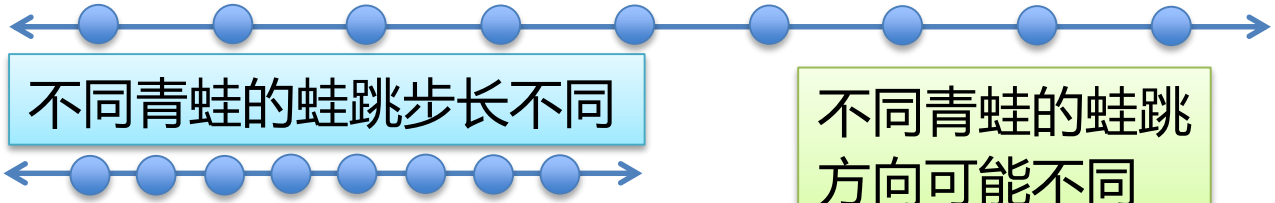
枚举 — 讨厌的青蛙

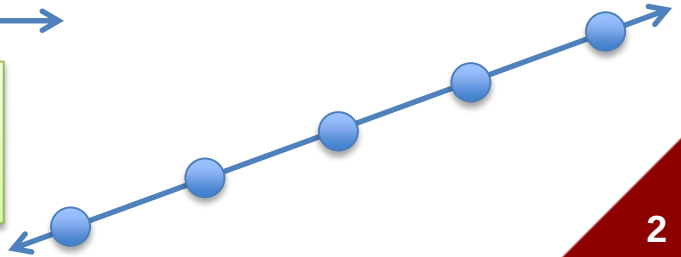
郭 炜　刘家瑛

北京大学

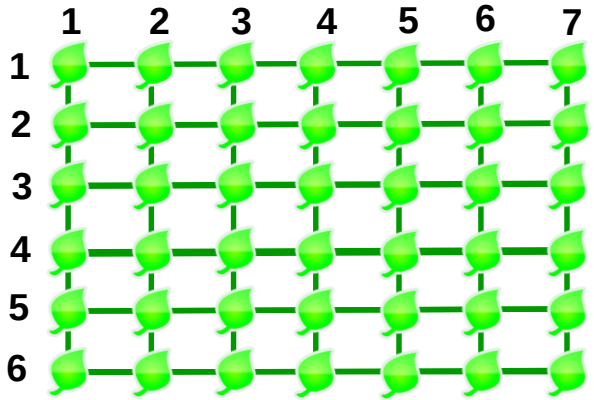
讨厌的青蛙

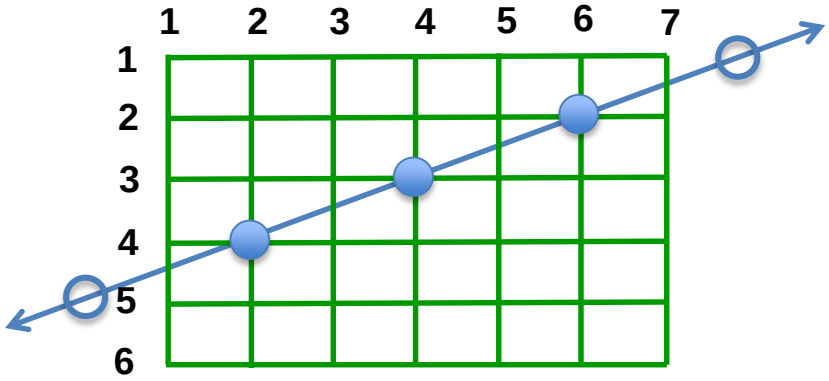
- 问题描述
  - 在韩国，有一种小青蛙
  - 每到晚上，这种青蛙会跳跃稻田，从而踩踏稻子
  - 农民早上看到被踩踏的稻子，希望找到造成最大损害的那只青蛙经过的路径
  - 每只青蛙总是沿着一条直线跳跃稻田
  - 且每次跳跃的距离都相同





- 稻田里的稻子组成一个栅格，每棵稻子位于一个格点上
- 而青蛙总是从稻田的一侧跳进稻田，然后沿着某条直线穿越稻田，从另一侧跳出去





- 可能会有多只青蛙从稻田穿越
- 青蛙每一跳都恰好踩在一棵水稻上，将这棵水稻拍倒
- 有些水稻可能被多只青蛙踩踏
- 农民所见到的是图4中的情形，并看不到图3中的直线，也见不到别人家田里被踩踏的水稻

