Equations de Navier-Stokes déterministes et stochastiques

RAPPORT DE STAGE

Thomas Louis

Sous la supervision de :

Isabelle Gallagher

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

Table des matières

Introduction

L'objectif de ce mémoire est la présentation, accessible le plus possible à des étudiants en master 1, des résultats d'un article ([3]) d'équations aux dérivées partielles stochastiques paru en mars 2021. Celui-ci est dédié à l'étude des équations de Navier-Stokes, où l'on ajoute un bruit aléatoire qui provoque un effet régularisant : les résultats obtenus sont alors meilleurs que dans le cas déterministe. Pour comprendre en quoi il s'agit d'une amélioration, on s'intéresse dans un premier temps à la théorie des équations de Navier-Stokes déterministes. En trois dimensions, prouver que ces équations sont bien posées est un des problèmes ouverts les plus célèbres en mathématiques, mais il existe beaucoup de résultats intermédiaires. Dans une deuxième partie, on retranscrit les résultats principaux de l'article [3]. Le résultat final montre alors qu'en prenant un bruit bien choisi, les équations de Navier-Stokes sont bien posées avec une grande probabilité !

Ce mémoire est fait pour être (quasiment) auto-suffisant. La plupart des résultats annexes utilisés, bien que les preuves ne sont pas toujours données, sont énoncés dans les chapitres 1 et 4.

Avant toutes choses, je tiens particulièrement à remercier Isabelle Gallagher pour son accompagnement tout au long de ce stage. Ses explications claires et pédagogiques m'ont permis d'apprécier pleinement les résultats passionnants de la théorie des équations de Navier-Stokes. Au delà des mathématiques, j'ai été accompagné avec beaucoup de bienveillance et d'attention. Je remercie également tous ceux qui m'ont accueilli au département de mathématiques et applications, et avec qui j'ai appris beaucoup sur le monde de la recherche : professeurs, doctorants et personnels de soutien.

Chapitre 1

Quelques rappels et résultats utiles

Dans ce chapitre, on rappelle **sans preuve** plusieurs résultats d'analyse fonctionnelle et de probabilités qui vont nous être utiles tout au long du développement. Ce chapitre est inspiré de [5].

I Topologies

Soit $(E, \|\|)$ un espace de Banach.

DÉFINITION 1.1. *Le* ***dual topologique*** *de E est l'espace E' des formes linéaires continues sur E, normé par :*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

On peut vérifier que E' ainsi construit est un espace de Banach. On définit alors le **bidual** de E par $E'' = (E')'$. Il existe deux théorèmes fondamentaux en topologie des espaces vectoriels normés. Le premier est le suivant :

THÉORÈME 1.1. *(**Hahn-Banach**)*
Soit V un sous-espace vectoriel de E et $f \in V'$. Alors il existe $F \in E'$ telle que

$$\begin{cases} F|_V = f \\ \|F\|_{E'} = \|f\|_{V'}. \end{cases}$$

Le théorème de Hahn-Banach permet d'avoir directement, en considérant les évaluations

$e_x \in E''$ définies par

$$\begin{aligned} e_x : E' &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *$(E, \|\|)$ s'identifie à un sous espace de $(E'', \|\|_{E''})$.*

On a également :

Théorème 1.2. *(**Banach-Steinhaus**) Soit $(f_i)_{i\in I}$ un sous-ensemble quelconque de E'. On suppose que*

$$\forall x \in E, \sup_{i\in I} |f_i(x)| < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|f\|_{E'} < +\infty.$$

I.1 Topologie faible

Soit $f \in E'$. On note $p_f(x) = |f(x)|$. p_f est alors une semi-norme, c'est à dire qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire, l'homogénéité mais est seulement positive.

Définition 1.2. *On appelle **topologie faible** la topologie la moins fine gardant continus tous les éléments de E'. On la note $\sigma(E, E')$.*

Remarquons qu'il s'agit exactement de la topologie engendrée par les semi-normes p_f. En particulier, on dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E **converge faiblement** vers x si pour tout $f \in E'$, on a

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

On notera alors $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$.

Proposition 1.1.

(i). La convergence forte implique la convergence faible.

(ii). Si $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(iii). Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ dans E' et $x_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$, alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

I.2 Topologie faible-*

Soit $x \in E$ et $f \in E'$. On définit $p_x(f) = |f(x)|$, ce qui définit une famille de semi-normes sur E'.

DÉFINITION 1.3. *On appelle topologie **faible-*** sur E' la topologie la moins fine gardant les formes linéaires d'évaluation e_x continues. On la note $\sigma(E', E)$.*

C'est également la topologie engendrée par la famille de semi-normes (p_f). Ainsi, on dit qu'une suite (f_n) de E' **converge faiblement-*** vers f si

$$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

On peut également définir la topologie faible sur E', notée $\sigma(E', E'')$. Remarquons alors que comme les e_x sont des éléments de E'', ils sont forcement continus pour $\sigma(E', E'')$ donc la topologie faible-* est moins fine que la topologie faible.
On a les mêmes propriétés que pour la topologie faible :

PROPOSITION 1.2.

(i). Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} f$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E'.

(ii). Si $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{*} f$ dans E' et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Le théorème suivant est la raison principale pour laquelle on s'intéresse aux topologies faibles. Il nous sera utile à maintes reprises.

THÉORÈME 1.3. ***(Banach-Alaoglu)**. La boule unité fermée de E' est compacte pour $\sigma(E', E)$.*

I.3 Reflexivité

DÉFINITION 1.4. *On dit que E est un espace **réflexif** si E s'identifie à son bidual E''.*

Exemple I.3.1.
— Tout espace de Hilbert est réflexif
— Tout espace L^p pour $1 < p < \infty$ est réflexif

Dans ce cas, les topologies faibles et faibles-* de E' sont égales. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, on déduit le corollaire suivant, qui nous sera souvent utile.

COROLLAIRE 1.2. *Si E est réflexif, la boule unité fermée de E est compacte pour $\sigma(E, E')$, c'est à dire que de toute suite bornée de E on peut extraire une suite qui converge faiblement dans E.*

II Espaces de Sobolev

II.1 Définitions

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$.

DÉFINITION 1.5. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$.*
L'espace de Sobolev $(W^{m,p}(\mathcal{O}), \|\cdot\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})})$ est défini par

$$W^{m,p}(\mathcal{O}) = \{f \in L^p(\mathcal{O}) \,|\, \textit{pour tout multi-indice } \alpha \textit{ tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^p(\mathcal{O})\}$$

et

$$\|f\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathcal{O})}$$

PROPOSITION 1.3. *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors*

(i). $W^{m,p}(\mathcal{O})$ est un espace de Banach.

(ii). $W^{m,p}(\mathcal{O})$, est séparable.

(iii). Si $p \neq 1$, $W^{m,p}(\mathcal{O})$ est réflexif.

THÉORÈME 1.4. *L'espace $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ est dense dans $W^{m,p}(\mathcal{O})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$.*

Dans le cas $p = 2$, il s'agit même d'espaces de Hilbert :

DÉFINITION 1.6. *Soit $m \in \mathbb{N}$.*
L'espace de Sobolev $(H^m(\mathcal{O}), \langle,\rangle_{H^m(\mathcal{O})})$ est défini par

$$H^m(\mathcal{O}) = \{f \in L^2(\mathcal{O}) \,|\, \textit{pour tout multi-indice } \alpha \textit{ tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha f \in L^2(\mathcal{O})\}$$

et

$$\langle f, g\rangle_{H^m(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g\rangle_{L^2(\mathcal{O})}$$

II.2 L'espace $H^1(\mathcal{O})$

L'espace H^1 est particulièrement important : c'est l'espace des fonctions admettant une dérivée faible d'ordre 1. Dans le cas d'un domaine à bord, on peut définir la notion de "valeur au bord" d'une fonction $H^1(\mathcal{O})$:

THÉORÈME 1.5. *(**Trace** H^1). Il existe une application linéaire continue $\gamma_0 : H^1(\mathcal{O}) \to L^2(\partial\mathcal{O})$ qui prolonge l'application naturelle $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \to L^2(\partial\mathcal{O})$. En particulier, il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1(\mathcal{O})$*

$$\|f\|_{L^2(\partial\mathcal{O})} \leq C\|f\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Grâce au théorème de Stokes couplé à la densité de $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 1.6. ***(Formule de Green)***. *Soit $f \in H^1(\mathcal{O})$. Alors :*

$$\int_{\mathcal{O}} \partial_i u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\mathcal{O}} u(s)n_i(s)\,\mathrm{d}s.$$

où n_i est la i-eme composante du vecteur normal $\boldsymbol{n}$ au bord $\partial\mathcal{O}$.

En appliquant à $u = fg$, on obtient :

COROLLAIRE 1.3. ***(Formule d'intégration par parties)***. *Soit $f, g \in H^1(\mathcal{O})$. Alors*

$$\int_{\mathcal{O}} \partial_i f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathcal{O}} f(x)\partial_i g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{O}} f(s)g(s)n_i(s)\,\mathrm{d}s.$$

On définit également un espace, strictement inclus dans $H^1(\mathcal{O})$, qui sera utile dans la suite.

DÉFINITION 1.7. *L'espace $H_0^1(\mathcal{O})$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ dans $H^1(\mathcal{O})$. L'espace $H^{-1}(\mathcal{O})$ est défini comme le dual topologique de $H_0^1(\mathcal{O})$. On a donc :*

$$\|f\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} = \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq 1} |\langle f, \varphi\rangle|.$$

THÉORÈME 1.7. ***(Inégalité de Gagliardo-Niremberg)***. *Soit $d \geq 2$ et $2 \leq p < \frac{2d}{d-2}$. Alors il existe une constante C telle que pour tout domaine $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, pour tout $u \in H_0^1(\mathcal{O})$*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^2}^{1-\sigma}\|\nabla u\|_{L^2}^{\sigma}.$$

II.3 Cas $\mathcal{O}$ borné

On suppose désormais $\mathcal{O}$ borné. On a alors la caractérisation suivante :

$$H_0^1(\mathcal{O}) = \{f \in H^1(\mathcal{O}) \mid f|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}.$$

PROPOSITION 1.4. ***(Inégalité de Poincaré)*** *On suppose que $\mathcal{O}$ est un ouvert* ***borné****. Alors il existe une constante C telle que pour toute fonction f de $H_0^1(\mathcal{O})$,*

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C\|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Le théorème ci-dessus nous montre donc que la norme de $H_0^1(\mathcal{O})$ est équivalente à la norme $f \mapsto \|\nabla f\|_{L^2(\mathcal{O})}$.

THÉORÈME 1.8. ***(Injection de Rellich).*** *L'injection de $H^1(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ est compacte.*

II.4 Cas $\mathbb{R}^d$ - lien avec la transformée de Fourier

On rappelle les résultats suivants sur la transformée de Fourier.

THÉORÈME 1.9. *La transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, d'inverse $\frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\mathcal{F}}$.*

De même, on a les propriétés classiques de la transformée de Fourier :

PROPOSITION 1.5. *Soit $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors*

(i). Pour tout multi-indice α :

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha S) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}S$$

(ii). Pour tout multi-indice α :

$$\mathcal{F}(x^\alpha S) = (i\partial)^\alpha \mathcal{F}S$$

Dans le cas L^2, on a également :

THÉORÈME 1.10. ***(Formule de Plancherel)****. La transformée de Fourier définie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui même, d'inverse $\frac{1}{(2\pi)^d}\overline{\mathcal{F}}$. De plus, pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$(\mathcal{F}f|\mathcal{F}g)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^d}(f|g)_{L^2}.$$

Remarque 1. On notera indifféremment $\mathcal{F}f$ ou $\hat{f}$ pour la transformée de Fourier de f.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Remarquons que $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour tout $|\alpha| \leq m$ on a $\int |\partial^\alpha f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty$. Mais par la formule de Plancherel ceci équivaut à $\int |(i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty$. Ceci justifie la définition suivante

DÉFINITION 1.8. *On définit, pour tout $s \in \mathbb{R}$*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty\}.$$

muni du produit scalaire

$$(f \mid g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \, \mathrm{d}\xi.$$

Ainsi que l'espace de sobolev dit **homogène**.

DÉFINITION 1.9. *On définit, pour tout $s \in \mathbb{R}$*

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi < \infty\}.$$

muni du produit scalaire

$$(f \mid g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} \, \mathrm{d}\xi.$$

PROPOSITION 1.6. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert. Pour tout $s < d/2$, $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert.*

On a alors les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.7. *Soit $s \leq t \leq r$ des réels. Alors on a*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \cap H^r(\mathbb{R}^d) \subset H^t(\mathbb{R}^d).$$

et on la convexité de normes suivante : pour tout $f \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap H^r(\mathbb{R}^d)$,

$$\|f\|_{H^t(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|^{1-\theta}_{H^s(\mathbb{R}^d)} \|f\|^{\theta}_{H^r(\mathbb{R}^d)}.$$

avec θ défini par $t = (1-\theta)s + \theta r$.

THÉORÈME 1.11. ***(Injections de Sobolev)**. Soit $s > 0$.*

(i). Si $s < d/2$, alors

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d).$$

avec $p = \frac{2d}{d-2s}$.

(ii). Si $s > d/2 + k$, où $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\dot{H}^s(R^d) \hookrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$$

Par dualité, on étend aux $s \leq 0$:

COROLLAIRE 1.4. *Soit* $1 < p < 2$. *Alors*

$$L^p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$$

avec $s = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$.

II.5 Un résultat de compacité

Dans cette section, on présente un résultat de compacité dû à Aubin et Lions, et étendu par Simon qui nous sera utile dans la suite. Les preuves se trouvent dans [8].

THÉORÈME 1.12. ***(Lemme d'Aubin-Lions)***. *Soit* $X_0 \subset X \subset X_1$ *trois espaces de Banach, tels que l'injection* $X_0 \hookrightarrow X$ *est* ***compacte*** *et* $X \hookrightarrow X_1$ *est* ***continue***. *Alors pour* $1 \leq p, q \leq +\infty$, *on définit*

$$W = \{u \in L^p([0,T], X_0) \,|\, \dot{u} \in L^q([0,T], X_1)\}.$$

Alors :

(i). Si $p < +\infty$ *alors le plongement de* W *dans* $L^p([0,T], X)$ *est compact.*

(ii). si $p = +\infty$ *et* $q > 1$ *alors le plongement de* W *dans* $\mathcal{C}([0,T], X)$ *est compact.*

On étend ces résultats aux espaces de Sobolev fractionnaires. On utilise une définition équivalente :

DÉFINITION 1.10. *Soit* Y *un espace vectoriel normé,* $T > 0$. *Soit* $1 < p < \infty$ $m > 0$ *où* m *n'est pas entier. On note*

$$W^{m,p}([0,T], Y) = \{f \in L^p([0,T], Y), \int_0^T \int_0^T \frac{\|f(t) - f(s)\|_Y^p}{|t-s|^{1+mp}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s < \infty\}.$$

normé par

$$\|f\|_{W^{m,p}([0,T],Y)} = \int_0^T \int_0^T \frac{\|f(t) - f(s)\|_Y^p}{|t-s|^{1+mp}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s.$$

THÉORÈME 1.13. ***(Simon 1)***. *Soit* $X_0 \subset X \subset X_1$ *trois espaces de Banach, tels que l'injection* $X_0 \hookrightarrow X$ *est* ***compacte*** *et* $X \hookrightarrow X_1$ *est* ***continue***. *Alors pour* $1 \leq p, r \leq +\infty$, *on définit*

$$W = L^p([0,T], X_0) \cap W^{s,r}([0,T]; X_1)$$

avec $s > 0$ *si* $r \geq p$ *et* $s > \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ *si* $r \leq p$. *Alors :*

(i). Si $p < +\infty$ alors le plongement de W dans $L^p([0,T],X)$ est compact.

(ii). si $p = +\infty$ alors le plongement de W dans $\mathcal{C}([0,T],X)$ est compact.

Et, pour l'intersection de deux espaces de Sobolev fractionnaires :

THÉORÈME 1.14. ***(Simon 2)**. Soit $X_0 \subset X \subset X_1$ trois espaces de Banach, tels que l'injection $X_0 \hookrightarrow X$ est **compacte** et $X \hookrightarrow X_1$ est **continue**. On suppose également qu'il existe $\theta \in]0,1[$ et $M > 0$ tels que pour tout $v \in X$*

$$\|v\|_X \leq M\|v\|_{X_0}^{1-\theta}\|v\|_{X_1}^{\theta}.$$

Pour $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ et $1 \leq r_0, r_1 \leq \infty$, on définit

$$W = W^{s_0,r_0}([0,T],X) \cap W^{s_1,r_1}([0,T],Y).$$

On note $s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, $\frac{1}{r_\theta} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$ et

$$s_* = s_\theta - \frac{1}{r_\theta}.$$

Alors :

(i). Si $s_* \leq 0$ alors le plongement de W dans $L^p([0,T],X)$ est compact pour tout $p < -\frac{1}{s_*}$.

(ii). si $s_* > 0$ alors le plongement de W dans $\mathcal{C}([0,T],X)$ est compact.

III Rappels de Probabilités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$.

III.1 Processus stochastiques, vocabulaire et régularité

DÉFINITION 1.11. *On dit que $X = (X_t)_{t\in I}$ est un **processus stochastique** (à temps continu) si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X_t : \Omega \to E$ est une v.a.r..*

DÉFINITION 1.12. *On dit que*

*(i). X est **mesurable** si $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F}$-mesurable.*

*(ii). X est $\mathcal{F}_t$-**adapté** (ou simplement adapté) si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

*(iii). X est **progressivement-mesurable** si pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X : [0,t]\times\Omega$ est $\mathcal{B}([0,t])\times \mathcal{F}_t$-mesurable.*

*(iv). X est **à trajectoires continues** si $t \mapsto X_t$ est continu p.s..*

DÉFINITION 1.13. *Si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont deux processus stochastiques, on dit que*

*(i). X et Y sont **indistinguables** si*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |X_t - Y_t| = 0\right] = 1.$$

*(ii). X est Y sont **modifications**de l'un l'autre si*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}\left[X_t = Y_t\right] = 1.$$

Le théorème suivant donne un critère qui permet de vérifier facilement qu'un processus stochastique admet une certaine régularité (à modification près).

THÉORÈME 1.15. ***(Critère de Kolmogorov)**. Soit $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ un processus stochastiques à valeurs dans E espace vectoriel normé. On suppose qu'il existe $C > 0, \delta > 1, \varepsilon > 0$ tels que*

$$\mathbb{E}\left[\|X_t - X_s\|_E^\delta\right] \leq C|t-s|^{1+\varepsilon}.$$

pour tout $s, t \in [0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in [0, \frac{\varepsilon}{\delta}[$, X admet une modification à trajectoires p.s. α-hölderiennes.

DÉFINITION 1.14. *On dit qu'un processus stochastique L^1 $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est **uniformément intégrable** si*

$$\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[X_t \mathbf{1}_{|X_t|\geq M}\right] \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$$

c'est à dire que le reste de l'intégrale de X_t tend uniformément (en t) vers 0

Si X_t est uniformément intégrable, et que $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s} X$, alors on a également $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{L^1} X$.

III.2 Martingales

DÉFINITION 1.15. *Soit $M = (M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus stochastique.*
Alors si $\forall t \geq 0$, $X_t \in L^1$, on dit que X est une

— ***martingale** si pour tout $0 \leq s \leq t$,*

$$\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] = X_s.$$

— ***sous-martingale*** *si pour tout* $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] \leq X_s.$$

— ***sur-martingale*** *si pour tout* $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] \geq X_s.$$

Certains théorème sont exprimés en faisant l'hypothèse de sous(ou sur)-martingale. Cette hypothèse est évidemment plus faible et ces résultats sont donc aussi vrais pour les martingales. Dans la suite, on se restreint également toujours au cas des martingales continues.

DÉFINITION 1.16. *On dit qu'une martingale* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est* ***fermée*** *s'il existe une variable* $Z \in L^1$ *telle que pour tout* $t \geq 0$,

$$M_t = \mathbb{E}\left[Z|\mathcal{F}_t\right].$$

Le théorème suivant donne un critère de convergence des martingales.

THÉORÈME 1.16. *Soit* $(M_t)_{t\geq 0}$ *martingale à trajectoires continues à droite. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i). $(M_t)_{t\geq 0}$ *est fermée.*

(ii). $(M_t)_{t\geq 0}$ *est uniformément intégrable.*

(iii). M_t *converge p.s et dans* L^1.

COROLLAIRE 1.5. *Soit* M *une martingale à trajectoires continues et soit* T *un temps d'arrêt. Alors* $M^T = (M_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ *est une martingale.*

La notation M^T est répandue est sera réutilisée dans la suite. On dispose également d'informations sur les valeurs extrêmes d'une martingale, à travers les inégalités suivantes :

THÉORÈME 1.17. *Soit* M_t *une martingale à trajectoires continues. Alors on a*

(i). ***(Inégalité maximale)****. Pour tout* $t > 0$, $\lambda > 0$ *et* $p > 1$,

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}\left[|M_t|^p\right].$$

(ii). ***(Inégalité de Doob*** L^p***)****. Pour tout* $t > 0$, *et* $p > 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|M_t|^p\right].$$

III.3 Convergence de mesures

Dans cette section on donne une théorème important qui donne un critère de convergence de mesures. En particulier, ce critère nous permettra de prouver des convergences en loi.

Définition 1.17. *Soit $(X, \mathcal{B})$ un espace probabilisable. Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur X. On dit que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***converge étroitement*** *vers une mesure μ si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ bornée, on a :*

$$\int_X \varphi(x)\mathrm{d}\mu_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x)$$

Remarquons que si (X_n) est une suite de v.a., les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i). X_n converge en loi.

(ii). $\mathbf{P}_{X_N}$ converge étroitement

Définition 1.18. *Soit (X, T) un espace topologique et $\mathcal{B}$ une tribu de X qui contient tous les ouverts. Soit M une famille de mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{B})$. La famille M est dite* ***tendue*** *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de X tel que pour tout $\mu \in M$*

$$\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

On va voir que ces deux notions sont en fait équivalentes sous une hypothèse sur l'espace X.

Définition 1.19. *Soit (X, T) un espace topologique. On dit que X est un espace polonais si il est séparable sa topologie peut être défini par une distance qui rend cet espace complet.*

Théorème 1.18. ***(de Prokhorov)****. Soit (X, d) un espace polonais muni de sa tribu borélienne et soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $(X, \mathcal{B}(X))$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i). $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

(ii). $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge étroitement.

On utilisera ce théorème couplé au théorème suivant.

Théorème 1.19. ***(de représention de Skorokhod)****. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. définies respectivement sur $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ à valeurs dans un espace polonais E. On suppose que X_n converge en loi vers une v.a. X. Alors il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_n)$ et des v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, Y$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_n)$ tels que :*

(i). Y_n *et* X_n *ont la même loi.*

(ii). Y *et* X *ont la même loi.*

(iii). Y_n *converge p.s. vers* Y.

En effet, une convergence étroite en mesure correspond à une convergence en loi des variables aléatoires. Ainsi, grâce au théorème de Prokhorov on trouve une mesure limite, et le théorème de Skorokhod nous permet d'obtenir une variable aléatoire limite qui suit cette mesure.

Chapitre 2

Solutions faibles de Navier-Stokes

Ce chapitre est entièrement tiré de [1].

I Introduction à Navier-Stokes

Soit $\mathcal{O}$ un domaine de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.1. *On appelle* ***équation de Navier-Stokes*** *l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \\ u|_{\partial \mathcal{O}} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{NS_ν}$$

d'inconnues $u : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}^d$ *et* $p : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.

Cette équation décrit le mouvement d'un fluide incompressible et à viscosité ν constante, soumis à une force f. Les inconnues sont le champs de vecteur vitesse $u \in \mathbb{R}^d$ et la pression $p \in \mathbb{R}$.

