

Bureau d'étude GPS

Navigation par satellites - année 2020/2021

Lucas Steffanutto

Décembre 2020



ENCADRANTS : AUDREY
GIREMUS

Introduction

L'objectif de ce bureau d'étude est de calculer la trajectoire d'un utilisateur du système GPS à partir des mesures de pseudo-distances satellite/récepteur. On étudiera la robustesse de l'algorithme à des conditions de navigation défavorables, puis, l'influence de la géométrie de la constellation sur les performances du GPS sera évaluée en calculant le facteur DOP (Dilution of Precision). Ici, nous nous intéressons à une voiture équipée d'un GPS circulant dans la ville de Talence suivant l'itinéraire représenté sur la figure suivante :

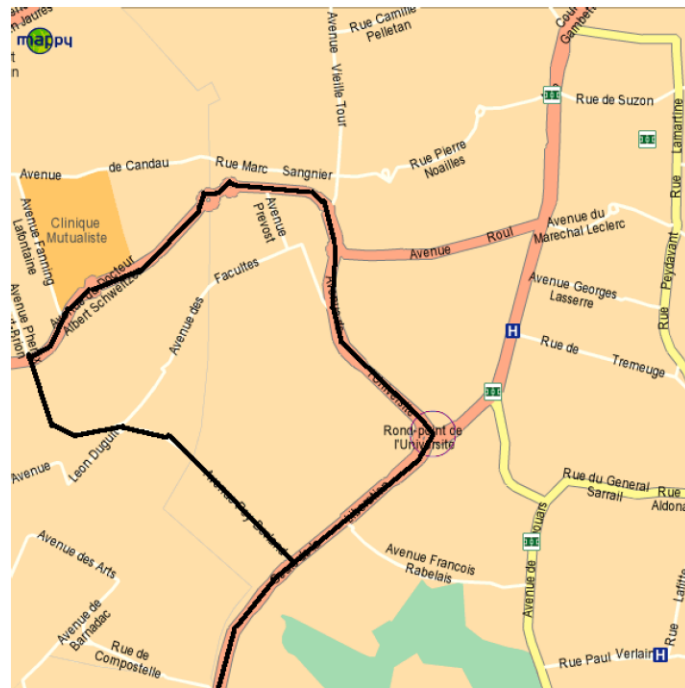


FIGURE 1: Itinéraire suivi

On utilisera deux repères différents (voir Figure 2) :

Le repère 1 (repère ECEF) de référence pour la navigation GPS et dans lequel sont généralement exprimées les coordonnées des satellites. Son origine est le centre de la Terre O , son axe x est situé à l'intersection du plan de l'écliptique (équateur) et du méridien de Greenwich, son axe z est confondu avec l'axe des pôles et pointe vers le Nord, et finalement son axe y est défini de façon à former un trièdre direct.

Le repère 2 (repère local $(N;E;D)$), utile pour visualiser le mouvement du véhicule. Il est centré en un point de la surface terrestre P_0 et ses axes pointent respectivement vers la verticale locale et les directions du Nord et de l'Est.

