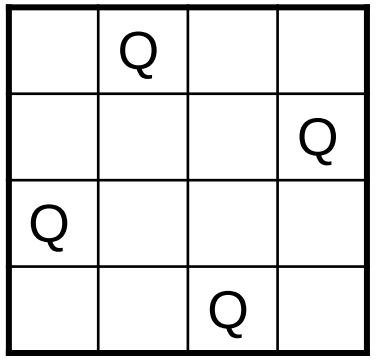
- 问题求解
- 数据结构及抽象数据类型
- **算法的特性及分类**
- 算法的效率度量

问题 —— 算法 —— 程序

目标：问题求解

- **问题（problem）**一个函数
  - 从输入到输出的一种映射
- **算法（algorithm）**一种方法
  - 对特定问题求解过程的描述，是指令的有限序列
- **程序（program）**
  - 是算法在计算机程序设计语言中的实现

算法的特性

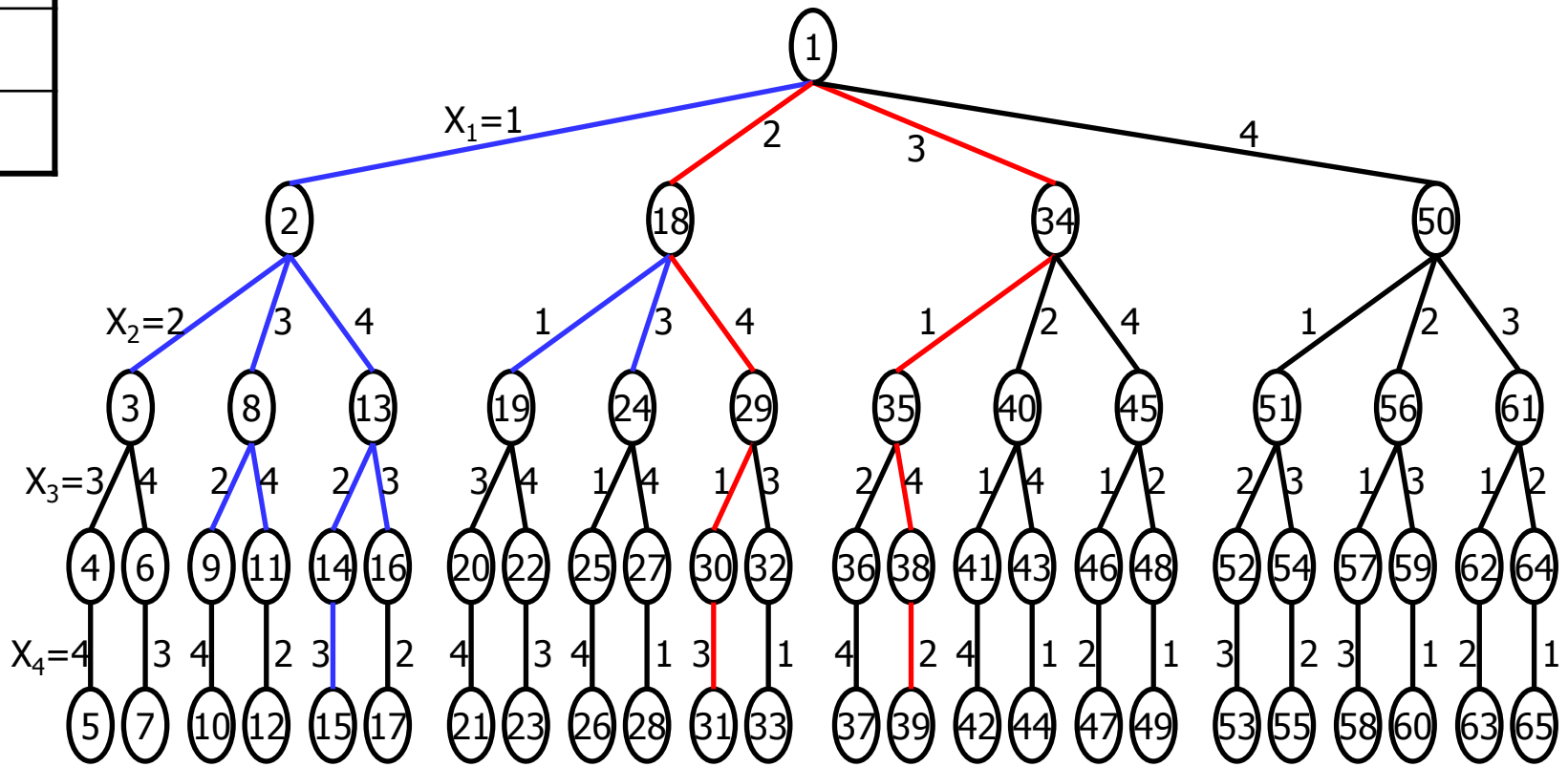


- 通用性
  - 对参数化输入进行问题求解
  - 保证计算结果的正确性
- 有效性
  - 算法是有限条指令组成的指令序列
  - 即由一系列具体步骤组成
- 确定性
  - 算法描述中的下一步应执行的步骤必须明确
- 有穷性
  - 算法的执行必须在有限步内结束
  - 换句话说，算法不能含有死循环

