University of Chinese Academy of Sciences

矩阵分析与应用大作业

矩阵与线性方程组

小组：XXX

学号：XXX

October 12, 2025

目录

1 一级标题 (Section)

这是一级标题，代表文档中最大、最重要的部分，例如书本中的“章”。段落内容直接写在这里即可。段落与段落之间会自动添加垂直间距。

1.1 二级标题 (Subsection)

这是二级标题，用于组织一级标题内部的各个小节。

1.1.1 三级标题 (Subsubsection)

这是三级标题，用于更细致地划分内容。这是模板支持的最低级别的自动编号标题。

2 模板功能演示

本节将展示此模板中预设的各种排版元素的使用方法。

3 线性代数公式示例

本节展示了在线性代数类论文或教材中常用的公式书写方式，可作为插入数学表达的参考。

3.1 基本符号与矩阵表示

一个 $m \times n$ 的矩阵通常记为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

列向量和行向量分别表示为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{\mathsf{T}} = [x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

3.2 矩阵运算

矩阵的加法与数乘满足：

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij}), \qquad c\mathbf{A}=(ca_{ij}).$$

矩阵乘法定义为：

$$(\mathbf{AB})_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

矩阵转置、逆矩阵与迹的常见表示：

$$\mathbf{A}^\top, \quad \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathrm{tr}(\mathbf{A})=\sum_i a_{ii}.$$

3.3 行列式与性质

二维和三维矩阵的行列式分别为：

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad-bc,$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh.$$

行列式的性质：

$$\det(\mathbf{AB})=\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}), \qquad \det(\mathbf{A}^\top)=\det(\mathbf{A}).$$

3.4 特征值与特征向量

如果 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$，则 λ 称为 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{x}$ 为对应的特征向量。特征方程为：

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0.$$

3.5 正交与投影

向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 正交当且仅当：

$$\mathbf{u}^\top\mathbf{v}=0.$$

$\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 上的投影为：

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})=\frac{\mathbf{u}^\top\mathbf{v}}{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}\mathbf{u}.$$

3.6 奇异值分解 (SVD)

任意实矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 可分解为：

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{T}},$$

其中 $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}$、$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为仅含非负元素的对角矩阵：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_r \end{bmatrix}.$$

3.7 线性方程组与矩阵形式

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

可简写为矩阵形式：

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

若 $\mathbf{A}$ 可逆，则解为：

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

3.8 插入图片

UCAS 校徽

Figure 1: 中国科学院大学

3.9 自定义环境演示

3.9.1 需要强调的定理

解集合的三种可能性

- 唯一解：存在一组且仅有一组 x_i 的值，同时满足所有方程
- 无解：不存在一组 x_i 的值，同时满足所有方程—解集为空
- 无限多解：存在无穷多组不同的 x_i 值，同时满足所有方程。很容易证明，如果一个系统有多个解，那么它就有无穷多个解。例如，一个系统不可能有确切的两个不同的解。

3.9.2 需要展示的例子

例 **3.9.1.** Gauss-Jordan elimination 首先将方程组转换成增广矩阵形式

$$\left\{\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= -2 \end{aligned}\right. \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

由于第一个主元不能为零，所以我们将不得不进行行交换，以将一个非零元素带到主元位置。

3.9.3 需要展示的作业题

练习 **3.9.1.** 求解线性方程组 Use Gaussian elimination with back substitution to solve the following system：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

4 写在最后

4.1 开源地址

- Github: https://github.com/neverwinHao/UCAS-Matrix-Template