概率论与数理统计 作业三

李思全

22307130049

> *第二章4，8，13，15*

2.4

2. 若 M 件产品中包含 m 件废品，今在其中任取两件，求：(1) 取出的两件中至少有一件是废品的概率；(2) 已知取出的两件中有一件是废品的条件下，另一件也是废品的条件概率；(3) 已知两件中有一件不是废品的条件下，另一件是废品的条件概率.

（1）

$P = 1 - \frac{C_{M-m}^2}{C_M^2}$

（2）

直接计算：

$P = \frac{m-1}{M-1}$

条件概率公式计算：

$P = \frac{\frac{C_m^2}{C_M^2}}{\frac{m}{M}} = \frac{m-1}{M-1}$

（3）

直接计算：

$P = \frac{m}{M-1}$

条件概率公式计算：

$P = \frac{\frac{m(M-m)}{C_M^2}}{\frac{M-m}{M}} = \frac{m}{M-m}$

2.8

8. 飞机坠落在 A、B、C 三个区域之一，营救部门判断其概率分别为 0.7，0.2，0.1；用直升机搜索这些区域，若有残骸，被发现的概率分别为 0.3，0.4，0.5，若已用直升机搜索过 A 区域及 B 区域，没有发现残骸，在这种情况下，试计算飞机坠落在 C 区域的概率.

假设搜索A，B未发现残骸为事件F

则$P(F)=0.7(1-0.3)+0.2(1-0.4)+0.1=0.71$

$P(CF)=0.1$

则目前情况下坠落在C区域的概率为：

$P(C|F)=\frac{0.1}{0.71}=14.08\%$

2.13

13. 证明：对于事件 A,B，关系式

$$P^2(AB)+P^2(\bar{A}B)+P^2(A\bar{B})+P^2(\bar{A}\ \bar{B})=\frac{1}{4}$$

成立的充要条件为

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{1}{4}$$

已知

$P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+P(\bar{A}\bar{B})=1$

由柯西不等式知

$(P(AB)^2+P(A\bar{B})^2+P(\bar{A}B)^2+P(\bar{A}\bar{B})^2)(1^2+1^2+1^2+1^2)\geq(P(AB)+P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)+$

当且仅当$P(AB)=P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=P(\bar{A}\bar{B})$时取等

故$P(AB)=P(A\bar{B})=P(\bar{A}B)=P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{4}$

即$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{1}{4}$

2.15

15. 若 $0<P(B)<1$，试证：

(1) $P(A|B)=P(A|\bar{B})$；

(2) $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

均为 A 与 B 相互独立的充要条件.

(1)

已知A与B相互独立的充要条件为

$P(AB)=P(A)P(B)$

充分性：

由条件概率知

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$

故$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$

其中$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$，$P(\bar{B})=1-P(B)$

带入即可得$P(AB)=P(A)P(B)$

必要性：

由$P(AB)=P(A)P(B)$

$P(AB)-P(AB)P(B)=P(A)P(B)-P(B)P(AB)$

$P(AB)(1-P(B))=P(B)(P(A)-P(AB))$

$P(AB)P(\bar{B})=P(A)P(A\bar{B})$

$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}$

即$P(A|B)=P(A|\bar{B})$

（2）

充分性：

$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

$\frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}$

将$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(AB)-P(\bar{A}B)-P(A\bar{B})$与$P(\bar{B})=1-P(B)$代入

即可得$P(AB)=P(A)P(B)$

必要性：

即将上述步骤反过来书写，即可得证

附化简过程：

$$\frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = 1$$

$$P(AB) - P(AB)P(B) + (1 - P(AB) - P(A\bar{B}) - P(\bar{A}B))P(B) = P(B) - P^2(B)$$

$$P(AB) - 2P(AB)P(B) - P(B)(P(A) - P(AB)) - P(B)(P(B) - P(AB)) = -P(B)$$

$$P(AB) - P(A)P(B) = 0$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$