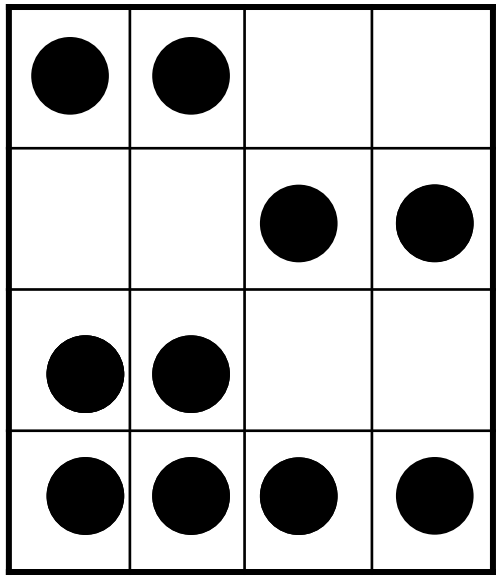
皇后问题（四皇后）

	Q		
			Q
Q			
		Q	

- 解<$x1,x2,x3,x4$>（放置列号）
- 搜索空间：4叉树（排列树）



基本算法分类



- **穷举法**
  - 顺序找 K 值
- **回溯、搜索**
  - 八皇后、树和图遍历
- **递归分治**
  - 二分找 K 值、快速排序、归并排序
- **贪心法**
  - Huffman 编码树、最短路 Dijkstra 算法、最小生成树 Prim 算法
- **动态规划**
  - 最短路 Floyd 算法

1.3 算法

顺序找k值

0	1	2	3	4	5	6	7	8
	17	35	22	18	93	60	88	52

```
template  <class Type>
class Item {
private:
    Type  key;                                  // 关键码域
                                                // 其它域
public:
    Item(Type value):key(value) {}
    Type getKey() {return key;}                 // 取关键码值
    void setKey(Type k){ key=k;}                // 置关键码
};
vector<Item<Type>*>  dataList;
template  <class Type>  int SeqSearch(vector<Item<Type>*>& dataList, int length,
Type k) {
    int i=length;
    dataList[0]->setKey (k);                    // 将第0个元素设为待检索值，设监视哨
    while(dataList[i]->getKey()!=k) i--;
    return i;                                   // 返回元素位置
}
```

二分法找 k 值

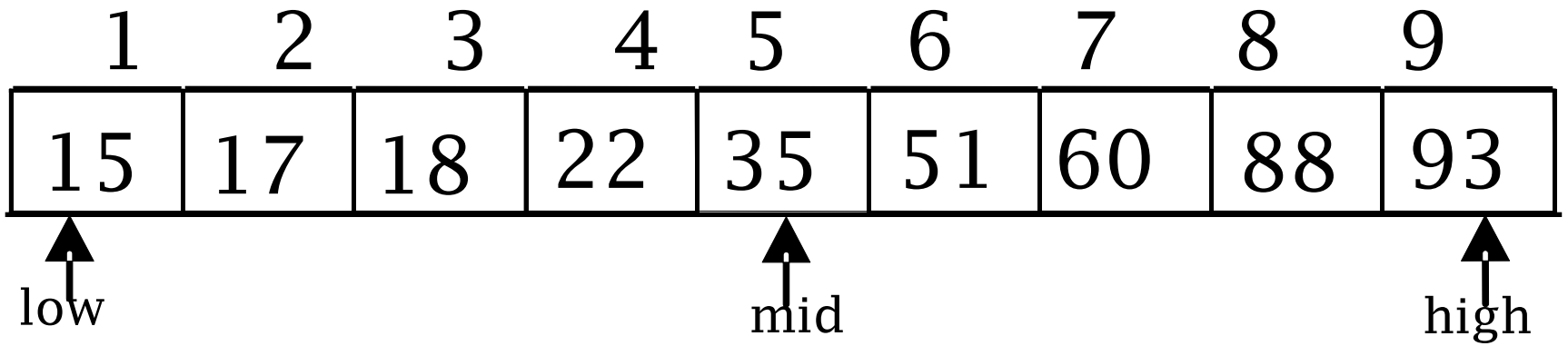
对于已排序顺序线性表

- 数组中间位置的元素值 k_{mid}
  - 如果 $k_{mid} = k$，那么检索工作就完成了
  - 当 $k_{mid} > k$ 时，检索继续在前半部分进行
  - 相反地，若 $k_{mid} < k$，就可以忽略 mid 以前的那部分，检索继续在后半部分进行
- 快速
  - $k_{mid} = k$ 结束
  - $K_{mid} \neq k$ 起码缩小了一半的检索范围

二分法找 k 值

```
template  <class Type> int BinSearch (vector<Item<Type>*>& dataList,
int length, Type k){
    int low=1, high=length, mid;
    while (low<=high)  {
        mid=(low+high)/2;
        if (k<dataList[mid]->getKey())
                high = mid-1;          // 右缩检索区间
        else if (k>dataList[mid]->getKey())
                low = mid+1;           // 左缩检索区间
        else return mid;               // 成功返回位置
     }
    return 0;                          // 检索失败，返回0
}
```