On ne cherchera pas des solutions sous la forme (NS_ν) ci-dessus. Si on suppose u très régulier, et qu'on fixe une fonction test φ à divergence nulle, multiplier la première équation par φ et en intégrant sur $\mathcal{O}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} \big[(\partial_t u \cdot \varphi)(t,x) + ((u\cdot\nabla)u\cdot\varphi)(t,x) - \nu(\Delta u\cdot\varphi)(t,x) + (\nabla p\cdot\varphi)(t,x)\big]\mathrm{d}x\\ = \int_{\mathcal{O}} (f\cdot\varphi)(t,x).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} (u\cdot\nabla)u\cdot\varphi)(t,x)\mathrm{d}x &= \sum_{i,j}\int_{\mathcal{O}} u^i\partial_i u^j\varphi^j\mathrm{d}x\\ &= \sum_{i,j}\int_{\mathcal{O}} \partial_i(u^iu^j)\varphi^j\mathrm{d}x - \sum_j\int_{\mathcal{O}}\sum_i \partial_i(u^i)u^j\varphi^j\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant $\operatorname{div} u = 0$ et en intégrant par parties le terme restant :

$$\int_{\mathcal{O}} (u\cdot\nabla)u\cdot\varphi)(t,x) = -\sum_{i,j}\int_{\mathcal{O}} (u^iu^j\partial_i\varphi^j)(t,x)\mathrm{d}x = -\int_{\mathcal{O}} (u\otimes u : \nabla\varphi)(t,x)\mathrm{d}x.$$

D'autre part :

$$\int_{\mathcal{O}} (\Delta u\cdot\varphi)(t,x) = -\int_{\mathcal{O}} (\nabla u : \nabla\varphi)(t,x)\mathrm{d}x.$$

Et

$$\int_{\mathcal{O}} (\nabla p\cdot\varphi)(t,x) = -\int_{\mathcal{O}} (p\operatorname{div}\varphi)(t,x) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} \big[\partial_t u \cdot \varphi)(t,x) + \nu(\nabla u : \nabla\varphi)(t,x) - ((u\otimes u) : \nabla\varphi)(t,x)\big]\mathrm{d}x\\ = \int_{\mathcal{O}} (f\cdot\varphi)(t,x).\end{aligned}$$

On intègre cette dernière équation par rapport au temps, en remarquant que

$$\int_0^t\int_{\mathcal{O}} \partial_t u\cdot\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \int_{\mathcal{O}} (u\cdot\varphi)(t,x)\mathrm{d}x - \int_0^t\int_{\mathcal{O}} u_0(x)\cdot\varphi(0,x)\mathrm{d}x.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}}(u\cdot\varphi)(t,x)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathcal{O}}\big(\nu\nabla u:\nabla\varphi-(u\otimes u):\nabla\varphi-u\partial_t\varphi\big)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \qquad (\mathrm{NS}_\nu \text{ faible})\\ =\int_0^t\int_{\mathcal{O}}u_0(x)\cdot\varphi(0,x)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathcal{O}}(f\cdot\varphi)(t,x)\end{aligned}$$

Ces calculs ont permis de transférer la régularité de u à la fonction test φ. La **formulation faible de Navier-Stokes** consiste donc à trouver u tel que pour tout φ, on ait l'égalité ci-dessus.

II Définition des espaces

Pour définir rigoureusement les solutions, on définit les espaces suivants :

DÉFINITION 2.2. *On rappelle que $H^{-1}(\mathcal{O})$ désigne l'espace des formes linéaires continues sur $H_0^1(\mathcal{O})$. On note :*

$$\begin{aligned}&\mathcal{V}(\mathcal{O})=\big(H_0^1(\mathcal{O})\big)^d\\&\mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})=\{u\in\mathcal{V}(\mathcal{O})\,|\,\operatorname{div}u=0\}\\&\mathcal{H}(\mathcal{O})=\overline{\mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})}^{L^2}\\&\mathcal{V}'(\mathcal{O})=\big(H^{-1}(\mathcal{O})\big)^d\end{aligned}$$

On note

$$\langle f,v\rangle=\sum_{i=1}^d\langle f_i,v_i\rangle$$

l'action d'un élément $f\in\mathcal{V}'(\mathcal{O})$ sur un $v\in\mathcal{V}(\mathcal{O})$. On définit alors si $E\subset\mathcal{V}(\mathcal{O})$ et $F\subset\mathcal{V}'(\mathcal{O})$ sont des sous-espaces,

$$\begin{aligned}&E^\circ=\{f\in\mathcal{V}'(\mathcal{O})\,|\,\forall v\in E,\langle f,v\rangle=0\}\\&F^*=\{v\in\mathcal{V}(\mathcal{O})\,|\,\forall f\in F,\langle f,v\rangle=0\}.\end{aligned}$$

L'espace $\mathcal{V}'(\mathcal{O})$ est normé par

$$\|f\|_{\mathcal{V}'}=\sup_{\substack{v\in\mathcal{V}\\\|v\|\le1}}\langle f,v\rangle.$$

Remarquons qu'en vertu du théorème de Riez, il existe un unique $u\in\mathcal{V}(\mathcal{O})$ tel que pour tout $v \in \mathcal{V}(\mathcal{O})$,

$$\langle f, v\rangle = (u|v)_{\mathcal{V}},$$

c'est à dire l'unique $u \in \mathcal{V}(\mathcal{O})$ vérifiant $-\Delta u + u = f$. On a alors

$$\|f\|_{\mathcal{V}'} = \|u\|_{\mathcal{V}}.$$

DÉFINITION 2.3. *(**Projecteur de Leray**). On note* $\mathbf{P}$ *le projecteur orthogonal sur* $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ *dans* $L^2(\mathcal{O})^d$.

Dans la suite, quand cela ne porte pas a confusion, on omettra de mentionner $\mathcal{O}$. On peut maintenant définir ce qu'on entend par "solution de l'équation de Navier-Stokes.

DÉFINITION 2.4. *Soit* $u_0 \in \mathcal{H}$ *et* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$. *On appelle **solution faible globale de (NS$_\nu$)** associée à* u_0, f *toute fonction* u *telle que*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}'(\mathcal{O})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}(\mathcal{O}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O}))$$

et telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$ *:*

$$\int_{\mathcal{O}} (u \cdot \varphi)(t,x)\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nu \nabla u : \nabla\varphi - u \otimes u : \nabla\varphi - u \cdot \partial_t\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'$$
$$= \int_{\mathcal{O}} (u_0 \cdot \varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_0^t \langle f(t'), \varphi(t')\rangle \mathrm{d}t'$$

III Décomposition spectrale du laplacien

Le but de cette section est d'obtenir la décomposition spectrale du Laplacien sur $\mathcal{V}_\sigma$.

DÉFINITION 2.5. *Soit* $f \in \mathcal{V}'(\mathcal{O})$. *On dit que* $u \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$ *résout le **problème de Stokes inhomogène** si*

$$\forall v \in \mathcal{V}_\sigma,\ \langle -\Delta u + u, v\rangle = \langle f, v\rangle,$$

i.e. $-\Delta u + u - f \in \mathcal{V}_\sigma^\circ(\mathcal{O})$.

L'idée est, pour étudier le laplacien, d'étudier son inverse. Or, dans un domaine général, le Laplacien n'est pas inversible sur $\mathcal{V}_\sigma$. Par contre, en rajoutant le terme en u, on a bien un opérateur inversible.

PROPOSITION 2.1. *Il existe une unique solution $u \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$ au problème de Stokes inhomogène.*

Preuve. Pour tout $u, v \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$, on a

$$\langle -\Delta u + u, v\rangle = (\nabla u|\nabla v)_{L^2} + (u|v)_{L^2}.$$

Or, d'après le théorème de Riesz, le problème qui consiste à trouver u tel que

$$\forall v \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O}),\ (u|v)_{H^1} = \langle f, v\rangle$$

admet donc une unique solution. $\square$

On définit alors l'opérateur inverse. Comme $\mathcal{H}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{V}'(\mathcal{O})$, on peut définir :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \mathcal{H} &\to \mathcal{V}_\sigma \subset \mathcal{H} \\ f &\mapsto u \quad \text{t.q.} -\Delta u + u - f \in \mathcal{V}_\sigma^\circ(\mathcal{O}). \end{aligned}$$

On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. *$\mathcal{B}$ est un opérateur auto-adjoint, positif, continu et injectif.*

Preuve. Soit $f, g \in \mathcal{H}$. Alors, en notant $\mathcal{B}f = u, \mathcal{B}g = v$, on a

$$(\mathcal{B}f|g)_{L^2} = (u|g)_{L^2} = \langle g, u\rangle.$$

Mais par définition de v :

$$\langle g, u\rangle = \langle -\Delta v + v, u\rangle = (\nabla v|\nabla u)_{L^2} + (v|u)_{L^2} = \langle -\Delta u + u, v\rangle.$$

Et par définition de u

$$\langle -\Delta u + u, v\rangle = \langle f, v\rangle = (f|\mathcal{B}g)_{L^2}.$$

Donc $(\mathcal{B}f|g)_{L^2} = (f|\mathcal{B}g)_{L^2}$. Donc $\mathcal{B}$ est **auto-adjoint**.

Le calcul ci-dessus montre également que $(\mathcal{B}f|f)_{L^2} = \|u\|_{H^1}^2$. Ceci prouve que $\mathcal{B}$ est **positive**, et on a également $(\mathcal{B}f|f)_{L^2} \geq \|\mathcal{B}f\|_{L^2}^2$. Donc, d'après Cauchy-Schwartz :

$$\|\mathcal{B}f\|_{L^2}^2 \leq (\mathcal{B}f|f)_{L^2} \leq \|\mathcal{B}f\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$$

i.e. $\|\mathcal{B}f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ ce qui montre que $\mathcal{B}$ est **continue**, avec

$$\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1.$$

D'autre part, on a $\ker B = \mathcal{V}_\sigma^\circ \cap \mathcal{H}$, donc si $f \in \ker \mathcal{B}$, alors $f \in \mathcal{V}_\sigma^\perp$. Mais alors $f \in \overline{\mathcal{V}_\sigma} \cap \mathcal{V}_\sigma^\perp = \{0\}$. Donc $\mathcal{B}$ est injectif. $\square$

Remarquons que comme B est auto-adjoint : $\mathcal{B}(\mathcal{H})^\perp = \ker \mathcal{B}^* = \ker \mathcal{B} = \{0\}$, ce qui signifie que $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dense dans $\mathcal{H}$. On peut donc définir la restriction de l'opérateur $u \mapsto -\Delta u + u$ à $\mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \,:\, \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\to \mathcal{H} \\ u &\mapsto -\Delta u + u. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $\tilde{A}$ est bien défini comme un opérateur non borné. Comme il s'agit de l'inverse d'un opérateur continu $\mathcal{B}$, $\tilde{A}$ est auto-adjoint sur son domaine $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. On peut appliquer le théorème spectral (voir annexe), à $A = \tilde{A} - Id$ qui est donc aussi auto-adjoint sur $D(A) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

THÉORÈME 2.1. ***(Décomposition spectrale du Laplacien)****. Il existe une suite de projecteurs spectraux* $(\mathbf{P}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ *sur* $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ *tels que pour tout* $u \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$

(i). $(\mathbf{P})_\lambda$ *est croissante*

(ii). $(\mathbf{P})_\lambda$ *est continue par la droite :* $\mathbf{P}_{\lambda+\epsilon}u \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2} \mathbf{P}_\lambda u$

(iii). Pour tout $u \in \mathcal{H}$*, on a :*

$$\|\mathbf{P}_\lambda u - u\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

(iv). Si de plus $u \in D(A)$*, alors*

$$-\Delta u = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda \, \mathrm{d}\mathbf{P}_\lambda u$$

c'est à dire :

$$\langle -\Delta u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda \; \mathrm{d}(\mathbf{P}_\lambda u | v)_{L^2}$$

On note désormais $\mathcal{H}_\lambda = \mathbf{P}_\lambda \mathcal{H}$.

PROPOSITION 2.3. *Pour tout* $\lambda > 0$*, on a* $H_\lambda \subset \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$*. De plus, pour tout* $u \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$*,*

$$\|\nabla \mathbf{P}_\lambda u\|_{L^2} \leq \sqrt{\lambda} \|u\|_{L^2}.$$

Si de plus $u \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$,

$$\|u - \mathbf{P}_\lambda u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Preuve. On a

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda \, \mathrm{d}(\mathbf{P}_\lambda u|u)_{L^2} \, .$$

Donc, si $u \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$, alors $\mathbf{P}_\lambda u \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$ et

$$\begin{aligned}
\|\nabla \mathbf{P}_\lambda u\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} \lambda' \, \mathrm{d}(\mathbf{P}'_\lambda \mathbf{P}_\lambda u|\mathbf{P}_\lambda u)_{L^2} \\
&= \int_0^\lambda \lambda' \, \mathrm{d}(\mathbf{P}'_\lambda u|\mathbf{P}_\lambda u)_{L^2} \\
&\leq \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{d}(\mathbf{P}'_\lambda \mathbf{P}_\lambda u|\mathbf{P}_\lambda u)_{L^2} \\
&= \lambda \|\mathbf{P}_u\|_{L^2}^2 \leq \lambda \|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Et de plus, si $u \in \mathcal{V}(\mathcal{O})$

$$\|u - \mathbf{P}_\lambda u\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} (\mathbf{P}_{\lambda'}(u - \mathbf{P}_\lambda u)|(u - \mathbf{P}_\lambda u))_{L^2}$$

. Or, si $\lambda' < \lambda$, on a donc $H_\lambda \subset H_{\lambda'}$ i.e $H_{\lambda'}^\perp \subset H_\lambda^\perp$. Comme $u - \mathbf{P}_\lambda u \in H_\lambda^\perp$, $\mathbf{P}_{\lambda'}(u - \mathbf{P}_\lambda u) = 0$. Donc, en utilisant encore la croissance de $(\mathbf{P}_\lambda)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (\mathbf{P}_{\lambda'}(u - \mathbf{P}_\lambda u)|(u - \mathbf{P}_\lambda u))_{L^2} &= \int_\lambda^{+\infty} (\mathbf{P}_{\lambda'}(u - \mathbf{P}_\lambda u)|(u - \mathbf{P}_\lambda u))_{L^2} \\
&= \int_\lambda^{+\infty} (\mathbf{P}_{\lambda'} u - \mathbf{P}_\lambda u|u - \mathbf{P}_\lambda u)_{L^2} \\
&= \int_\lambda^{+\infty} (\mathbf{P}_{\lambda'} u|u - \mathbf{P}_\lambda u)_{L^2} \\
&\leq \int_\lambda^{+\infty} (\mathbf{P}_{\lambda'} u|u)_{L^2} \\
&\leq \int_\lambda^{+\infty} \frac{\lambda'}{\lambda} (\mathbf{P}_{\lambda'} u|u)_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \|\nabla u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

□

On veut étendre ces projection à $\mathcal{V}'(\mathcal{O})$, pour par exemple considérer des éléments du type $\mathbf{P}_\lambda \Delta u$. On définit donc naturellement

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}_\lambda} : \mathcal{V}'(\mathcal{O}) &\to \mathcal{V}'_\sigma(\mathcal{O}) \\
f \quad &\mapsto \quad (v \mapsto \langle f, \mathbf{P}_\lambda v\rangle).
\end{aligned}
$$

Remarquons que si $u \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$, alors

$$\langle u, \mathbf{P}_\lambda v\rangle = (u|\mathbf{P}_\lambda v)_{L^2} = (\mathbf{P}_\lambda u|v)_{L^2} = \langle \mathbf{P}_\lambda u, v\rangle$$

Donc $\tilde{\mathbf{P}_\lambda}$ s'identifie à $\mathbf{P}_\lambda$ sur $\mathcal{H}$. On laisse donc tomber le tilde. On a facilement :

$$\|\mathbf{P}_\lambda f\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \leq \|f\|_{\mathcal{V}'_\sigma}.$$

Et d'autre part,

$$\langle \mathbf{P}_\lambda f, v\rangle = \langle f, \mathbf{P}_\lambda v\rangle \leq \|f\|_{\mathcal{V}'}\|\mathbf{P}_\lambda v\|_{\mathcal{V}_\sigma}.$$

Or

$$\|\mathbf{P}_\lambda v\|^2_{\mathcal{V}_\sigma} = \|\mathbf{P}_\lambda v\|^2_{L^2} + \|\nabla \mathbf{P}_\lambda v\|^2_{L^2} \leq (1+\lambda)\|v\|_{L^2}.$$

Donc

$$\langle \mathbf{P}_\lambda f, v\rangle \leq \|f\|_{\mathcal{V}'}\sqrt{1+\lambda}\|v\|_{L^2}.$$

Donc $\mathbf{P}_\lambda f \in \mathcal{H}$. Or $\mathbf{P}_\lambda f = \mathbf{P}_\lambda \mathbf{P}_\lambda f$. Donc $\mathbf{P}_\lambda f \in \mathcal{H}_\lambda$. Ainsi on dispose d'une application

$$\mathbf{P}_\lambda \,:\, \mathcal{V}'(\mathcal{O}) \to H_\lambda(\mathcal{O}).$$

IV Solutions approchées

Dorénavant, on ne s'intéresse qu'a des valeurs entières de λ. On fixe donc une force $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$. Si $k \in \mathbb{N}$ l'idée est d'appliquer la projection $\mathbf{P}_k$ à (NS_ν). On obtient alors l'équation différentielle sur H_k

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = \nu \mathbf{P}_k \Delta u_k(t) + F_k(u_k(t)) + f_k(t) \\ u_k(0) = \mathbf{P}_k u_0 \end{cases} \tag{$\mathrm{NS}_{\nu,k}$}$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} F_k \ : \mathcal{H}_k &\to \mathcal{H}_k \\ u &\mapsto -\mathbf{P}_k \operatorname{div}(u \otimes u) \end{aligned}$$

et f_k est défini par la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4. *Pour tout $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$, il existe une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$ tel que $f_k \in \mathcal{H}_k$ et*

$$\|f_k - f\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}'_\sigma)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Expliquons la bonne définition et la cohérence de ces notations. Remarquons que lorsque $u, v \in \mathcal{V}$, $\operatorname{div}(u \otimes v)$ est défini dans $\mathcal{V}'$ par, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}_\sigma$,

$$\langle \operatorname{div}(u \otimes v), \varphi \rangle = -\int_{\mathcal{O}} (u \otimes v) : \nabla \varphi.$$

Si de plus $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$, et $\operatorname{div} u = 0$,

$$\begin{aligned} \langle (u \cdot \nabla) v, \varphi \rangle &= \sum_{i,j} \int_{\mathcal{O}} u^i \partial_i (v^j) \varphi^j \\ &= \sum_{i,j} \int_{\mathcal{O}} \partial_i (u^i v^j) \varphi^j - \sum_j \int_{\mathcal{O}} v^j \varphi^j \sum_i \partial_i u_i \\ &= \sum_{i,j} \int_{\mathcal{O}} \partial_i (u^i v^j) \varphi^j \\ &= -\sum_{i,j} \int_{\mathcal{O}} u^i v^j \partial_i \varphi^j \\ &= -\int_{\mathcal{O}} (u \otimes v) : \nabla \varphi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Donc, pour des vecteurs de divergence nulle, on a bien $\operatorname{div}(u \otimes u) = (u \cdot \nabla) u$.

Remarque 2. Remarquons qu'on vient également de prouver que

$$\langle (u \cdot \nabla) v, \varphi \rangle = -\langle v, (u \cdot \nabla) \varphi \rangle,$$

c'est à dire que $Q^* = -Q$.

De plus, comme $\operatorname{div}(u \otimes u) \in \mathcal{V}'$, on a bien $\mathbf{P}_k \operatorname{div}(u \otimes u) \in \mathcal{H}_k$ par les propriétés de $\mathbf{P}_k$, et l'application F_k est bien continue.

D'autre part, si $u_k \in H_k$, alors en particulier $u_k \in \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O})$ donc $\Delta u_k \in \mathcal{V}'(\mathcal{O})$, puis $P_k \Delta u_k$ est bien défini d'après ce qui précède, et appartient à H_k. De plus, l'application $u_k \mapsto \mathbf{P}_k \Delta u_k$ est une application linéaire continue sur H_k. La théorie des équations d'évolutions non linéaires nous donne alors le résultat suivant :

Proposition 2.5. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe $T_k > 0$ et une unique solution maximale $u_k \in \mathcal{C}^1([0, T_k[, \mathcal{H}_k)$ de $(NS_{k,\nu})$.*

Pour prouver que ces solutions sont globales, on a besoin de certaines estimées. Pour cela, on étudie d'abord le terme non linéaire.

Définition 2.6. *On note*

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\to \mathcal{V}'_\sigma \\ (u, v) &\mapsto \operatorname{div}(u \otimes v). \end{aligned}$$

On a alors le contrôle suivant :

Proposition 2.6. *Il existe C tel que pour tout $u, v \in \mathcal{V}$ et $\varphi \in \mathcal{V}_\sigma$:*

$$\langle Q(u, v), \varphi \rangle \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^{d/4} \|\nabla v\|_{L^2}^{d/4} \|u\|_{L^2}^{1-d/4} \|v\|_{L^2}^{1-d/4} \|\nabla \varphi\|_{L^2}.$$

De plus, si $u \in \mathcal{V}_\sigma$,

$$\langle Q(u, v), v \rangle = 0.$$

Preuve. Soit $u, v \in \mathcal{V}$, $\varphi \in \mathcal{V}_\sigma$. En utilisant l'expression IV, on a

$$Q(u, v) \leq \|u \otimes v\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \|\nabla \varphi\|_{L^2}.$$

L'inégalité de Galiardo-Niremberg donne

$$\|u\|_{L^4} \|v\|_{L^4} \leq \|u\|_{L^2}^{1-d/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{d/4} \|v\|_{L^2}^{1-d/4} \|\nabla v\|_{L^2}^{d/4}.$$

ce qui donne l'inégalité recherchée. D'autre part, si $u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$,

$$\begin{aligned}\langle Q(u,v), v\rangle &= -\sum_{i,j}\int_{\mathcal{O}} \partial_i(u^i v^j)v^j \\ &= -\sum_{i,j}\int_{\mathcal{O}} (v^j)^2\partial_i u^i - \sum_{i,j}\int_{\mathcal{O}} u^i v^j \partial_i v^j.\end{aligned}$$

Or en intégrant par parties,

$$\int_{\mathcal{O}} u^i v^j \partial_i v^j = -\int_{\mathcal{O}} \partial_i(u^i v^j)v^j.$$

Donc

$$\langle Q(u,v), v\rangle = -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} |v|^2 \operatorname{div}(u).$$

On obtient le résultat par densité de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$. □

En appliquant $(\cdot|u_k)^2_L$ à $(\mathrm{NS}_{\nu,k})$:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_k(t)\|^2_{L^2} = -\nu(\mathbf{P}_k\Delta u_k(t)|u_k(t))_{L^2} + (F_k(u_k(t))|u_k(t))_{L^2} + (f_k(t)|u_k(t))_{L^2}. \tag{2.2}$$

Or,

$$(\mathbf{P}_k\Delta u_k|u_k)_{L^2} = \langle \mathbf{P}_k\Delta u_k, u_k\rangle = \langle \Delta u_k, \mathbf{P}_k u_k\rangle = \langle \Delta u_k, u_k\rangle = -\|\nabla u_k\|_{L^2}.$$

et

$$(F_k(u_k(t))|u_k(t))_{L^2} = \langle \mathbf{P}_k Q(u_k(t), u_k(t)), u_k(t)\rangle = \langle Q(u_k(t), u_k(t)), u_k(t)\rangle = 0.$$

d'après la proposition 2.6. Donc, en intégrant 2.2,

$$\|u_k(t)\|^2_{L^2} + 2\nu\int_0^t \|\nabla u_k(t')\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}t' = \|u_k(0)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t (f_k(t')|u_k(t'))_{L^2}\mathrm{d}t'. \tag{2.3}$$

On écrit alors, grace à Cauchy-Schwarz :

$$2\int_0^t (f_k(t')|u_k(t'))_{L^2}\mathrm{d}t' \leq 2\int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}\|u_k(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t' = 2\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}\sqrt{\nu}\|u_k(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'.$$

Puis, en utilisant que $2ab \leq a^2 + b^2$ on obtient finalement

$$2\int_0^t (f_k(t')|u_k(t'))_{L^2}\mathrm{d}t' \leq \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\mathrm{d}t' + \nu\int_0^t \|u_k(t')\|^2_{L^2}.$$

On rapproche cette dernière égalité dans 2.3 :

$$\|u_k(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}t' = \|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' + \nu \int_0^t \|u_k(t')\|_{L^2}^2.$$

D'après le lemme de Gronwall :

$$\|u_k(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 \leq \left(\|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}. \tag{2.4}$$

Ainsi on a, pour tout $t \in [0, T_k[$

$$\|u_k(t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}.$$

Donc, par le lemme des bouts, $T_k = +\infty$, car la norme de u_k n'explose pas en T_k.