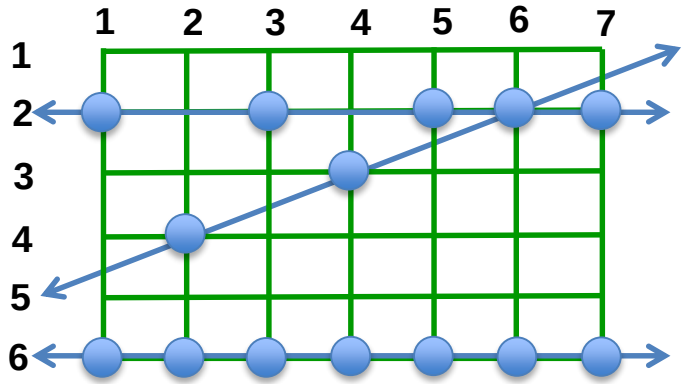


图 3

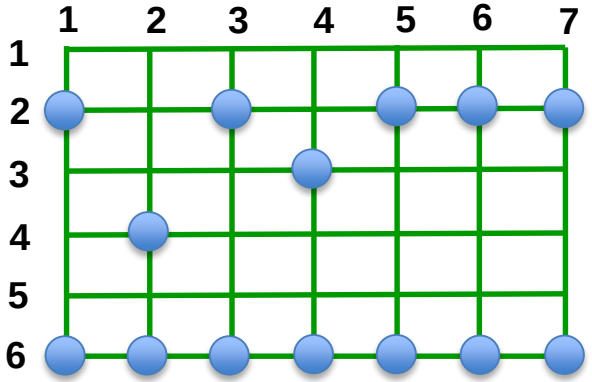
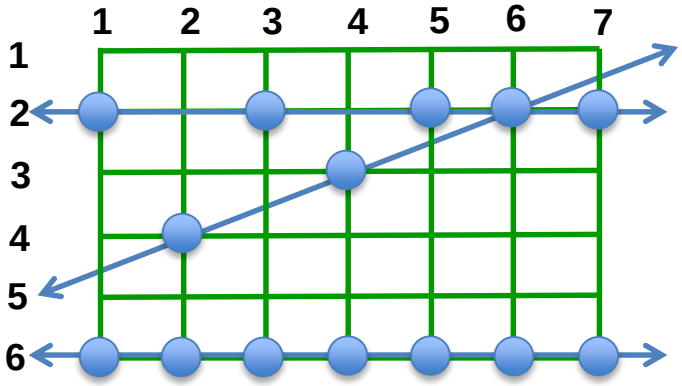
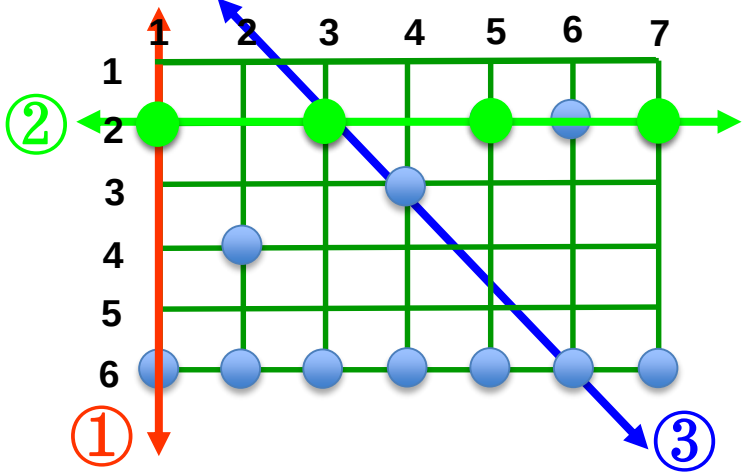


图 4





- 而在一条青蛙行走路径的直线上，也可能会有些被踩踏的水稻不属于该行走路径
  - ① 不是一条行走路径：只有2棵被踩踏的水稻
  - ② 是一条行走路径，但不包括 (2,6)上的水稻
  - ③ 不是一条行走路径：虽然有3棵被踩踏的水稻，但这3棵水稻之间的距离间隔不相等

