

Algoritmi

📖 Definizione

Metodo risolutivo che collega ogni istanza alla soluzione.

Le **istanze** di un problema sono di solito **infinite**

- Ogni istanza ha una **lunghezza** n e una **taglia** $|n|$ (numero di cifre parte intera inferiore)
- Le istanze di una certa lunghezza sono in genere infinite

📖 Definizione: Costo Computazionale

Definiamo **costo computazionale** di un algoritmo una funzione $T(n)$ che restituisce le risorse usate in funzione della lunghezza dell'istanza

📖 Definizione: Algoritmo Ottimo e Complessità Computazionale

- **Algoritmo Ottimo**: Algoritmo con costo computazionale migliore tra i possibili per un problema
- **Complessità Computazionale**: Costo computazionale matematicamente migliore per la risoluzione di un problema, anche definita **lower bound**

Bisogna notare che la **complessità computazionale è riferita ad un problema** e non un algoritmo, difatti è possibile che nonostante si sappia quale sia matematicamente il costo computazionale migliore per la risoluzione di un problema, non è ancora stato scoperto un algoritmo che lo raggiunga

📖 Definizione: Problema Indecidibile

Definiamo problema indecidibile un **algoritmo irrisolvibile**

🔗 Esempio: Terminatore di Turing

Creare un algoritmo che, preso un altro algoritmo, dica se quest'ultimo finisce

Strutture Dati

📖 Definizione

Strutture identificate da un particolare metodo di **salvataggio delle informazioni** e dalle **operazioni su di esse**, che sono a loro volta algoritmi.

🕒 Tipologie

- **Concrete**: strutture di base che è possibile dare per scontate (es. vettori)
- **Astratte**: strutture complesse create utilizzando diverse strutture concrete ed eventualmente altre astratte

🕒 Tipi di Operazioni

- **Statiche**: leggono i dati senza modificarne la struttura o il contenuto
- **Dinamiche**: modificano i dati e necessitano di una computazione per il mantenimento della struttura

Dimensione dei Problemi

Consideriamo la seguente tabella sui **numeri di cifre** di alcune funzioni note

n	$ \log_2(n) $	$ n $	$ n^2 $	$ n^5 $	$ 2^n $	$ n^n $
1	1	1	1	1	1	1
100.000	2	6	11	26	30.103	500.001
200.000	2	6	11	27	60.206	1.060.206
300.000	2	6	11	28	90.309	1.643.137
400.000	2	6	12	29	120.412	2.240.824
500.000	2	6	12	29	150.515	2.849.486
600.000	2	6	12	29	180.618	3.466.891
700.000	2	6	12	30	210.721	4.091.569
800.000	2	6	12	30	240.824	4.722.472
900.000	2	6	12	30	270.927	5.358.819
1.000.000	2	7	13	31	301.030	6.000.001

Possiamo notare come da $\log a \ n$ e da $n \ a \ 2^n$ è presente lo stesso "salto" di grandezza dei valori, in quanto si passa di un livello esponenziale

Sia

- A un algoritmo
- n la lunghezza delle istanze da risolvere
- $f(n)$ il numero di operazioni da eseguire di A in funzione di n
- a il numero di operazioni al secondo eseguite

Possiamo ottenere l'istanza più lunga risolvibile in k secondi come

$$\frac{f(n)}{a} \leq k$$

Da questa formula possiamo notare l'immensa **differenza di costo computazionale** tra le varie funzioni

$$a = 1$$

k	$\log_2(n)$	n	n^2	2^n
1 secondo	2	1	1	0
2 secondi	4	2	1	1
4 secondi	16	4	2	2
1 minuto	$1.15 \cdot 10^{18}$	60	7	6
1 ora	*	3.600	60	12
1 giorno		86.400	293	17
1 secolo		$3.1536 \cdot 10^9$	56.156	32

