SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 819

RELAKSACIJE SEMIDEFINITNOG PROGRAMIRANJA ZA PROBLEME BOJANJA GRAFOVA I MAKSIMALNE KLIKE

Lana Šprajc

Zagreb, lipanj, 2025.

Ovdje dolazi tekst zadatka diplomskog rada na hrvatskom jeziku.

Hvala Branimiru na podsjetnicima da trebam pisati diplomski...

Sadržaj

1. Uvod

U teoriji grafova, problemi bojanja grafa i traženja maksimalne klike poznati su NP-teški problemi s brojnim primjenama. Slijedi opis ovih problema. Bojanje grafa svakom vrhu grafa pridružuje jednu boju na način da su svaka dva susjedna vrha različitih boja. Poznate primjene ovog problema su alociranju registara, raspoređivanju zadataka…

Problem traženja maksimalne klike je problem pronalaska potpuno povezanog podgrafa. Problem ima česte primjene u kemiji i bioinformatici, primjerice za pronalaženje sličnih struktura u molekulama.

Za oba ovo problema često je dovoljno pronaći rješenje koje je blizu optimalnom. Semidefinitno programiranja daje dobre aproksimacije rješenja problema koje se mogu izračunati u polinomnoj složenosti.

Rad je podijeljen u X poglavlja. U svakom je opisano ovo.

2. Opis problema

Graf se sastoji od n vrhova i m bridova. Pišemo $G = (V, E)$. Stupanj vrha je definiran kao broj vrhova s kojima je taj vrh susjedan. δ je oznaka za najveći stupanj vrha.

2.1. Bojanje grafova

Bojanje grafa je postupak pridruživanja boje svakom vrhu grafa tako da dva susjedna vrha nemaju jednaku boju. Graf je k-obojiv ako postoji bojanje grafa s k ili manje boja. Kromatski broj $\chi(G)$ grafa je najmanji broj boja potreban za obojati graf. U većini primjena, dovoljno je obojati graf s dovoljno malim k boja, $k > \chi(G)$.

2.1.1. $\delta + 1$ bojanje grafa

$\delta+1$ je jednostavan algoritan bojanja grafa koji oboja graf s najviše $\delta+1$ bojom. Algoritam je složenosti $O(n^2)$. Neka je $\{1, \ldots, \delta + 1\}$ skup boja. Svakom vrhu se pridružuje najmanji broj kojim nije obojan ni jedan od njegovih susjeda. Uvijek će postojati barem jedna takva boja jer svaki vrh ima najviše δ susjeda, a postoji $\delta + 1$ boja. Problem ovog algoritma je što je u većini slučajeva kromatski broj grafa puno manji od $\delta + 1$.

2.2. Traženje maksimalne klike

Klika u grafu je potpuno povezani podgraf. Maksimalna klika (engl. *maximum clique*) je najveći takav podgraf. Broj vrhova u maksimalnoj kliki označavamo s $\omega(G)$. Ovaj broj predstavlja donju granicu kromatskog broja grafa, $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Lokalno maksimalna klika (engl. *maximal clique, inclusion-maximal*) je klika koja nije podgraf veće klike. Takvoj kliki nije moguće dodati ni jedan vrh grafa koji nije dio klike, na način da dobiveni podgraf ostaje klika.

2.2.1. Pohlepno traženje lokalno maksimalne klike

Jednostavan algoritam za traženje lokalno maksimalne klike započinje s proizvoljnim vrhom $S = \{v\}$. Algoritam iterira po preostalim vrhovima i provjerava ostaje li podgraf S klika ako mu pridružimo odabrani vrh w. Ako ostaje, vrh pridružimo lokalno maksimalnoj kliki, a u suprotnom ga odbacujemo.

3. Semidefinitno programiranje

Semidefinitno programiranje (krat. *SDP*) klasa je optimizacijskih problema. Standardni oblik problema je:

$$\begin{aligned} min\langle CX\rangle \\ t.d.\langle A_iX\rangle = b_i \\ X = X^T \succeq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

pri čemu $\langle A\rangle = \sum_i^n a_{i,i}$ označava trag kvadratne matrice. $X \succeq 0$ označava da je matrica pozitivno semidefinitna.