Regardons désormais la **suite** $(u_k(t))$. On déduit de l'inégalité ci-dessus :

$$\|u_k(t)\|_{L^2}^2 \leq \left(\|u(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}.$$

Donc

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

L'inégalité, déduite de 2.4 :

$$\int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2\nu} \left(\|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}$$

donne

$$\int_0^t \|u_k(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2 = \int_0^t (\|u_k(t')\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}^2) \leq \left(t + \frac{1}{2\nu}\right) \left(\|u_k(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f_k(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}.$$

Donc

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma).$$

D'autre part, on a vu qu'avec Gagliardo-Niremberg :

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^2}^{1-d/4} \|\nabla u\|_{L^2}^{d/4}.$$

Donc

$$\|u_k(t)\|_{L^4}^{8/d} \leq C\|u_k(t)\|_{L^2}^{1-d/4}\|\nabla u_k(t)\|_{L^2}^{d/4}.$$

Sur un intervalle $[0,T]$, comme $(u_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})$ on a donc

$$\|u_k(t)\|_{L^4}^{8/d} \leq C(T)\|\nabla u_k(t)\|_{L^2}^{2},$$

ce qui prouve que

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^{8/d}_{loc}(\mathbb{R}_+,L^4).$$

On résume ces propriétés dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2.7. *La suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace*

$$L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}_\sigma)\cap L^{8/d}_{loc}(\mathbb{R}_+,L^4).$$

V Construction d'une limite

Dans cette section on montre le résultat suivant :

PROPOSITION 2.8. *Il existe un $u\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}_\sigma)$ tel que pour tout $T>0$ et tout compact $K\subset\mathcal{O}$:*

$$\int_0^T \|u_k(t)-u(t)\|^2_{L^2(K)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \tag{2.5}$$

De plus, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}_\sigma)$.

Preuve. La preuve est basée sur le lemme d'Aubin-Lions, théorème 1.12. Soit $K\subset\mathcal{O}$ un compact $T>0$. On va appliquer ce résultat à $\mathcal{V}_\sigma(K)\subset\mathcal{H}(K)\subset\mathcal{V}'_\sigma(\mathcal{O})$. On est bien dans les hypothèses d'application du théorème grâce au théorème de Rellich. On aura ainsi l'existence de u vérifiant 2.5 pour un couple K,T donné. Mais cela est suffisant pour prouver la proposition, en utilisant un argument diagonal sur une suite croissante de temps (T_n) et une suite exhaustive de compacts (K_n).

Vérifions les points (i) et (ii). On a déjà vu que (u_k) est bornée dans $L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O}))$, et a fortiori dans $L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma(K))$. Montrons que $(\dot{u_k})$ est bornée dans un $L^q([0,T],\mathcal{V}'_\sigma)$. Par définition du problème de Cauchy,

$$\begin{aligned}\|\dot{u}_k(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma} &\leq \|\mathbf{P}_k\Delta u_k(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma} + \|\mathcal{F}_k(u_k(t))\|_{\mathcal{V}'_\sigma} + \|f_k(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \\ &\leq \|\Delta u_k(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma} + \|Q(u_k,u_k)\|_{\mathcal{V}'_\sigma} + \|f_k(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma}.\end{aligned}$$

On a, d'une part, d'après la proposition 2.6 sur le contrôle de Q :

$$\|Q(u_k,u_k)\|_{\mathcal{V}'} \leq \|u_k\|_{L^2}^{2-d/2}\|\nabla u_k\|_{L^2}^{d/2}.$$

Comme (u_k) est bornée dans $(L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})$, on a :

$$\|Q(u_k,u_k)\|_{\mathcal{V}'} \leq C(T)\|\nabla u_k\|_{L^2}^{d/2}.$$

Donc ce terme est borné dans $L^{4/d}([0,T],\mathcal{V}'_\sigma)$. Ce terme étant le plus "embêtant", on va essayer de prouver que les autres termes de l'inégalité sont également bornés dans cet espace. On a d'autre part :

$$\|\Delta u_k(t)\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \leq \|\nabla u_k\|_{L^2}$$

donc (Δu_k) est bornée dans $L^2([0,T],\mathcal{V}'_\sigma)$. De plus, par définition, (f_k) est bien bornée dans $L^2([0,T],\mathcal{V}'_\sigma)$. Or, comme $d \geq 2$, on a

$$L^2([0,T],\mathcal{V}'_\sigma) \subset L^{4/d}([0,T],\mathcal{V}'_\sigma)$$

ce qui nous permet de conclure que

$$(\dot{u}_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } L^{4/d}([0,T],\mathcal{V}'_\sigma). \tag{2.6}$$

D'après le lemme d'Aubin-Lions, on a l'existence d'une limite $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}(K))$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. En utilisant la remarque faite en début de preuve, on a alors l'existence de $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}(\mathcal{O}))$ qui vérifie 2.5 pour tout K compact. De plus, comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O}))$, d'après Banach-Alaooglu, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans cet espace. Cette suite converge aussi faiblement dans

$$L^2([0,T],L^2(K)).$$

Par unicité de la limite, on a donc $u \in L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O}))$. Il ne reste plus rien à prouver. $\square$

VI Le théorème de Leray

On est maintenant prêts à montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. ***(de Leray)***. *Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$. Il existe une solution faible globale de (NS_ν), c'est à dire qu'il existe*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}'(\mathcal{O})) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma(\mathcal{O}))$$

tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$, :

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} (u \cdot \varphi)(t,x)\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nu \nabla u : \nabla\varphi - u \otimes u : \nabla\varphi - u \cdot \partial_t\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ = \int_{\mathcal{O}} (u_0 \cdot \varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_0^t \langle f(t'), \varphi(t')\rangle \mathrm{d}t'.\end{aligned}$$

Preuve. On garde les notations précédentes. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}+, \mathcal{V}_\sigma)$. En appliquant $\langle \cdot, \varphi\rangle$ à $(\mathrm{NS}_{\nu,k})$ et en utilisant que $\mathbf{P}_k$ est un projecteur :

$$\begin{aligned}\langle \dot{u_k}(t), \varphi(t)\rangle &= \nu\langle \mathbf{P}_k \Delta u_k(t), \varphi(t)\rangle + \langle F_k(u_k(t)), \varphi(t)\rangle + \langle f_k(t), \varphi\rangle & (2.7)\\ &= -\nu(\nabla u_k(t)|\nabla \mathbf{P}_k\varphi(t))_{L^2} - \langle \mathrm{div}(u_k(t)\otimes u_k(t)), \mathbf{P}_k\varphi(t)\rangle + \langle f_k(t), \varphi(t)\rangle. & (2.8)\end{aligned}$$

Or $\langle \dot{u_k}(t), \varphi(t)\rangle = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u_k(t), \varphi(t)\rangle - \langle u_k(t), \partial_t\varphi(t)\rangle$. Donc en intégrant en temps, on obtient (de la même façon que dans l'introduction) :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{O}} (u_k \cdot \varphi)(t,x)\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\mathcal{O}} \big(\nu \nabla u : \nabla \mathbf{P}_k\varphi - (u_k \otimes u_k) : \nabla \mathbf{P}_k\varphi - u_k \cdot \partial_t\varphi\big)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ &\quad = \int_0^t \int_{\mathcal{O}} u_0(x)\cdot \varphi(0,x)\mathrm{d}x + \int_0^t \langle f_k(t'), \varphi(t')\rangle\mathrm{d}t'.\end{aligned}$$

L'objectif est donc de montrer la convergence de chacun des termes de cette équation. On a d'une part

$$\boxed{\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \cdot \partial_t\varphi)(t',x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u \cdot \partial_t\varphi)(t',x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t'}$$

par la proposition 2.8. De même, par définition de f_k :

$$\boxed{\int_0^t \langle f_k(t'), \varphi(t')\rangle \mathrm{d}t' \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t \langle f(t'), \varphi(t')\rangle \mathrm{d}t'.}$$

D'autre part, on va utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soit H un espace de Hilbert et A_n une suite bornés d'opérateurs bornés sur H tels que*

$$\forall h \in H,\ \|A_n h - h\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Alors si $\psi \in \mathcal{C}([0,T], H)$ on a :

$$\sup_{t\in[0,T]} \|A_n\psi(t) - \psi(t)\|_H \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a donc, en appliquant le lemme à $H = \mathcal{V}(\mathcal{O})$,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\mathbf{P}_k\varphi(t) - \varphi(t)\|_{\mathcal{V}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Et donc

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nabla u_k : \nabla \mathbf{P}_k\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nabla u_k : \nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'$$

et par convergence faible de (u_k) dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$ on a finalement :

$$\boxed{\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nabla u_k : \nabla \mathbf{P}_k\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nabla u : \nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'.}$$

De la même façon :

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : \nabla \mathbf{P}_k\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \lim_{k\to\infty} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : \nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'$$

On va réutiliser le lemme 2.1. On l'applique cette fois à $H = L^2(\mathcal{O})^d$ et à $A_n f = \mathbf{1}_{K_n} f$ où

$(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de compacts de $\mathcal{O}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : \nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = &\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : \mathbf{1}_{K_k}\nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ &+ \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : (1-\mathbf{1}_{K_k})\nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : (1-\mathbf{1}_{K_k})\nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' &\leq \int_0^t \|u_k \otimes u_k\|_{L^2} \|(1-\mathbf{1}_{K_k})\nabla\varphi\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{\tau\in[0,t]} \|(1-\mathbf{1}_{K_k})\nabla\varphi(t')\|_{L^2} \int_0^t \|u_k(t') \otimes u_k(t')\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{\tau\in[0,t]} \|(1-\mathbf{1}_{K_k})\nabla\varphi(t')\|_{L^2} \int_0^t \|u_k(t')\|_{L^4}^2.\end{aligned}$$

Et comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{8/d}([0,t], L^4) \subset L^2([0,t], L^4)$, alors $(u_k \otimes u_k)$ est bornée dans $L^1([0,t], L^2)$. Cela montre qu'il suffit de montrer le résultat pour $K \subset \mathcal{O}$ un compact. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_K &((u_k \otimes u_k - u \otimes u) : \nabla\varphi)(t', x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ &\leq \int_0^t \|u_k \otimes u_k - u \otimes u\|_{L^2(K)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(K)} \\ &\leq \sup_{t'\in[0,t]} \|\nabla\varphi(t')\|_{L^2(K)} \int_0^t \|u_k(t') \otimes u_k(t') - u(t') \otimes u(t')\|_{L^2(K)}.\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que

$$\|u_k \otimes u_k - u \otimes u\|_{L^1([0,t],L^2(K))} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Or, en écrivant $u_k \otimes u_k - u \otimes u = u_k \otimes u_k - u_k \otimes u + u_k \otimes u - u \otimes u$, on a

$$\begin{aligned}\|u_k \otimes u_k - u \otimes u\|_{L^1([0,t],L^2(K))} &\leq \|u_k \otimes (u_k - u)\|_{L^1([0,t],L^2(K))} + \|(u_k - u) \otimes u\|_{L^1([0,t],L^2(K))} \\ &\leq \|u_k - u\|_{L^2([0,t],L^4(K))} \left(\|u_k\|_{L^2([0,t],L^4(K)} + \|u\|_{L^2([0,t],L^4(K))}\right).\end{aligned}$$

Et ainsi, comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2([0,t], L^4(K))$, il suffit d'avoir :

$$\|u_k - u\|_{L^2([0,t],L^4(K))} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Or, on a d'après Gagliardo-Niremberg :

$$\|(u_k - u)(t)\|_{L^4(K)} \leq C\|(u_k - u)(t)\|_{L^2(K)}^{1-d/4} \|\nabla(u_k - u)(t)\|_{L^2(K)}^{d/4}.$$

Donc,

$$\|u_k - u\|_{L^2([0,t],L^4(K))} \leq C \int_0^t \|(u_k - u)(t')\|_{L^2(K)}^{1-d/4} \|\nabla(u_k - u)(t')\|_{L^2(K)}^{d/4} \mathrm{d}t'.$$

Puis, d'après Hölder appliqué à $p = \frac{2}{1-d/4}$ et $q = \frac{2}{d/4}$, on obtient

$$\begin{aligned}\|u_k - u\|_{L^2([0,t],L^4(K))} &\leq C\|u_k - u\|_{L^2([0,t]\times K)}^{1-d/4} \|\nabla(u_k - u)\|_{L^2([0,t]\times K)} \\ &\leq C\|u_k - u\|_{L^2([0,t]\times K)}^{1-d/4} \|\nabla(u_k - u)\|_{L^2([0,t]\times \mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Or, le premier terme tend vers 0 par la proposition 2.8, et le deuxième terme est borné par la proposition 2.7. On a donc prouvé que

$$\boxed{\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u_k \otimes u_k : \nabla \mathbf{P}_k \varphi)(t', x) \mathrm{d}x \mathrm{d}t' \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (u \otimes u : \nabla\varphi)(t', x) \mathrm{d}x \mathrm{d}t'.}$$

Pour le dernier terme, notons

$$\begin{aligned} g_k : \ & [0,T] \to \mathbb{R} \\ & t \to \int_{\mathcal{O}} (u_k \cdot \varphi)(t, x)\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Alors $\dot{g_k}(t) = (\partial_t \varphi(t)|u_k(t))_{L^2} + (\varphi(t)|\partial_t u_k(t))_{L^2}$. Donc

$$|\dot{g_k}(t)| \leq \|\partial_t u_k(t)\|_{\mathcal{V}'} \sup_{\tau\in[0,T]} \|\varphi(\tau)\|_{L^2} + \|u_k(t)\|_{L^2} \sup_{\tau\in[0,T]} \|\partial_t \varphi(\tau)\|_{L^2}.$$

Or on a vu dans la preuve de 2.8 que $(\partial_t u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{4/d}([0,T], \mathcal{V}')$ (voir équation 2.6) et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^2([0,T], \mathcal{V}_\sigma)$ (proposition 2.7). Donc $(\dot{g_k}(t))$ est bornée dans $L^2([0,T], \mathbb{R})$, donc la famille (g_k) est équicontinue. De plus, si on fixe $t \in [0,T]$:

$$\{g_k(t)\,;\, k \in \mathbb{N}\}$$

est bornée car

$$|g_k(t)| \leq \|u_k(t)\|_{L^2} \|\varphi(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2} \sup_{\tau \in [0,T]} \|\varphi(\tau)\|_{L^2}.$$

Donc par Ascoli (g_k) admet une limite dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ vers une limite g. Mais alors : on a pour tout $T > 0$, par convergence faible de (u_k) dans $L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$,

$$\int_0^T g(t)\mathrm{d}t = \int_0^T \int_{\mathcal{O}} u(t,x) \cdot \varphi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

donc

$$\boxed{\int_{\mathcal{O}} (u_k \cdot \varphi)(t,x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathcal{O}} (u \cdot \varphi)(t,x)\,\mathrm{d}x.}$$

Et on a également prouvé que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}'_\sigma)$. □

On a également une estimée d'énergie pour u :

Corollaire 2.1. ***(Inégalité d'énergie)***. *La solution faible u de NS_ν de condition initiale u_0 vérifie l'inégalité d'énergie :*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(t',x)\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \tag{2.9}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|u_0(x)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t'. \tag{2.10}$$

Preuve. On a vu dans la preuve du théorème de Leray que pour tout $\varphi \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$,

$$\int_{\mathcal{O}} (u_k \cdot \varphi)(t,x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathcal{O}} (u \cdot \varphi)(t,x)\,\mathrm{d}x$$

uniformément en temps sur $[0,T]$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $(u_k(t))$ converge faiblement vers $u(t)$ dans $\mathcal{H}$. Donc

$$\|u(t)\|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k(t)\|^2$$

De même, comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers u dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$, on a

$$\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t' \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'$$

En prenant $\liminf_{k\to\infty}$ dans l'égalité d'énergie de u_k (2.3), on obtient le résultat.

□

Chapitre 3

Des solutions faibles aux solutions fortes

Le chapitre précédent nous assure l'existence de solutions **globales** de Navier-Stokes, au sens **faible**. Cependant, un tel théorème n'est pas satisfaisant. Il nous manque :

(i). L'**unicité** des solutions.

(ii). La **stabilité** de ces solutions, c'est à dire que si u_0 et v_0 sont deux conditions initiales proches, les solutions associées u et v restent proches.

(iii). Une plus grande **régularité** des solutions, par exemple la continuité à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Nous verrons que selon la dimension, ces conditions ne sont pas (encore) toutes réunies. Dans la suite, on prouve que :

(i). En dimension $d = 2$, toutes ces conditions sont réunies ; on dispose de solutions **globales, uniques, régulières** et **stables**.

(ii). En dimension $d = 3$, le problème est plus complexe. On va prouver l'existence de solutions uniques, régulières et stables sur un compact $[0, T]$. Ces solutions sont ensuite globales si la condition initiale est suffisamment petite, mais peuvent exploser en temps fini sinon.

Ce chapitre est encore tiré de [1].

I Le problème d'évolution de Stokes

L'idée de la preuve est de s'intéresser à un problème plus simple : celui de l'équation de Navier-Stokes, sans le terme non linéaire ,source de complications. On étudie donc l'équation suivante, pour une force f donnée :

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{ES$_\nu$}$$

Les solutions de cette équations sont beaucoup plus facile à obtenir, et disposent de toutes les propriétés voulues.

Théorème 3.1. *Soit $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$ et $u_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe une unique solution*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}'_\sigma) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$$

à (ES$_\nu$), au sens que $\forall\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}} (u\cdot\varphi)(t,x)\mathrm{d}x + \int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nu\nabla u : \nabla\varphi - u\cdot\partial_t\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\ = \int_{\mathcal{O}} (u_0\cdot\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' + \int_0^t \langle f(t'), \varphi(t')\rangle \mathrm{d}t'.\end{aligned}$$

De plus, cette solution vérifie $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$.

Preuve. Unicité : Par linéarité, il suffit de vérifier que si u est solution de (ES$_\nu$) au sens du théorème 3.1 pour la condition initiale $u_0 = 0$ et $f = 0$, alors on a $u = 0$. En particulier, en prenant $\varphi = \mathbf{P}_k\varphi$, où $\varphi \in \mathcal{V}_\sigma$ ne dépend pas du temps

$$\langle u(t), \mathbf{P}_k\varphi(t)\rangle = -\int_0^t \int_{\mathcal{O}} (\nu\nabla u : \nabla\mathbf{P}_k\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' = \nu\int_0^t \langle \Delta\mathbf{P}_k\varphi, \mathbf{P}_k u(t')\rangle\mathrm{d}t'.$$

Or, comme $\mathbf{P}_k$ est un projecteur,

$$\langle u(t), \mathbf{P}_k\varphi(t)\rangle = \langle \mathbf{P}_k u(t), \varphi(t)\rangle.$$

Donc

$$\langle \mathbf{P}_k u(t), \varphi(t)\rangle \leq \nu\|\Delta\mathbf{P}_k\varphi\|_{L^2} \int_0^t \|\mathbf{P}_k u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t' \tag{3.1}$$

$$\leq \nu k\|\mathbf{P}_k\varphi\|_{L^2} \int_0^t \|\mathbf{P}_k u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'. \tag{3.2}$$

On prend le sup sur $\|\psi\|_{\mathcal{V}_\sigma} \leq 1$. On obtient donc

$$\|\mathbf{P}_k u(t)\|_{L^2} \leq \nu k \int_0^t \|\mathbf{P}_k u(t)\|_{L^2}.$$

D'après le lemme de Grönwall, on a, pour tout k, $\mathbf{P}_k u = 0$. $k \to +\infty$ donne $u = 0$.

Existence : On adopte la même technique que pour les solutions de Leray de Navier-Stokes. Soit (f_k) comme dans la proposition 2.4. On définit alors

$$\begin{cases} \dot{u_k}(t) = \nu \mathbf{P}_k \Delta u_k(t) + f_k(t) \\ u_k(0) = \mathbf{P}_k u_0. \end{cases} \tag{NS$_{\nu,k}$}$$

De la même façon que dans le chapitre précédent, il existe $u_k \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}_k)$ qui vérifie l'équation d'énergie :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_k(t)\|^2 + \nu\|\nabla u_k(t)\|^2 = \langle f_k(t), u_k(t)\rangle. \tag{3.3}$$

On veut écrire une éstimée d'énergie similaire pour $u_{k+l} - u_k$. Remarquons que $u_{k+l} - u_k$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t(u_{k+l} - u_k)(t) = \nu(\mathbf{P}_{k+l}\Delta u_{k+l}(t) - \mathbf{P}_k \Delta u_k) + (f_{k+l} - f_k)(t) \\ (u_{k+l} - u_k)(0) = (\mathbf{P}_{k+l} - \mathbf{P}_k)u_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

On applique $(\cdot, (u_{k+l} - u_k)(t))_{L^2}$ à la première équation. Alors :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u_{k+l} - u_k)(t)\|_{L^2}^2 \\ &\qquad = \nu\big(\mathbf{P}_{k+l}\Delta u_{k+l}(t) - \mathbf{P}_k\Delta u_k(t), (u_{k+l} - u_k)(t)\big)_{L^2} + \langle (f_{k+l} - f_k)(t), (u_{k+l} - u_k)(t)\rangle. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\big(\mathbf{P}_{k+l}\Delta u_{k+l}(t) - \mathbf{P}_k\Delta u_k(t), (u_{k+l} - u_k)(t)\big)_{L^2} \\ &\qquad = -\|\nabla u_{k+l}(t)\|_{L^2}^2 - \|\nabla u_k(t)\|_{L^2}^2 - \langle \mathbf{P}_{k+l}\Delta u_{k+l}(t), u_k(t)\rangle - \langle \mathbf{P}_k \Delta u_k(t), u_{k+l}(t)\rangle. \end{aligned}$$

D'une part, comme $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}_{k+l}$,

$$\langle \mathbf{P}_{k+l}\Delta u_{k+l}(t), u_k(t)\rangle = \langle \Delta u_{k+l}(t), u_k\rangle = -(\nabla u_{k+l}(t)|\nabla u_k(t))_{L^2}.$$

Et d'autre part, d'après le théorème spectral :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{P}_k \Delta u_k(t), u_{k+l}(t)\rangle &= \langle \Delta u_k(t), \mathbf{P}_k u_{k+l}(t)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \lambda \, \mathrm{d}(\mathbf{P}_\lambda u_k(t), \mathbf{P}_k u_{k+l}(t))_{L^2} \\
&= \int_0^k \lambda \, \mathrm{d}(\mathbf{P}_k \mathbf{P}_\lambda u_k(t), u_{k+l}(t))_{L^2} \\
&= \int_0^k \lambda \, \mathrm{d}(\mathbf{P}_\lambda u_k(t), u_{k+l}(t))_{L^2} \\
&= \langle \Delta u_k(t), u_{k+l}(t)\rangle \\
&= -(\nabla u_k(t) | \nabla u_{k+l}(t))_{L^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient finalement :

$$\langle \mathbf{P}_{k+l}\Delta u_{k+l}(t) - \mathbf{P}_k \Delta u_k(t), (u_{k+l} - u_k)(t)\rangle = -\|\nabla(u_{k+l} - u_k)(t)\|_{L^2}^2,$$

puis, en réinjectant

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|(u_{k+l} - u_k)(t)\|_{L^2}^2 + \nu\|\nabla(u_{k+l} - u_k)(t)\|_{L^2}^2 \\
&\qquad\qquad = \langle (f_{k+l} - f_k)(t), (u_{k+l} - u_k)(t)\rangle.
\end{aligned}$$

