概率论与数理统计作业一

李思全

22307130049

33 设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是随机事件，试用归纳法证明下列公式

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

已知$P(A_1) = \sum_{i=1}^{1} P(A_i)$

假设成立：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

则要证

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1})$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n+1} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n} P(A_1 A_2 \cdots A_{n+1})$$

不妨令事件$B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，则
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(B \cup A_{n+1}) = P(B) + P(A_{n+1}) - P(BA_{n+1})$

$P(BA_{n+1}) = P((A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}) = P((A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap$

令$C_i = A_i A_{n+1}$，则

$$P(BA_{n+1}) = P(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{n+1}) - \sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i A_j A_{n+1}) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n A_{n+1})$$

故

$$P(B \cup A_{n+1})$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1})) - (\sum_{1 \le i \le j \le n} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{n+1})) + \cdots +$$

$$(-1)^n P(A_1 A_2 \cdots A_n A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n+1} P(A_i A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n+1} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^n P(A_1 A_2 \cdots A_{n+1})$$

归纳假设成立，题设得证

39 用概率论想法求N阶行列式的展开式中包含主对角线元素的项数

展开式的样本空间即（1，2，...，n）与（1，2，...，n）上不同双射的数量，为$A_n^n = n!$

将各双射作为等可能事件处理

出现任一对角线元素(i,i)的概率是$\frac{1}{n}$，未出现(i,i)的概率是$\frac{n-1}{n}$

若未出现(i,i)而是出现(i,j)，则删去第i行与第j列以及第j行，下一个元素在主对角线上的概率为$\frac{1}{n-2}$

依次类推，若n为奇数，则有$\lfloor n/2 \rfloor$次删除后，最后一个元素在主对角线上的概率为1，包含主对角线的项数为$n! * 1 = n!$

若n为偶数，则有$\lfloor n/2 \rfloor$次删除后不存在主对角线元素，出现此情况概率为$\frac{1}{n*(n-2)*\cdots*2}$

包含主对角线元素的项数为$n! * (1 - \frac{1}{n*(n-2)*\cdots*2}) = n! - (n-1)*(n-3)*\cdots*1$

综上

N阶行列式包含主对角线的项数为

$$\begin{cases} n! & (n\text{为奇数}) \\ n! - (n-1)*(n-3)*\cdots*1 & (n\text{为偶数}) \end{cases}$$