题目要求

- 请写一个程序, 确定:
  - 在各条青蛙行走路径中, 踩踏水稻最多的那一条上, 有多少颗水稻被踩踏
  - 例如, 图4中答案是7, 因为第6行上全部水稻恰好构成一条青蛙行走路径

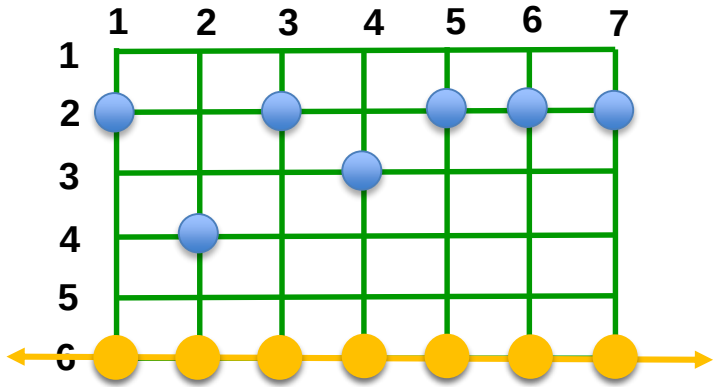


图 4

程序输入

- 从标准输入设备上读入数据
- 第一行上两个整数R, C, 分别表示稻田中水稻的行数和列数, 1≤R, C≤5000
- 第二行是一个整数N, 表示被踩踏的水稻数量, 3≤N≤5000
- 在剩下的N行中, 每行有两个整数, 分别是一颗被踩踏水稻的行号(1~R)和列号(1~C), 两个整数用一个空格隔开
- 且每棵被踩踏水稻只被列出一次

程序输出

- 从标准输出设备上输出一个整数
- 如果在稻田中存在青蛙行走路径，则输出包含最多水稻的青蛙行走路径中的水稻数量，否则输出0

样例输入

```
6 7 //6行7列
14
2 1
6 6
4 2
2 5
2 6
2 7
3 4
6 1
6 2
2 3
6 3
6 4
6 5
6 7
```

样例输出

```
7
```

解题思路 — 枚举

- 枚举什么?
  - 枚举每个被踩的稻子作为行走路径起点 (5000个)
  - 对每个起点, 枚举行走方向 (5000种)
  - 对每个方向枚举步长 (5000种)
  - 枚举步长后还要判断是否每步都踩到水稻
- 时间: 5000*5000*5000 *, 不行!

解题思路 — 枚举

- 枚举什么？枚举路径上的开始两点
- 每条青蛙行走路径中至少有3棵水稻
- 假设一只青蛙进入稻田后踩踏的前两棵水稻分别是 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$. 那么:
  - 青蛙每一跳在 X 方向上的步长 $dX = X_2 - X_1$,
    在 Y 方向上的步长 $dY = Y_2 - Y_1$;
  - $(X_1 – dX, Y_1 - dY)$ 需要落在稻田之外;
  - 当青蛙踩在水稻(X, Y)上时, 下一跳踩踏的水稻是 $(X + dX, Y + dY)$;
  - 将路径上的最后一棵水稻记作(X_K, Y_K), $(X_K + dX, Y_K + dY)$ 需要落在稻田之外;

解题思路:猜测一条路径

- 猜测的办法需要保证:
- 每条可能的路径都能够被猜测到
  - 从输入的水稻中任取两棵

  →作为一只青蛙进入稻田后踩踏的前两棵水稻

  →看能否形成一条穿越稻田的行走路径

解题思路:猜测一条路径

- 猜测的过程需要尽快排除错误的答案
  - 猜测(X1, Y1), (X2, Y2) -- 所要寻找的行走路径上的前两棵水稻
- 当下列条件之一满足时, 这个猜测就不成立：
  - 青蛙不能经过一跳从稻田外跳到(X1, Y1)上
  - 按照(X1, Y1), (X2, Y2)确定的步长, 从(X1, Y1)出发, 青蛙最多经过(MAXSTEPS - 1)步, 就会跳到稻田之外
  - MAXSTEPS是当前已经找到的最好答案

选择合适的数据结构

- 选择合适的数据结构
  - 采用的数据结构需要与问题描述中的概念对应
- 关于被踩踏的水稻的坐标, 该如何定义?
  - 方案1: struct {
    int x, y;
    } plants[5000];
  - 方案2: int plantsRow[5000], plantsCol[5000];
- 显然方案1更符合问题本身的描述

