

TP n°1 : Traitement d'antenne

TS305

Lucas Steffanutto

Octobre 2020



ENCADRANTS : PASCAL
VALLET

1 Introduction

L'objectif de ce TP est de mettre en pratique quelques méthodes de localisation de sources, à partir d'un ensemble de capteurs. On se placera dans le scénario d'une antenne composée de M capteurs disposés suivant une géométrie linéaire uniforme, et recevant les signaux bande étroite émis par K sources situées en champs lointain, et dont les angles d'arrivées sont notés $\theta_1, \dots, \theta_K$. Les capteurs seront supposés espacés de la moitié de la longueur des signaux. Dans ce contexte, rappelons que le vecteur des signaux observés sur l'antenne à l'instant discret n se modélise par :

$$\boxed{\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{s}_n + \mathbf{v}_n} \quad (1)$$

Où :

- $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ est la matrice des vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)$ associés aux K sources, avec :

$$\mathbf{a}(\theta) = (1, \exp(-i\pi \sin(\theta)), \dots, \exp(-i\pi(M-1)\sin(\theta)))^T \quad (2)$$

- (\mathbf{s}_n) est le processus des K signaux sources à l'instant n ,

- (\mathbf{v}_n) est un bruit additif

On supposera ici les processus des signaux sources et bruit *gaussiens* et *temporellement blancs*, avec :

$$\mathbf{s}_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^K}(\mathbf{0}, \text{diag}(\sigma_{s_1}^2, \dots, \sigma_{s_K}^2)) \text{ et } \mathbf{v}_n \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}^M}(\mathbf{0}, \sigma_v^2 \mathbf{I})$$

En particulier, le bruit est également supposé spatialement blanc, et les signaux sources sont décorrélés entre eux.

L'objectif sera donc d'estimer $\theta_1, \dots, \theta_K$ à la donnée de N échantillons $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$. On s'intéressera notamment aux méthodes d'estimation basse résolution à base de filtres spatiaux, et aux méthodes haute résolution type sous-espaces.

2 Localisation par filtrage spatial

La technique du filtrage spatial, aussi appelée *Beamforming*, consiste à combiner linéairement la sortie de chaque capteur de manière à focaliser le réseau de capteur dans une direction donnée (la direction d'arrivée de la source). Pour réaliser cela on pondère le signal reçu par chaque capteur, avec un filtre spatial W dont chaque élément diffère en fonction du capteur sur lequel il est appliqué. Le but est d'éliminer la contribution de la source dans les directions qui ne nous intéressent pas.

La méthode de Capon consiste à minimiser l'énergie total du signal en sortie du filtre. Elle est réalisée à partir de plusieurs observations du signal reçu. On se ramène alors au problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathcal{C}} \mathbb{E} |\mathbf{w}^* \mathbf{y}_n|^2 \quad (3)$$

sous la contrainte : $\mathcal{C} = \{\mathbf{h} \in \mathbb{C}^M : \mathbf{h}^* \mathbf{a}(\theta_0) = 1\}$

On génère le signal reçu par le réseau de capteurs ($M = 5$ capteurs et $N = 500$ échantillons) provenant d'une source d'élévation $\theta_0 = 40^\circ$, d'énergie $\sigma_s^2 = 1$. On prendra comme énergie de bruit $\sigma_v^2 = 0.1$. On peut alors observer le signal reçu par chaque capteur :