En intégrant :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|(u_{k+l} - u_k)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u_{k+l} - u_k)(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \\
&\quad = \frac{1}{2}\|(\mathbf{P}_{k+l} - \mathbf{P}_k)(u_0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle (f_{k+l} - f_k)(t'), (u_{k+l} - u_k)(t')\rangle \mathrm{d}t' \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\|(\mathbf{P}_{k+l} - \mathbf{P}_k)(u_0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|(f_{k+l} - f_k)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'} \sqrt{\nu}\|(u_{k+l} - u_k)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma} \mathrm{d}t' \\
&\quad \leq \frac{1}{2}\|(\mathbf{P}_{k+l} - \mathbf{P}_k)(u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\nu}\int_0^t \|(f_{k+l} - f_k)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|(u_{k+l} - u_k)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2 \mathrm{d}t',
\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité, on a utilisé le fait que $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. En réarrengeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\|(u_{k+l}-u_k)(t)\|_{L^2}^2+\nu\int_0^t\|\nabla(u_{k+l}-u_k)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t' \\
&\leq \|(\mathbf{P}_{k+l}-\mathbf{P}_k)(u_0)\|_{L^2}^2+\frac{1}{\nu}\int_0^t\|(f_{k+l}-f_k)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2\mathrm{d}t'+\nu\int_0^t\|(u_{k+l}-u_k)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Donc, d'après le lemme de Gronwall :

$$\begin{aligned}
&\|(u_{k+l}-u_k)(t)\|_{L^2}^2+\nu\int_0^t\|\nabla(u_{k+l}-u_k)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t' \\
&\leq \left(\|(\mathbf{P}_{k+l}-\mathbf{P}_k)(u_0)\|_{L^2}^2+\frac{1}{\nu}\int_0^t\|(f_{k+l}-f_k)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2\mathrm{d}t'\right)e^{\nu t},
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}_\sigma).$$

On peut considérer donc la limite u de (u_k) dans cet espace. Montrons que u est bien solution de ES_ν. On a par définition, pour tout $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}_\sigma)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle u_k(t),\varphi(t)\rangle &= \langle\partial_t u_k(t),\varphi(t)\rangle+\langle u_k(t),\partial_t\varphi(t)\rangle \\
&= \langle\nu\mathbf{P}_k\Delta u_k(t)+f_k(t),\varphi(t)\rangle+\langle u_k(t),\partial_t\varphi(t)\rangle,
\end{aligned}$$

et en intégrant en temps, exactement de la même manière que pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}}(u_k\cdot\varphi)(t,x)\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{\mathcal{O}}(\nu\nabla u_k:\nabla\mathbf{P}_k\varphi-u_k\cdot\partial_t\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t' \\
=\int_{\mathcal{O}}(\mathbf{P}_k u_0\cdot\varphi)(t',x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t'+\int_0^t\langle f_k(t'),\varphi(t')\rangle\mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Comme on a convergence forte dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})\cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}_\sigma)$, le passage à la limite est clair et le résultat est montré. □

Un simple passage à la limite dans l'équation (3.3) donne le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. ***(Égalité d'énergie)****. La solution u de (ES_ν) associé à la condition* *initiale u_0 vérifie l'égalité d'énergie :*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t' \tag{3.5}$$

Remarque 3. Dans le cas $\mathcal{O} = \mathbb{R}^d$, on peut vérifier qu'on a l'expression exacte suivante, qui sera utilisera dans la suite :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-\nu|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi) + \int_0^t e^{-\nu|\xi|^2(t-t')}\hat{f}(t',\xi)\mathrm{d}t' \tag{3.6}$$

où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u en espace. On a donc :

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{R^d} e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(t,\xi)\mathrm{d}xi$$

II Solutions fortes en 2D

Dans cette section, on montre que dans le cas de la dimension $d = 2$, "tout se passe bien", c'est à dire qu'on arrive à prouver toutes les propriétés mentionnées dans l'introduction de ce chapitre.

THÉORÈME 3.2. ***(Unicité forte 2D)***. *En dimension $d = 2$, toute solution de Leray u de (NS_ν) associée à une force $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$ et une condition initiale $u_0 \in \mathcal{H}$ est* ***unique****, appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ et vérifie l'****égalité*** *d'énergie*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t'.$$

Preuve. On rappelle la propriété (2.6) : pour tout $a, b \in \mathcal{V}$ et $\varphi \in \mathcal{V}_\sigma$,

$$\langle Q(a,b), \varphi\rangle \leq C\|\nabla a\|_{L^2}^{d/4}\|\nabla b\|_{L^2}^{d/4}\|a\|_{L^2}^{1-d/4}\|b\|_{L^2}^{1-d/4}\|\nabla\varphi\|_{L^2}.$$

Donc, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\langle Q(u(t),u(t)), \varphi\rangle \leq C\|\nabla u(t)\|_{L^2}\|u(t)\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2},$$

i.e.

$$\|Q(u(t),u(t))\|_{\mathcal{V}'} \leq C\|\nabla u(t)\|_{L^2}\|u(t)\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{H})}\|u(t)\|_{\mathcal{V}_\sigma}.$$

Donc $Q(u,u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$. Donc u est solution de (ES$_\nu$), pour une force $\tilde{f} = f + Q(u,u) \in$

$L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}')$. On obtient ainsi le résultat par le théorème (3.1) $\square$

Théorème 3.3. ***(Stabilité en 2D)***. *En dimension $d = 2$, soit u, v deux solutions de Leray de (NS_ν) associés (respectivement) à des forces $f, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ et des conditions initiales $u_0, v_0 \in \mathcal{H}$. Alors*

$$\begin{aligned}\|(u-v)(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\|^2_{L^2}\mathrm{d}t' \\ \leq \left(\|u_0-v_0\|^2_{L^2}+\frac{1}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\mathrm{d}t'\right)\exp\left(\frac{CE^2(t)}{\nu^4}+\nu t\right)\end{aligned}$$

avec

$$E(t) = \min\left(\|u_0\|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\mathrm{d}t', \|v_0\|^2+\frac{1}{\nu}\int_0^t \|g(t')\|^2_{\mathcal{V}'_\sigma}\mathrm{d}t'\right).$$

Preuve. On remarque que $w := u - v$ est solution de (ES_ν) avec force $f - g + Q(u,u) - Q(v,v)$. Donc w vérifie l'égalité d'énergie :

$$\frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{L^2}+\nu\int_0^t \|\nabla w(t')\|^2_{L^2}\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|w(0)\|^2+\int_0^t \langle (f-g+Q(u,u)+Q(v,v))(t'), (u-v)(t')\rangle \mathrm{d}t'$$

Or, en utilisant la proposition 2.6 (on omet les (t) par simplicité)

$$\begin{aligned}\langle Q(u,u)-Q(v,v), u-v\rangle &= \langle Q(u,u)+Q(v,u-v)-Q(v,u), u-v\rangle \\ &= \langle Q(u-v,u)+Q(v,u-v), u-v\rangle \\ &= \langle Q(u-v,u), u-v\rangle \\ &\leq C\|u-v\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla(u-v)\|^{1/2}_{L^2}\|u\|_{L^2}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla(u-v)\|^{1/2}_{L^2} \\ &= C\|u-v\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla(u-v)\|^{3/2}_{L^2}\|u\|^{1/2}_{L^2}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \\
&\qquad = \frac{1}{2}\|w(0)\|^2 + \int_0^t \langle (f-g)(t'), (u-v)(t')\rangle \mathrm{d}t' + \int_0^t \langle (Q(u-v,u)(t'), (u-v)(t')\rangle \mathrm{d}t' \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\|w(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \sqrt{\frac{2}{\nu}}\|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma} \sqrt{\frac{1}{2\nu}}\|w(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma} \mathrm{d}t' \\
&\qquad\quad + C\int_0^t \|w(t')\|^{1/2} \|\nabla w(t')\|_{L^2}^{3/2} \|u(t')\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u(t')\|_{L^2}^{1/2} \mathrm{d}t' \\
&\qquad \le \frac{1}{2}\|w(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|w(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \\
&\qquad\quad + C\int_0^t \|w(t')\|^{1/2} \|\nabla w(t')\|_{L^2}^{3/2} \|u(t')\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u(t')\|_{L^2}^{1/2} \mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Donc, par définition de la norme dans $\mathcal{V}_\sigma$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w(t)\|_{L^2}^2 + \frac{3}{4}\nu \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \le & \frac{1}{2}\|w(0)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \\
& + C\int_0^t \|w(t')\|^{1/2} \|\nabla w(t')\|_{L^2}^{3/2} \|u(t')\|_{L^2}^{1/2} \|\nabla u(t')\|_{L^2}^{1/2} \mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on va utiliser l'inégalité de convexité bien connue

$$ab \le \theta a^{1/\theta} + (1-\theta) b^{1/(1-\theta)}$$

avec $a = \frac{3^{3/4}C}{\nu^{3/4}}\|w(t')\|^{1/2}\|u(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}^{1/2}$ et $b = \frac{1}{(3\nu)^{3/4}}\|\nabla w(t')\|^{3/2}$ et $\theta = \frac{1}{4}$. On obtient

$$C\|w(t')\|^{1/2}\|\nabla w(t')\|_{L^2}^{3/2}\|u(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}^{1/2} \le \frac{C}{\nu^3}\|w(t')\|_{L^2}^2\|u(t')\|_{L^2}^2\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\nu\|\nabla w(t')\|^2.$$

En réinjectant :

$$\begin{aligned}
\|w(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \le & \|w(0)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t' \\
& + C\int_0^t \|w(t')\|_{L^2}^2 \left(\frac{1}{\nu^3}\|u(t')\|_{L^2}^2\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 + \nu\right) \mathrm{d}t',
\end{aligned}$$

donc, le lemme de Grönwall donne :

$$\begin{aligned}&\|w(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \\ &\leq \left(\|w(0)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' \right) \exp \left(\frac{C}{\nu^3} \sup_{\tau \in [0,t]} \|u(\tau)\|_{L^2}^2 \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' + \nu t \right).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Or, en écrivant l'inégalité d'énergie sur u :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'} \|u(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma},$$

donc, de la même façon que ci-dessus :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' + \nu \int_0^t \|u(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2 \mathrm{d}t'.$$

Donc par définition de la norme $\mathcal{V}_\sigma$:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' + \nu \int_0^t \|u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t'.$$

Par Gronwall,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \leq \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t},$$

donc,

$$\sup_{\tau \in [0,t]} \|u(\tau)\|_{L^2}^2 \leq \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}$$

et

$$\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\nu} \left(\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|f(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma'}^2 \mathrm{d}t' \right) e^{\nu t}.$$

Et rapprochant ces deux dernières égalités de (3.7) on obtient le résultat, en se rappelant que les rôles de u et v sont symétriques. $\square$

III Solutions stables en 3D

En trois dimensions, les choses se corsent. On peut prouver qu'une solution de Leray qui est en plus $L^4([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$ est **unique**, **stable** et **régulière** : c'est ce qu'on prouvera dans cette première sous-section. On prouvera ensuite que les solutions de Leray possèdent bien cette régularité, dans le cas d'un domaine sans bord, mais seulement sur un temps fini. La norme $L^4([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$ de ces solutions peut exploser, même si la norme $L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$, elle, n'explose pas. On peut par ailleurs prouver que dans le cas d'une condition initiale suffisamment petite, la norme $L^4([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$ n'explose pas, et la solution est donc globale.

III.1 Solutions fortes dans $L^4\mathcal{V}_\sigma$

THÉORÈME 3.4. ***(Unicité forte en 3D)**. Soit u la solution de Leray de (NS$_\nu$) associé à une condition initiale u_0 et une force $f \in L^2([0,T],\mathcal{V}')$. On suppose de plus que $u \in L^4([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$. Alors u est **unique**, appartient à $\mathcal{C}([0,T],\mathcal{H})$ et vérifie l'égalité d'énergie :*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\nabla(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t'.$$

Preuve. On a, pour tout $t \in [0,T]$, d'après la proposition (2.6) :

$$\begin{aligned}\|Q(u(t),u(t))\|_{\mathcal{V}'} &\leq C\|u(t)\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{3/2}\\ &\leq C\|u\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{H})}^{1/2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^{3/2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\|Q(u,u)\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}')}^2 &\leq C\|u\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{H})}\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^2}^3 \mathrm{d}t'\\ &= C\|u\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{H})}\|u\|_{L^3([0,T],\mathcal{V}_\sigma)}^3.\end{aligned}$$

Comme $u \in L^\infty([0,T],\mathcal{H}) \cap L^4([0,T],\mathcal{V}_\sigma$, on a bien $Q(u,u) \in L^2([0,T],\mathcal{V}')$. Ainsi, u est solution de (ES$_\nu$) pour la force $f + Q(u,u)$. Ainsi, d'après le théorème 3.1, on a bien l'unicité et $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})$. De plus, d'après l'égalité d'énergie (corollaire 3.1), on a :

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t' + \int_0^t \langle Q(u(t'), u(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t'$$

et d'après la proposition 2.6, on a $\langle Q(u(t'), u(t'), u(t')\rangle = 0$, donc on a bien l'égalité d'énergie recherchée. □

On appelera solution **forte** toute solution de (NS_ν) correspondant au théorème ci-dessus.

Théorème 3.5. ***(Stabilité en 3D)****. Soit u, v deux solutions de (NS_ν) associées à des conditions initiales respectives $u_0, v_0 \in \mathcal{H}$ et des forces $f, g \in L^2([0,T], \mathcal{V}')$. On suppose de plus que $u, v \in L^4([0,T], \mathcal{V}_\sigma)$, de sorte que s'applique le théorème ci-dessus. Alors on a l'inégalité de* ***stabilité*** *suivante :*

$$\begin{aligned}
&\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t' \\
&\quad \leq \left(\|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2 \mathrm{d}t'\right) \exp\left(\frac{C}{\nu^3} \min\left[\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^4, \int_0^t \|\nabla v(t')\|_{L^2}^4\right]\right).
\end{aligned}$$

Preuve. On note $w := u - v$ et

$$\delta_\nu(t) = \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla w(t')\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t'.$$

Alors on a, d'après l'inégalité d'énergie en tant que solution de Leray :

$$\begin{aligned}
\delta_\nu(t) &= \|u(t)\|_{L^2}^2 + \|v(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu \int_0^t \left(\|\nabla u(t')\|_{L^2}^2 + \|\nabla v(t')\|_{L^2}^2\right) \mathrm{d}t' && (3.8)\\
&\quad - 2(u(t)|v(t))_{L^2} - 4\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2} \mathrm{d}t' && (3.9)\\
&\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t' + 2\int_0^t \langle g(t'), v(t')\rangle \mathrm{d}t' && (3.10)\\
&\quad - 2(u(t)|v(t))_{L^2} - 4\nu \int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2} \mathrm{d}t'. && (3.11)
\end{aligned}$$

L'idée est d'étudier le terme croisé $(u(t)|v(t))_{L^2}$. Pour cela, on a besoin du lemme suivant, qui se prouve en projetant (encore une fois) l'équation de Navier-Stokes.

Lemme 3.1. *Soit u solution forte de (NS_ν) sur $[0,T]$ associé à une force f. Alors il existe une suite $\tilde{u_k} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$ et (p_k) de H_0^1 telle que :*

- *On a $\tilde{u_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ dans $L^4([0,T], \mathcal{V}_\sigma) \cap L^\infty([0,T], \mathcal{H})$.*
- *Pour tout $t \in [0,T]$,*

$$\partial_t \tilde{u_k} - \nu \Delta \tilde{u_k} = Q(\tilde{u_k}, \tilde{u_k}) + f + R_k - \nabla p_k$$

avec $R_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ dans $L^2([0,T], \mathcal{V}_\sigma)$.

Comme $\tilde{u_k} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$, on peut la voir comme une fonction test, et comme v est en particulier une solution de Leray :

$$
\begin{aligned}
B_k(t) &= (v(t)|\tilde{u_k}(t))_{L^2} \\
&= (v_0|\tilde{u_k})_{L^2} + \int_0^t \langle g(t'), \tilde{u_k}(t')\rangle \mathrm{d}t' \\
&+ \int_0^t \big(-\nu(\nabla v(t')|\nabla \tilde{u_k}(t'))_{L^2} + (v(t')\otimes v(t')|\nabla \tilde{u_k}(t'))_{L^2} + (v(t')|\partial_t \tilde{u_k}(t'))_{L^2}\big)\mathrm{d}t' \\
&= (v_0|\tilde{u_k})_{L^2} + \int_0^t \langle g(t'), \tilde{u_k}(t')\rangle \mathrm{d}t' + \int_0^t \langle f(t'), v(t')\rangle \mathrm{d}t' \\
&+ \int_0^t \big(-2\nu(\nabla v(t')|\nabla \tilde{u_k}(t'))_{L^2} + (v(t')\otimes v(t')|\nabla \tilde{u_k}(t'))_{L^2} + (v(t')|Q(\tilde{u_k}(t'), \tilde{u_k}(t')))_{L^2}\big)\mathrm{d}t' \\
&+ \int_0^t (v(t')|R_k(t'))_{L^2}\mathrm{d}t'.
\end{aligned}
$$

Or $\tilde{u_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ dans $L^\infty([0,T],\mathcal{H})$, donc

$$B_k(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} (u(t)|v(t))_{L^2}$$

et

$$(v_0|u_k(0))_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} (v_0|u_0)_{L^2}.$$

Comme $\tilde{u_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} u$ dans $L^4([0,T],\mathcal{V}_\sigma) \subset L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$,

$$\int_0^t \langle g(t'), \tilde{u_k}(t')\rangle \mathrm{d}t' \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t \langle g(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t'$$

et

$$\int_0^t (\nabla v(t')|\nabla \tilde{u_k}(t'))_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^t (\nabla v(t')|\nabla u(t'))_{L^2}.$$

De plus, par définition :

$$\int_0^t (v(t')|R_k(t'))_{L^2}\mathrm{d}t' \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

On pose donc

$$
\begin{aligned}
N_k(t) &= \int_0^t \big((v(t')\otimes v(t')|\nabla \tilde{u_k}(t'))_{L^2} + (v(t')|Q(\tilde{u_k}(t'), \tilde{u_k}(t')))_{L^2}\big)\mathrm{d}t' \\
&= \int_0^t \big((Q(v(t'), v(t'))|\tilde{u_k}(t'))_{L^2} + (v(t')|Q(\tilde{u_k}(t'), \tilde{u_k}(t')))_{L^2}\big)\mathrm{d}t',
\end{aligned}
$$

de telle façon que

$$\begin{aligned}(u(t),v(t))_{L^2} = (v_0|\tilde{u_k})_{L^2} + \int_0^t \langle g(t'),u(t')\rangle \mathrm{d}t' + \int_0^t \langle f(t'),v(t')\rangle \mathrm{d}t' \\ - 2\nu \int_0^t (\nabla v(t')|\nabla u(t'))_{L^2}\mathrm{d}t' + \lim_{k\to\infty} N_k.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Or, pour tout $a,b \in \mathcal{V}_\sigma$, encore d'après la proposition 2.6

$$\begin{aligned}\langle Q(b,b),a\rangle + \langle Q(a,a),b\rangle &= \langle Q(b,b),a-b\rangle + \langle Q(a,a),b-a\rangle \\ &= \langle Q(b,a),a-b\rangle - \langle Q(b,a-b),a-b\rangle + \langle Q(a,a),b-a\rangle \\ &= \langle Q(a-b,a),b-a\rangle \\ &= ((a-b)\otimes a|\nabla(b-a))_{L^2}.\end{aligned}$$

Puis, par Holder ($\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned}((a-b)\otimes a|\nabla(b-a))_{L^2} &\le C\|(a-b)\otimes a\|_{L^2}\|\nabla(b-a)\|_{L^2} \\ &\le \|a-b\|_{L^3}\|a\|_{L^6}\|\|\nabla(b-a)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Par Gagliardo-Niremberg :

$$\begin{aligned}\|a\|_{L^6} &\le C\|\nabla a\|_{L^2} \\ \|a-b\|_{L^3} &\le C\|a-b\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(a-b)\|_{L^2}^{1/2},\end{aligned}$$

donc

$$\|a-b\|_{L^3}\|a\|_{L^6}\|\|\nabla(b-a)\|_{L^2} \le C\|a-b\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(a-b)\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla a\|_{L^2}.$$

On applique à $a=\tilde{u_k}(t')$ et $b=v(t')$:

$$N_k(t) \le C\int_0^t \|\tilde{u_k}(t')-v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(\tilde{u_k}(t')-v(t'))\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla\tilde{u_k}(t')\|_{L^2}.$$

Or

$$\begin{cases}\|\nabla\tilde{u_k}\|_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|\nabla u\|_{L^2} & \text{dans } L^4([0,T]) \\ \|\widetilde{u_k - v}\|_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|u-v\|_{L^2} & \text{dans } L^\infty([0,T]) \\ \|\nabla\tilde{u_k}\|_{L^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \|\nabla u\|_{L^2} & \text{dans } L^2([0,T])\end{cases} \tag{3.13}$$

Donc

$$\lim_{k\to\infty} N_k(t) \leq C\int_0^t \|u(t')-v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(u(t')-v(t'))\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'. \tag{3.14}$$

Ainsi, tout compte fait, en rapprochant (3.14), (3.8) et (3.12) :

$$\begin{aligned}
\delta_\nu(t) &\leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \|v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle f(t'), u(t')\rangle \mathrm{d}t' + 2\int_0^t \langle g(t'), v(t')\rangle \mathrm{d}t' \\
&\quad - 2(u(t)|v(t))_{L^2} - 4\nu\int_0^t (\nabla u(t')|\nabla v(t'))_{L^2}\mathrm{d}t' \\
&= \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \langle (f-g)(t'), (u-v)(t')\rangle \mathrm{d}t' - 2\lim_{k\to\infty} N_k \\
&\leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}\|(u-v)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}\mathrm{d}t' \\
&\quad + C\int_0^t \|u(t')-v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(u(t')-v(t'))\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Puis, en utilisant comme souvent $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned}
&\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu\int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\mathrm{d}t' \\
&\qquad \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{4}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2\mathrm{d}t' + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|(u-v)(t')\|_{\mathcal{V}_\sigma}^2\mathrm{d}t' \\
&\qquad\quad + C\int_0^t \|u(t')-v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(u(t')-v(t'))\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

Par définition de la norme $\mathcal{V}_\sigma$:

$$\begin{aligned}
&\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2 + \frac{7\nu}{4}\int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\mathrm{d}t' \\
&\qquad \leq \|u_0 - v_0\|_{L^2}^2 + \frac{4}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2\mathrm{d}t' + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|(u-v)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t' \\
&\qquad\quad + C\int_0^t \|u(t')-v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla(u(t')-v(t'))\|_{L^2}^{3/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}\mathrm{d}t'.
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de convexité

$$ab \leq \theta a^{1/\theta} + (1-\theta)b^{1/(1-\theta)}$$

avec $\theta = \frac{1}{4}$, $a = C\nu^{-3/4}\|u(t')-v(t')\|_{L^2}^{1/2}\|\nabla u(t')\|_{L^2}$ et $b = \nu^{3/4}\|\nabla(u(t')-v(t'))\|_{L^2}^{3/2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2 + \frac{7\nu}{4}\int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\mathrm{d}t' \\ \leq \|u_0-v_0\|_{L^2}^2 + \frac{4}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2\mathrm{d}t' + \frac{\nu}{4}\int_0^t \|(u-v)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t' \\ + \frac{C}{4\nu^3}\int_0^t \|\nabla u(t')\|_{L^2}^4\|(u-v)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t' + \frac{3}{4}\nu\int_0^t \|\nabla(u-v)\|_{L^2}^2\mathrm{d}t',\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|(u-v)(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t \|\nabla(u-v)(t')\mathrm{d}t' \\ \leq \|u_0-v_0\|_{L^2}^2 + \frac{4}{\nu}\int_0^t \|(f-g)(t')\|_{\mathcal{V}'_\sigma}^2\mathrm{d}t' \\ + \int_0^t \left(\frac{C}{\nu^3}\|\nabla u(t')\|_{L^2}^4 + \nu\right)\|(u-v)(t')\|_{L^2}^2\mathrm{d}t'.\end{aligned}$$

Le lemme de Grönwall nous donne le résultat. □

III.2 Existence locale des solutions fortes dans un domaine sans bord

Dans toute cette section, on se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$, mais on pourrait très bien se placer sur le tore $\mathbb{T}^3$ (il suffirait de remplacer toutes les intégrales de Fourier par des sommes).