Dualni problem zadan je s jednadžbama:

$$\begin{aligned} min\sum_i^m b_i y_i \\ t.d.\sum_i^m A_i y_i + Z = C \\ Z \succeq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.1. Teorija dualnosti

U optimizacijskim problemima, razmak dualnosti (engl. *duality gap*) je razlika između optimuma primarnog p^* i dualnog d^* problema, $p^* - d^*$. Kažemo da vrijedi slaba dualnost ako je razmak dualnosti veći ili jednak od 0. Jaka dualnost vrijedi ako su optimum primarnog i dualnog problema jednaki, to jest ako je razmak dualnosti jednak 0.

Za SDP je razmak dualnosti jednak:

$$\begin{aligned}
\langle CX \rangle - b^T y &= \langle (\sum_{i=1}^{m} A_i y_i + Z) X \rangle - b^T y \\
&= \langle ZX \rangle + \sum_{i=1}^{m} (\langle A_i X \rangle - b_i) y_i \\
&= \langle ZX \rangle \geq 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Iz ovoga vidimo da za SDP vrijedi slaba dualnost, ali ne nužno i jaka. Prema Slaterovom uvjetu, jaka dualnost je zadovoljena ako postoji rješenje primarnog problema u kojem je zadovoljen uvjet $X \succ 0$ i rješenje dualnog problema takvo da vrijedi $Z \succ 0$.

3.2. Metode rješavanja SDP

Postoje razne metode rješavanja SDP-a, primjerice elipsoidna metoda i metoda unutarnje točke. Ove metode numerički pronalaze rješenje, obično u polinomnoj složenosti.

3.2.1. Metoda unutarnje točke

Kao što ime kaže, metoda unutarnje točke započinje s nekom točkom unutar prostora koji zadovoljava uvjete semidefinitnog programa i priližava se optimumu.

4. Lovászov broj

Lovászov broj (Lovászova theta funkcija) rješenje je sljedećeg semidefinitnog programa:

$$
\begin{aligned}
\theta &= \max\langle JX\rangle \\
t.d.\langle X\rangle &= 1 \\
x_{i,j} &= 0, \forall(i,j) \in E(G) \\
X &= X^T \succeq 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Ovdje J predstavlja $n \times n$ matricu ispunjenu jedinicama.

Za Lovászov broj, $\theta(G)$ vrijedi da je veći od ili jednak broju klike, a manji od ili jednak kromatskom broju grafa, $\omega(G) \leq \theta(G) \leq \chi(G)$. [1]

Ovaj program nije teško pretvoriti u standardnu formu. Potrebno je postaviti $C = -J$, $A_1 = I$, $b_1 = 1$, $A_i = E_{j,k}, \forall(j,k) \in E(G)$, $b_i = 0, i \in \{2, \dots, m\}$. Ovdje $E_{i,k}$ predstavlja matricu koja sadrži 0 na svim mjestima osim na $e_{i,j}$ i $e_{j,i}$ gdje sadrži 1.

5. Primjene SDP-a u bojanju grafova

U formulaciji bojanja grafova pomoću SDP-a, vrhovima se pridružuju jedinični vektoru. Vektori pridruženi susjednim vrhovima moraju biti udaljeni jedan od drugog.

Definicija 1 *Za graf G=(V, E) s n vrhova i m bridova i realni broj k ≥ 1, vektorsko k-bojanje je pridruživanje jediničnih vektora $v_i \in \mathfrak{R}^n$ svakom vrhu i grafa G takvih da za svaka dva susjedna vrha $v_{i,j} \in E$ vrijedi:*

$$v_i \cdot v_j \leq -\frac{1}{k-1} \tag{5.1}$$

[2]

Definicija 2 *Za graf G=(V, E) s n vrhova i m bridova i realni broj k ≥ 1, matrično k-bojanje je određivanje simetrične pozitivno semidefinitne matrice M, takve da je $m_{i,i} = 1, i \in \{1, \dots, n\}$ i $m_{i,j} = m_{j,i} \leq -\frac{1}{k-1}, (i,j) \in E$.*

Matrično k-bojanje i vektorsko k-bojanje su ekvivalentni. Ako je poznato vektorsko k-bojanje, matricu M određuje se tako da se element $m_{i,j}$ postavi na skalarni produkt vektora v_i i v_j. Ako je poznato matrično k-bojanje, matricu M moguće je faktorizirati pomoću dekompozicije svojstvenim vrijednosti (engl. *eigendecomposition*) tako da vrijedi $M = UU^T$. Sada su stupci matrice U, jedinični vektori koji čine vektorsko k-bojanje grafa. [2]