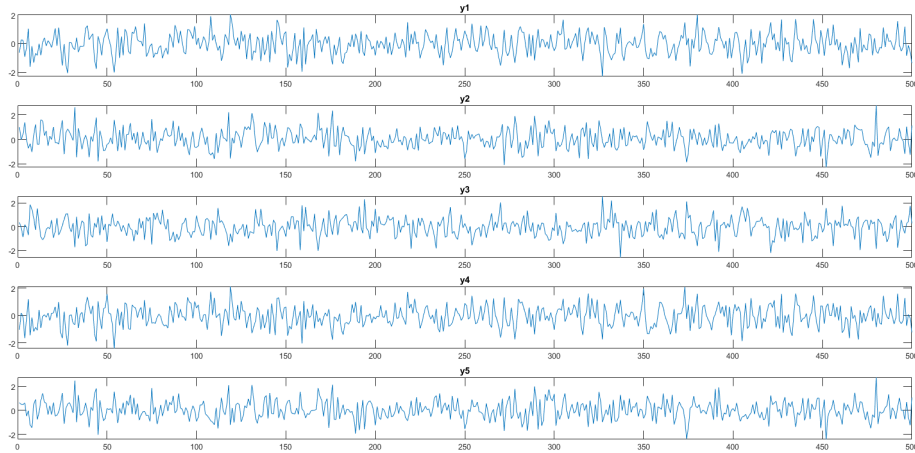


FIGURE 1 – Signal reçu par chaque capteur

On met ensuite en oeuvre le filtre de Capon $\mathbf{w}_{CAPON}(\theta) = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}(\theta_0)^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}$ (si la matrice de covariance du bruit Σ est inversible). On rappelle que : $\mathbf{R} = \mathbb{E} [\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_n^*] = \mathbf{A} \Gamma \mathbf{A}^* + \Sigma$

Ne disposant pas de \mathbf{R} mais seulement des N observations de chaque capteurs $\mathbf{y}_n, \dots, \mathbf{y}_{N-1}$, on va donc l'estimer de la manière suivante :

$$\hat{\mathbf{R}}_y = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^* \quad (4)$$

On peut alors tracer l'énergie estimée en sortie du filtre, en balayant tout l'espace, pour θ allant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. L'énergie estimée à la sortie du filtre s'exprime alors comme :

$$\hat{P}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^* \hat{\mathbf{R}}_y^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (5)$$

On obtient alors la figure suivante qui nous permet de détecter la direction d'arrivée de la source :

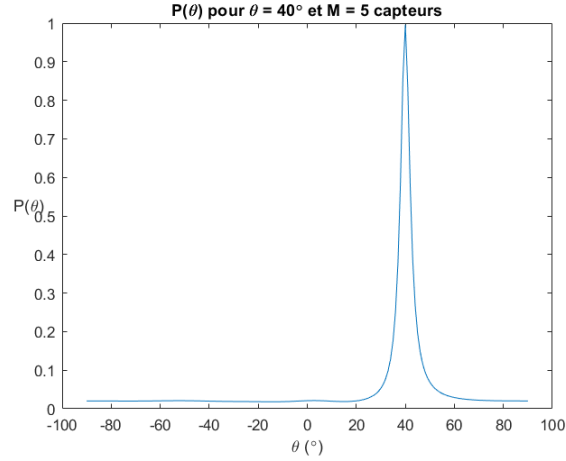


FIGURE 2 – Spectre de puissance estimé pour $M = 5$ capteurs

On peut voir que lorsque le nombre de capteur augmente, l'énergie se concentre autour de la direction d'arrivée de la source, $\theta = 40^\circ$. Pour $M = 20$ capteurs on obtient le graphique suivant :

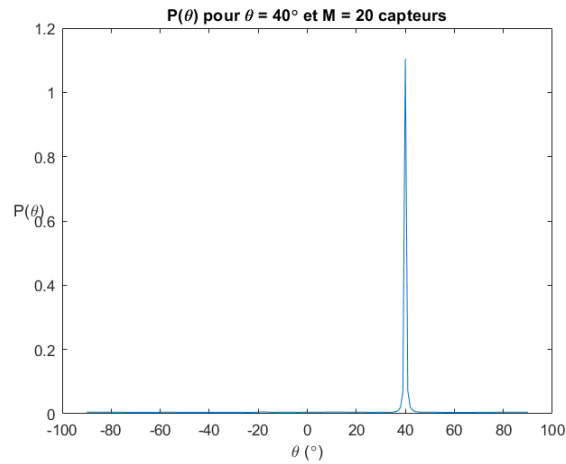


FIGURE 3 – Spectre de puissance estimé pour $M = 20$ capteurs

Par la suite, on génère cette-fois ci deux sources de directions d'arrivées $\theta_1 = 40^\circ$ et $\theta_2 = 45^\circ$, d'énergie respectives $\sigma_{s_1}^2 = \sigma_{s_2}^2 = 1$. On peut remarque que le nombre minimal de capteurs nécessaire pour séparer les deux sources est d'environ $M = 15$ capteurs (Figure 4) mais que la séparation est plus nette à partir de $M = 20$ capteurs (Figure 5).