THÉORÈME 3.6. *Soit $u_0 \in H^{1/2} \cap \mathcal{H}$ et $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{-1/2})$. Alors il existe $T > 0$ et une solution de Leray u de (NS_ν) telle que*

$$u \in \mathcal{C}([0,T], H^{1/2}) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{3/2})$$

Il existe également $c > 0$ tel que si

$$\|u_0\|_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{-1/2})} \leq c\nu \tag{3.15}$$

alors u est une solution ***globale****. De plus, dans ce cas on a*

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Remarque 4. La convexité des normes de Sobolev donne

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^1} \leq \|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^{1/2}\|u(t)\|_{\dot{H}^{3/2}}^{1/2} \leq \|u\|_{L^\infty([0,T],H^{1/2})}^{1/2}\|u(t)\|_{\dot{H}^{3/2}}^{1/2},$$

donc $u \in L^4_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1)$. Ainsi, on est bien dans les hypothèses du théorème (3.4).

Preuve. Conditions initiales petites :
Dans cette partie on fait l'hypothèse (5.1). On reprend la même suite (u_k) solutions de $(\mathrm{NS}_{\nu,k})$. On écrit l'énergie dans l'espace $\dot{H}^{1/2}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + 2\nu\|\nabla u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}\mathrm{d}t' = 2(Q(u_k(t), u_k(t))|u_k(t))_{\dot{H}^{1/2}} + 2(f_k(t)|u_k(t))_{\dot{H}^{1/2}}.$$

Or,

$$\begin{aligned}(Q(u_k(t), u_k(t))|u_k(t))_{\dot{H}^{1/2}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{1/2}Q(\widehat{u_k(t), u_k}(t))(\xi)\hat{u_k}(t,\xi)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-1/2}Q(\widehat{u_k(t), u_k}(t))(\xi)|\xi|^{3/2}\hat{u_k}(t,\xi)\mathrm{d}\xi \\ &\leq \|Q(u_k(t'), u_k(t'))\|_{\dot{H}^{-1/2}}\|\nabla u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}.\end{aligned}$$

D'après les injections de Sobolev :

$$L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow H^{-1/2},$$

donc, pour tout $a, b \in \mathcal{V}_\sigma$,

$$\|Q(a,b)\|_{\dot{H}^{-1/2}} = \|(a\cdot\nabla)b\|_{\dot{H}^{-1/2}} \leq C\|(a\cdot\nabla)b\|_{L^{3/2}}.$$

Par Hölder ($\frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$),

$$C\|(a\cdot\nabla)b\|_{L^{3/2}} \leq C\|a\|_{L^6}\|\nabla b\|_{L^2}.$$

Puis, par l'inégalité de Gagliardo-Niremberg :

$$C\|a\|_{L^6}\|\nabla b\|_{L^2} \leq C\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}.$$

Donc

$$\|Q(a,b)\|_{\dot{H}^{-1/2}} \leq C\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2} \tag{3.16}$$

et en appliquant $a = u_k(t)$, on obtient :

$$(Q(u_k(t), u_k(t))|u_k(t))_{\dot{H}^{1/2}} \leq C\|u_k(t)\|^2_{\dot{H}^1}\|\nabla u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}.$$

La convexité des normes de Sobolev : $\|\cdot\|_{\dot{H}^1} \leq \|\cdot\|^{1/2}_{\dot{H}^{1/2}}\|\cdot\|^{1/2}_{\dot{H}^{3/2}}$ donne

$$2(Q(u_k(t), u_k(t))|u_k(t))_{\dot{H}^{1/2}} \leq C_0\|u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\nabla u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}}.$$

D'autre part, de la même façon :

$$\begin{aligned} 2(f_k(t)|u_k(t))_{\dot{H}^{1/2}} &\leq 2\|f_k(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}\|\nabla u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \\ &\leq 2\|f(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}\|\nabla u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \\ &\leq \frac{1}{\nu}\|f_k(t)\|^2_{\dot{H}^{-1/2}} + \nu\|\nabla u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}}. \end{aligned}$$

Tout compte fait

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \nu\|\nabla u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \leq C\|\nabla u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\|u_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|^2_{\dot{H}^{-1/2}}.$$

En intégrant,

$$\begin{aligned} &\|u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \nu\int_0^t \|\nabla u_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\mathrm{d}t' \\ &\qquad \leq C_0\int_0^t \|\nabla u_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\|u_k(t')\|_{\dot{H}^{1/2}}\mathrm{d}t' + \|u_0\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{1}{\nu}\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{-1/2})}. \end{aligned}$$

On prend $c = \frac{1}{4C_0}$. On a alors,

$$\begin{aligned} \|u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \int_0^t \|\nabla u_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\left(\nu - C_0\|u_k(t')\|_{\dot{H}^{1/2}}\right)\mathrm{d}t' \\ \leq (c\nu)^2. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Soit donc :

$$T_k = \sup\{t \geq 0, \forall t' \leq t, \|u_k(t')\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq 2c\nu\}.$$

Par hypothèse on a

$$\|u_k(0)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \leq \|u_0\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \leq c\nu < 2c\nu.$$

Or comme $u_k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$, on a $u_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^{1/2})$. Donc $T_k > 0$. Montrons que $T_k = +\infty$.

Par l'absurde, supposons $T_k < \infty$. Dans ce cas, d'après 3.17 :

$$\begin{aligned}\|u_k(T_k)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \int_0^{T_k} \|\nabla u_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \left(\nu - \frac{\nu}{2}\right) \mathrm{d}t' \\ \leq (c\nu)^2\end{aligned}$$

i.e.

$$\|u_k(T_k)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{\nu}{2} \int_0^{T_k} \|\nabla u_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \mathrm{d}t' \leq c\nu.$$

Donc $\|u_k(T_k)\| \leq c\nu$ ce qui contredit la minimalité de T_k. On a pourvé que $T_k = +\infty$. En reprenant 3.17, on obtient, pour tout $t \geq 0$:

$$\|u_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{\nu}{2} \int_0^{t} \|\nabla u_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \mathrm{d}t' \leq c\nu, \tag{3.18}$$

donc $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2})$ et $(\nabla u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2})$. En extrayant des sous-suites qui convergent faiblement dans ces espaces (théorème de Banach-Alaoglu), on obtient alors

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}) \text{ et } \nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}).$$

Comme on sait que $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}_\sigma)$ on a

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^{1/2}) \text{ et } \nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{1/2})$$

Montrons désormais que $\|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. On a, par convexité des normes de Sobolev :

$$\|u(t)\|_{H^{1/2}} \leq \|u(t)\|^{1/2}_{H^1} \|u(t)\|^{1/2}_{L^2}$$

Donc $u \in L^4(\mathbb{R}_+, H^{1/2})$. Or $t \mapsto \|u(t)\|_{H^{1/2}}$ est borné, ce qui donne le résultat.

<u>Conditions initiales potentiellement grandes :</u>

Soit u_L la solution au problème d'évolution :

$$\begin{cases} \partial_t u_L - \nu \Delta u_L = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u_L = 0 \\ u_L\big|_{t=0} = \mathbf{P}_{k_0} u_0 \end{cases} \tag{EL$_\nu$}$$

où k_0 sera choisi ultérieurement. L'idée est de comparer la solution à ce problème à celle qui nous intéresse. On pose donc :

$$w_k = u_k - u_L.$$

w_k vérifie alors

$$\begin{aligned}\partial_t w_k &= \nu\Delta w_k + \mathbf{P}_k Q(u_k, u_k) - \nabla p + f - f_k \\ &= \nu\Delta w_k + \mathbf{P}_k Q(w_k, w_k) - \nabla p + \mathbf{P}_k[Q(u_k, u_k) - Q(w_k, w_k)] + f - f_k,\end{aligned}$$

donc w_k est solution de

$$\begin{cases}\partial_t w_k - \nu\Delta w_k = -\nabla p + g_k + R_k \\ \operatorname{div} u_L = 0 \\ w_k\big|_{t=0} = u_0\end{cases} \tag{3.19}$$

avec $R_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}'_\sigma)$ et

$$\begin{aligned}g_k &= \mathbf{P}_k[Q(w_k, w_k) + Q(u_k, u_k) - Q(w_k, w_k)] \\ &= \mathbf{P}_k[Q(w_k, w_k) + Q(w_k, u_L) + Q(u_L, w_K) - Q(u_L, u_L)].\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_k(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} + 2\nu\|\nabla w_k(t)\|^2_{\dot H^{1/2}} &= 2(g_k(t) + R_k(t)|w_k(t))_{\dot H^{1/2}} \\ &\leq 2\big(\|g_k(t)\|_{\dot H^{-1/2}} + \|R_k(t)\|_{\dot H^{-1/2}}\big)\|\nabla w_k(t)\|_{\dot H^{1/2}}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Or on a vu au début de la preuve (3.16) que $\|Q(a,b)\|_{\dot H^{-1/2}} \leq C\|\nabla a\|_{L^2}\|\nabla b\|_{L^2}$ donc

$$\begin{aligned}\|g_k(t)\|_{\dot H^{-1/2}} &\leq \frac{C_0}{2}\big(\|\nabla w_k(t)\|^2_{L^2} + 2\|\nabla w_k(t)\|_{L^2}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2} + \|\nabla u_L(t)\|^2_{L^2}\big) \\ &\leq C_0\big(\|\nabla w_k(t)\|^2_{L^2} + \|\nabla u_L(t)\|^2_{L^2}\big)\end{aligned}$$

où on a utilisé que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Donc

$$\begin{aligned}
2\|g_k(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \\
&\leq 2C_0\|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^2\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + 2C_0\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^2\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \\
&\leq C_1\|\nabla w_k(t)\|_{L^2}^2\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{C_2}{\nu}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^4 + \frac{\nu}{4}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2
\end{aligned}$$

avec $C_1 = 2C_0$ et $C_2 = 4C_0$. Or, on a vu que, en interpolant $\dot{H}^{1/2}$ et $\dot{H}^{3/2}$:

$$\|\nabla w_k(t)\|_{L^2} \leq \|w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^{1/2}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^{1/2},$$

donc

$$\begin{aligned}
2\|g_k(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \\
&\leq C_1\|w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{C_2}{\nu}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^4 + \frac{\nu}{4}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \\
&= \left(C_1\|w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{\nu}{4}\right)\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{C_2}{\nu}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^4.
\end{aligned}$$

Ainsi, en injectant cette dernière inégalité dans (3.20) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{7\nu}{4}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \\
&\leq 2\|R_k(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} + C_1\|w_k(t)\|_{H^{1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{C_2}{\nu}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^4 \\
&\leq \frac{4}{\nu}\|R_k(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 + \frac{\nu}{4}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + C_1\|w_k(t)\|_{H^{1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{C_2}{\nu}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^4
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{3\nu}{2}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 \\
&\quad\leq \frac{4}{\nu}\|R_k(t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 + C_1\|w_k(t)\|_{H^{1/2}}\|\nabla w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 + \frac{C_2}{\nu}\|\nabla u_L(t)\|_{L^2}^4.
\end{aligned}$$

On intègre :

$$\begin{aligned}
&\|w_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{3\nu}{2}\int_0^t \|\nabla w_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\mathrm{d}t' \\
&\quad\leq \frac{4}{\nu}\|w_k(0)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \|R_k\|^2_{L^2([0,t],\dot{H}^{-1/2})} \\
&\quad\quad + C_1\int_0^t \|w_k(t')\|_{\dot{H}^{1/2}}\|\nabla w_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{C_2}{\nu}\int_0^t \|\nabla u_L(t')\|^4_{L^2}\mathrm{d}t'
\end{aligned}$$

Soit

$$T_k = \sup\left\{t \geq 0, \forall t' \leq t,\ \|w_k(t)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \frac{\nu}{2C_1}\right\}.$$

On choisit k_0 tel que

$$\|w_k(0)\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \|u_0 - \mathbf{P}_{k_0}u_0\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq \frac{\nu}{4C_1}, \tag{3.21}$$

ainsi $T_k > 0$. Soit $0 < T < T_k$. On prend $k_1 \geq k_0$ tel que

$$\|R_{k_1}\|_{L^2([0,T],\dot{H}^{-1/2})} \leq \frac{\nu^{3/2}}{4C_1}.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $k \geq k_1$

$$\|w_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \nu\int_0^t \|\nabla w_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\mathrm{d}t' \leq \frac{\nu^2}{8C_1^2} + \frac{C_2}{\nu}\int_0^t \|\nabla u_L(t')\|^4_{L^2}\mathrm{d}t'. \tag{3.22}$$

Or, comme $u_L \in \mathcal{H}_k$:

$$\|\nabla u_L(t')\|^4_{L^2} \leq k_0^2\|u_L(t)\|^4_{L^2} \leq k_0^2\|u_L\|^4_{L^\infty([0,T],L^2)},$$

donc

$$\|w_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \nu\int_0^t \|\nabla w_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\mathrm{d}t' \leq \frac{\nu^2}{8C_1^2} + \frac{C_2}{\nu}Tk_0^2\|u_L\|^4_{L^\infty([0,T],L^2)}.$$

Or il est facile de voir que $T\|u_L\|^4_{L^\infty([0,T],L^2)} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$. Soit donc $0 < T' \leq T$ tel que

$$T'\|u_L\|^4_{L^\infty([0,T'],L^2)} \leq \frac{\nu^3}{C_2 k_0^2 16 C_1^2}.$$

Alors pour tout $t \in [0, T']$:

$$\|w_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \leq \frac{3\nu^2}{16C_1^2} < \left(\frac{\nu}{2C_1}\right)^2$$

Donc pour tout $k \geq k_1$, on a $T_k \geq T'$. De la même façon que pour le cas des données initiales faibles, on peut extraire une sous suite tel que $w_k \xrightarrow[k\to\infty]{} w = u - u_L$ où u est une solution de Leray. On a alors

$$w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}) \text{ et } \nabla w \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2})$$

Comme u_L vérifie aussi la propriété ci-dessus, on a

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}) \text{ et } \nabla u \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2})$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $u \in \mathcal{C}([0, T], H^{1/2})$. Pour cela on admet temporairement la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit v solution de (ES_ν) associé à une force $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2})$ et $v_0 \in \mathcal{H} \cap H^{1/2}$. Alors on a*

$$\int_{R^3} |\xi| \|\hat{v}(\cdot, \xi)\|^2_{L^\infty([0,T]} \leq \|v_0\|_{\dot{H}^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \|f\|_{L^2([0,T], \dot{H}^{-1/2})} < +\infty \tag{3.23}$$

On veut appliquer à u, pour $g = f + Q(u, u)$. Or

$$\|g\|_{\dot{H}^{-1/2}} \leq \|f\|_{\dot{H}^{-1/2}} + \|Q(u, u)\|_{\dot{H}^{-1/2}} \leq \|f\|_{\dot{H}^{-1/2}} + C\|\nabla u\|^2_{L^2},$$

donc $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2})$ et on peut appliquer la proposition ci-dessus. Soit $\varepsilon > 0$. Alors par finitiude de l'intégrale (3.23) il existe $r > 0$ tel que

$$\int_{|\xi|>r} |\xi| \|\hat{v}(\cdot, \xi)\|^2_{L^\infty([0,T]} \mathrm{d}\xi \leq \varepsilon,$$

donc

$$\begin{aligned}
\|u(t+h) - u(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} &\leq \int_{|\xi|\leq r} |\xi| |\hat{u}(t+h, \xi) - \hat{u}(t, \xi)|^2 \mathrm{d}\xi + \int_{|\xi|>r} |\xi| |\hat{u}(t+h, \xi) - \hat{u}(t, \xi)|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq r\|\hat{u}(t+h) - \hat{u}(t)\|_{L^2} + 2\int_{|\xi|>r} |\xi| \|\hat{v}(\cdot, \xi)\|^2_{L^\infty([0,T]} \mathrm{d}\xi \\
&\leq r\|u(t+h) - u(t)\|_{L^2} + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

On conclut par continuité de u à valeurs dans $\mathcal{H}$ (théorème 3.4). $\square$

Il ne reste plus qu'à prouver la proposition 3.1.

Preuve. (de la proposition 3.1)
On a, d'après la formule (3.6) :

$$\begin{aligned}
|\xi|^{1/2}|\hat{v}(t,\xi)| &\leq |\xi|^{1/2}|\hat{v_0}(\xi)| + \left| \int_0^t |\xi| e^{-\nu|\xi|^2(t-t')} |\xi|^{-1/2} \hat{f}(t',\xi) \mathrm{d}t' \right| \\
&\leq |\xi|^{1/2}|\hat{v_0}(\xi)| + \left(\int_0^t |\xi|^2 e^{-2\nu|\xi|^2(t-t')} \mathrm{d}t' \right)^{1/2} \| |\xi|^{-1/2} \hat{f}(\xi)\|_{L^2([0,T])} \\
&= |\xi|^{1/2}|\hat{v_0}(\xi)| + \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \| |\xi|^{-1/2} \hat{f}(\xi)\|_{L^2([0,T])}.
\end{aligned}$$

On prend la norme L^2 en fréquence et on obtient le résultat. $\square$

III.3 Explosion en temps fini

Dans cette section tous les résultat sont donnés pour $f = 0$.

PROPOSITION 3.2. *Soit $u_0 \in \mathcal{V}_\sigma$, $f = 0$. Soit T^* le temps maximal d'existence de la solution u associée à u_0, $f = 0$ donnée par le théorème 3.6. Alors il existe $\tilde{c}$ une constante telle que T^* vérifie*

$$T^* \geq \frac{\tilde{c}\nu^3}{\|\nabla u_0\|^4}$$

Preuve. Il est facile de voir quand dans le cas $f = 0$, et en gardant les mêmes notations que le théorème 3.6, on a

$$\|\nabla u_L(t)\|^2 \leq \|\nabla u_0\|^2.$$

Ainsi, l'équation (3.22) devient

$$\|w_k(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} + \nu \int_0^t \|\nabla w_k(t')\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \mathrm{d}t' \leq \frac{\nu^2}{8C_1^2} + \frac{C_2}{\nu} T \|\nabla u_0\|^4_{L^2},$$

donc

$$T = \frac{\tilde{c}\nu^3}{\|\nabla u_0\|^4_{L^2}}$$

convient pour un certain $\tilde{c}$.

$\square$

THÉORÈME 3.7. ***(Explosion en temps fini)***. *Soit* $u_0 \in \mathcal{V}_\sigma$. *Soit* T^* *le temps maximal d'existence de la solution* u *donnée par le théorème 3.6 associée à* u_0, $f = 0$. *Alors si* T^* *est finie, on a*

$$\int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^4 \mathrm{d}t = \int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2 = \infty$$

et

$$T^* \leq \frac{\tilde{c}}{\nu^5} \|u_0\|_{L^2}^4.$$

Preuve. D'après la remarque 4 il suffit donc de prouver que

$$\int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^4 \mathrm{d}t = \infty.$$

Or, d'après la proposition 3.2, le temps maximal d'existence de la solution démarrant de t, qui est évidemment $T^* - t$, vérifie :

$$T^* - t \geq \frac{\tilde{c}\nu^3}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}^4},$$

donc

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2}^4 \geq \frac{\tilde{c}\nu^3}{T^* - t}. \tag{3.24}$$

On en déduit :

$$\int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^4 \mathrm{d}t \geq \int_0^{T^*} \frac{1}{T^* - t} \mathrm{d}t = \infty.$$

D'autre part, en prenant la racine carrée de (3.24) :

$$\nu \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \geq \frac{(\tilde{c}\nu^5)^{1/2}}{(T^* - t)^{1/2}},$$

puis, en intégrant, et d'après l'inégalité d'énergie :

$$\begin{aligned} (\tilde{c}\nu^5)^{1/2} \int_0^{T^*} \frac{1}{(T^* - t)^{1/2}} \mathrm{d}t &\leq \nu \int_0^{T^*} \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \mathrm{d}t \\ &\leq \|u_0\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Finalement

$$2\tilde{c}\nu^5 \sqrt{T^*} \leq \|u_0\|_{L^2}^2$$

ce qui donne le résultat. □

Chapitre 4

Equations différentielles stochastiques

Le but de ce chapitre est de définir la théorie nécessaire a l'étude des **équations différentielles stochastiques** (EDS). L'idée est d'étudier des équations de la forme

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\eta_t \tag{4.1}$$

où η_t est un **bruit blanc**. Ce bruit blanc correspond à un processus gaussien vérifiant les conditions suivantes :

(i). $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

(ii). Pour tout $t \neq t'$, η_t et $\eta_{t'}$ sont indépendants

Ces conditions sont naturellement attendue en physique. Or, la mauvaise nouvelle est qu'il n'existe aucun processus à trajectoires continues vérifiant ces hypothèses. Ainsi, on réécrit l'équation (4.1) en

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(t, X_t)\mathrm{d}t + \int_0^t \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t \tag{4.2}$$

où W_t est une primitive du bruit blanc :

$$\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t} = \eta_t$$

Comme primitive, le processus W, appelé **mouvement brownien**, est plus régulier que η_t. L'objectif de ce chapitre est dans un premier temps de définir les intégrandes de notre nouvelle théorie de l'intégration : les semimartingales. Puis, on donne les propriétés élémentaires du mouvement brownien et on construit l'intégration stochastique (d'abord d'Ito, puis de Stratonovich).

Dans toute la suite, les équations de la forme (4.2) seront constamment écrites

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t$$

qui est une convention répandue en calcul stochastique.

Ce chapitre est inspiré de [4] et [9].

I Processus à variation finie

On cherche à étudier les variations de processus stochastiques. Pour cela, posons quelques notations. On définit, pour tout fonction $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ et $\sigma = (t_i)_{0\leq i\leq p}$ une subdivision de $[0,T]$:

$$I_p^\sigma(f) = \sum_{i=1}^{p} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p.$$

On s'intéresse à la classe de processus avec les variations les plus "gentilles" :

Définition 4.1. *Une fonction continue $a \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ telle que $a(0) = 0$ est dite* ***à variation finie*** *s'il existe une mesure signée μ telle que*

$$a(t) = \mu([0,t]).$$

On peut montrer qu'il existe une unique décomposition de la mesure signée $\mu = \mu_+ - \mu_-$ telle que μ_+ et μ_- sont deux mesures dont les supports respectifs sont inclus dans deux boréliens disjoints. On note alors $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$.