二分法检索图示



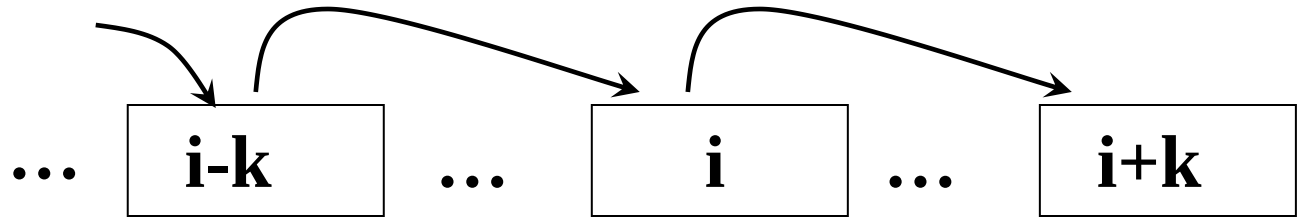
检索关键码18 low=1 high=9 K=18

第一次：mid=5; array[5]=35>18
high=4; (low=1)
第二次：mid=2; array[2]=17<18
low=3; (high=4)
第三次：mid=3; array[3]=18=18
mid=3 ; return 3

思考：算法的时空限制

设计一个算法，将数组 A(0..n-1) 中的元素循环右移 k 位，假设原数组序列为 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$；移动后的序列为 $a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_0, a_1, \ldots, a_{n-k-1}$。要求只用一个元素大小的附加存储，元素移动或交换次数与 n 线性相关。例如，n=10, k=3

原始数组： 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
右移后的： 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6



第1章 概论

- 问题求解
- 数据结构及抽象数据类型
- 算法的特性及分类
- **算法的效率度量**

算法的渐进分析

$$f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1000$$

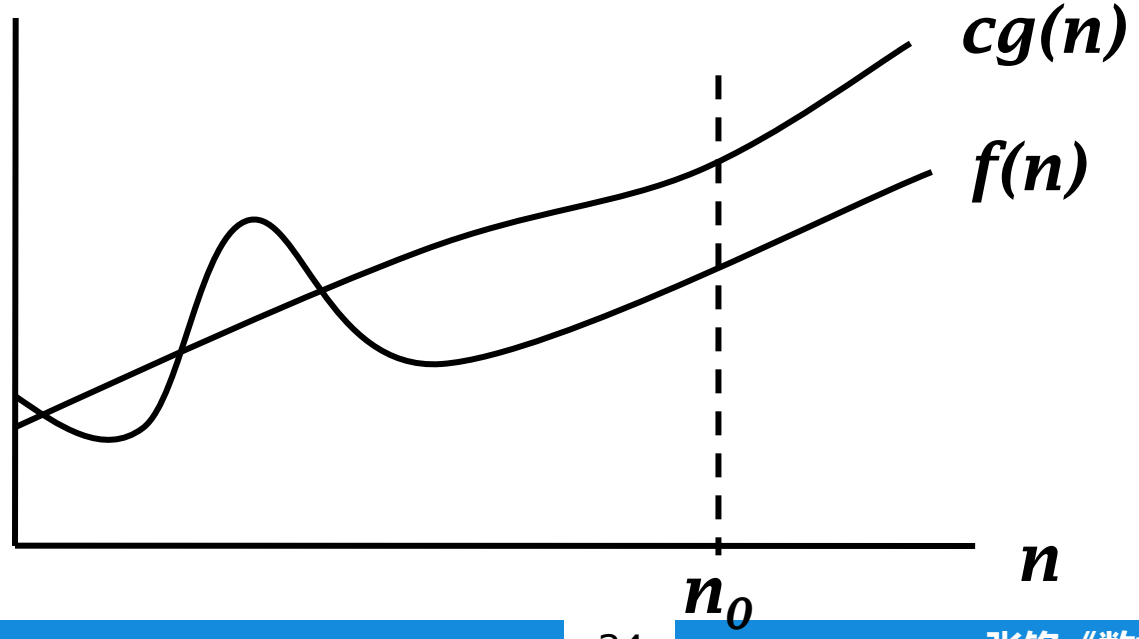
- 数据规模 n 逐步增大时，
  f(n) 的增长趋势
- 当 n 增大到一定值以后，计算公式中影响最大的就是 n 的幂次最高的项
  - 其他的常数项和低幂次项都可以忽略

算法渐进分析：大O表式法

- 函数 f，g 定义域为自然数，值域非负实数集
- **定义**：如果存在正数 c 和 n_0，使得对任意的 $n \geq n_0$，都有 $f(n) \leq cg(n)$，
- 称f(n)在集合O(g(n)) 中，简称 f(n) 是 O(g(n)) 的，或 f(n) = O(g(n))
- 大 O 表示法：表达函数增长率上限
  - 一个函数增长率的上限可能不止一个
- 当上、下限相同时则可用 Θ 表示法