设计的算法要简洁

- 尽量使用C提供的函数完成计算的任务
- 猜测一条行走路径时, 需要从当前位置(X, Y)出发上时, 看看(X + dX, Y + dY)位置的水稻是否被踩踏；
  - 方案1: 自己写一段代码, 看看(X + dX, Y + dY) 是否在数组plants中
  - 方案2: 先用qsort()对plants中的元素排序, 然后用bsearch()从中查找元素(X + dX, Y + dY)
- 基于方案2设计的算法更简洁, 更容易实现, 更不容易出错误
- 通常, 所选用的数据结构对算法的设计有很大影响

- 注意:
  - 一个有n个元素的数组, 每次取两个元素, 遍历所有取法
  - 代码写法:

```
for( int i = 0; i < n – 1; i ++ )
    for( int j = i + 1; j < n; j ++ ) {
       a[i] = …;
       a[j] = …;
}
```

参考程序

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <algorithm>
using namespace std;
int r, c, n;
struct PLANT {
    int x, y;
};
PLANT plants[5001];
PLANT plant;
int searchPath(PLANT secPlant, int dX, int dY) ;
```

```
int main()
{
    int i, j, dX, dY, pX, pY, steps, max = 2;
    scanf(“%d %d”, &r, &c);
    //行数和列数, x方向是上下, y方向是左右
    scanf("%d", &n);
    for (i = 0; i < n; i++)
        scanf("%d %d", &plants[i].x, &plants[i].y);
    //将水稻按x坐标从小到大排序, x坐标相同按y从小到大排序
    sort(plants, plants + n);
```

```
for (i = 0; i < n - 2; i++)  //plants[i]是第一个点
    for ( j = i + 1; j < n -1 ; j++) {  //plants[j]是第二个点
        dX = plants[ j ].x - plants[i].x;
        dY = plants[ j ].y - plants[i].y;
        pX = plants[ i ].x - dX;
        pY = plants[ i ].y - dY;
        if (pX <= r && pX >= 1 && pY <= c && pY >= 1)
            continue;
            //第一点的前一点在稻田里,
            //说明本次选的第二点导致的x方向步长不合理(太小)
            // 取下一个点作为第二点
        if (plants[ i ].x + (max - 1) * dX > r)
            break;
//x方向过早越界了. 说明本次选的第二点不成立
//如果换下一个点作为第二点, x方向步长只会更大, 更不成立, 所以应该
//认为本次选的第一点必然是不成立的, 那么取下一个点作为第一点再试
```

```
            pY = plants[ i ].y + (max - 1) * dY;
            if ( pY > c || pY < 1)
                continue; //y方向过早越界了, 应换一个点作为第二点再试
            steps = searchPath(plants[ j ], dX, dY);
            //看看从这两点出发, 一共能走几步
            if (steps > max)        max = steps;
        }
        if ( max == 2 ) max = 0;
        printf("%d\n", max);
}
bool operator < ( const PLANT   & p1, const PLANT & p2)
{
    if ( p1.x == p2.x )
        return p1.y < p2.y;
    return p1.x < p2.x ;
}
```

```
//判断从 secPlant点开始, 步长为dx, dy, 那么最多能走几步
int searchPath(PLANT secPlant, int dX, int dY){
    PLANT plant;
    int steps;
    plant.x = secPlant.x + dX;
    plant.y = secPlant.y + dY;
    steps = 2;
    while (plant.x <= r && plant.x >= 1 && plant.y <= c && plant.y >= 1) {
        if (! binary_search(plants, plants + n, plant)) {
        //每一步都必须踩倒水稻才算合理, 否则这就不是一条行走路径
            steps = 0;
            break;
        }
        plant.x += dX;
        plant.y += dY;
        steps++;
     }
     return(steps);
}
```

小结

- 枚举顺序十分重要, 好的枚举顺序, 能够及早排除不可能的情况, 减少枚举次数
- 本题将踩倒的水稻按照位置进行排序, 枚举的时候先枚举序号低的, 就能够有效减少枚举次数, 体现在：

```
if (plants[ i ].x + (max - 1) * dX > r) break;
//x方向过早越界了. 说明本次选的第二点不成立
//如果换下一个点作为第二点, x方向步长只会更大, 更不成立
//所以应该认为本次选的第一点必然是不成立的,
//那么取下一个点作为第一点再试
```