1. **5 PONTOS**

Vesículas são pequenas estruturas celulares de tamanhos variados e com formato aproximadamente esférico de células. Suponha que essas esferas possuem um raio aleatório R com densidade $f_R(r) = 6r(1-r) = 6(r-r^2)$ para $r \in (0,1)$. Temos interesse em obter a distribuição de probabilidade do volume aleatório $V = 4\pi/3R^3$ induzido pelo raio R.

- Estabeleça o intervalo de valores possíveis para o volume aleatório V.
- Para um valor v no intervalo obtido acima, obtenha a distribuição acumulada $\mathbb{F}_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v)$.
- Derive a função $\mathbb{F}_V(v)$ para obter a função densidade de probabilidade $f_V(v)$.
- A densidade $f_R(r)$ do raio é mais concentrada em torno do ponto $r = 1/2$, o centro do intervalo $(0,1)$ onde os raios podem variar. A densidade $f_V(v)$ do volume também é mais concentrada em torno do ponto médio do intervalo de valores possíveis do volume? Ou ela é mais concentrada em alguma outra região desse intervalo?

Resposta =

- Intervalo de valores para o volume aleatório V

V = (4pi/3)* $\int_0^1$ 6(r-r^2)^3 =~ 6.4627

- Distribuição acumulada

$\int_{-\infty}^{6.4627}$ f(V)dV

- Derivada de F(V)

f(V) = (4pi/3)*R^3

f'(V) = 4pi*r^2

- **Resposta =** A função fR(r) é mais concentrada no ponto médio (quando r = 0.5) do intervalo de valores possíveis do volume.

---

2. **5 PONTOS** Temos interesse em gerar uma amostra pelo método Monte Carlo de uma v.a. X que possui densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/8, & \text{se } x \in (0,2) \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases}$$

Escreva uma pseudo-código (ou script python ou R) para gerar uma amostra de tamanho B usando um gerador de uma $U(0,1)$ e o

- método da transformada inversa de Stan Ulam.
- método de aceitação e rejeição de von Neumann. Veja que você deve usar uma distribuição com densidade $g(x)$ que tenha um suporte $\mathcal{S}_g$ que **contenha** o suporte $\mathcal{S}_f$ de $f(x)$ (que é o intervalo $(0,2)$). Os suportes $\mathcal{S}_g$ e $\mathcal{S}_f$ não precisam ser idênticos mas apenas $\mathcal{S}_g \subset \mathcal{S}_f$.
- No método de aceitação e rejeição, para gerar a amostra de tamanho B de f, quantos elementos em média de g devem ser gerados?
- Método de amostragem por importância.

Resposta:

```
B <-5000
U <-  runif(n = B)
```

- Método da transformada inversa de Stan Ulam

```
X <- (2*sqrt(2/3)*sqrt(U))
```

- Método da aceitação e rejeição

```
f <- function(x) 3*x^2/8
g <- function(x) 1.5 + x/5
#Gerar y cuja densidade é g() que possui o suporte contido em Sf
y <- runif(n = 1, 0,2)
M <- 2
#Comparar e decidir para uma amostra de 5000 valores
for (i in 1:B)
{

	r <- f(y)/(M * g(y))
	u = runif( n=1)
	if (u<r)
		print ("Aceito")
	else
		print("Rejeitado")
}
```

- Quantos elementos devem ser gerados em média?

```
razao <- f / M*g
aceita <- rbinom(B,1,razao)
```

- Método da amostragem por importância

```
f <- function(x) 3*x^2/8
g <- function(x) 1.5 + x/5
weight <- mean(U*f(U)/g(U))
```

---

3. **5 PONTOS** A Tabela abaixo mostra a distribuição conjunta do vetor aleatório discreto (X, Y). Obtenha: (a) a distribuição marginal da variável Y, (b) a distribuição condicional $(X|Y = 2)$.

	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 0$	0.1	0.2	0.05	0.15
$y = 1$	0.1	0.05	0.1	0.15
$y = 2$	0.05	0.0	0.0	0.05

Resposta:

a) Temos P(Y = y) =

0.1+0.2+0.05+0.15, para y=0
0.1+0.05+0.1+0.15, para y=1
0.05+0.0+0.0+0.05, para y=2

Ou seja,
P(Y=0) = 0.5
P(Y=1) = 0.4
P(Y=2) = 0.1

b) Para a distribuição condicional, temos:
P(X = x | Y = 2). Assim,
P(X = 0 | Y = 2) = 0.05
P(X = 1 | Y = 2) = 0.0
P(X = 2 | Y = 2) = 0.0
P(X = 3 | Y = 2) = 0.05,
Agora basta normalizar estes valores para que somem 1 e assim encontrar a distribuição condicional. Como a soma é 0.05+0.0+0.0+0.05 = 0.1, teremos:
P(X = 0 | Y = 2) = 0.05/0.1 = 0.5
P(X = 1 | Y = 2) = 0.0/0.1 = 0
P(X = 2 | Y = 2) = 0.0/0.1 = 0
P(X = 3 | Y = 2) = 0.05/0.1 = 0.5

---

4. **5 PONTOS** Um ponto X é escolhido com distribuição uniforme no intervalo $(0, L)$. Este ponto X particiona o intervalo $(0, L)$ em dois segmentos. Calcule a probabilidade de que a razão entre o segmento menor e o segmento maior seja menor que $1/4$. (Dica: faça o cálculo condicionando em cada uma das duas possibilidades, $X < L/2$ e $X \geq L/2$.)

Resposta:

Através do enunciado, é possível que a probabilidade de o ponto estar em um intervalo de comprimento C centrado em algum ponto x é igual a um certo valor para todo x E [0,L] e 0 caso contrário. Também é possível concluir que esse valor é proporcional ao tamanho do intervalo. Dito isso, a definição de probabilidade para esse problema é:

$$\int_{x-C/2}^{x+C/2} F(s)ds = P(x-C/2 <= X <= x+C/2), \text{ para todo } x \text{ E } [0,L]$$

E desta equação deduzimos:

F(x) = {

1/L se 0<=x<=L,

0 caso contrário

}

Agora, calculamos a probabilidade condicionada para cada uma das probabilidades, utilizando as variáveis P1 e P2:

$\frac{P1}{L-P1} = \frac{1}{4}$ -> P1 = L/5

$\frac{L-P2}{P2} = \frac{1}{4}$ -> P2 = 4L/5

Caso o X <= P1, temos

$\frac{X}{L-X} <= \frac{P1}{L-P1}$ = L/4

de forma que X no intervalo [0, P1] = [0, L/5] atende a de que a razão entre os segmentos é menor que ¼. Analogamente, para X >= 4L/5 a condição do enunciado também é satisfeita, e temos:

P(a razão dos segmentos é menor que ¼) = P(0 <= X <= L/5) + P(4L/5 <= X <= L)

e através da definição da função de densidade de probabilidade, a resposta final é:

P(a razão dos segmentos é menor que ¼) = $\int_{0}^{L/5}$ (1/L)ds + $\int_{4L/5}^{L}$ (1/L)ds = 2/5