大 O 表示法

- $f(n) = O(g(n))$，当且仅当
  - 存在两个参数 $c > 0$ ，$n_0 > 0$，对于所有的 $n \geq n_0$ ，都有 $f(n) \leq cg(n)$
- iff $\exists\ c, n_0 > 0$ s.t. $\forall\ n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$



n足够大
$g(n)$是 $f(n)$ 的上界

大 O 表示法的单位时间

- 简单布尔或算术运算
- 简单 I/O
  - 指函数的输入/输出
    例如，从数组读数据等操作
  - 不包括键盘文件等 I/O
- 函数返回

大 O 表示法的运算法则

- **加法规则:** $f_1(n)+f_2(n)=O(\max(f_1(n), f_2(n)))$
  - 顺序结构，if 结构，switch 结构
- **乘法规则:** $f_1(n) f_2(n) = O(f_1(n) f_2(n))$
  - for, while, do-while 结构

```
for (i=0; j<n; i++)
    for (j=i; j<n; j++)
        k++;
```

$n-i$

?

$$\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}=O(n^2)$$

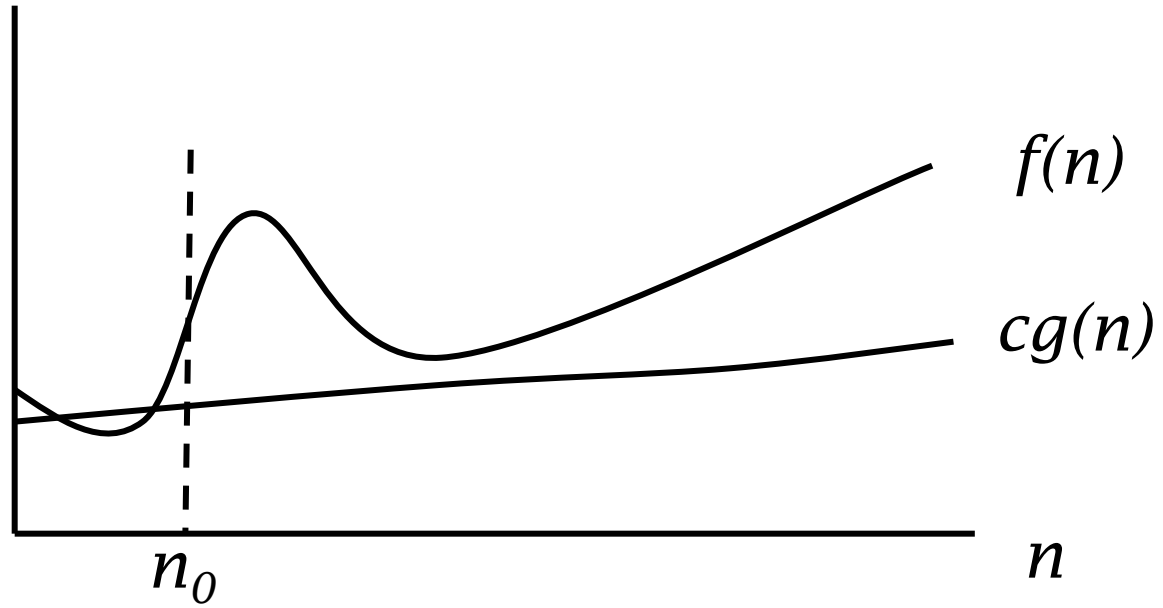
算法渐进分析： 大 Ω 表式法

- **定义** ：如果存在正数 c 和 n_0 ，使得对所有的 $n \geq n_0$ ，都有 $f(n) \geq cg(n)$ ，

  则称 f(n) 在集合 Ω (g(n)) 中，或简称 f(n) 是 Ω (g(n)) 的， 或 f(n) = Ω (g(n))
- 大 O 表示法和大 Ω 表示法的唯一区别在于不等式的方向而已
- 采用大 Ω 表示法时， 最好找出在函数增值率的所有下限中那个最“紧”（即最大）的下限

大 Ω 表示法

- $f(n) = \Omega(g(n))$
  - iff $\exists\, c, n_0 > 0 \;\; s.t. \;\forall\, n \geq n0\,,\; 0 \leq cg(n) \leq f(n)$
- 与大O表示法的唯一区别在于不等式的方向



