Prof. L. Margara **Scritto del 19/1/2021**

Algoritmi e Strutture Dati

Esercizio 1.[11 punti]
Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato pesato tale che per ogni $e \in E : \ W(e) \in \{a, b\}$ con a, b numeri interi positivi (costanti). Sia $s \in V$. Scrivere un algoritmo che calcoli l'albero dei cammini minimi da s a tutti gli altri nodi in tempo $O(|V| + |E|)$.

Traccia Soluzione esercizio .
G' si ottiene sostituendo gli archi di G di peso a con a archi ciascuno di peso 1 e sostituendo gli archi di G di peso b con b archi ciascuno di peso 1. Poi si applica a G' la BFS. Il tutto ha costo computazionale $O(|V| + |E|)$. Per migliorare il costo computazionale (ma non in ordine di grandezza) si poteva usare il massimo comun divisore g di a e b e sostituire ciascun arco di peso a con a/g archi ciascuno di peso 1 e sostituendo gli archi di G di peso b con b/g archi ciascuno di peso 1.

Esercizio 2.[10 punti]
Scrivere una funzione in pseudocodice (quella con il costo computazionale più basso possibile nel caso pessimo) che dati in input un albero binario T e due numeri interi positivi a e b con $a < b$ ritorni il numero di nodi dell'albero che contengono un valore compreso tra a e b.
Discutere le correttezza e il costo computazionale dell'algoritmo proposto.

Traccia della soluzione dell'esercizio .
Si veda la soluzione nel materiale fornito a lezione

Esercizio 3.[11 punti]
Risolvere in ordine di grandezza la seguente equazione ricorsiva

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \leq 1, \\ T(\frac{n}{6}) + T(\frac{5n}{6}) + n & \text{if } n > 1. \end{cases}$$

Traccia della soluzione dell'esercizio .
$T(n) = \Theta(n\, log(n))$
Verifica per induzione o più semplicemente usando l'albero di ricorsione. Si noti che questa equazione ricorsiva è stata studiata e risolta a lezione quando abbiamo dimostrato che il costo di Quicksort nel caso medio è $\Theta(n\, log(n))$. In quel caso invece di avere le costanti 1/6 e 5/6 avevamo le costani 1/10 e 9/10.