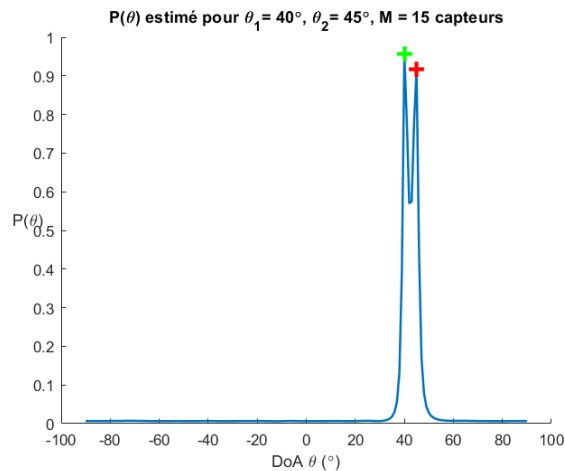


FIGURE 4 – Spectre de puissance estimé pour $M = 15$ capteurs

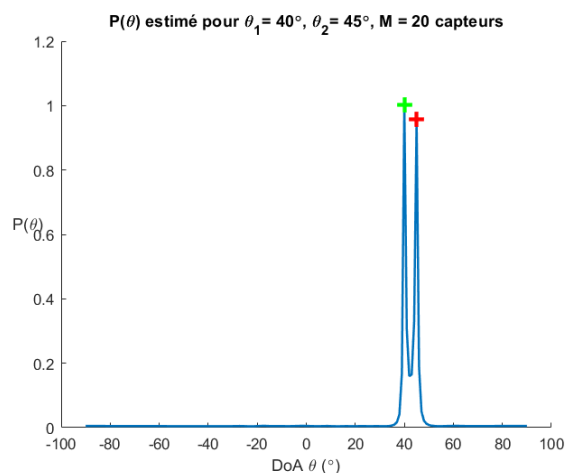


FIGURE 5 – Spectre de puissance estimé pour $M = 20$ capteurs

On prend maintenant $M = 20$ capteurs et deux sources de directions d'arrivées $\theta_1 = 40$ et $\theta_2 = 50$, d'énergie respectives $\sigma_{s_1}^2 = 1$ et $\sigma_{s_2}^2 = 10$. On constate alors que l'amplitude du spectre de puissance est beaucoup plus grande dans le cas de la source qui possède la variance la plus élevée :

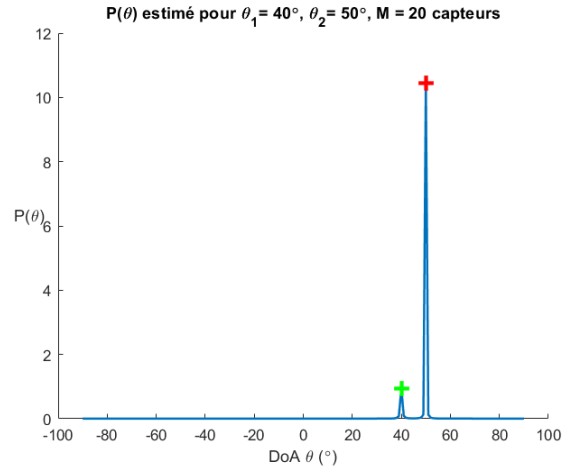


FIGURE 6 – Spectre de puissance estimé pour $M = 20$ capteurs

Si on reprend les variances initiales pour les sources, et qu'on fait varier la variance du bruit, alors on peut voir que plus cette dernière augmente, plus on perd en précision sur la localisation des directions d'arrivées par le spectre de puissance, et il devient plus difficile de séparer les deux sources.