n足够大
g(n)是 f(n) 的下界

算法渐进分析：大 Θ 表式法

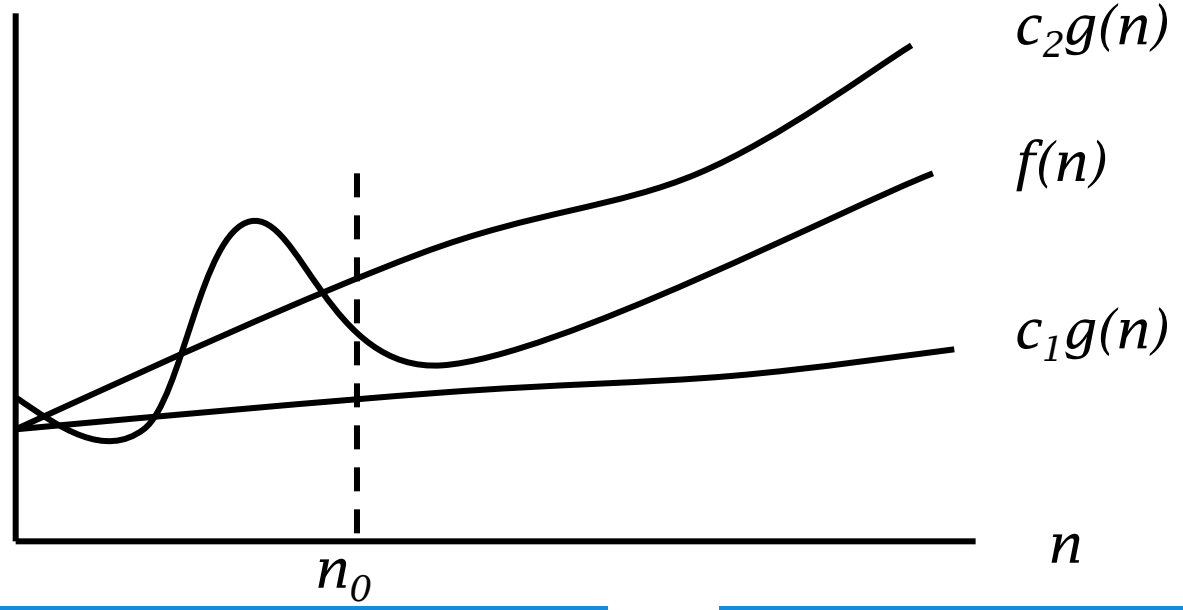
- 当上、下限相同时则可用 Θ 表示法
- 定义如下：

  如果一个函数既在集合 O (g(n)) 中又在集合 Ω (g(n)) 中，则称其为 Θ (g(n))。
- 也即，当上、下限相同时则可用大 Θ 表示法
- 存在正常数 c_1, c_2，以及正整数 n_0，使得对于任意的正整数 $n > n_0$，有下列两不等式同时成立：