* numero con circa 1084 cifre

O con un caso più realistico, una istruzione per microsecondo

$$a = 10^{11}$$

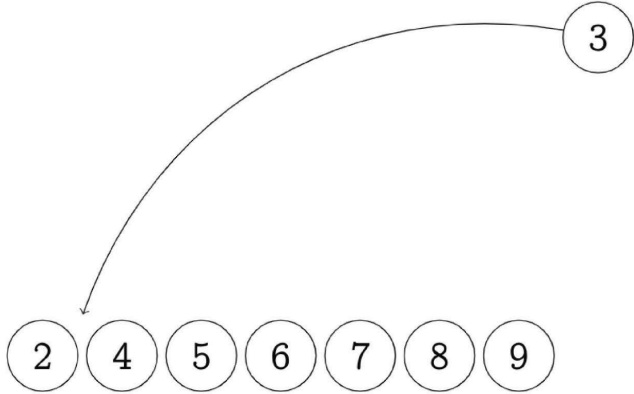
k	$\log_2(n)$	n	n^2	2^n
1 secondo	2	1	1	0
2 secondi	4	2	1	1
4 secondi	16	4	2	2
1 minuto	$1.15 \cdot 10^{18}$	60	7	6
1 ora	*	3.600	60	12
1 giorno		86.400	293	17
1 secolo		$3.1536 \cdot 10^9$	56.156	32

* numero con circa 30'000'000'000 di cifre

Insertion Sort

💡 Idea

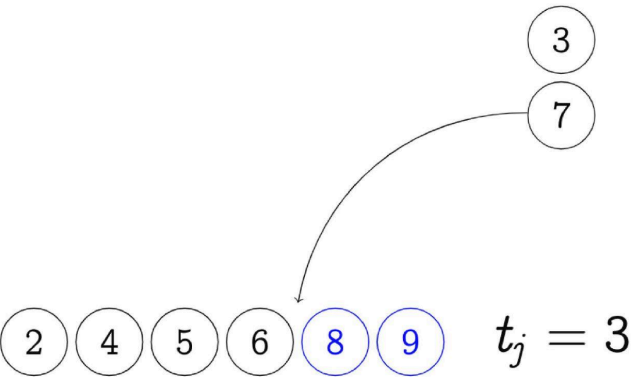
L'idea è quella di, per ogni elemento, controllare dal fondo ogni elemento fino a trovarne uno minore, per poi inserirlo dopo di esso



```
INSERTION-SORT(A)
1  for j = 2 to A.length
2      key = A[j]
3      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1..j-1]
4      i = j - 1
5      while i > 0 and A[i] > key
6          A[i + 1] = A[i]
7          i = i - 1
8      A[i + 1] = key
```

Parametri: A=vettore

Chiamiamo t_j il numero di volte che la **guardia del ciclo while** (condizione - riga 5) viene valutata.
Il valore di t_j dipende da j e corrisponde al numero di elementi del vettore ogni volta spostati, piú uno (condizione risulta false e esce dal ciclo)



Costo Computazionale

Calcoliamo il [costo computazionale](#) dell'algorithmo

Istruzione	Costo	Ripetizioni
for j = 2 to A.length	c_1	n
key = A[j]	c_2	$n - 1$
i = j - 1	c_4	$n - 1$
while i > 0 and A[i] > key	c_5	$\sum_{j=2}^n t_j$
A[i + 1] = A[i]	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
i = i - 1	c_7	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
A[i + 1] = key	c_8	$n - 1$

La formula sarà quindi

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 \cdot n + \\ &c_2 \cdot (n - 1) + \\ &c_4 \cdot (n - 1) + \\ &c_5 \cdot \sum_{j=2}^n t_j + \\ &c_6 \cdot \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + \\ &c_7 \cdot \sum_{j=2}^n (t_j - 1) + \\ &c_8 \cdot (n - 1) \end{aligned}$$

A seconda del valore di t_j , abbiamo risultati diversi

- **Caso ottimo:** non spostato mai nessuno $\implies t_j = 1$
- **Caso pessimo:** li spostato **tutti** ogni volta $\implies t_j = j$
- **Caso medio:** ne spostato mediamente **metà** ogni volta $\implies t_j = \frac{j}{2}$