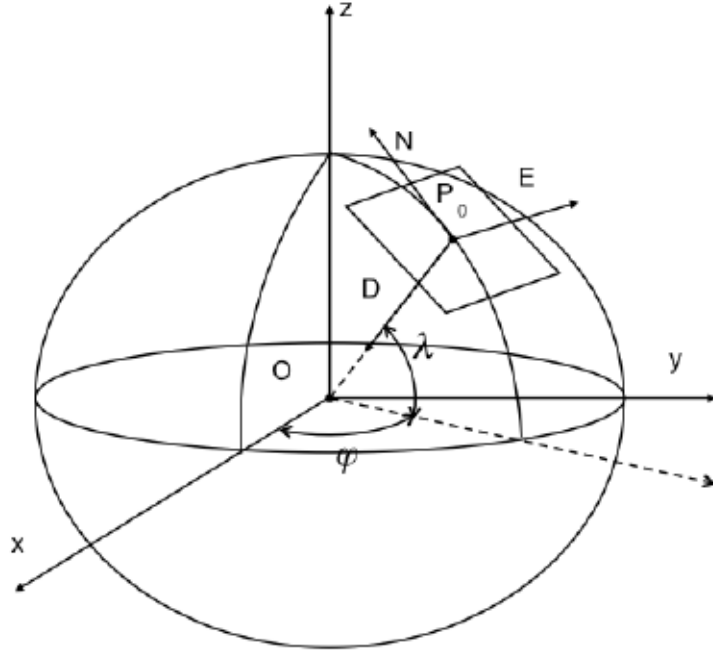


FIGURE 2: Repères de référence

La relation entre les deux repères est explicitée sur la figure (2). La formule reliant les coordonnées d'un vecteur dans l'un ou l'autre des deux repères est :

$$X^1 = MX^2 + X_0^1 \quad (1)$$

où $X_0^1 = (x_0, y_0, z_0)$ représente les coordonnées du point P_0 dans le repère 1 et la matrice de passage M vérifie :

$$M = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \phi & -\sin \phi & -\cos \lambda \cos \phi \\ -\sin \lambda \sin \phi & \cos \phi & -\cos \lambda \sin \phi \\ \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

avec λ et ϕ correspondant respectivement à la latitude et à la longitude du point de référence P_0 .

Question 1

On passe du repère 1 au repère 2 à partir de 2 rotation (R1 et R2) : une selon l'axe z d'angle ϕ , et une autre selon l'axe y , d'angle $\lambda + \frac{\pi}{2}$. On a donc la matrice de passage suivante.

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\lambda + \frac{\pi}{2}) & 0 & -\sin(\lambda + \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\lambda + \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(\lambda + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$M = \begin{pmatrix} -\sin(\lambda) \cos(\phi) & -\sin(\phi) & -\cos(\lambda) \cos(\phi) \\ -\sin(\lambda) \sin(\phi) & \cos(\phi) & -\cos(\lambda) \sin(\phi) \\ \cos(\lambda) & 0 & -\sin(\lambda) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Question 2

En utilisant le programme *llhxyz.m*, on obtient les coordonnées du point de référence P_0 , origine du repère 2, dans le repère 1, en coordonnées cartésiennes. Le point de référence a une altitude nulle, une latitude de $44^\circ 48'$ Nord et une longitude de $0^\circ 35'$ Ouest. Sachant que $1' = 1/60$, on convertit ses coordonnées en radians puis le programme nous retourne les coordonnées de P_0 dans le repère 1 de la Terre. On obtient donc le point suivant.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 4,5331e + 06 \\ -4,6153e + 04 \\ 4,4716e + 06 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Question 3

Dans cette partie on souhaite estimer la trajectoire du véhicule qui circule dans Talence, dans les deux repères, à partir des mesures satellites. On va réaliser cela en appliquant l'algorithme des moindres carrés.

On doit estimer, à chaque instant, la position (x, y, z) du véhicule, ainsi que le biais d'horloge b du récepteur. On a donc le vecteur d'état $X = (x, y, z, b)^T$ relié aux mesures GPS de pseudo-distance par l'équation suivante.

$$Y(t) = h_t(x, y, z, b) + w(t) \quad (6)$$

Où le vecteur $Y(t) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^T$ regroupe les n mesures GPS disponibles à l'instant t et le vecteur $w(t)$ est formé de bruits blancs centrés gaussiens de variance 2. Ce dernier représente le bruit de mesure GPS. La fonction $h_t(x, y, z, b)$ vérifie :

$$h_t(x, y, z, b) = \begin{cases} l\sqrt{(x - x^1(t))^2 + (y - y^1(t))^2 + (z - z^1(t))^2} + b \\ \vdots \\ \sqrt{(x - x^n(t))^2 + (y - y^n(t))^2 + (z - z^n(t))^2} + b \end{cases} \quad (7)$$

Le triplet $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ représente la position du i^{eme} satellite à l'instant t .

