Leonardo Santos Miranda Mestrado

Prova 01 - Respostas

1. A Figura 1 mostra uma rede com quatro nós e cinco arestas. Suponha que cada conexão falha com probabilidade 0.10 e que as falhas de conexões sejam eventos independentes. Calcule a probabilidade P(E) do evento E de que exista pelo menos um caminho ativo de B para C. DICA: considere a probabilidade P(Ec) do evento complementar Ec .

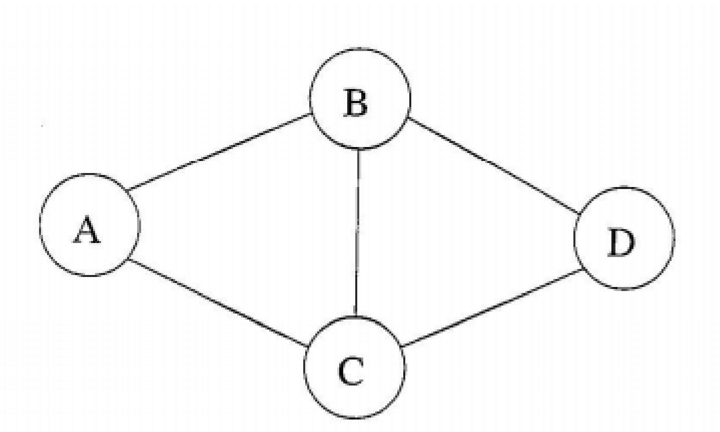

Figura 1: Rede com quatro nós.

Resposta: P(E) = a probabilidade de um caminho ativo de B para C, que é igual a 1 - menos a probabilidade de NÃO existir um caminho ativo P(Ec).
A probabilidade de P(Ec) significa que todos os três caminhos possíveis, BAC, BC e BDC estejam simultaneamente fechados.Seja “~” o símbolo de negação de que o caminho esteja aberto, a probabilidade P(E) pode ser calculada da seguinte maneira:

$P(E) = 1 - P(Ec)$
$P(E) = 1 - P(\sim BAC \cap \sim BC \cap \sim BDC)$
$P(E) = 1 - P(\sim BAC)\ P(\sim BC)\ P(\sim BDC)$
$P(E) = 1 - (1 - P(BAC))\ (1 - P(BC))\ (1 - P(BDC))$
$P(E) = 1 - (1 - (0.9)^2)\ (1 - 0.9)\ (1 - (0.9)^2)$
$P(E) = 0.99639$

2. Um dado bem equilibrado é lançado independentemente. Considera-se que ocorreu sucesso se sair a face 1 ou 2. O dado é lançado sucessivamente e de forma independente até que ocorra o segundo sucesso. Descreva o espaço amostral deste experimento e atribua probabilidades aos resultados possíveis. OBS: Este problema é o modelo ultra-simplificado para tratar problemas reais em que observa-se um fenômeno repetidamente até que um "sucesso" é registrado. Por exemplo, uma sucessão de sessões de um mesmo usuário no Instagram até que, pela primeira vez, ele clique num anúncio. Existe interesse em modelar o número aleatório de sessões que precisamos esperar até este primeiro sucesso.

Resposta: O espaço amostral deste experimento é formado pelo número de vezes que o dado é lançado. O menor valor possível é 2, dois sucessos consecutivos.
Logo $\Omega = \{2, 3, 4, ...\}$.
Seja S o evento SUCESSO e F o evento FALHA.
$P(S) = 2/6 = 1/3$ e $P(F) = 4/6 = 2/3$.
A probabilidade de sucesso em 2 lançamentos é:
$P(x = 2) = (1/3)^2$, somente se acontecer a sequência {SS};
O sucesso em 3 lançamentos pode vir de uma das sequências: {SFS, FSS}, logo:
$P(x = 3) = 2(1/3)^2 (2/3)$,
O sucesso em 4 lançamentos pode vir de uma das sequências {SFFS, FSFS, FFSS}, logo:
$P(x = 4) = 3(1/3)^2(2/3)^2$
Portanto, o sucesso em n lançamentos pode vir de n-1 sequências diferentes:
$P(x = n) = (n - 1)(1/3)^2 (2/3)$^n-2 .

3. Com relação ao problema anterior, imagine que temos dois dados disponíveis. Um é bem equilibrado (como no problema anterior). O outro dado é viciado e a probabilidade de que saia a face 1 ou 2 é igual a 1/4. Um dos dois dados é escolhido com igual probabilidade e ele é jogado sucessivamente até que o segundo sucesso ocorra. Descreva o espaço amostral deste experimento e atribua probabilidades aos resultados possíveis.
OBS: Estamos ampliando o modelo-caricatura anterior. Imagine duas populações de usuários em que metade deles são MENOS propensos a clicar no anúncio (menor probabilidade de sucesso). Isto é representado pelo dado desbalanceado. O usúario que vamos acompanhar é escolhido ao acaso desta população em que existe uma mistura de mais e menos propensos.
Resposta:
O espaço amostral deste experimento é formado pelo número de vezes que o dado é lançado. O menor valor possível é 2, dois sucessos consecutivos.
Logo $\Omega = \{2, 3, 4, ...\}$.