Date le seguenti **sommatorie note** calcoliamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{j=2}^n j &= \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\ \sum_{j=2}^n (j-1) &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

≡ Esempio: Caso Ottimo

$$t_j = 1$$

$$c_1 n + c_2 (n - 1) + c_4 (n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n 1 + c_6 \sum_{j=2}^n (1 - 1) + \sum_{j=2}^n (1 - 1) + c_8 (n - 1)$$

Semplificando e raccogliendo le costanti

$$T(n) = an + b$$

≡ Esempio: Caso Pessimo

$$t_j = j$$

$$c_1 n + c_2 (n - 1) + c_4 (n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n j + c_6 \sum_{j=2}^n (j - 1) + \sum_{j=2}^n (j - 1) + c_8 (n - 1)$$

Semplificando e raccogliendo le costanti

$$T(n) = an^2 + bn + c$$

≡ Esempio: Caso Medio

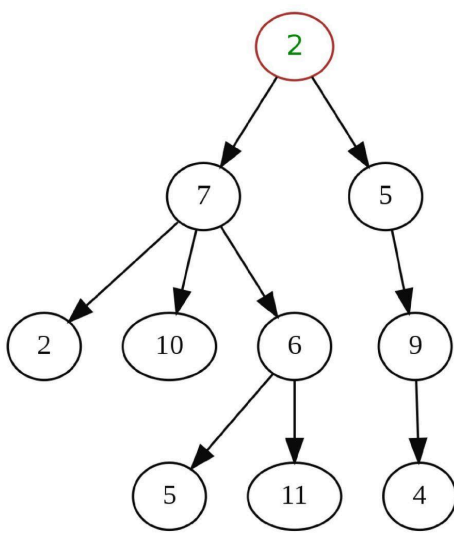
$$t_j = \frac{j}{2}$$

$$c_1 n + c_2 (n - 1) + c_4 (n - 1) + c_5 \sum_{j=2}^n \frac{j}{2} + c_6 \sum_{j=2}^n \left(\frac{j}{2} - 1 \right) + \sum_{\frac{j}{2}=2}^n \left(\frac{j}{2} - 1 \right) + c_8 (n - 1)$$

Semplificando e raccogliendo le costanti

$$T(n) = an^2 + bn + c$$

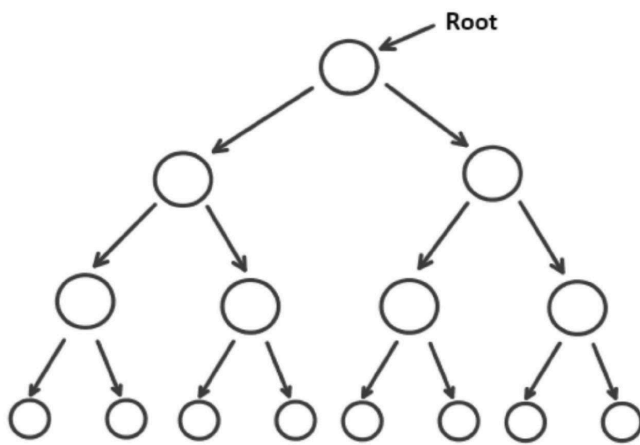
Alberi



Proprietà

- Ogni nodo ha **un solo padre e diversi figli**, ad eccezione del primo che non ne ha, chiamato **radice (root)**
- Due nodi possono essere collegati da **un solo percorso**, ovvero **non sono presenti cicli**
- I nodi senza figli vengono chiamati **foglie**

Alberi Binari



Proprietà

- Ogni nodo a **massimo due figli**
- Viene definito **completo** se il numero di nodi è una potenza di 2

Piano (i)	Numero di Nodi (LIV_i)	Totale Nodi (TOT_i)
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
h	2^{h-1}	$2^h - 1$