On doit passer par un développement de Taylor au premier ordre autour d'un point de référence X_r pour linéariser l'équation et appliquer les moindres carrés. On obtient alors :

$$Y(t) - h_t(x_r, y_r, z_r, b_r) = H_t(X - X_r) + w(t) \quad (8)$$

Où $H_t = \Delta h_t$ contient les dérivées partielles de h_t par rapport aux composantes du vecteur d'état. En notant $Z(t) = Y(t) - h_t(x_r, y_r, z_r, b_r) + H_t X_r$, le problème d'estimation peut donc être mis sous la forme (6). Le point de linéarisation choisi est classiquement pris égal à la précédente estimation de la position et du biais d'horloge. Les coefficients de la matrice H_t dépendent de la position des satellites GPS par rapport au récepteur. Cette matrice traduit l'influence de la géométrie des satellites sur l'erreur d'estimation.

En estimant à chaque instant la position du véhicule à partir de l'instant précédent on obtient donc sa trajectoire dans le repère 1 ECEF.

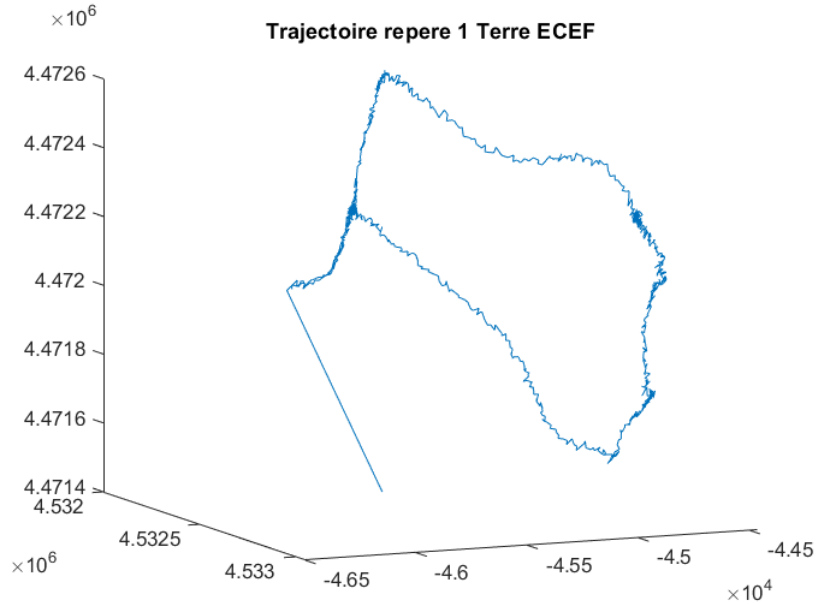


FIGURE 3: Trajectoire estimée dans le repère 1 ECEF de la Terre

Puis on peut repasser dans le repère 2 local NED grâce à la matrice de passage calculée précédemment, et en inversant l'équation (1).

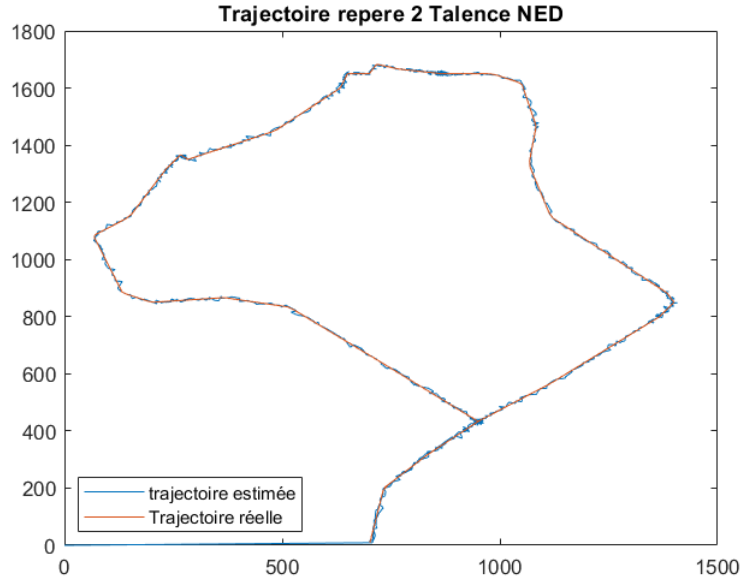


FIGURE 4: Trajectoire estimée dans le repère 2 NED local, et trajectoire

Question 4

On va à présent modifier les données GPS fournies en ajoutant à chaque instant un bruit de mesure dans les pseudos distances des satellites. On peut voir que la position estime oscille de plus en plus quand la variance du bruit augmente.