Pour tout $f \in L^1([0,T], \mathrm{d}\mu)$, on écrit :

$$\int_0^T f(s)\mathrm{d}a(s) = \int_0^T f(s)\mu(\mathrm{d}s) \text{ et } \int_0^T f(s)|\mathrm{d}a(s)| = \int_0^T f(s)|\mu|(\mathrm{d}s).$$

Proposition 4.1. *Soit a à variation finie et μ associée à a. Alors*

$$|\mu|([0,t]) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{p_n} |a(t_i) - a(t_{i-1})|\right\} = \sup_\sigma I_1^\sigma(a|_{[0,t]})$$

où le sup *porte sur les subdivisions de* $[0, t]$*. De plus, pour toute suite* (σ^n) *de subdivisions emboitées dont le pas tend vers 0, on a :*

$$|\mu|([0, t]) = \lim_{n \to \infty} I_1^{\sigma^n}(a). \tag{4.3}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} |a(t_i^n) - a(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{p} |\mu(]t_{i-1} - t_i])| \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} |\mu|(]t_{i-1} - t_i]) \\ &= \mu([0, t]).\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à prouver 4.3, qui impliquera la seconde inégalité. On montre le résultat dans le cas des dyadiques, i.e. $t_i^n = \frac{i}{2^n} T$. On note

$$\Omega = [0, T], \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}([0, T]) \text{ et } \mathbb{P}(ds) = \frac{|\mu|(\mathrm{d}s)}{\mu([0, T])}$$

ce qui fait de $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}$ un espace probabilisé. On le munit de la filtration

$$\mathcal{B}_n = \sigma\left(]t_{i-1}^n, t_i^n], 0 \leq i \leq 2^n\right)$$

On définit également, en notant $D_\pm$ les supports respectifs de $\mu_\pm$

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in D_+ \\ -1 & \text{si } t \in D_- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.4}$$

et $X_n = \mathbb{E}\left[X | \mathcal{B}_n\right]$. Alors X_n est constante sur chaque $]t_{i-1}^n, t_i^n]$ et vaut

$$\frac{a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)}{|\mu|(]t_{i-1}^n, t_i^n])}$$

Donc :

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = \frac{1}{|\mu|([0, T])} \sum_{i=1}^{p_n} |a(t_i^n) - a(t_{i-1}^n)|$$

De plus c'est une martingale fermée, donc X_n converge p.s. et dans L^1. En particulier :

$$\mathbb{E}[|X_n|] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[|X|] = 1$$

ce qui donne le résultat. □

DÉFINITION 4.2. *Un* ***processus à variation finie*** *(A_t) est un processus adapté dont les trajectoires sont p.s. à variations finies. On dit que (A_t) est un* ***processus croissant*** *si de plus ses trajectoires sont p.s. croissantes.*

II Martingales locales et variations

DÉFINITION 4.3. *Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_t)_{t\geq 0}$ est une* ***martingale locale (issue de 0)*** *si M_0 et s'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêts telle que $T_n \to +\infty$ p.s. et pour tout $n \geq 0$, M^{T^n} est une martingale.*
On dit que M est une ***martingale locale*** *si $M_t = M_0 + N_t$, où N_t est une martingale locale issue de 0.*
Dans tous les cas, on dit que T_n ***réduit*** *M.*

Remarque 5. Quitte à remplacer T_n par $T_n \wedge n$, on peut supposer que M^{T_n} est une martingale locale **uniformément intégrable**.

PROPOSITION 4.2. *On dispose des propriétés suivantes :*

(i). Une martingale à trajectoires continues est une martingale locale.

(ii). Si M est une martingale locale, alors pour tout temps d'arrêt T, M^T reste une martingale locale.

(iii). Une martingale locale M telle que $M_t \leq Z$ pour un $Z \in L^1$ est une martingale.

Preuve. (i). On prend $T_n = n$ et on applique le corollaire 1.5.

(ii). Il suffit de remarquer que $M^T_{t\wedge T_n} = M^{T_n}_{t\wedge T}$ est une martingale.

(iii). Pour tout $n \geq 0$, on a par définition pour tout $0 \leq s \leq t$

$$M_{s\wedge T_n} = \mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s],$$

or $M_{s\wedge T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} M_s$ et, par convergence dominée :

$$\mathbb{E}[M_{t\wedge T_n}|\mathcal{F}_s] \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} M_t$$

ce qui donne le résultat.

□

On désire maintenant étudier les variations des martingales locales. On dispose du premier résultat suivant, qui montre qu'une martingale locale est quasiment toujours à variation infinie.

THÉORÈME 4.1. *Soit M une martingale locale. Alors si M est un processus à variation finie, $M = 0$ (à indistinguabilité près).*

Preuve. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $\omega \in \Omega$:

$$\tau_n(\omega) = \inf \left\{ t \geq 0 \,|\, \int_0^t |\mathrm{d}M_s(\omega)| \geq n \right\}.$$

Soit alors $N = M^{\tau_n}$. Il est clair que N est une martingale locale telle que

$$\int_0^\infty |\mathrm{d}N_s| \leq n.$$

En particulier on a

$$|N_t - N_0| \leq \int_0^t |\mathrm{d}N_s| \leq n$$

et comme $N_0 = 0$, (N_t) est bornée. Donc d'après la proposition 4.2, N est un martingale. D'autre part, soit (t_i) une subdivision de $[0, t]$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N_t^2\right] &= \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\left[N_{t_i}^2 - N_{t_{i-1}}^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^p \mathbb{E}\left[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right] \\
&\leq n\mathbb{E}\left[\sup |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right]
\end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété $\mathbb{E}[N_a N_b] = \mathbb{E}[N_{a\wedge b}]$ à la deuxième ligne. En appliquant à une suite de subdivision dont le pas tend vers 0, par continuité, on obtient $\mathbb{E}[N_t^2] = 0$, soit $\mathbb{E}\left[M_{\tau_n \wedge t}^2\right]$ pour tout n. En faisant tendre $n \to \infty$ on obtient $\mathbb{E}[M_t]^2 = 0$. □

Pour étudier les variations d'une martingale locale, il faut donc s'intéresser à sa variation quadratique.

Théorème 4.2. *Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale. Alors il existe un unique (à indistinguabilité près) processus croissant noté $(\langle M, M\rangle_t)_{t\geq 0}$ tel que*

$$M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$$

soit une martingale locale.
De plus, pour toute suite (σ^n) de subdivisions emboitées, on a :

$$I_2^{\sigma^n}(M|_{[0,T]}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle M, M\rangle_T$$

La preuve est compliquée, et nous ne la présenterons pas. Elle se trouve dans [4].

Définition 4.4. *Soit M, N deux martingales locales. On définit le* ***crochet*** *de M et N par*

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle M, M\rangle_t - \langle N, N\rangle_t\right)$$

Remarque 6. On reconnaît dans cette définition l'expression d'une forme bilinéaire en fonction de sa forme quadratique associée.

Proposition 4.3. *Soit M, N deux martingales locales. Alors*

(i). *$\langle M, N\rangle$ est l'unique processus (à indistinguabilité près) tel que*

$$M_tN_t - \langle M, N\rangle_t$$

soit une martingale locale.

(ii). *$(M, N) \mapsto \langle M, N\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.*

(iii). *Pour tout suite $(\sigma^n = (t_i^n)_{0\leq i\leq p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de subdivisions emboîtées de $[0, T]$, on a*

$$\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle M, N\rangle_T.$$

Preuve. (i). On écrit $M_tN_t = \frac{1}{2}\big((M_t+N_t)^2 - M_t^2 - N_t^2\big)$ et on utilise que l'espace des martingale locales est un espace vectoriel. On applique ensuite la caractérisation du théorème 4.2.

(ii). Cela découle du point (i).

(iii). On écrit :

$$\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i}-M_{t_{i-1}})(N_{t_i}-N_{t_{i-1}})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p_n}((M+N)_{t_i}-(M+N)_{t_{i-1}})^2\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2-\sum_{i=1}^{p_n}(N_{t_i}-N_{t_{i-1}})^2\right)$$

et on applique le théorème 4.2.

□

DÉFINITION 4.5. *Un processus $X=(X_t)_{t\geq 0}$ est appelé **semimartingale** si il s'écrit*

$$X_t = A_t + M_t$$

où A_t est un processus à variation bornées, et M_t une martingale locale.

Remarque 7. La décomposition $X_t = A_t + M_t$ est unique (à indistinguabilité près). En effet, soit une autre décomposition $X_t = A'_t + M'_t$. Alors

$$M_t - M'_t = A'_t - A_t$$

Donc $M_t - M'_t$ est à variation finie. Mais d'après le théorème 4.1, M_t et M'_t sont indistinguables.

III Le mouvement brownien

DÉFINITION 4.6. *$W=(W_t)_{t\geq 0}$ est un **mouvement brownien** réel si*

(i). $W_0 = 0$ p.s.

(ii). W est à trajectoires continues.

(iii). W a des incréments indépendants : pour tout $0\leq t_0 < .. < t_n$,

$$(W_{t_0}, W_{t_1}-W_{t_0}, ..., W_{t_n}-W_{t_{n-1}})$$

est une famille indépendante.

(iv). Pour tout $0\leq s\leq t$,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

PROPOSITION 4.4. *Soit W un mouvement brownien. Alors W est un processus gaussien centré tel que*

$$\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = \min(s,t).$$

Preuve. Soit $t_0 < .. < t_n$. Alors

$$(W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$$

est un vecteur gaussien. Donc, par combinaison linéaire :

$$(W_{t_0}, W_{t_1}, ..., W_{t_n})$$

est un vecteur gaussien (centré). De plus pour $0 \leq s \leq t$ on a

$$t - s = \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[W_t^2\right] + \mathbb{E}\left[W_s^2\right] - 2\mathbb{E}\left[W_t W_s\right],$$

donc

$$\mathbb{E}\left[W_t W_s\right] = s.$$

□

PROPOSITION 4.5. *Soit W un mouvement brownien. Alors pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$, il existe une modification de W dont les trajectoires sont α-hölderiennes.*

Preuve. On a, d'après la formule des moments d'une variable gaussienne :

$$\mathbb{E}\left[|W_t - W_s|^{2k}\right] \leq \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^k,$$

donc, pour tout $k \geq 2$, W admet une modification $\alpha_k = \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$-hölderienne. $k \to \infty$ donne le résultat voulu. □

Remarque 8. Il est facile de voir que si Y est modification de X et que ces deux sont processus sont continus, alors X et Y sont indistinguables. En effet, on a dans ce cas

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{t \in \mathbb{Q} \cap [0,T]} X_t = Y_t\right] = 1$$

Puis, par continuité :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t| = 0\right] = 1$$

Ainsi, tout mouvement brownien est (à indistinguabilité près) à trajectoires α-hölderiennes pour $\alpha < \frac{1}{2}$.

Les propositions suivantes se déduisent directement de la définition du mouvement brownien.

PROPOSITION 4.6. *Soit W un mouvement brownien. Alors*

(i). ***(Translation)****. Pour tout $\tau > 0$,*

$$(W_{t+\tau} - W_\tau)_{t\geq 0}$$

est un mouvement brownien.

(ii). ***(Symétrie)****.*

$$(-W_t)_{t\geq 0}$$

est un mouvement brownien.

(iii). ***(Scaling)****. Pour tout $\lambda > 0$,*

$$(\lambda W_{t/\lambda^2})_{t\geq 0}$$

est un mouvement brownien.

(iv). ***(Réversibilité)****.*

$$(tW_{1/t})_{t\geq 0}$$

prolongé par 0 en 0 est un mouvement brownien.

Pour finir, étudions les variations du mouvement brownien.

PROPOSITION 4.7. *Soit W un mouvement brownien et soit $(\mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{\sqcup})_{t\geq 0} = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$ sa filtration canonique. On suppose que $\mathcal{F}^{\mathcal{W}}_{\sqcup} \subset \mathcal{F}_t$. Dans ce cas :*

(i). W est une martingale.

(ii). $W_t^2 - t$ est une martingale.

Preuve. (i). Soit $0 \leq s \leq t$. Alors par définition :

$$\mathbb{E}\left[W_t - W_s | \mathcal{F}_{\int}\right] = \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] = 0$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[W_t | \mathcal{F}_s\right] = W_s$$

(ii). De même, on a

$$\mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2\right] = t - s$$

donc

$$\mathbb{E}\left[W_t^2|\mathcal{F}_s\right] - 2W_s\mathbb{E}\left[W_t|F_s\right] + W_s^2 = t - s.$$

Finalement :

$$\mathbb{E}\left[W_t^2 - t|\mathcal{F}_s\right] = W_s^2 - s.$$

□

La proposition ci-dessus couplée au théorème 4.2 nous donne directement :

Corollaire 4.1. *Soit W un mouvement brownien. Alors pour tout $t \geq 0$*

$$\langle W, W\rangle_t = t.$$

IV Les intégrales stochastiques

Soit W un mouvement brownien. On suppose que la filtration $\mathcal{F}_t$ contient la filtration canonique $\mathcal{F}_t^W$.

IV.1 Construction de l'intégrale d'Ito

L'objectif de cette section est de définir, lorsque cela est possible

$$I[f] = \int_0^T f_t \mathrm{d}W_t.$$

On définit l'ensemble des processus qui seront intégrables contre un mouvement brownien.

Définition 4.7. *On note $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ l'espace des processus stochastiques f mesurables, $\mathcal{F}_t$-adaptés tels que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f_t^2 \mathrm{d}t\right] < \infty$$

De la même façon que pour l'intégrale de Lebesgue, on va définir l'intégrale d'Ito pour des processus constants par morceaux (en temps).

Définition 4.8. *On dit qu'un processus stochastique $\varphi = (\varphi_t)_{t\geq 0}$ est un* ***processus simple*** *si*

$$\varphi_t = \sum_{j=1}^{p} e_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1}[}$$

où (t_j) est une subdivision de $[0,T]$ et e_j est une v.a.r. $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable et L^2.

On remarque les processus simples sont inclus dans $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Ainsi, on définit, pour φ un processus simple :

$$\boxed{I[\varphi] = \sum_{j=1}^{p} e_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).}$$

L'observation fondamentale est que cette définition préserve la norme :

Proposition 4.8. ***(Isométrie d'Ito, processus simples)****. Pour φ un processus simple, on a*

$$\|I[\varphi]\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\|I[\varphi]\|^2_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{p} e_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{p} \mathbb{E}\left[e_i e_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right].\end{aligned}$$

Or, pour $i < j$, on a $e_i e_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable et $(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_j}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e_i e_j (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] &= \delta_{ij}\mathbb{E}\left[e_j^2 (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2\right] \\ &= \delta_{ij}\mathbb{E}\left[e_j^2\right]\mathbb{E}\left[(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})^2\right]\end{aligned}$$

car e_j est $\mathcal{F}_{t_j}$-mesurable. Donc :

$$\begin{aligned}\|I[\varphi]\|_{L^2(\Omega)} &= \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[e_j\right](t_{j+1} - t_j) \\ &= \|\varphi\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}.\end{aligned}$$

□

On veut étendre cette isométrie à tout $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Pour cela, on procède par densité.

PROPOSITION 4.9. ***(Densité des processus simples dans** $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$**).** *Soit $f \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Alors il existe une suite f_n de processus simples tels que*

$$\|f - f_n\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Preuve. Pour prouver cette proposition, on procède en trois étape, en prouvant la densité des fonctions simples dans des espaces de plus en plus grands.

DENSITÉ DES PROCESSUS SIMPLES DANS $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ BORNÉ À TRAJECTOIRES CONTINUES :

Soit $g \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ tel que g est borné et à trajectoires continue.s On a donc, pour tout $t \in [0,T], \omega \in \Omega$:

$$g_t(\omega) \leq C.$$

Soit $(\sigma^n)_{n\geq 0} = (t_j^{(n)})_{n\geq 0}$ une suite de subdivisions emboîtées de pas tendant vers 0. Soit

$$g^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} g_{t_j}^{(n)} \mathbf{1}_{[t_j^{(n)}, t_{j+1}[}.$$

Alors, comme g est à trajectoires continues, $g^{(n)}$ converge vers g ponctuellement p.s.. Donc, comme g est bornée, par convergence dominée

$$\|g - g^{(n)}\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

DENSITÉ DES PROCESSUS $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ BORNÉ À TRAJECTOIRES CONTINUES DANS $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ BORNÉ :

Soit $h \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ borné. Soit $(\psi_n)_{n\geq 0}$ un noyau, c'est à dire :

(i). $\psi_n \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$ et $\operatorname{supp}\psi_n \subset [0,1/n]$.

(ii). $\int \psi_n = 1$.

(iii). $\psi_n \geq 0$.

Alors $\psi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\delta}$ au sens des distributions. Soit

$$h_t^{(n)} = (h * \psi_n)(t).$$

Alors $h^{(n)}$ est à trajectoires continues et bornée. De plus, il est connu que $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h$ dans $L^2([0,T])$ p.s.. Puis, par convergence dominée, on a

$$\|h^{(n)} - h\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Densité des processus $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ borné $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$:

Soit $f \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. Soit $f^{(n)} = f\mathbf{1}_{-n\leq f\leq n}$. Par le théorème de convergence dominée, on conclut :

$$\|f^{(n)} - f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Définition 4.9. *Soit $f \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. On définit*

$$I[f] = \lim_{n\to\infty} I[\varphi^{(n)}] \text{ dans } L^2(\Omega)$$

où $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ est une suite de processus simples telle que

$$\|\varphi^{(n)} - f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cette définition nécessite certaines vérifications :

(i). $(I[\varphi^{(n)}])$ admet une limite. En effet, d'après l'isométrie d'Ito

$$\begin{aligned}\|I[\varphi^{(n)}] - I[\varphi^{(m)}]\|_{L^2(\Omega)} &= \|I[\varphi^{(n)} - \varphi^{(m)}]\|_{L^2(\Omega)}\\ &= \|\varphi^{(n)} - \varphi^{(m)}\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}\end{aligned}$$

donc $(I[\varphi^{(n)}])$ est de Cauchy.

(ii). Cette limite est unique. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi^{(n)} - f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|\psi^{(n)} - f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} = 0.$$

Alors, de la même façon :

$$\begin{aligned}\|I[\varphi^{(n)}] - I[\psi^{(n)}]\|_{L^2(\Omega)} &= \|I[\varphi^{(n)} - \psi^{(n)}]\|_{L^2(\Omega)}\\ &= \|\varphi^{(n)} - \psi^{(n)}\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}\end{aligned}$$

et ce dernier terme est de limite nulle.

On a alors l'extension de la proposition 4.8 :

THÉORÈME 4.3. ***(Isométrie d'Ito)***. *Soit* $f \in L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. *Alors*

$$\|I[f]\|_{L^2(\Omega)} = \|f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}$$

c'est à dire :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f_t dW_t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_t^2 dt\right]$$

Remarque 9. La propriété s'étend facilement au produit scalaire. Si $f, g \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f_t \mathrm{d}W_t \int_0^T g_t \mathrm{d}W_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T f_t g_t \mathrm{d}t\right].$$

On déduit également directement :

COROLLAIRE 4.2. *Soit* (f_n) *une suite de* $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ *telle que*

$$\|f_n - f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

alors

$$\|I[f_n] - I[f]\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

IV.2 Propriétés de l'intégrale d'Ito

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes par passage à la limite :

PROPOSITION 4.10. *Soit* W *un mouvement brownien et* $f \in L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. *Alors*

(i). $\int \mathrm{d}W_t$ *vérifie la propriété de Chasles.*

(ii). $\int \mathrm{d}W_t$ *est linéaire.*

(iii). $\mathbb{E}\left[\int_0^T f_t \mathrm{d}W_t\right] = 0$.

(iv). $\int_0^T f_t \mathrm{d}W_t$ *est* $\mathcal{F}_T$*-mesurable.*

THÉORÈME 4.4. *Soit* $f \in L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. *Alors le processus défini par*

$$M_t = \int_0^t f_s \mathrm{d}W_s$$

est une martingale. De plus,

$$M_t^2 - \int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s$$

définit une martingale.

Preuve. Soit $\varphi^{(n)}$ des fonctions élémentaires telles que

$$\|\varphi^{(n)} - f\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Soit $I_t^{(n)} = \int_0^t \varphi_s^{(n)} \mathrm{d}W_s$ et $I(t) = \int_0^t f_s \mathrm{d}B_s$. Alors pour tout $n \geq 0$, I_n est une martingale. En effet, pour $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \varphi_u^{(n)} \mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \int_0^s \varphi_u^{(n)} \mathrm{d}W_u + \mathbb{E}\left[\int_s^t \varphi_u^{(n)} \mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_s\right] \\
&= I_s^{(n)} + \sum_{t \leq t_j \leq t_{j+1} \leq s} \mathbb{E}\left[e_j^{(n)}(B_{t_{j+1}} - B_j)|\mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e_j^{(n)}(B_{t_{j+1}} - B_j)|\mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e_j^{(n)}(B_{t_{j+1}} - B_j)|\mathcal{F}_{t_j}\right]|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e_j^{(n)}\mathbb{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_j)|\mathcal{F}_{t_j}\right]|\mathcal{F}_s\right] = 0
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}\left[I_t^{(n)}|\mathcal{F}_s\right] = I_s^{(n)}$. Mais on a

$$I_t^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \int_0^t f_u \mathrm{d}W_u = M_t$$

donc $\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] = M_t$ par passage à la limite.

La deuxième partie du théorème se montre de manière similaire.

□

On a également, la preuve étant similaire à la deuxième partie du théorème ci-dessus :

Proposition 4.11. *En gardant les mêmes notations que le théorème ci-dessus, le* *processus*

$$M_t W_t - \int_0^t f_s \mathrm{d}s$$

est une martingale.

Remarque 10. On peut réécrire ces théorèmes en

$$[M, M]_t = \int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s$$

et

$$[M, W]_t = \int_0^t f_s \mathrm{d}s.$$

IV.3 Extension de l'intégrale d'Ito

Soit

$$L^2_{ad,loc}([0,T] \times \Omega) = \left\{ f \text{ processus mesurable, } \mathcal{F}_t\text{-adapté et } \int_0^T f_t^2 \mathrm{d}W_t < \infty \text{ p.s.} \right\}$$

On veut étendre l'intégrale d'Ito à $L^2_{ad,loc}([0,T] \times \Omega)$. Pour cela, on pose

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s \geq n\}$$

alors $(\tau_n)_n$ est une suite de croissante de temps d'arrêt et par hypothèse

$$\tau_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \text{ p.s..}$$

Ainsi, $f^{(n)} = (f_t \mathbf{1}_{t \wedge \tau_n})_t \in L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$. Alors on définit :

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} f \mathrm{d}W_s := \int_0^t f^{(n)} \mathrm{d}W_s$$

puis, comme $\tau_n \to \infty$, on définit

$$\int_0^t f_s \mathrm{d}W_s := \lim_{n\to\infty} \int_0^{t\wedge\tau_n} f_s \mathrm{d}W_s \text{ p.s.}$$

la suite à droite étant stationnaire p.s.. Il est facile de vérifier que cette limite est unique. Dans ce cas, on perd la propriété de martingale, mais on garde une propriété de martingale locale.

PROPOSITION 4.12. *Soit* $f \in L^2_{ad,loc}([0,T] \times \Omega)$. *Alors*

$$M_t = \int_0^t f_s \mathrm{d}W_s$$

est une martingale locale. De plus, on a

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s.$$

Preuve. On garde les mêmes notations. Alors, d'après le théorème 4.4,

$$\int_0^{t \wedge \tau_n} f_s \mathrm{d}W_s$$

est une martingale. Ainsi $(\tau_n)_n$ réduit M. D'autre part, de même, d'après toujours le théorème 4.4,

$$\left(\int_0^{t \wedge \tau_n} f_s \mathrm{d}W_s \right)^2 - \int_0^{t \wedge \tau_n} f_s^2 \mathrm{d}s$$

est une martingale. Ainsi, d'après le théorème 4.2, on a

$$\langle M, M \rangle_t = \int_0^t f_s^2 \mathrm{d}s.$$

□

IV.4 Formule d'Ito et Processus d'Ito

DÉFINITION 4.10. *Soit* $(W^i)_{1 \leq i \leq r}$ *une famille de browniens (pas forcémment indépendants). On appelle* ***processus d'Ito*** *(généralisé) tout processus* $X = (X_t)_t$ *défini par*

$$dX_t = b_t \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{r} \sigma_t^i \mathrm{d}W_t^i$$

où b *et* σ *sont des processus mesurables,* $\mathcal{F}_t$*-adapté et tels que*

$$\int_0^t |b_s| \mathrm{d}s < \infty \ \ et \ \int_0^t |\sigma_s|^2 \mathrm{d}s < \infty$$

Dans le cadre de l'intégrale d'Ito, les règles du calcul différentiel changent : on observe l'apparition d'un terme.