$$c_1\, g(n) \le f(n) \le c_2\, g(n)$$

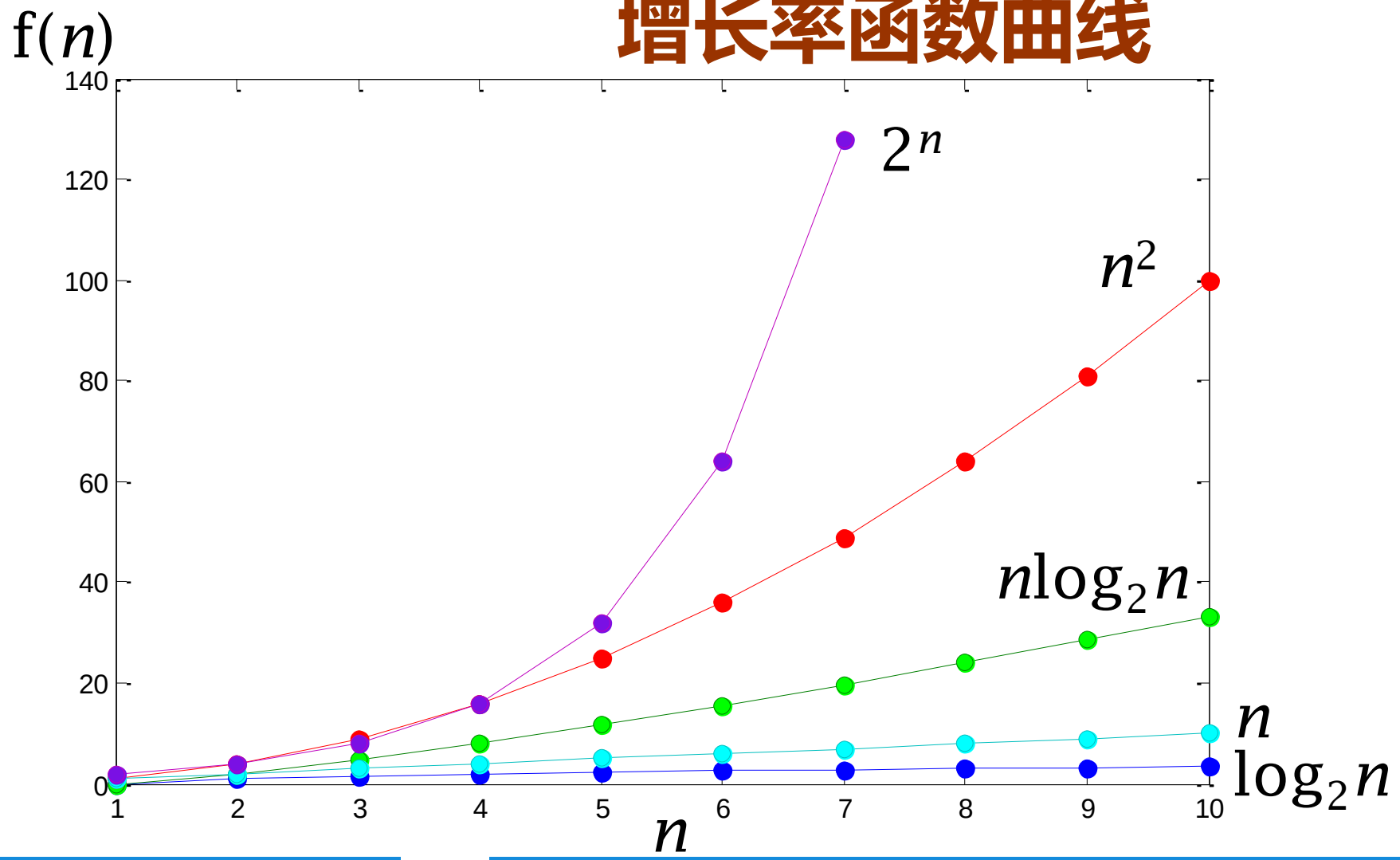
大 Θ 表示法

- $f(n) = \Theta(g(n))$
  - iff $\exists\, c_1, c_2, n_0 > 0 \;\; s.t. \;\; 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \;\; \forall\, n \ge n_0$
- 上、下限相同，则可用 Θ 表示法