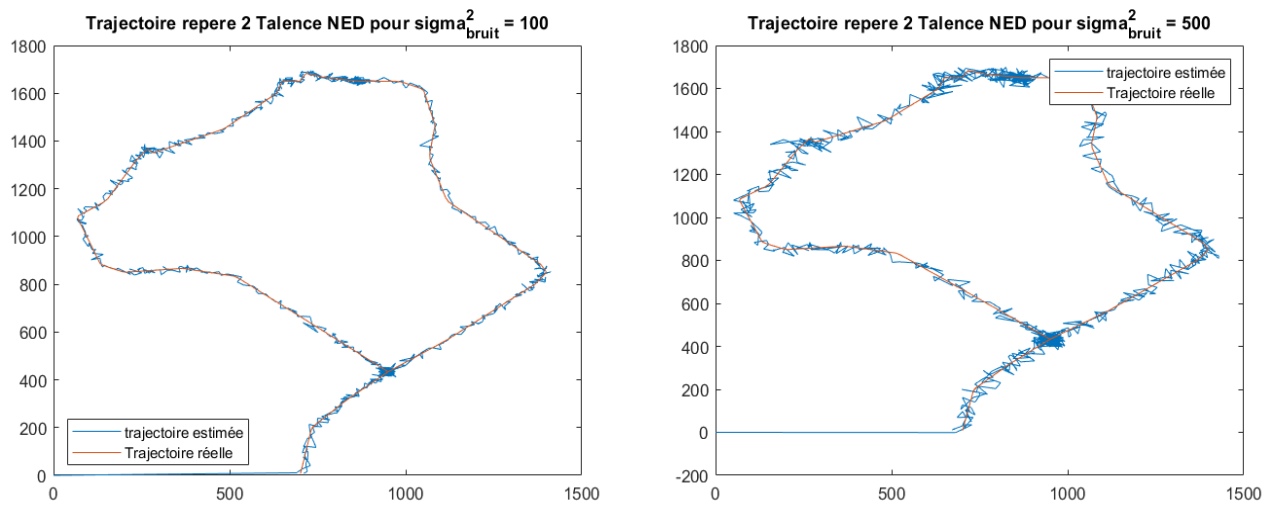


FIGURE 5: Trajectoire du véhicule estimée lorsqu'on ajoute un bruit de mesures dans les données satellites ($\sigma_{bruit}^2 = 100$ et $\sigma_{bruit}^2 = 500$)