THÉORÈME 4.5. *Soit* $(W^i)_{1\leq i\leq r}$ *une famille de browniens et* $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\mathcal{C}^2$. *Soit* X *un processus d'Ito :*

$$dX_t = b_t\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{r} \sigma_t^i \mathrm{d}W_t^i$$

Alors on a

$$\mathrm{d}(f(t, X_t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \sigma_t^i \sigma_t^j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\mathrm{d}\left[W^i, W^j\right] \tag{4.5}$$

Preuve. On ne présente pas ici la preuve en détaille, mais elle est basée sur l'éstimation suivantes, au premier ordre :

$$\mathrm{d}W_t \sim \sqrt{\mathrm{d}t}$$

Donc $(\mathrm{d}W_t)^2 \sim \mathrm{d}t$, d'où l'apparition du terme en $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. □

IV.5 L'intégrale de Stratonovich

Soit $f \in L^2_{ad}([0, T] \times \Omega)$. On a défini l'intégrale d'Ito comme la limite

$$\int_0^t f_s \mathrm{d}W_t = \lim \sum_j f(t_j)(W_{t_{j+1} - W_{t_j}}).$$

Le choix de $f(t_j)$ a pu sembler arbitraire mais est primordial : il assure que $f(t_j)$ soit indépendant de $(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$ et il en découle donc la propriété de martingale. Mais on aurait très bien pu choisir une autre approximation de f sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, ce choix (point de gauche, point milieu, point de droite) n'a pas d'importance. Mais dans le cadre de l'intégration stochastique, la théorie est complètement changée.

On s'intéresse dans cette section à ce qui se passe lorsque l'on choisit une autre convention :

$$\int_0^t f_s \circ \mathrm{d}W_s = \lim \sum_j \frac{f(t_{j+1}) + f(t_j)}{2}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

Remarquons qu'on peut réécrire :

$$\int_0^t f_s \circ \mathrm{d}W_s = \lim \sum_j f(t_j)(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \lim \frac{1}{2}\sum_j (f(t_{j+1}) - f(t_j))(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$$

ce qui conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 4.11. *Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ une semimartingale à trajectoires continues. Alors on définit* ***l'intégrale de Stratonovich*** *de X par rapport au brownien W par :*

$$\int_0^t X_s \circ \mathrm{d}W_s = \int_0^t X_s \mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\langle X, W\rangle.$$

Remarque 11. L'hypothèse que X est à trajectoires continues impose que

$$\int_0^t X_s^2 \mathrm{d}s < \infty \text{ p.s.}$$

donc $X \in L^2_{ad,loc}([0,T]\times\Omega)$ et l'intégrale d'Ito est bien définie. L'hypothèse que X est une semimartingale, ainsi que le fait que W est une martingale, assure l'existence du second terme de la définition.

POURQUOI UTILISER L'INTÉGRALE DE STRATONOVICH OU ITO ?

Les deux conventions présentent leurs avantages. L'avantage d'Ito est la propriété de martingale. Pour Stratononovich, c'est un peu plus subtil. Supposons que l'on dispose d'une suite $W^{(n)}$ de processus à trajectoires C^1 telle que

$$W^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} W$$

uniformément sur tout $[0,T]$, p.s.. Soit $X_t^{(n)}$ solution de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}X_t^{(n)}}{\mathrm{d}t} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t^{(n)})\frac{\mathrm{d}W_t^{(n)}}{\mathrm{d}t},$$

alors $X_t^{(n)}$ converge uniformément sur tout $[0,T]$ vers un processus X_t. Il se trouve que ce processus n'est autre que la solution de l'équation différentielle de Stratonovich :

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t) \circ \mathrm{d}W_t.$$

L'intérêt de la convention de Stratonovich est qu'elle correspond à un **passage à la limite**. Ainsi, en physique, comme il est courant de considérer des limites d'échelle, l'intégrale de Stratonovich est souvent préférée.

V Existence et unicité des EDS

V.1 Théorème de Cauchy pour les EDS

On présente ici l'analogue du théorème de Cauchy pour les EDS.

DÉFINITION 4.12. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *un espace filtré et* W *un brownien* $\mathcal{F}_t$*-adapte. Soit* $b, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *mesurables. Soit l'EDS suivante*

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t. \tag{E}$$

*Une solution **faible** à (E) est la donnée :*

(i). D'un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}})$.

(ii). D'un mouvement brownien $\tilde{W}$ *défini sur* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}})$ *et* $\mathcal{F}_t$*-adpaté.*

(iii). D'un processus stochastique X *défini sur* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}})$.

tels que l'égalité (E) *soit vérfiée. Si on a de plus* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{W}) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, W)$*, alors la solution est dite **forte**.*

Remarque 12. Cette notion peut porter à confusion : dans le cadre des EDP, on parlait de solutions fortes pour des solutions régulières. Pour les EDS, on utilise la même terminologie mais elle désigne un tout autre sujet.

THÉORÈME 4.6. *Soit* $T > 0$ *et* $X_0 \in L^2$ *indépendant de* W *et* b, σ *telles que*

(i). b, σ *sont lipschitziennes en espace uniformément en temps, i.e. il existe* $K > 0$ *tel que*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,x)| \leq K|x-y|$$

pour tout $t \in [0,T]$.

(ii). $b(\cdot, x = 0)$ *et* $\sigma(\cdot, x = 0) \in L^2([0,T])$

Alors l'EDS

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}W_t$$

admet une unique solution forte dans $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$.

Preuve. Comme pour le théorème de Cauchy, il s'agit d'un argument de point fixe dans l'espace $L^2_{ad}([0,T] \times \Omega)$ muni d'une norme particulière. Soit $c > 0$ (qu'on choisira plus tard). On note :

$$\|X\|_c = \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-ct}|X_t|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2}.$$

Remarquons qu'on a

$$e^{-cT}\|\cdot\|_{L^2([0,T]\times\Omega)} \leq \|\cdot\|_c \leq \|\cdot\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}$$

donc $\|\cdot\|_{L^2([0,T]\times\Omega)}$ et $\|\cdot\|_c$ sont équivalentes.

Soit U l'application de $L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$ dans lui-même définie par

$$U(X)_t = \left(X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}W_s\right)_t.$$

Montrons que U est **bien définie**, c'est à dire qu'on a bien $U(X) \in L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)$. On a, en utilisant que $2ab \leq a^2+b^2$

$$\begin{aligned}\|X\|^2_{L^2_{ad}([0,T]\times\Omega)} \leq 3T\|X_0\|^2_{L^2} &+ 3\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}t\right]\\ &+ 3\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}t\right].\end{aligned}$$

Le premier terme est évidemment fini. Regardons le deuxième terme :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}t\right] \leq T\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T b(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\right] \leq T^2\mathbb{E}\left[\int_0^T |b(s,X_s)|^2\mathrm{d}s\right]$$

où la dernière inégalité vient de Cauchy-Schwartz. Or, par hypothèse, on a :

$$|b(s,x)| - |b(s,0)| \leq |b(s,x)-b(0,x)| \leq K|x|$$

donc, en utilisant encore $2ab \leq a^2 = b^2$

$$|b(s,x)|^2 \leq 2|b(s,0)|^2 + 2|x|^2.$$

Donc

$$E\int_0^T\left(\int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}t \leq 2KT\mathbb{E}\left[\int_0^T(|b(s,0)|^2+|X_s|^2)\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

Et pour le dernier terme, l'isométrie d'Ito donne

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\mathrm{d}t\right] \leq T\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2\right] = T\mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma(s,X_s)^2\mathrm{d}s\right].$$

Ainsi, de la même façon qu'avec b :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t\right] \leq 2KT\mathbb{E}\left[\int_0^T (|\sigma(s,0)|^2 + |X_s|^2)\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

Montrons désormais que U est **contractante** pour $\|\cdot\|_c$, avec c bien choisi. On a, pour $X, Y \in L^2_{ad}$ (on choisit $X_0 = Y_0 = 0$ pour simplifier)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|U(X)_t - U(Y)_t|^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\mathrm{d}s\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\mathrm{d}W_s\right)^2\right] \\
&\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s,X_s) - b(s,Y_s)|^2\mathrm{d}s\right] + 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(t,X_s) - \sigma(t,Y_s)|^2\mathrm{d}s\right] \\
&\leq 2(T+1)K\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s - Y_s|^2\mathrm{d}s\right] \\
&= 2(T+1)K\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s - Y_s|^2\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

où, pour passer de la deuxième à la troisième ligne, on a utilisé Cauchy-Schwarz et l'isométrie d'Ito. Donc, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\|U(X) - U(Y)\|_c &= \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{-ct}|U(X)_t - U(Y)_t|^2\mathrm{d}t\right] \\
&= \int_0^T e^{-ct}\mathbb{E}\left[|U(X)_t - U(Y)_t|^2\right]\mathrm{d}t \\
&\leq 2(T+1)K\int_0^T e^{-ct}\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s - Y_s|^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= 2(T+1)K\left(\frac{e^{-cT}}{-c}\int_0^T \mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]\mathrm{d}t - \int_0^T \frac{e^{-ct}}{-c}\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2(T+1)K}{c}\int_0^T (e^{-cT} - e^{-ct})\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{2(T+1)K}{c}\int_0^T e^{-cs}\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right](1 - e^{-c(T-s)})\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{2(T+1)K}{c}\|X - Y\|_c.
\end{aligned}$$

Donc pour c assez grand, U est contractante. Ainsi, par le théorème du point fixe, U admet un unique point fixe. Le théorème est prouvé. $\square$

V.2 Un théorème de convergence

On présente dans cette section un théorème de convergence d'intégrales stochastiques d'Ito. Ce théorème, et sa preuve, se trouvent dans [7].

THÉORÈME 4.7. *Soit* $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}, X$ *des processus stochastiques,* $(W^n)_{n\in\mathbb{N}}, W$ *des mouvements browniens tels que les intégrales*

$$I_t^n = \int_0^T X_t^n \mathrm{d}W_t^n \text{ et } I_t = \int_0^T X_t \mathrm{d}W_t$$

soient bien définies et

$$X_t^n \xrightarrow[n\to\infty]{} X_t$$
$$W_t^n \xrightarrow[n\to\infty]{} W_t$$

en probabilité pour tout $t \in [0,T]$. *On suppose qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t|^{2+\alpha}\mathrm{d}t\right] < \infty$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\int_0^T |X_t^n|^{2+\alpha}\mathrm{d}t\right] < \infty.$$

Alors

$$I^n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} I \text{ dans } L^\infty([0,T])$$

Chapitre 5

Tourbillon : du déterministe au stochastique

Dans ce chapitre, on revient à l'étude des équations de Navier-Stokes en introduisant de l'aléa. Plus précisément, on étudiera une version stochastique de l'équation de tourbillon, qui s'obtient en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (sur la vitesse). Cette équation vient de l'article [3].

I Le tourbillon 3D

Pour simplifier, on supposera dans toute la suite que le fluide n'est soumis à aucune force : $f = 0$. On rappelle l'équation de Navier-Stokes sur la vitesse dans ce cas :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

On considère cette équation **sur un domaine $\mathcal{O}$ de** $\mathbb{R}^3$.

Définition 5.1. *Soit u une solution à NS_ν. On appelle* ***tourbillon****, et on note ω, la quantité $\omega = \operatorname{rot} u$*

On a alors, en se rappelant que $\operatorname{rot}(\nabla) = 0$

$$\partial_t \omega + \operatorname{rot}((u \cdot \nabla) u) - \nu \Delta \omega = 0.$$

De plus, les propriétés du rotationnel donnent :

$$\operatorname{rot}((u\cdot\nabla)u) = (\operatorname{div} u)\operatorname{rot} u + (u\cdot\nabla)\operatorname{rot} u - (\operatorname{rot} u\cdot\nabla)u = (u\cdot\nabla)\operatorname{rot} u - (\operatorname{rot} u\cdot\nabla)u$$

d'où la définition suivante :

DÉFINITION 5.2. *On appelle* ***équation du tourbillon (de Navier-Stokes)*** *l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \partial_t\omega + (u\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)u - \nu\Delta\omega = 0 \\ \operatorname{rot} u = \omega \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \tag{T$_\nu$}$$

d'inconnue $\omega : \mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}^3$*. On notera également* $\mathcal{L}_u\omega = (u\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)u$*.*

Remarque 13. Dans l'équation, u n'est en fait pas une inconnue car on peut retrouver u à partir de ω : c'est la **loi de Biot et Savart**. En effet, en appliquant encore le rotationnel :

$$\operatorname{rot}\omega = \nabla(\operatorname{div} u) - \Delta u = -\Delta u$$

Comment inverser le laplacien ? On utilise une solution fondamentale, c'est à dire une solution E_d à l'équation :

$$-\Delta E_d = \delta.$$

En dimension $d = 3$, on a

$$E_3(x) = \frac{1}{4\pi|x|}$$

donc :

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\operatorname{rot}\omega(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y.$$

On note alors

$$B(\omega) := \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \frac{\operatorname{rot}\omega(y)}{|x-y|}\mathrm{d}y$$

appelé **l'opérateur de Biot et Savart**.

On déduit du théorème 3.6 le théorème suivant :

THÉORÈME 5.1. *Soit* $\omega_0\in\mathcal{H}$*. Alors il existe* $T>0$ *et une solution de* ω *de* (T_ν) *telle que*

$$\omega\in\mathcal{C}([0,T],H^{-1/2})\cap L^2([0,T],\dot{H}^{1/2}).$$

Il existe également $c' > 0$ tel que si

$$\|\omega_0\|_{L^2} \leq c'\nu \tag{5.1}$$

*alors u est une solution **globale**, et de plus*

$$\|\omega_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})} \leq c'\nu.$$

Preuve. La première partie découle directement de 3.6. En effet, en appliquant le rotationnel à l'équation sur u, on obtient ce qu'il faut, en "perdant" une dérivée. Pour l'estimée, elle se déduit de celle sur u. on en aura besoin dans la suite. On applique le produit scalaire $\dot{H}^1$ à l'équation sur u :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{\dot{H}^1} + \nu\|\nabla u\|^2_{\dot{H}^1} = (u\cdot\nabla u\,|\,u)_{\dot{H}_1} &= \left(u\cdot\nabla u\,|\,\nabla^2 u\right)_{L^2} \\ &\leq \|\nabla u\|_{\dot{H}^1}\|\nabla u\|_{L^3}\|u\|_{L^6}\end{aligned}$$

par Hölder, car $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$. Par les injections de Sobolev :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^1} + \nu\|\nabla u(t)\|^2_{\dot{H}^1} &\leq C_0\|\nabla u(t)\|_{\dot{H}^1}\|\nabla u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}\|u(t)\|_{\dot{H}^1} \\ &\leq \frac{\nu}{4}\|\nabla u(t)\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{2C_0^2}{\nu}\|\nabla u(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^1}\end{aligned}$$

et par convexité des normes de Sobolev :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{\dot{H}^1} + \frac{3}{4}\nu\|\nabla u\|^2_{\dot{H}^1} &\leq \frac{C_0^2}{\nu}\|u(t)\|^3_{\dot{H}^1}\|\nabla u\|_{\dot{H}^1} &(5.2)\\ &\leq \frac{4C_0^4}{\nu^3}\|u(t)\|^6_{\dot{H}^1} + \frac{\nu}{4}\|\nabla u\|^2_{\dot{H}^1}. &(5.3)\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^1} + \nu\|\nabla u(t)\|^2_{\dot{H}^1} \leq \frac{4C}{\nu^3}\|u(t)\|^6_{\dot{H}^1}$$

puis, par l'inégalité de Poincaré, $\|\nabla u(t)\|^2_{\dot{H}^1} = \|\nabla^2 u(t)\|^2_{L^2} \geq C\|\nabla u(t)\|^2_{L^2} = C\|\nabla u(t)\|^2_{L^2}$. Donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^1} + C\nu\|u(t)\|^2_{\dot{H}^1} \leq \frac{4C_0^4}{\nu^3}\|u(t)\|^6_{\dot{H}^1}.$$

Posons $y(t) = \|u(t)\|^2_{\dot{H}^1}$. Alors y vérifie l'inéquation différentielle

$$y' \leq -C\nu y + \frac{4C_0^4}{\nu^3}y^3.$$

On prend $c' = \left(\frac{C}{4C_0^4}\right)^{1/4}$. L'inéquation ci-dessus se résout en

$$y(t) \leq \left[\left(\frac{1}{y(0)^2} - \frac{1}{(c'\nu)^4}\right) e^{C^2\nu t} + \frac{1}{(c'\nu)^4}\right]^{-1/2} \leq y(0) \leq c'\nu \tag{5.4}$$

ce qui donne le résultat. $\square$

II Heuristique du tourbillon 3D stochastique

Dans cette section, on présente l'heuristique qui conduit à l'équation (TS$_\nu$) qui sera étudiée dans le chapitre suivant. **Dans toute la suite, on se place dans le tore** $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

Soit ω_0 une condition intiale du tourbillon, qu'on décompose en deux parties :

$$\omega_0 = \omega_{0,L} + \omega_{0,S}$$

où L désigne "large" et S pour "small". Cette décomposition se fait "en taille" : c'est à dire que $\omega_{0,L}$ correspond aux grands tourbillons, et $\omega_{0,S}$ aux petits tourbillons. Supposons qu'on peut résoudre le système :

$$\begin{cases} \partial_t \omega_L + \mathcal{L}_u \omega_L = \nu \Delta \omega_L \\ \partial_t \omega_S + \mathcal{L}_u \omega_S = \nu \Delta \omega_S \end{cases}$$

où $u = B(\omega_L + \omega_S)$. Alors la somme $\omega = \omega_L + \omega_S$ résout (TNS$_\nu$). De plus, il est clair que les grands tourbillons correspondent à des petites fréquences (ils tournent lentement), et les petits à de grandes fréquences (ils tournent plus rapidement). Ainsi, on peut imaginer qu'en première approximation, la vitesse des petits tourbillons constitue un bruit blanc pour la grande partie de l'équation :

$$\eta := \omega_L.$$

L'équation sur ω_L s'écrit alors

$$\partial_t \omega_L + \mathcal{L}_{u_L} \omega_L + \mathcal{L}_\eta \omega_L = \nu \Delta \omega_L$$

où la partie stochastique est donnée par

$$\mathcal{L}_\eta \omega = (\eta \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\eta.$$

Dans l'article [3], il est expliqué que les théorèmes qui y sont prouvés ne sont vrais que lorsqu'on se restreint au terme $(\eta \cdot \nabla)\omega$. C'est donc ce qu'on fait dans la suite. L'équation qu'on étudie sera donc

$$\partial_t \omega + \mathcal{L}_u \omega = \nu \Delta \omega + \mathbf{P}(\eta \cdot \nabla \omega) \tag{5.5}$$

où on a appliqué l'opérateur de Leray car tous les autres termes sont de divergence nulle.

III Définitions et notations

Quelques questions subsistent. D'une part, il faut expliciter le bruit η utilisé. L'idée est d'ajouter un bruit blanc à chaque fréquence. Soit $\mathbb{Z}_0^3 = \mathbb{Z}^3 \backslash 0$. On choisit :

$$\eta(t,x) = \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k a_{k,\alpha} e^{2i\pi k \cdot x} \dot{W}_t^{k,\alpha}$$

Expliquons chaque terme en jeu

(i). $C_{\nu_0} = \sqrt{\frac{3\nu_0}{2}}$ est une constante qui correspond à l'intensité du bruit. L'utilisation de la notation ν_0 provient du fait que ν_0 jouera le rôle d'une viscosité effective dans la suite.

(ii). $(\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}_0^3}$ est une suite de $l^2(\mathbb{Z}_0^3)$ et le terme $\|\theta\|_{l^2}$ assure que celle-ci est normalisée à 1.

(iii). Le terme en $e^{2i\pi k \cdot x}$ (qu'on notera $e_k(x)$ dans la suite) correspond à la volonté de rajouter un bruit au mode k. Les vecteurs $a_{k,\alpha}$ sont tels que la famille

$$\{\sigma_{k,\alpha} = a_{k,\alpha} e_k ; k \in \mathbb{Z}_0^3, \alpha = 1,2\}$$

est une base hilbertienne de l'espace

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \{v \in L^2(\mathbb{T}^3, \mathbb{C}^2) \mid \int_{\mathbb{T}^3} v = 0, \operatorname{div} v = 0\}$$

ce qui est fait en prenant $\{a_{k,1}, a_{k,2}\}$ comme base orthonormale de $k^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot k = 0\}$.

(iv). $\{W^{k,\alpha}, k \in \mathbb{Z}_0^3, \alpha = 1, 2\}$ est une famille de browniens complexes. On la construit en choisissant une famille de mouvements browniens réels $\{B^{k,\alpha}, k \in \mathbb{Z}_0^3, \alpha = 1, 2\}$ et une partition $\mathbb{Z}_0^3 = \mathbb{Z}_+^3 \cup \mathbb{Z}_-^3$ telle que $\mathbb{Z}_+^3 = -\mathbb{Z}_-^3$. On pose alors

$$W^{k,\alpha} \begin{cases} B^{k,\alpha} + iB^{-k,\alpha} & \text{pour } k \in \mathbb{Z}_+^3 \\ B^{-k,\alpha} - iB^{k,\alpha} & \text{pour } k \in \mathbb{Z}_-^3 \end{cases}$$

ce brownien est construit de façon à ce que $\overline{W^{k,\alpha}} = W^{-k,\alpha}$. De plus, on a facilement :

$$[W^{k,\alpha}, W^{l,\beta}] = 2t\delta_{l,-k}\delta_{\alpha,\beta}. \tag{5.6}$$

Maintenant que le bruit est bien défini, on peut expliciter plus précisément l'équation que l'on va étudier.

Définition 5.3. *On appelle* ***équation stochastique du tourbillon de Navier-Stokes*** *l'équation suivante :*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_t + \mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = \nu\Delta\omega_t \mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k \mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla\omega) \circ \mathrm{d}W_t^{k,\alpha} \\ \operatorname{rot} u = \omega \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \tag{TS$_\nu$}$$

Remarque 14. On utilise ici la modélisation de Stratonovich : c'est la plus appropriée, car l'idée de considérer des solutions limites d'une certaine échelle est importante en physique, et la modélisation concerne ici un système physique.

Dans la suite, on s'intéressera à une classe particulière de cette dernière équation, où on a choisi un $\gamma > 0$ et

$$\theta = \theta^{(N)} = \left(\frac{1}{|k|^\gamma}\mathbf{1}_{N\le k\le 2N}\right)_{k\in\mathbb{Z}_0^3}.$$

Ceci conduit à l'équation :

$$\mathrm{d}\omega_t + \mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = \nu\Delta\omega_t \mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k^{(N)} \sigma_{k,\alpha} \circ \mathrm{d}W_t^{k,\alpha}. \tag{TS$_\nu^{(N)}$}$$

Le résultat principal que nous cherchons à démontrer est le suivant :

Théorème 5.2. *Soit $R_0 > 0$. Il existe des constantes $C_0 = C_0(R_0, \nu)$ et c_0 telles que pour tous $\nu_0 \ge C_0$ et $\varepsilon \in]0, c_0\nu_0[$, il existe un $N_0 = N_0(R_0, \nu, \nu_0, \varepsilon)$ tel que pour tout*

$N \geq N_0$, et $\omega_0 \in B_H(R_0)$, le problème :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_t + \mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = \nu\Delta\omega_t \mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k^{(N)} \mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega) \circ \mathrm{d}W_t^{k,\alpha} \\ \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{cases} \qquad (\mathrm{TS}_\nu^{(N)})$$

admet une solution forte globale à trajectoires uniques avec une probabilité supérieure à $1-\varepsilon$

Soit ω_0 donnée, potentiellement très grande, et donc pour laquelle l'équation déterministe n'assure qu'une existence forte locale. Ce que dit le théoreme 5.2, c'est qu'on peut trouver un bruit assez intense, et assez dirigé vers les hauts modes, telle que l'équation stochastique du tourbillon de donnée initiale ω_0 est bien posée.

Chapitre 6

Etude du tourbillon stochastique

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré sur lequel est défini la famille $(W^{k,\alpha})$ de mouvement browniens. Le but de ce chapitre est de prouver le théorème 5.2. On reprend les preuves de [3], en rajoutant certains détails venant de [2].

I Définition des solutions

On définit d'abord la notion de solution à (TS_ν).