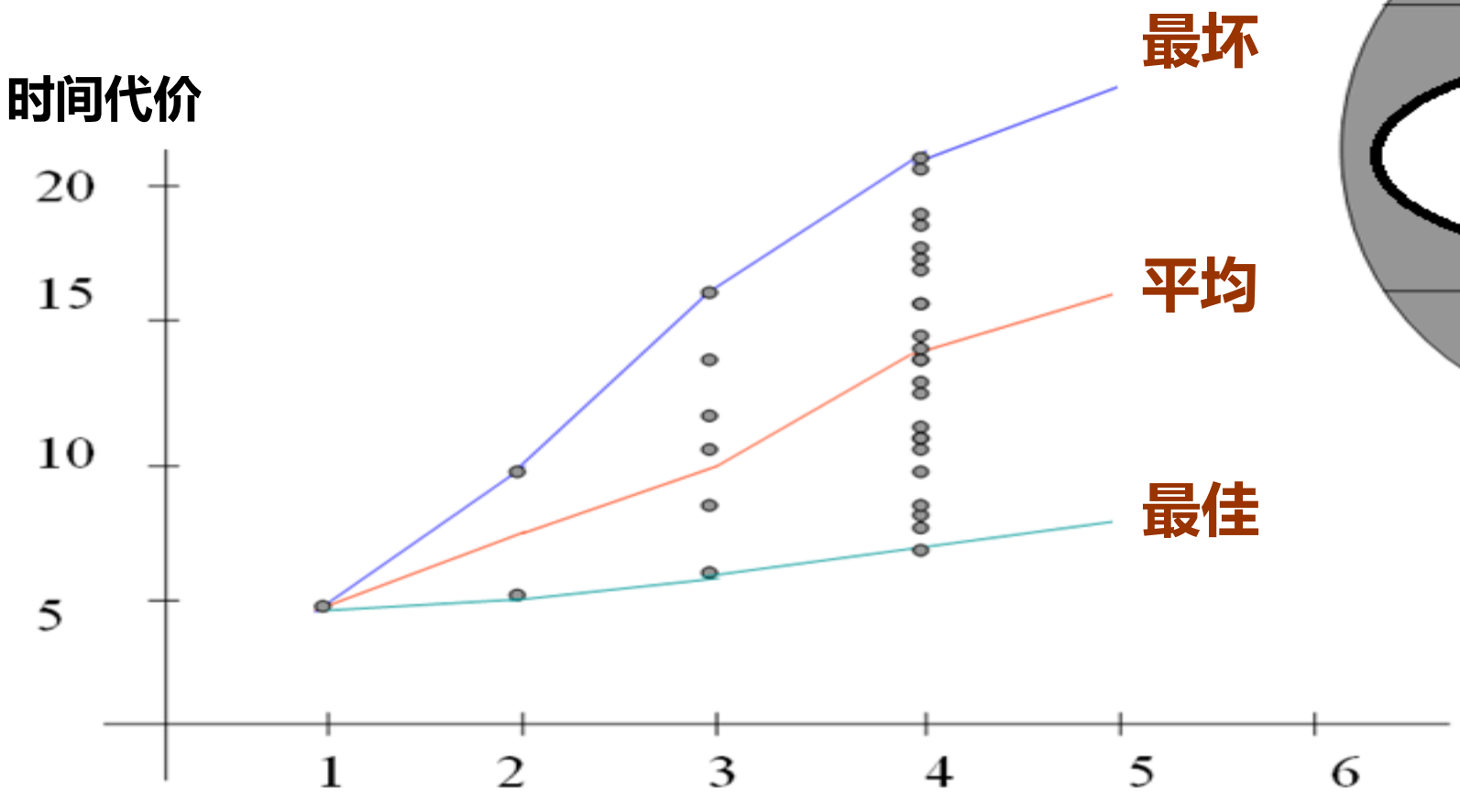


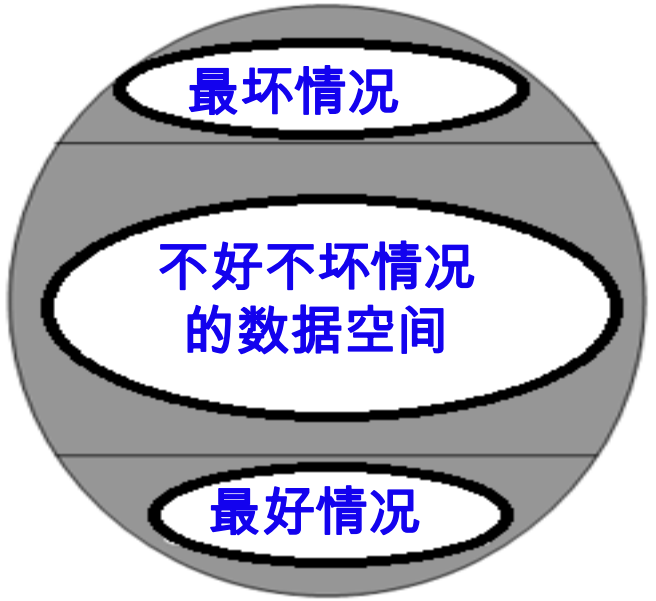
n足够大
$f(n)$ 与 $g(n)$ 增长率一样

增长率函数曲线



问题空间 vs 时间开销


时间代价
20
15
10
5
1
2
3
4
5
6
最坏
平均
最佳
规模n


问题的输入数据空间
最坏情况
不好不坏情况
的数据空间
最好情况

顺序找 k 值

- 顺序从一个规模为 n 的一维数组中找出一个给定的 K 值
- 最佳情况
  - 数组中第 1 个元素就是 K
  - 只要检查一个元素
- 最差情况
  - K 是数组的最后一个元素
  - 检查数组中所有的 n 个元素

顺序找 k 值——平均情况

- 如果等概率分布
  - K 值出现在 n 个位置上概率都是 1/n

- 则平均代价为 O(n)

$$\frac{1+2+...+n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

顺序找 k 值——平均情况

- 概率不等
  - 出现在第 1 个位置的概率为 1/2
  - 第 2 个位置上的概率为 1/4
  - 出现在其他位置的概率都是

$$\frac{1-1/2-1/4}{n-2}=\frac{1}{4(n-2)}$$

- 平均代价为 O(n)

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3+\ldots+n}{4(n-2)}=1+\frac{n(n+1)-6}{8(n-2)}=1+\frac{n+3}{8}$$