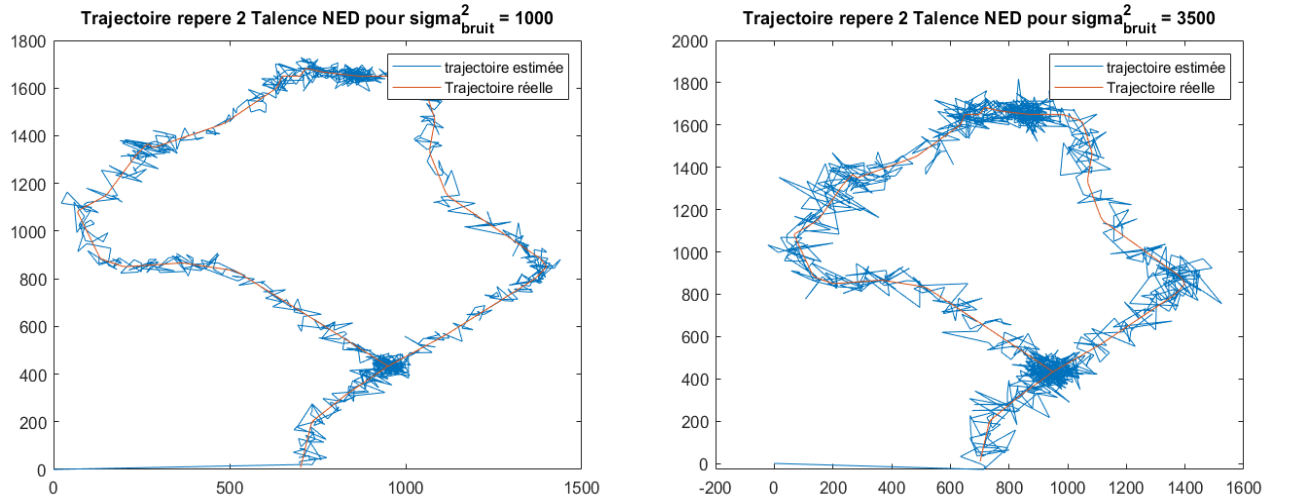


FIGURE 6: Trajectoire du véhicule estimée lorsqu'on ajoute un bruit de mesures dans les données satellites ($\sigma_{bruit}^2 = 1000$ et $\sigma_{bruit}^2 = 3500$)

Pour calculer la MSE on prend la formule suivante.

$$E \left[\|X - \hat{X}\|^2 \right] \quad (9)$$

On peut la visualiser en fonction de la variance du bruit ajoutée aux données GPS.

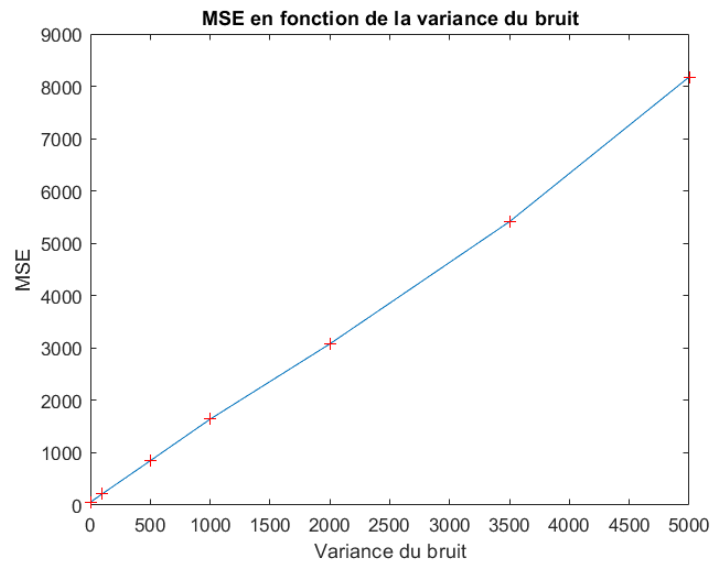


FIGURE 7: MSE calculée en fonction de la variance du bruit ajoutée aux données GPS

On remarque aussi que sans bruit de mesure ajouté, on a $MSE = 56,06$

De même, on va faire varier le nombre de satellites biaisés et ainsi que le biais qu'on ajoute aux mesures GPS. On obtient les graphiques suivants :