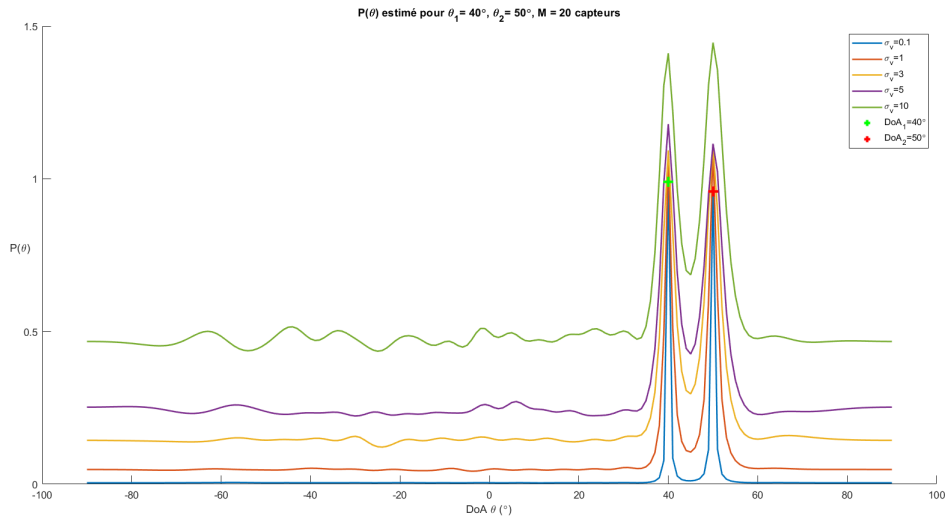


FIGURE 7 – Spectre de puissance estimé en fonction de la variance du bruit, pour $M = 20$ capteurs

3 Localisation par méthodes sous-espace

Le principe de la méthode des sous-espaces consiste à séparer le signal reçu en deux sous-espaces, le sous-espace signal et le sous-espace bruit, que l'on considère supplémentaires entre-eux. La seconde étape consiste à projeter les directions d'arrivée sur le sous-espace bruit, pour ensuite observer l'énergie de cette projection.

Les hypothèses nécessaires sont :

- $M > K$, soit un nombre de capteurs plus grand que le nombre de sources
- $rg(\mathbf{\Gamma}) = K$, le rang de $\mathbf{\Gamma}$, la matrice de covariance des signaux reçus, doit être de rang plein.

D'après ces hypothèses on peut donc écrire la matrice de covariance du signal reçu sous cette forme : $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}^* + \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^* + \sigma^2\mathbf{U}\mathbf{U}^*$

Et : $S = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_K\}$ et $S^\perp = \text{span}\{\mathbf{u}_{K+1}, \dots, \mathbf{u}_M\}$

Sachant que : Le sous-espace signal S coïncide avec les vecteurs propres de \mathbf{R} associé aux K plus grandes valeurs propres, et le sous-espace bruit coïncide avec les vecteurs propres de \mathbf{R} associés aux valeurs propres égales à la variance du bruit.

Dans la pratique, on va estimer \mathbf{R} comme on l'a fait précédemment, puis le diagonaliser pour obtenir ses valeurs propres, dont les K plus grandes correspondront aux K sources, et le reste au bruit : $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^*$

Pour finir, on va projeter les directions d'arrivées sur le sous espace-bruit de manière à obtenir des 0 au niveau des directions d'arrivées correspondant aux sources (la projection orthogonale du signal sur l'espace bruit étant nulle).

Si on se base sur la matrice de covariance empirique des signaux reçus, on peut obtenir ses valeurs propres qui nous permettent d'estimer visuellement le nombre de sources émettrices, comme dans l'exemple qui suit avec deux sources :

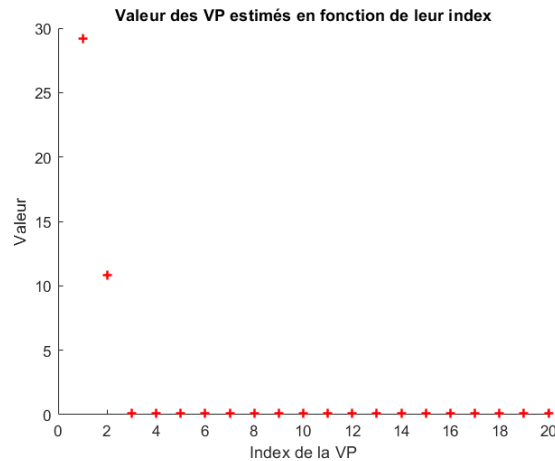


FIGURE 8 – Valeurs propre de la matrice de covariance estimée des signaux reçus $\hat{\mathbf{R}}_y$

On peut tracer le pseudo-spectre de l'algorithme MUSIC (qui ici n'atteint pas tout à fait zéro) et qui permet de séparer les sources à partir de $M = 13$ capteurs :

