Prof. L. Margara **Scritto del 8/02/2019**

Algoritmi e Strutture Dati

Esercizio 1.[11 punti]
Sia $G = (V, E)$ un grafo. Siano $e_1, e_2, \cdots, e_n$ gli archi di G in ordine di peso crescente. Dimostrare formalmente che esiste un MST per G che contiene e_2. Dire se ciò è vero anche per e_3 oppure no.

Traccia Soluzione esercizio 1.
Per assurdo: supponiamo che e_2 non sia contenuto in nessun MST per G. Sia T un MST per G. Aggiungiamo e_2 a T. Si forma un ciclo. Eliminiamo un qualsiasi arco appartenente al ciclo che non sia e_1 (tale arco esiste perché per avere un ciclo ci vogliono almeno 3 archi) e otteniamo un MST che ha un costo non superiore al costo di T che contiene e_2. Assurdo

Lo stesso procedimento non si può usare per e_3. Controesempio: qualunque grafo che contiene un ciclo lungo 3 contenente e_1, e_2 e e_3.

Esercizio 2.[11 punti]

Risolvere in ordine di grandezza la seguente equazione ricorsiva.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \leq 2, \\ T(n-1) + \log(n^5) & \text{if } n > 2. \end{cases}$$

Soluzione esercizio 2.

Svolgendo l'equazione otteniamo:

$$T(n) = \sum_{i=cost}^{n} \log(i^5) = 5 \sum_{i=cost}^{n} \log(i)$$

$$= 5 \log(\prod_{i=cost}^{n} i) = \Theta(n \log(n))$$

Esercizio 3.[11 punti]
Sia $G = (V, E)$ un grafo. Dare il migliore algoritmo possibile per trovare, se esistono, due sottoinsiemi non vuoti V_1 e V_2 di V tali che $V_1 \bigcup V_2 = V$ e $V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$. Inoltre deve valere anche che se $u, v \in V_1$ allora $(u, v) \notin E$ e se $u, v \in V_2$ allora $(u, v) \notin E$. Se V_1 e V_2 con queste proprietà non esistono l'algoritmo deve restituire NO.
Calcolare il costo computazionale dell'algoritmo proposto
Argomentare la sua correttezza.

Traccia Soluzione esercizio 3.
Il problema equivale a dire se un grafo è 2-colorabile. Basta usare una BFS opportunamente modificata.