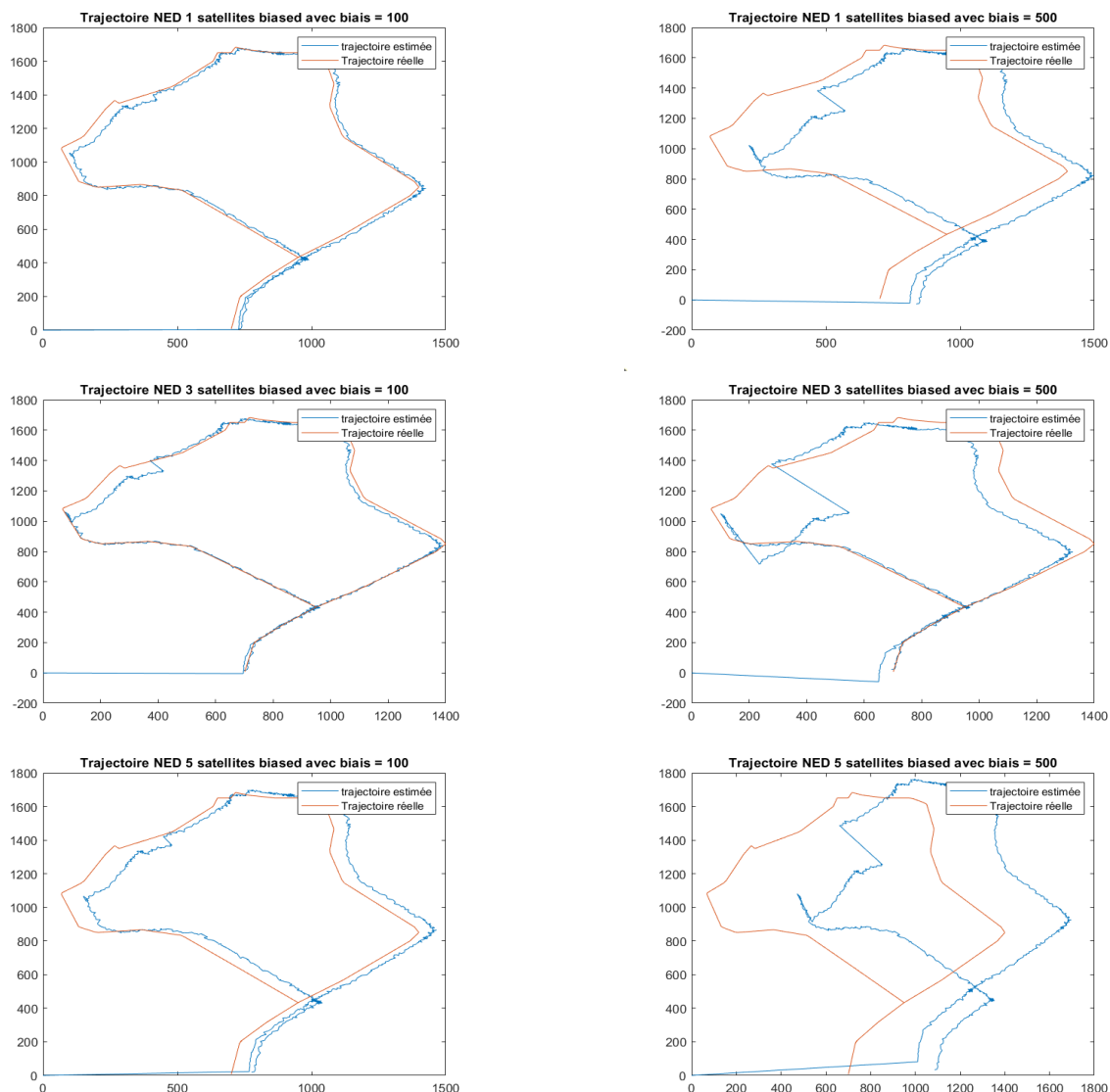


FIGURE 8: Trajectoire du véhicule estimée avec 1,2 et 5 satellites biaisés différemments

On peut donc voir que plus le biais ajouté est élevé et plus la trajectoire réelle est décalée, et plus le nombre de satellites biaisés est important et plus la trajectoire estimée est déformée, par rapport à celle réelle. De même, on peut tracer la MSE en fonction du biais ajouté et du nombre de satellites biaisés : On peut voir que la MSE dépend aussi de la géométrie des satellites, puisque l'erreur est plus importante lorsque l'on en biaise 2.