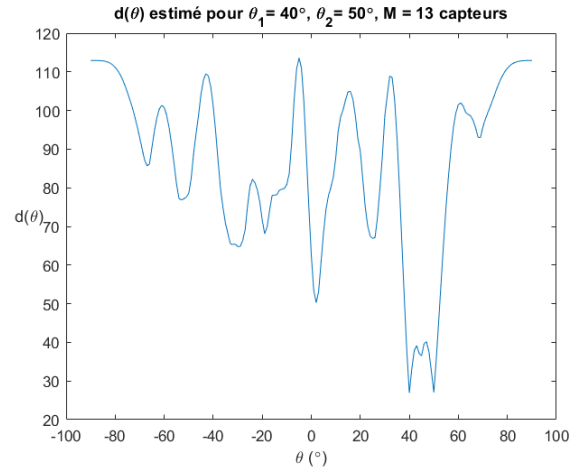


FIGURE 9 – Pseudo-spectre estimé par la méthode MUSIC

De plus on peut voir que cette méthode est beaucoup plus robuste au bruit par rapport à la méthode de Capon

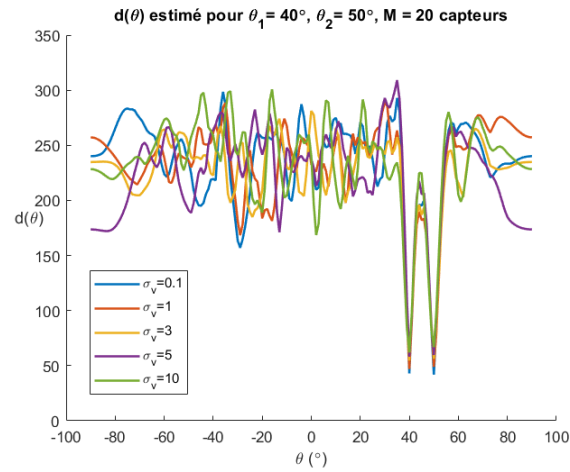


FIGURE 10 – Pseudo-spectre estimé par la méthode MUSIC en faisant varier la variance du bruit

Elle est aussi beaucoup plus précise si on la compare, à nombre de capteurs égaux, avec celle de Capon :

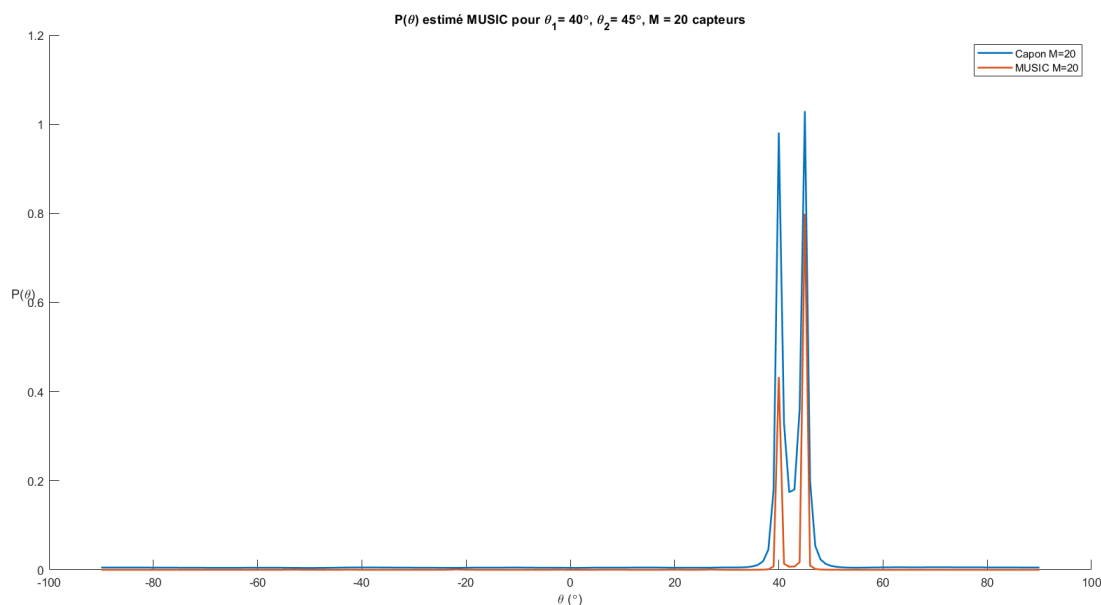


FIGURE 11 – Energie du signal estimée par la méthode MUSIC

4 On ne s'entend plus !

Dans cette partie, on récupère d'abord le signal enregistré par les $M=10$ microphones, puis on leur applique la transformée de Hilbert afin de travailler avec des enveloppes complexes.