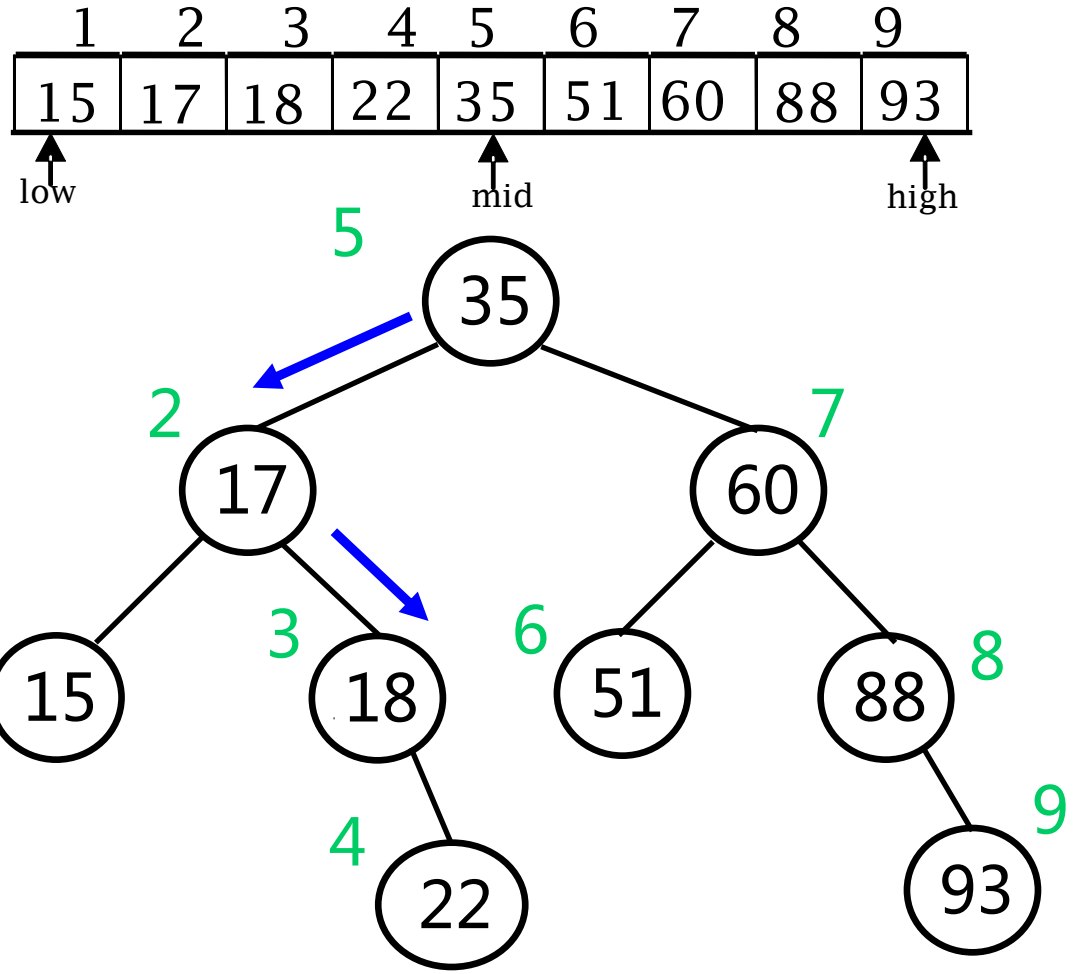
二分法找 k 值

对于已排序顺序线性表

- 数组中间位置的元素值 k_{mid}
  - 如果 $k_{mid} = k$，那么检索工作就完成了
  - 当 $k_{mid} > k$ 时，检索继续在前半部分进行
  - 相反地，若 $k_{mid} < k$，就可以忽略 mid 以前的那部分，检索继续在后半部分进行
- 快速
  - $k_{mid} = k$ 结束
  - $K_{mid} \neq k$ 起码缩小了一半的检索范围

二分法检索性能分析

- 最大检索长度为 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$
- 失败的检索长度是 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$
  或 $\lfloor \log_2(n+1) \rfloor$
- 平均检索代价为 $O(\log n)$
- 在算法复杂性分析中
  - $\log n$ 是以 2 为底的对数
  - 以其他数值为底，算法量级不变

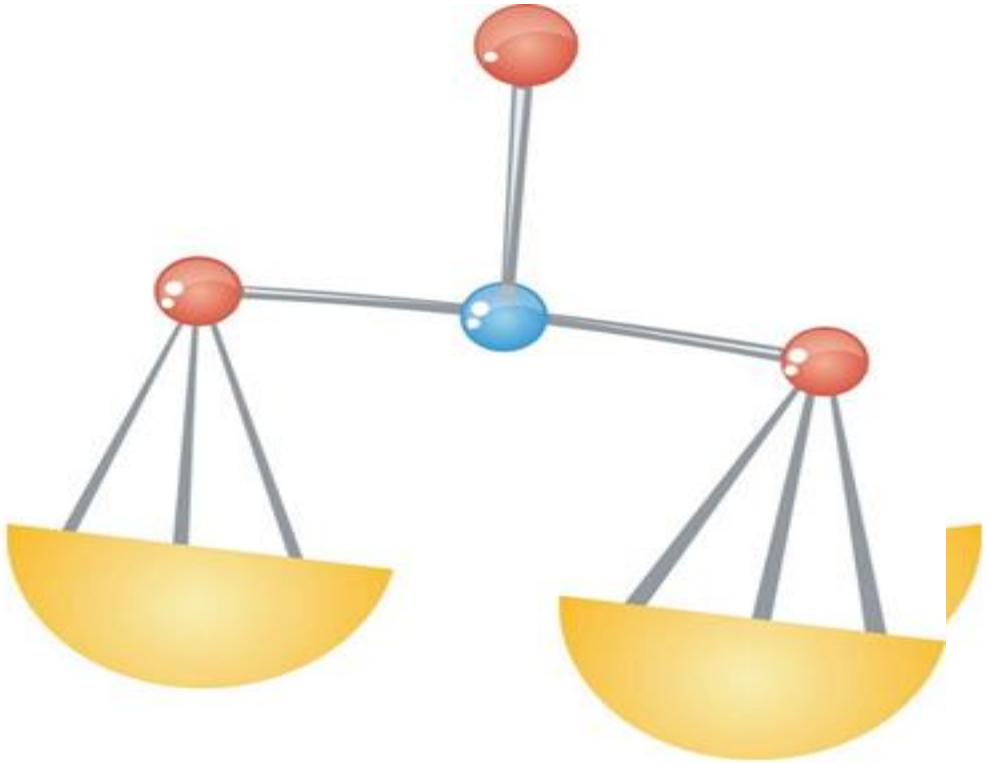


时间/空间权衡

- **数据结构**
  - 一定的空间来存储它的每一个数据项
  - 一定的时间来执行单个基本操作
- **代价和效益**
  - 空间和时间的限制
  - 软件工程

时空权衡

- 增大空间开销可能改善算法的时间开销
- 可以节省空间，往往需要增大运算时间



数据结构和算法的选择

- 仔细分析所要解决的问题
  - 特别是求解问题所涉及的数据类型和数据间逻辑关系
    ——— 问题抽象、数据抽象
  - 数据结构的初步设计往往先于算法设计
- 注意数据结构的可扩展性
  - 考虑当输入数据的规模发生改变时，
    数据结构是否能够适应求解问题的演变和扩展

思考：数据结构和算法的选择

- 问题求解的目标？
- 数据结构与算法选择的过程？

思考：数据结构的三要素

以下哪几种结构是逻辑结构，而与存储和运算无关（ ____ ）。

A. 顺序表　　B. 散列表
C. 线性表　　D. 单链表

下面术语（ ____ ）与数据的存储结构无关。

A. 顺序表　　B. 链表
C. 队列　　D. 循环链表

数据结构与算法

谢谢聆听

国家精品课“数据结构与算法”
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

张铭，王腾蛟，赵海燕
高等教育出版社，2008. 6。“十一五”国家级规划教材