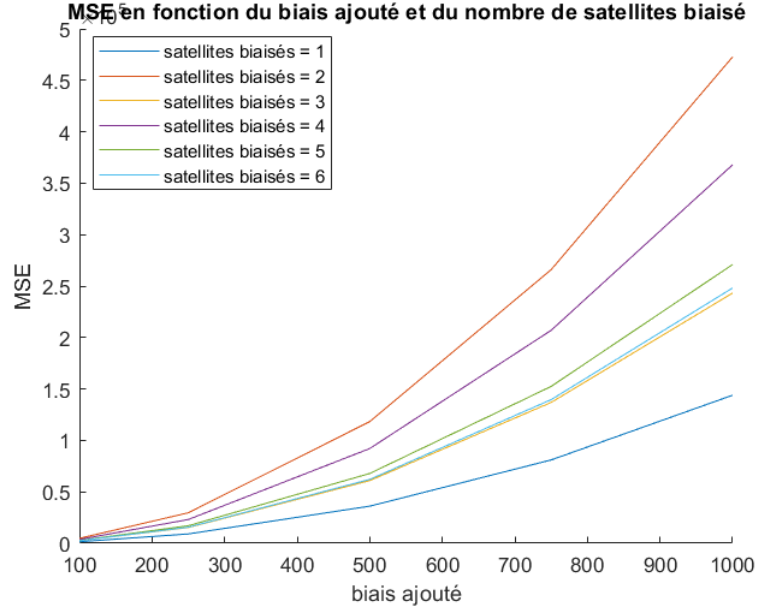


FIGURE 9: MSE calculée en fonction du biais ajouté et du nombre de satellites biaisés

Question 5

Démonstration 1 :

$$\begin{aligned}\hat{X} &= (H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top Z = (H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top (HX + \omega(t)) \\ \hat{X} &= (H^\top H)^{-1} (H_t^\top H_t) X + (H^\top H)^{-1} H_t^\top \omega(t)\end{aligned}\tag{10}$$

$$\hat{X} - X = (H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top \omega(t)$$

Démonstration 2 :

$$\begin{aligned}DOP &= \frac{1}{\sigma} RMSE = \frac{1}{\sigma} \sqrt{E[\|x - \hat{x}\|^2]} \\ DOP &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{tr(\sum \Delta_X \Delta_X)} \\ DOP &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{E\left[\left((H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top \omega(t)\right)\left((H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top \omega(t)\right)^\top\right]} \\ DOP &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{tr\left[\left((H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top\right)\left((H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top\right)^\top\right] E[\omega(t)\omega(t)^\top]} \\ DOP &= \frac{1}{\sigma} \sqrt{tr\left[\left((H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top\right)\left((H_t^\top H_t)^{-1} H_t^\top\right)^\top\right] \sigma^2} \\ DOP &= \sqrt{tr\left((H_t^\top H_t)^{-1}\right)}\end{aligned}\tag{11}$$