Seja S o evento SUCESSO e F o evento FALHA.
$P(S) = 2/6 = 1/3$ e $P(F) = 4/6 = 2/3$, para o dado equilibrado
$P(S) = 8/16 = 1/2$ e $P(F) = 8/16 = 1/2$, para o dado desequilibrado

A probabilidade de sucesso em 2 lançamentos é:
$P(x = 2) = (1/3)^2$, somente se acontecer a sequência {SS}, para o dado equilibrado
$P(x = 2) = (1/2)^2$, somente se acontecer a sequência {SS}, para o dado desequilibrado
O sucesso em 3 lançamentos pode vir de uma das sequências: {SFS, FSS}, logo:
$P(x = 3) = 2(1/3)^2 (2/3)$, para o dado equilibrado
$P(x = 3) = 2(1/2)^2 (1/2)$,
O sucesso em 4 lançamentos pode vir de uma das sequências {SFFS, FSFS, FFSS}, logo:
$P(x = 4) = 3(1/3)^2(2/3)^2$, para o dado equilibrado
$P(x = 4) = 3(1/2)^2(1/2)^2$, para o dado desequilibrado
Portanto, o sucesso em n lançamentos pode vir de n-1 sequências diferentes:
$P(x = n) = (n - 1)(1/3)^2 (2/3)^{n-2}$, para o dado equilibrado
$P(x = n) = (n - 1)(1/2)^2 (1/2)^{n-2}$, para o dado desequilibrado

4. Um estudo é realizado para investigar a relação entre possuir animais de estimação e felicidade. Uma amostra de 1000 indivíduos é selecionada aleatoriamente. De cada um, coleta-se dados indicando se o indivíduo possui ou não possui pelo menos um animal de estimação e um questionário que permite criar uma pontuação de felicidade (de 1 a 10, sendo 10 extremamente feliz). Descobre-se que aqueles que possuem animais de estimação são muito mais felizes, em média. O jornal recomenda adotar um animal se você quer ser mais feliz. O que você pode dizer sobre esta matéria de jornal depois do que aprendeu no curso?
Resposta: A probabilidade de uma pessoa ser mais feliz com um animal de estimação é maior do que aquela que não tem um animal de estimação. Seja P(B|A) um evento B que depende de A, e nesse caso o evento B seria o grau de felicidade e o evento A seria a pontuação de felicidade respondida pela pessoa no questionário, podemos calcular o grau de felicidade pela regra de Bayes

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\ \mathbb{P}(A)$$

e obter a mesma conclusão do jornal, as pessoas que possuem um animal de estimação são em médias mais felizes.

5. O periódico Lancet é um dos melhores do mundo na área médica. Em 2012, eles publicaram um estudo, em https://doi.org/10.1016/S0140-6736(12)61426-3, que analisou dados de mais de 10.000 pacientes em hospitais ingleses com dislipidemia (a elevação anormal dos níveis de lipídios 1 (gorduras) no sangue, como colesterol e triglicérides). Leia a descrição sumarizada em https://www.thelancet.com/journals/lancet/article/PIIS0140-6736(12)61426-3/fulltext. O estudo descobriu que pacientes com altos níveis de condicionamento físico eram menos propensos a morrer do que pacientes com baixo nível de condicionamento físico. O padrão manteve-se verdadeiro se os pacientes estavam tomando estatinas ou não (estatinas são os principais remédios prescritos para baixar o colesterol). Os pesquisadores concluíram o seguinte: "O tratamento com estatinas e o aumento da aptidão estão independentemente associados à baixa mortalidade entre os indivíduos dislipidemicos. A combinação do tratamento com estatinas e aumento da aptidão resultou em risco de mortalidade substancialmente menor do que ambos isoladamente, reforçando a importância da atividade física para indivíduos com dislipidemia." O que você pode dizer sobre este artigo depois do que aprendeu no curso?

Resposta: Seja o evento M a probabilidade de que um paciente venha falecer durante o tratamento. A P(M) está condicionada a este paciente ter um alto ou baixo nível de condicionamento físico e que, por sua vez, está ligada ao tratamento com estatina. Pode-se dizer que, a P(M) é um evento totalmente dependente da condição física do paciente (que está dependente da sua aptidão e o tratamento com estatina).