Ensuite on recommence comme précédemment et on estime la matrice de covariance $\hat{\mathbf{R}}$ des signaux reçus ainsi que celle du bruit $\hat{\mathbf{\Gamma}}$, avec les signaux des deux premières secondes qui correspondent à du bruit.

Par la suite on calcule les valeurs propres de $\hat{\mathbf{\Gamma}}$, qui nous donneront un estimateur de la variance du bruit $\hat{\sigma}^2$.

On calcule les valeurs propres de $\hat{\mathbf{R}}$, et on regarde combien se situent au-dessus de notre estimation de la variance du bruit calculée précédemment. On obtient la figure suivante :

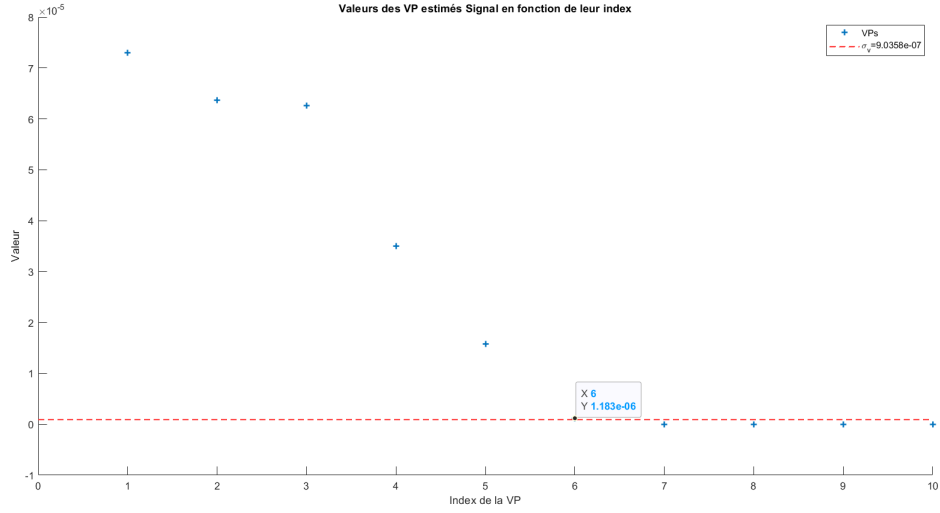


FIGURE 12 – Valeurs propres de la matrice de covariance estimée des signaux reçus $\hat{\mathbf{R}}_y$

Ici on peut donc voir qu'on estime visuellement $K = 6$ sources à partir des signaux enregistrés par les microphones.

Par la suite, on va estimer les directions d'arrivées des 6 sources détectées, par la méthode MUSIC que l'on a utilisé dans la partie 3, en traçant le pseudo-spectre.

De nouveau, en projetant les directions d'arrivées sur les vecteurs propres de $\hat{\Sigma}$, on obtient alors la figure suivante :

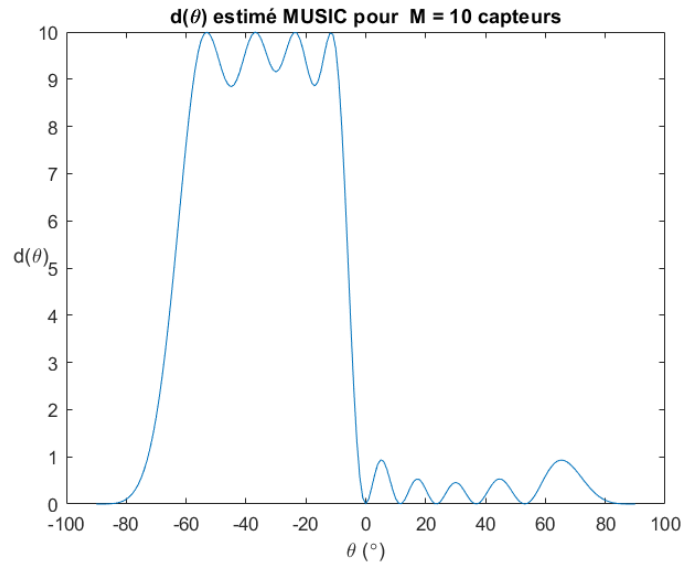


FIGURE 13 – Estimation des directions d'arrivées des 6 sources détectées