Question 6

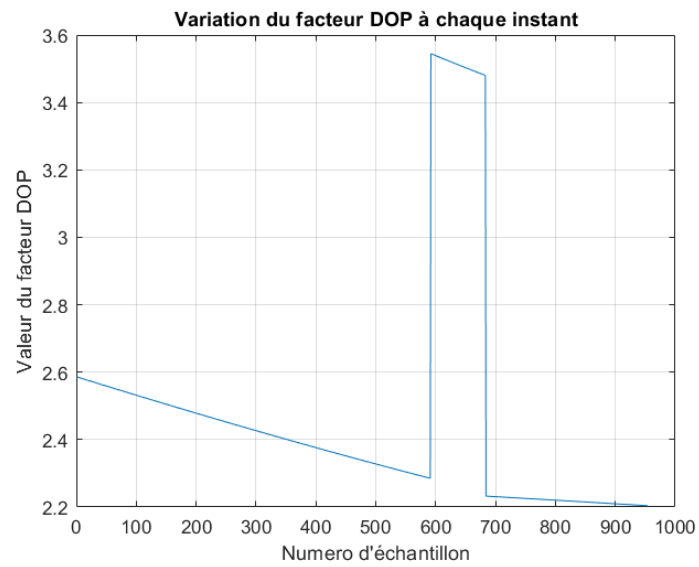


FIGURE 10: Facteur DOP de la trajectoire à chaque instant

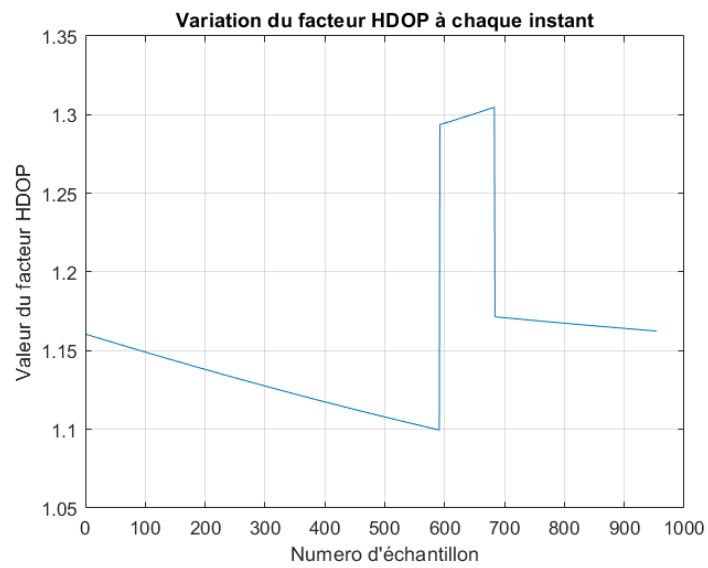


FIGURE 11: Facteur HDOP de la trajectoire à chaque instant

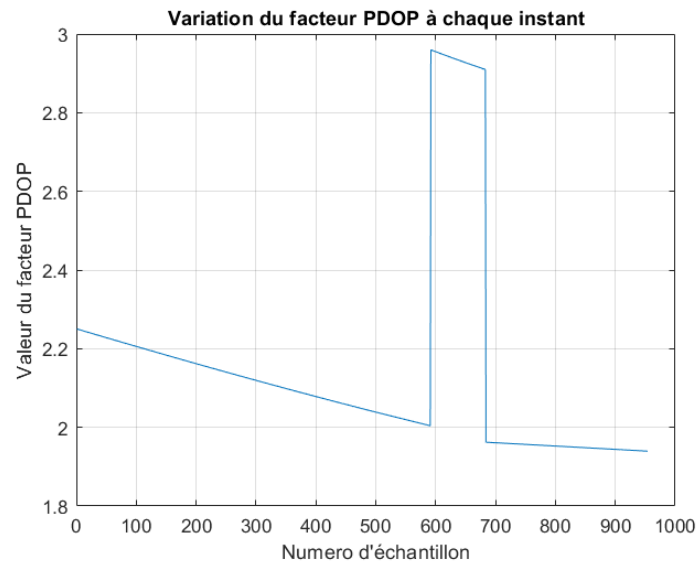


FIGURE 12: Facteur PDOP de la trajectoire à chaque instant

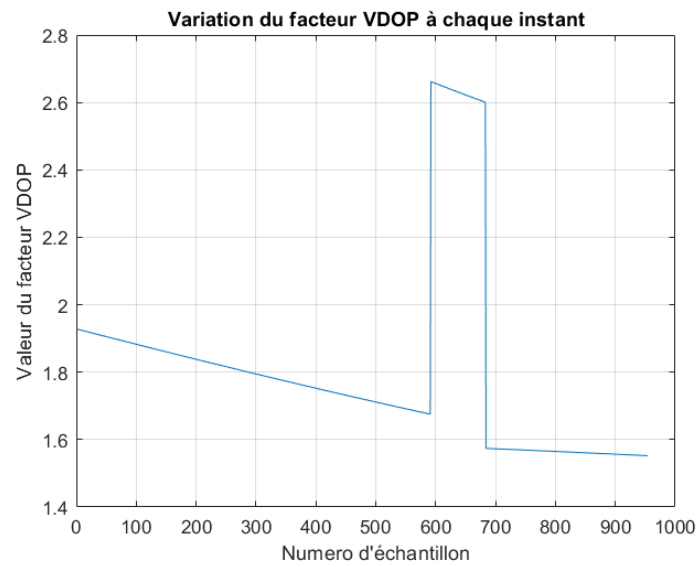


FIGURE 13: Facteur VDOP de la trajectoire à chaque instant