PARTIE N° 1 REDRESSEMENT

Dans cette partie, nous nous proposons de « redresser » l'image *implant.bmp* représentant un implant dentaire observé par radiographie. La technique comporte trois étapes : un seuillage, une estimation de l'orientation de l'implant et un redressement.

1.1 Seuillage

Un seuil peut être déterminé automatiquement par la mise en œuvre de l'algorithme de classification « K-means ». Cet algorithme est adapté car l'histogramme de l'image traitée se compose de trois classes distinctes correspondant respectivement :

1. au fond,
2. à la gencive,
3. à l'implant.

Soient trois classes notées $L_i\ (i \in [1,3])$ et caractérisées par un représentant noté $b_i\ (i \in [1,3])$. Les $M \times N$ pixels (échantillons) de l'image, où M et N sont respectivement le nombre de lignes et de colonnes, sont répartis au sein des trois classes au moyen d'un critère de proximité ou de dispersion J qui s'exprime par

$$J = \sum_{i=1}^{3} \sum_{x_l \in L_i} d(x_l, b_i)$$

où $d(\bullet,\bullet)$ est un opérateur de distance et x_l représente l'intensité du pixel à la position l. On montre que le critère J est minimal si le représentant de chaque classe correspond à son barycentre :

$$b_i = \frac{1}{N_i} \sum_{x_l \in L_i} x_l$$

où N_i est le nombre de pixels inclus dans la classe L_i.

L'algorithme itératif du calcul des classes et de leur barycentre est mis en oeuvre comme suit :

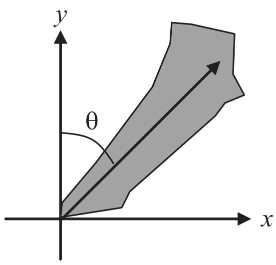
1. On choisit, par exemple au hasard, 3 représentants initiaux $\{b_1^{[0]}, b_2^{[0]}, b_3^{[0]}\}$ de classes (l'exposant i représente l'itération i).
2. A l'itération p, on associe chaque échantillon x_l à la classe $L_i^{[p]}$ si $d(x_l, b_i^{[p]}) < d(x_l, b_j^{[p]}) \quad \forall j \neq i$.
3. Les nouveaux barycentres $\{b_1^{[p]}, b_2^{[p]}, b_3^{[p]}\}$ de chaque classe $L_i^{[p]}$ sont recalculés selon $b_i^{[p]} = \frac{1}{N_i} \sum_{x_l \in L_i^{[p]}} x_l \quad \forall i$.

4. L'algorithme est réitéré depuis l'étape 2 tant que les centres des classes à l'itération p sont différents de ceux obtenus à l'itération précédente.

Proposer une initialisation particulièrement adaptée au problème. Visualiser l'image des indices de classe (étiquettes) après convergence de l'algorithme. A partir des barycentres obtenus, proposer une valeur de seuillage. Calculer et visualiser l'image binarisée (par convention, on attribuera la valeur 1 aux pixels appartenant à l'implant et la valeur 0 aux autres).

1.2 Estimation de l'orientation de l'implant

Afin de redresser l'implant, il est nécessaire d'estimer l'angle de rotation de l'implant par rapport à la verticale. Parmi les différentes techniques existantes, nous allons utiliser une méthode basée sur la diagonalisation de la matrice de covariance C du nuage de points formé des pixels appartenant à l'implant (valeur 1).



Orientation du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre.

A partir des coordonnées x et y des pixels de l'implant, la matrice C se calcule selon :

$$C = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{yx} \\ C_{xy} & C_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} C_{xx} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})^2 \\ C_{yy} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \bar{y})^2 \\ C_{yx} = C_{xy} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \\ \bar{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \end{cases} .$$

Calculer les vecteurs propres v_1 et v_2 de la matrice de covariance C ainsi que les valeurs propres associées λ_1 et λ_2.

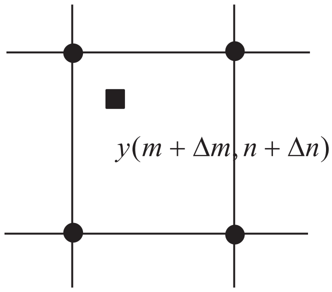
Calculer l'angle qui existe entre la direction verticale et le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre.

1.3 Redressement

La transformation géométrique qui doit être appliquée à l'image traitée est une rotation dont l'angle a été estimé dans la question précédente. Afin de l'implémenter, il est possible d'utiliser une technique d'interpolation telle que celle qui est présentée ci-après.

Soit à estimer la valeur

$$f(m+\Delta m, n+\Delta n) \quad \text{où} \quad \Delta m \text{ et } \Delta n \in [0,1].$$



Des approximations au premier ordre de dérivés partielles fournissent

$$\begin{cases} f(m+\Delta m, n+\Delta n) \approx f(m+\Delta m, n) + \Delta n \dfrac{\partial f(m+\Delta m, n)}{\partial n} \\ \dfrac{\partial f(m+\Delta m, n)}{\partial n} \approx f(m+\Delta m, n+1) - f(m+\Delta m, n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(m+\Delta m, n+1) \approx f(m, n+1) + \Delta m \dfrac{\partial f(m, n+1)}{\partial m} \\ \dfrac{\partial f(m, n+1)}{\partial m} \approx f(m+1, n+1) - f(m, n+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(m+\Delta m, n) \approx f(m, n) + \Delta m \dfrac{\partial f(m, n)}{\partial m} \\ \dfrac{\partial f(m, n)}{\partial m} \approx f(m+1, n) - f(m, n) \end{cases}.$$

En utilisant ces différentes relations, il apparait l'expression finale

$$\begin{aligned} f(m+\Delta m, n+\Delta n) \quad = \quad & (1-\Delta m)(1-\Delta n) f(m,n) \\ & + \Delta m(1-\Delta n) f(m+1, n) \\ & + \Delta n(1-\Delta m) f(m, n+1) \\ & + \Delta n \Delta m f(m+1, n+1) \end{aligned}$$

qui est connue sous le nom d'interpolation bilinéaire.

Proposer une implémentation du redressement sous *Matlab* à l'aide de la fonction **interp2** en décrivant la manière dont l'interpolation est mise en oeuvre dans le cadre d'une transformation géométrique.