5.1. Povezanost vektorskog bojanja grafa i bojanja grafa

Teorem 5..1 *Za $k \leq n$, postoji k jediničnih vektora $v_i \in \mathfrak{R}^n$ takvih da je $v_i \cdot v_j = -\frac{1}{k-1}, \forall i \neq j$*

Dokaz *(iz [2]) Dovoljno je dokazati da ovo vrijedi za k = n, ako je k manji od n* $v_i[j]$ *se postavlja na 0 za sve j > k.*

Konstruirani su vektori $v_1, \ldots, v_k$ *na sljedeći način:*

$$v_i[j] = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{k(k-1)}} & j \neq i \\ \sqrt{\frac{k-1}{k}} & j = i \end{cases} \tag{5.2}$$

Teorem 5..2 *Svaki k-obojiv graf je i vektorski k-obojiv.*

Dokaz *(iz [2]) Graf je uvijek obojiv s* $k \leq n$ *boja jer je u najgorem slučaju svaki vrh obojan u različitu boju. Svakom vrhu obojanom s i-tom bojom, pridružuje se vektor* v_i *iz 5..1*

Iz ovog teorema vidljivo je da je minimalni k za koji je graf vektorski k-obojiv donja granica za kromatski broj grafa.

5.2. Formulacija SDP

Slijedi SDP formulacija vektorskog bojanja grafa koja minimizira k za koji je graf vektorski k-obojiv.

$$\begin{aligned} &\min \alpha \\ t.d.&x_{ii} = 1 \\ &x_{ij} \leq \alpha, \forall (i,j) \in E(G) \\ &X = X^T \succeq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Optimalni $\alpha = -\frac{1}{k-1}$. Kako bi problem bio u standardnoj formi, u matrici X uvodi se novi element na dijagonalu tako da $x_{n+1,n+1} = \alpha$. Dodatno, uvode se *slack* varijable za uvjete povezane s bridovima. Konačna formulacija problema u standarnoj formi je:

$$
\begin{aligned}
&\min\langle E_{n+1,n+1}X\rangle \\
t.d.&\langle E_{ii}X\rangle = 1 \\
&\langle E_{ij}X\rangle - 2\langle E_{n+1,n+1}X\rangle + \langle E_{n+1+k,n+1+k}X\rangle = 0, \forall (i,j) \in E(G), k \in \{1,\dots,m\} \\
&X = X^T \succeq 0
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

5.3. Pretvorba vektorskog bojanja u bojanje grafa

Rješavanjem SDP-a, dobiva se vektorsko bojanje grafa. Ovo je potrebno pretvoriti u bojanje grafa. Postoji nekoliko algoritma za ovaj problem. Neki od njih su metoda odsijecanja ravninama (engl. *cutting plane method*) i zaokruživanje vektorskim projekcijama.

5.3.1. Semibojanja

Definicija 3 *k-semibojanje (engl. k-semicoloring) grafa G je pridruživanje k boja barem polovici vrhova grafa G tako da dva susjedna vrha nisu jednake boje.*

5.3.2. Metoda odsijecanja ravninama

Motivacija iza korištenja algoritma je činjenica da su vektori koji predstavljaju susjedne vrhove udaljeni u prostoru, to jest velik je kut između njih. U algoritmu

5.3.3. Zaokruživanje vektorskim projekcijama

6. Primjene SDP-a u traženju maksimalne klike

7. Programska ostvarenja

7.1. Bojanje grafova

7.2. Traženje maksimalne klike

8. Rezultati i rasprava

9. Upute za prevođenje i pokretanje

10. Zaključak

Literatura

[1] L. Lovasz, “On the shannon capacity of a graph”, *IEEE Transactions on Information Theory*, sv. 25, br. 1, str. 1–7, 1979. https://doi.org/10.1109/TIT.1979.1055985

[2] D. Karger, R. Motwani, i M. Sudan, “Approximate graph coloring by semidefinite programming”, 1998. [Mrežno]. Adresa: https://arxiv.org/abs/cs/9812008

Sažetak

Relaksacije semidefinitnog programiranja za probleme bojanja grafova i maksimalne klike

Lana Šprajc

Unesite sažetak na hrvatskom.

Ključne riječi: prva ključna riječ; druga ključna riječ; treća ključna riječ

Abstract

Semidefinite programming relaxation for graph coloring and maximum clique number

Lana Šprajc

Enter the abstract in English.

Keywords: the first keyword; the second keyword; the third keyword