Lista 07 - Leonardo Santos Miranda

August 3, 2021

1 Questões

Lista 07 de FECD: Fazer os seguintes exercícios (eles servem como treino para a prova de sábado):

Cap 4: ex 3, 9

Cap 5: ex 1, 2, 8, 15, 17

Cap 6: ex 2, 3 ## Capitulo 4 - Variáveis Aleatórias

3. Se U U(0, 1), encontre a distribuição de probabilidade de X = − log(1 − U)/3. –A figura 4.1 mostra um gráfico–

Solução: Se U [0, 1] teremos X [0, ∞). Para x [0, ∞, temos

F(x) = P(X x) = P(−log(1 − U)/3 x) = P(U 1 − e^−3x) = 1 − e^−3x

Portanto, a densidade de X no eixo positivo é igual a f(x) = F'(x) = 3e^−3x que é a densidade de uma v.a. com distribui¸c˜ao exponencial com parâmetro = 3.

1.1 Exercício 9: Transformação de v.a.'s: Seja X o lado de um quadrado aleatório. A v.a. X é selecionada de uma distribuição Unif(0, 1). A área do quadrado formado com lado X é a v.a. Y = X2 .

- Calcule o comprimento esperado do lado do quadrado E(X)

- Obtenha também a área esperada E(Y). É verdade que E(Y) = $(E(X))^2$? Ou seja, a área esperada E(Y) é igual a $(E(X))^2$, a área de um quadrado cujo lado tem comprimento igual ao comprimento esperado?.

- Qual a distribuição de Y ? Isto é, obtenha FY (y) para y R. item Derive FY (y) para obter a densidade fY (y) e faça seu gráfico. Qual a região onde mais massa de probabilidade é alocada? O que é mais provável, um quadrado com área menor que 0.1 ou maior que 0.9?

1.2 Capitulo 5 - Simulação Monte Carlo

8. Numa companhia de seguros, a tarefa é simular a perda financeira agregada L que a companhia pode experimentar no próximo ano em um tipo de apólice. A perda é dada por L = X1 + . . . + XN onde N é o número aleatório de sinistros que irão ocorrer com os muitos segurados e Xi é a perda monetária associada com o i-ésimo sinistro. Supondo que N Poisson(1.7) e que os Xi são i.i.d. com distribuição exp(1/10), obtenha um valor simulado de L usando os seguintes valores i.i.d. U(0, 1): 0.672 para obter o valor simulado N; e o que for necessário da sequência 0.936, 0.984, 0.198, 0.659, 0.379 para obter os Xi e assim obter um valor para

L. Repita o exercıcio obtendo um segundo valor simulado para L com a seguinte sequencia de valores i.i.d. U(0, 1): 0.013, 0.834, 0.926, 0.648, 0.717, 0.169.

Solução: Os valores acumulados P(X k) para k = 0, 1, 2, 3, 4 de uma Poisson(1.7) são iguais a 0.183, 0.493, 0.757, 0.907, 0.970. Assim, para a primeira simulação, temos N = 2 e L = X1 + X2 onde X1 = −10 log(0.936) = 0.661 e X1 = −10 log(0.984) = 0.161. Portanto, o valor simulado de L é L = 0.822. Na segunda simulação, N = 0 e assim L = 0.

1.3 Capitulo 6 - Vetores Aleatórios

2. Considere as variáveis aleatórias X {0, 1} e Y {−1, 0, 1} com distribuição de probabilidade conjunta dada pela tabela abaixo: – tabela –

- O que é P(X = 1|Y = 1)?

Solução: P(X = 1|Y = 1) = 0.1

- Qual é a probabilidade de que Y 0, dado que X = 0?

Solução: P(X=0|Y>=0) = P(X=0|Y=0) + P(X=0|Y=1) = 0.4+0.2 = 0.6, normalizando: P(X=0|Y=1) = 0.4/0.6 = 0.666... P(X=1|Y=1) = 0.2/0.6 = 0.333...

- Encontre E(Y)

Solução: 0.2-*1+0.5*0+0.3*1 = 0.1

- Qual é o valor esperado de 3X + 1?

Solução:

- X e Y são independentes?

Solução: Não, pois: 0.8*0.2 != 0.2. Para as variaveis serem independentes, o valor do produto das marginais precisa ser igual ao valor da tabela, o que não é verdade para o primeiro caso.

- Suponha que tenhamos outra variavel aleatória Z que seja independente de Y e tenha probabilidades marginais P(Z = 0) = 0.2 e P(Z = 1) = 0.8. Escreva a tabela para a distribuição de probabilidade conjunta do vetor (Y, Z).

Solução:

3. Consideramos um modelo probabilıstico para um problema de diagnostico de falhas. Uma variavel binaria C representa a integridade de uma unidade de disco: C = 0 significa que esta operando normalmente e C = 1 significa esta em estado de falha. Quando a unidade esta em funcionamento, monitora-se continuamente usando um temperatura e sensor de choque, e registra duas caracterısticas binarias, X e Y . Temos X = 1 se o drive foi sujeito a choque (por exemplo, caiu), e X = 0, caso contrario. Temos Y = 1 se a unidade a temperatura ja foi acima de 70° e Y = 0, caso contrario. A tabela abaixo define a funcao de massa de probabilidade conjunta dessas tres variaveis aleatorias:

–tabela–

Forneca o valor numerico das probabilidades abaixo:

- Qual é a probabilidade P(C = 1)?

Solução: P(C = 1) = 0.0 + 0.1 + 0.5 + 0.25 = 0.85

- Qual é a probabilidade $P(C = 0|X = 1, Y = 0)$?

Solução: $P(C = 0|X = 1, Y = 0) = 0.2$

- Qual é a probabilidade $P(X = 0, Y = 0)$?

Solução: $P(X = 0, Y = 0) = 0.1$

- Qual é a probabilidade $P(C = 0|X = 0)$?

Solução: $P(C = 0|X = 0) = 0.3$

- São X e Y independentes? Justifique sua resposta.

Solução: 0.4*0.35 != 0.1 para o primeiro valor da tabela, e como isso difere concluimos que X e Y não sao independentes.

```
[ ]:
```