DÉFINITION 6.1. *Un processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable ω est une **solution forte** de (TS_ν) de condition initiale $\omega_0 \in \mathcal{H}$ si :*

$$\omega \in L^\infty([0,T], \mathcal{H}) \cap L^2([0,T], \mathcal{V}_\sigma) \cap \mathcal{C}([0,T], H^{-\delta}) \text{ p.s.}$$

et pour tout $v \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$, le processus $(\omega_t, \mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla v))_{L^2}$ est une $\mathcal{F}_t$-semimartingale et on a :

$$\begin{aligned}(\omega_t|v)_{L^2} =& (\omega_0|v)_{L^2} + \int_0^t (\omega_s, \mathcal{L}^*_{u_s} v)_{L^2} \mathrm{d}s + \nu \int_0^t (\omega_s, \Delta v)_{L^2} \mathrm{d}s \\ &- \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k \int_0^t (\omega_s|\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla v)_{L^2} \circ \mathrm{d}W^{k,\alpha}_s.\end{aligned}$$

On désire changer cette définition pour se ramener à une intégrale d'Ito. On va donc prouver la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1. *Un processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable ω tel que*

$$\omega \in L^\infty([0,T], \mathcal{H}) \cap L^2([0,T], \mathcal{V}_\sigma) \cap \mathcal{C}([0,T], H^{-\delta}) \text{ p.s.}$$

est une solution forte de (TS_ν) si et seulement si pour tout $v \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}(\omega_t|v)_{L^2} = (\omega_0|v)_{L^2} &+ \int_0^t (\omega_s, \mathcal{L}^*_{u_s} v)_{L^2}\mathrm{d}s + \nu\int_0^t (\omega_s, \Delta v)_{L^2}\mathrm{d}s \\ &- \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k \int_0^t (\omega_s|\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v)_{L^2}\mathrm{d}W^{k,\alpha}_s \\ &+ \frac{C^2_{\nu_0}}{\|\theta\|^2_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k\theta_{-k} \int_0^t (\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Preuve. Soit ω est une folution forte de (TS_ν). On écrit, en utilisant la définition de l'intégrale de Stratonovich (4.11) :

$$\begin{aligned}&\int_0^t (\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2} \circ \mathrm{d}W^{k,\alpha}_s \\ &\quad = \int_0^t (\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2}\mathrm{d}W^{k,\alpha}_s + \frac{1}{2}\Big[(\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2}, W^{k,\alpha}\Big].\end{aligned}$$

D'autre part, comme ω est solution, en prenant comme fonction test $\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v)$ on obtient :

$$(\omega_t|\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2} = V_t - \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{l,\beta} \int_0^t (\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{l,\beta}\cdot\nabla\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2} \circ \mathrm{d}W^{l,\beta}$$

où V_t est un processus à variation bornée, car toute fonction absoluement continue est à variation bornée. Or, comme

$$[W^{l,\beta}, W^{k,\alpha}] = 2t\delta_{l,-k}\delta_{\beta,\alpha}$$

et en appliquant la remarque 10, on obtient :

$$\frac{1}{2}\Big[(\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2}, W^{k,\alpha}\Big] = \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}}\theta_{-k}\int_0^t (\omega_s|\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v))_{L^2}\mathrm{d}s$$

ce qui conlut la preuve en remplaçant dans la définition. □

On note

$$S_\theta(\omega_t) = \frac{C^2_{\nu_0}}{\|\theta\|^2_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k\theta_{-k}\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t))$$

le terme de correction Ito-Stratonovich. Donc l'équation étudiée devient :

$$\boxed{\mathrm{d}\omega_t + \mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = [\nu\Delta\omega_t + S_\theta(\omega_t)]\mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k \sigma_{k,\alpha} \mathrm{d}W_t^{k,\alpha}} \qquad (\mathrm{TS}_\nu)$$

II Existence et unicité de l'EDS avec troncature

On reprend l'équation (TS_ν). **Dans la suite, on ne considérera que des suites θ telles que** $\theta_{-k} = \theta_k$. Pour $R > 0$ on choisit une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } |x| \leq R \\ f(x) = 0 & \text{si } |x| \geq R+1 \end{cases}$$

Cette fonction va nous permettre d'effectuer une troncature sur le terme non linéaire. on considère désormais l'EDS :

$$\mathrm{d}\omega_t + f_R(\|\omega\|_{H^{-\delta}})\mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = [\nu\Delta\omega_t + S_\theta(\omega)]\mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k \sigma_{k,\alpha}(x) \mathrm{d}W_t^{k,\alpha}. \quad (\mathrm{TS}_{\nu,R})$$

Dans cette partie on prouve le théorème suivant :

THÉORÈME 6.1. *Soit $\theta \in l^2(\mathbb{Z}_0^3)$ tel que $\theta_k = \theta_{-k}$, $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, $T > 0$. Soit $\omega_0 \in \mathcal{H}$. Alors il existe p.s. une unique solution forte à $TS_{\nu,R}$ de condition initiale ω_0, . Plus précisément, il existe un unique (à indistinguabilité près) processus $\mathcal{F}_t$-progressivement mesurable*

$$\omega \in L^\infty([0,T], \mathcal{H}) \cap L^2([0,T], \mathcal{V}_\sigma) \cap \mathcal{C}([0,T], H^{-\delta}) \ \textit{p.s.}$$

tel que pour tout $v \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$, on a p.s. :

$$\begin{aligned} (\omega_t|v)_{L^2} = (\omega_0|v)_{L^2} &+ \int_0^t f_R(\|\omega\|_{H^{-\delta}})(\omega_s|\mathcal{L}_{u_s}^* v)_{L^2}\mathrm{d}s + \nu \int_0^t (\omega_s, \Delta v)_{L^2}\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t (\omega_s, S_\theta(v))_{L^2} - \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k \int_0^t (\omega_s|\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla v)_{L^2} \mathrm{d}W_s^{k,\alpha}. \end{aligned}$$

De plus, cette solution vérifie :

$$\|\omega\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{H}} \leq C_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,R,T}$$
$$\|\omega\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma} \leq C_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,R,T}.$$

L'idée est (comme dans la preuve du théorème 2.2, de se ramener à une EDS en dimension finie. Soit

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C},N} = \mathrm{Vect}(\sigma_{k,\alpha},\ |k| \leq N, \alpha = 1, 2)$$

Evidemment, il ne s'agit pas des espaces $\mathcal{H}_k$ rencontrés dans le chapitre 2, mais nous gardons la même notation par simplicité. On note $\mathbf{P}_N$ le projecteur orthogonal sur cet espace.

Soit également

$$\begin{aligned} b_N : \mathcal{H}_{\mathbb{C},N} &\to \mathcal{H}_{\mathbb{C},N} \\ \omega^N &\mapsto f_R(\|\omega^N\|_{H^{-\delta}})\mathbf{P}_N(\mathcal{L}_{u^N}\omega^N) \end{aligned}$$

et on considère l'EDS en dimension finie :

$$\begin{cases} \mathrm{d}\omega_t^N = (-b_N(\omega_t^N) + \nu\Delta\omega_t^N + S_\theta(\omega_t^N))\mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k \sigma_{k,\alpha} \mathrm{d}W_t^{k,\alpha} \\ \omega|_{t=0} = \mathbf{P}_N\omega_0. \end{cases} \tag{$\mathrm{TS}_{\nu,R}^N$}$$

D'après le théorème 4.6, l'EDS est bien posée sur $\mathbb{R}_+$. On dispose d'un premier lemme qui est l'analogue de l'inégalité d'énergie pour les solutions de Leray.

Lemme 6.1. *On a p.s., pour tout $t > 0$:*

$$\|\omega_t^N\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla\omega_s^N\|_{L^2}^2 \mathrm{d}s \leq \|\omega_0\|_{L^2}^2 + C_{\delta,\nu,R}t.$$

Preuve. La formule d'Ito donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\|\omega_t^N\|_{L^2}^2 =& 2\big[-(\omega_t^N|b_N(\omega_t^N))_{L^2} + \nu(\omega_t^N|\Delta\omega_t^N)_{L^2} + (\omega_t^N|S_\theta(\omega_t^N))_{L^2}\big]\mathrm{d}t \\ &- \frac{2C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k(\omega_t^N|\mathbf{P}_N(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N))_{L^2}\mathrm{d}W_t^{k,\alpha} \\ &+ \frac{2C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \|\mathbf{P}_N(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N)\|_{L^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or

$$
\begin{aligned}
(\omega_s^N|\mathbf{P}_N(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_s^N))_{L^2} &= (\omega_s^N|(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_s^N)_{L^2}\\
&= -(Q(\sigma_{k,\alpha},\omega_t^N)|\omega_t^N)_{L^2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

d'après la proposition 2.6 et car $\sigma_{k,\alpha}\in\mathcal{V}_\sigma$. D'autre part, en se rappelant que $C_{\nu_0}=\sqrt{\frac{3\nu_0}{2}}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2}\sum_{k,\alpha}\theta_k^2\|\mathbf{P}_N(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N)\|_{L^2}\\
&\leq\frac{3\nu_0}{\|\theta\|_{l^2}^2}\sum_{k,\alpha}\theta_k^2\|\mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N)\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Et :

$$
\begin{aligned}
2(\omega_t^N|S_\theta(\omega_t^N))_{L^2} &= \frac{2C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{L^2}^2}\sum_{k,\alpha}\theta_k^2(\omega_t^N|\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N))_{L^2}\\
&= -\frac{3\nu_0}{\|\theta\|_{L^2}^2}\sum_{k,\alpha}\theta_k^2(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N|\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N))_{L^2}\\
&= -\frac{3\nu_0}{\|\theta\|_{L^2}^2}\sum_{k,\alpha}\theta_k^2\|\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla\omega_t^N)\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

car $\overline{\sigma_{-k,\alpha}}=\sigma_{k,\alpha}$. Donc :

$$
\mathrm{d}\|\omega_t^N\|_{L^2}^2\leq -2(\omega_t^N|b_N(\omega_t^N))_{L^2}\mathrm{d}t-2\nu\|\nabla\omega_t^N\|_{L^2}\mathrm{d}t.
$$

Regardons le terme non linéaire :

$$
\begin{aligned}
(\omega_t^N|b_N(\omega_t^N))_{L^2} &= f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\left(\omega_t^N|\mathcal{L}_{u^N}(\omega_t^N)\right)_{L^2}\\
&= -f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\left(\omega_t^N\mid\omega_t^N\cdot\nabla u_t^N\right)_{L^2}
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

et on a, d'après Hölder :

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\omega_t^N\mid\omega_t^N\cdot\nabla u_t^N\right)_{L^2}\right| &= \left|\left(\omega_t^N\otimes\omega_t^N\mid\nabla u_t^N\right)_{L^2}\right|\\
&\leq\|\nabla u_t^N\|_{L^3}\|\omega_t^N\otimes\omega_t^N\|_{L^{3/2}}\\
&\leq\|\nabla u_t^N\|_{L^3}\|\omega_t^N\|_{L^3}^2.
\end{aligned}
$$

De plus il est clair que $\|\nabla u_t^N\|_{L^3} \leq C\| \operatorname{rot} u_t^N\|_{L^3}$. Ainsi, d'après les injections de Sobolev :

$$\begin{aligned}\left(\omega_t^N \mid b_N(\omega_t^N)\right)_{L^2} &\leq C f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\|\omega_t^N\|_{L^3}^3 \\ &\leq C f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\|\omega_t^N\|_{H^{1/2}}^3\end{aligned}$$

Puis, par la convexité des normes de Sobolev :

$$\|\omega_t^N\|_{H^{1/2}} \leq \|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}^{\frac{1}{2(1+\delta)}}\|\omega_t^N\|_{H^1}^{\frac{1+2\delta}{2(1+\delta)}}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left(\omega_t^N \mid b_N(\omega_t^N)\right)_{L^2} &\leq C f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}^{\frac{3}{2(1+\delta)}}\|\omega_t^N\|_{H^1}^{\frac{3(1+2\delta)}{2(1+\delta)}} \\ &\leq C_\delta f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}^{\frac{3}{2(1+\delta)}}\|\nabla\omega_t^N\|_{L^2}^{\frac{3(1+2\delta)}{2(1+\delta)}}\end{aligned}$$

où dans la dernière inégalité, on a utilisé l'inégalité de Poincaré. L'inégalité de convexité de Young $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (p et q sont conjugués) avec $p = \frac{4(1+\delta)}{3(1+2\delta)}$ donne :

$$\left(\omega_t^N \mid b_N(\omega_t^N)\right)_{L^2} \leq f_R\left(\|\omega_t^N\|_{H^{-\delta}}\right)\left[\frac{\nu}{2}\|\nabla\omega_t^N\|_{L^2}^2 + C_{\delta,\nu}\|\omega_t^N\|^{\frac{6}{1-2\delta}}\right]$$

où la nouvelle constante $C_{\delta,\nu}$ est choisie de manière à avoir le coefficient $\frac{\nu}{2}$ devant $\|\nabla\omega_t^N\|_{L^2}^2$. Finalement, en utilisant la définition de f_R nous permet d'écrire :

$$\left(\omega_t^N \mid b_N(\omega_t^N)\right)_{L^2} \leq \frac{\nu}{2}\|\nabla\omega_t^N\|_{L^2}^2 + C_{\delta,\nu}(R+1)^{\frac{6}{1-2\delta}} \tag{6.2}$$

En combinant (6.1) et (6.2) on obtient le résultat. □

Donc la suite $(\omega^N)_{N\in\mathbb{N}}$ est bornée dans

$$L^\infty(\Omega, L^\infty([0,T],\mathcal{H})) \cap L^2(\Omega, L^\infty([0,T],\mathcal{V}_\sigma))$$

donc admet une sous suite convergent faiblement-* dans $L^\infty(\Omega, L^\infty([0,T],\mathcal{H}))$ et faiblement dans $L^2(\Omega, L^\infty([0,T],\mathcal{V}_\sigma))$ (ce dernier espace étant réflexif). *On pourrait choisir d'autres espace, en fait tous les espaces usuels de convergence sur Ω fonctionnement, mais on choisit délibérément ceux-ci.*

Quitte à extraire, on suppose que ω^N converge comme défini ci-dessus vers ω. Cette convergence n'est pas suffisante pour faire converger le terme non linéaire, donc on a besoin de plus de travail. On note η_N la loi de ω^N. O**n va prouver que** η_N **est tendue sur**

$$X = L^2([0,T],\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})$$

Pour cela, on a besoin du résultat de compacité suivant :

Théorème 6.2. *On dispose des injections comapctes suivantes :*

(i). Pour tout $\gamma \in]0,1/2[$, *on a*

$$L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma) \cap W^{\gamma,2}([0,T],H^{-6}) \hookrightarrow L^2([0,T],\mathcal{H})$$

et l'injection est compacte.

(ii). Pour tout $p > \frac{12(6-\delta)}{\delta}$ *on a*

$$L^p([0,T],\mathcal{H}) \cap W^{1/3,4}([0,T],\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})$$

et l'injection est compacte.

Preuve. (i). Ce point se déduit directement du théorème 1.13.

(ii). On utilise l'inégalité de convexité :

$$\|\cdot\|_{H^{-\delta}} \leq \|\cdot\|_{L^2}^{\theta} \|\cdot\|_{H^{-6}}^{\theta}$$

avec $\theta = \frac{\delta}{6}$ et on applique le théorème 1.14.

□

On reformule le théorème ci-dessus en terme de norme et de tension de mesures :

Corollaire 6.1. *(i). S'il existe* $C > 0$ *tel que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\omega_t^N\|_{H^1}^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \int_0^T \frac{\|\omega_t^N - \omega_s^N\|_{H^{-6}}^2}{|t-s|^{1+2\gamma}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right] \leq C$$

alors $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est tendue sur* $L^2([0,T],\mathcal{H})$

(ii). S'il existe $C > 0$ *tel que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|\omega_t^N\|_{L^2}^p \mathrm{d}t + \int_0^T \int_0^T \frac{\|\omega_t^N - \omega_s^N\|_{H^{-6}}^4}{|t-s|^{7/3}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right] \leq C$$

alors $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est tendue sur* $\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta}$

Pour montrer ω^N vérifie ces critères, on a besoin du lemme technique suivant

Lemme 6.2. *Il existe une constante $C = C(\|\omega_0\|_{L^2}, \nu_0, \delta, \nu, R, T) > 0$ telle que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$, $l \in \mathbb{Z}_0^3$ et $j = 1, 2$ on ait*

$$\mathbb{E}\left[\left|\left(\omega_t^N - \omega_s^N \mid \sigma_{l,j}\right)_{L^2}\right|^4\right] \leq C|l|^8|t-s|^2$$

Preuve. On admet ce lemme, qui se prouve en bornant chacun des termes de l'équation, de manière classique. □

On en déduit le résultat voulu :

Corollaire 6.2. *La famille (η_N) est tendue sur $L^2([0,T],\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}([0,T], H^{-\delta})$.*

Preuve. On veut appliquer le corollaire 6.1. On va prouver chaqun des deux points du critère :

(i). Grace au lemme 6.1, il suffit de borner le terme en double intégrale. Comme $(\sigma_{l,j})_{l,j}$ est une base hilbertienne, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\omega_t^N - \omega_s^N\|_{H^{-6}}^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{l,j} \frac{\left(\omega_t^N - \omega_s^N \mid \sigma_{l,j}\right)_{L^2}^2}{|l|^{12}}\right] \\
&\leq \sum_{l,j} \frac{\mathbb{E}\left[\left(\omega_t^N - \omega_s^N \mid \sigma_{l,j}\right)_{L^2}^4\right]^{1/2}}{|l|^{12}} \\
&\leq C|t-s| \sum_{l,j} \frac{1}{|l|^8} \\
&\leq C|t-s|.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\|\omega_t^N - \omega_s^N\|_{H^{-6}}^2}{|t-s|^{1+2\gamma}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right] &\leq C \int_0^T \int_0^T \frac{1}{|t-s|^{2\gamma}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(ii). De, même, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|\omega_t^N - \omega_s^N\|_{H^{-6}}^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{l,j} \frac{\left(\omega_t^N - \omega_s^N \mid \sigma_{l,j}\right)_{L^2}^2}{|l|^{12}}\right] \\ &\leq C|t-s|^2 \sum_{l,j} \frac{1}{|l|^4} \\ &\leq C|t-s|^2.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T \frac{\|\omega_t^N - \omega_s^N\|_{H^{-6}}^4}{|t-s|^{7/3}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s\right] &\leq C \int_0^T \int_0^T \frac{1}{|t-s|^{1/3}} \mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &< \infty.\end{aligned}$$

□

D'après le corollaire ci-dessus, la famille $(\eta_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est tendue, mais plus généralement, on doit prouver la tension de la famille $(\widetilde{\omega^{N_i}}, W)$, où $W = (W^{k,\alpha})_{k,\alpha}$. Pour cela, on remarque que $W(\omega)$ est un élément de $E = \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_0^3\times\{1,2\}}\right)$. On munit l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_0^3\times\{1,2\}}$ de la métrique :

$$\mathrm{d}_\infty(a,b) = \sum_{k,\alpha} \frac{|a^{k,\alpha} - b^{k,\alpha}|}{2^{|k|}}.$$

Il est alors facile de vérifier que $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}_0^3\times\{1,2\}}, \mathrm{d}_\infty\right)$ est un espace polonais. Ainsi, on pose naturellement

$$\mathrm{d}_E(w_0, w_1) = \sup_{t\in[0,T]} d_\infty(w_0(t), w_1(t))$$

pour tout $w_0, w_1 \in E$. Alors l'espace (E, d_E) est également polonais. Il est alors clair que la loi de la suite constante égale à W est tendue dans E. Soit P_N la loi jointe de (ω^N, W). Alors, par ce qui précède, il est clair que la famille $(P_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est tendue sur

$$\left(L^2([0,T], \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}([0,T], H^{-\delta})\right) \times \mathcal{C}\left([0,T], \mathbb{R}^{\mathbb{Z}_0^3\times\{1,2\}}\right)$$

On peut appliquer le théorème de Prokohrov (1.18), qui impose qu'il existe une sous-suite (P_{N_i}) de (P_N) convergeant étroitement vers $P = (\eta, P_W)$ où P_W est la loi de la famille W. De plus, par le théorème de représentation de Skhorokhod (1.19), on déduit l'existence d'un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$, des variables aléatoires $(\tilde{\omega}^{N_i}), \tilde{\omega}$ et des mouvements browniens $(\tilde{W}^{N_i,k,\alpha}), \tilde{W}^{k,\alpha}$ définis sur cet espace tels que :

(i). $(\tilde{\omega}^{N_i}, \tilde{W}^{N_i})$ et (ω^{N_i}, W^{N_i}) ont la même loi jointe.

(ii). Pour tout $i \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\omega}^{N_i} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \tilde{\omega} \text{ dans } L^2([0,T], \mathcal{H}) \cap \mathcal{C}([0,T], H^{-\delta}).$$

(iii). Pour tout $i \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_0^3, \alpha = 1, 2$:

$$W^{N_i,k,\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} W^{k,\alpha} \text{ dans } \mathcal{C}([0,T], \mathbb{C}).$$

Remarque 15. Les processus $\tilde{\omega}^N$ vérifient évidemment l'inégalité du lemme 6.1. Plus généralement, remarquons qu'on peut réécrire ce fait en

$$\|\tilde{\omega}^N\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)} \leq C_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,R,T}$$

ce qui impose que quitte à extraire, $(\tilde{\omega}^{N_i})$ converge faiblement dans $L^2([0,T], \mathcal{V}_\sigma)$, vers $\tilde{\omega}$ (par unicité de la limite). Puis, par propriétés de la convergence faible :

$$\|\tilde{\omega}\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)} \leq \liminf_{i\geq 1} \|\tilde{\omega}^{N_i}\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)} \leq C_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,R,T}.$$

De même, on peut prouver que

$$\|\tilde{\omega}\|_{L^\infty([0,T],\mathcal{V}_\sigma)} \leq C_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,R,T}.$$

On peut maintenant terminer à la preuve du théorème 6.1. Dans un premier temps, on prouve que la limite $\tilde{\omega}$ est bien une solution **faible** à l'EDS avec troncature $\mathrm{TS}_{\nu,R}^N$. Pour passer aux solution, fortes, on a besoin d'un théorème du type Yamada-Watanabe, qui impose qu'une solution faible avec unicité trajectorielle donne directement une solution forte (voir [6]). Sa présentation nous amènerait trop loin, donc on s'en tient à cette présentation informelle.

Existence d'une solution faible :

Preuve. Comme $(\tilde{\omega}^{N_i}, \tilde{W}^{N_i})$ et (ω^{N_i}, W^{N_i}) ont la même loi jointe, on a, pour tout $v \in$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3,\mathbb{R}^3)$, pour tout $t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}\left(\tilde\omega_t^{N_i}\,|\,v\right)_{L^2} &= (\tilde\omega_0^{N_i}|v)_{L^2} + \int_0^t f_R(\|\tilde\omega^{N_i}\|_{H^{-\delta}})\left(\tilde\omega_s^{N_i}\,|\,\mathcal{L}^*_{\tilde u_s^{N_i}}\mathbf{P}_N v\right)_{L^2}\mathrm{d}s + \nu\int_0^t\left(\tilde\omega_s^{N_i}\,|\,\Delta v\right)_{L^2}\mathrm{d}s\\ &+ \int_0^t\left(\tilde\omega_s^{N_i}\,|\,S_\theta(v)\right)_{L^2} - \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}}\sum_{k,\alpha}\theta_k\int_0^t\left(\tilde\omega_s^{N_i}\,|\,\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde W_s^{N_i,k,\alpha}\end{aligned}\tag{6.3}$$

p.s., avec $\tilde u^{N_i}=B(\tilde\omega^{N_i})$. On va montrer une convergence dans $L^1(\tilde\Omega)$ de chaque terme. Par convergence dans $\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})$, on a, en voyant le produit scalaire comme corchet de dualité :

$$\left(\tilde\omega_t^{N_i}\,|\,v\right)_{L^2}\xrightarrow[i\to\infty]{p.s.}(\tilde\omega_t\,|\,v)_{L^2}\ \text{ dans } \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}).$$

De plus, par Cauchy-Schwartz :

$$\left(\tilde\omega_t^{N_i}\,|\,v\right)_{L^2}\le\|\tilde\omega_t^{N_i}\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\le\left(\|\omega_0\|_{L^2}^2+C_{\delta,\nu,R}t\right)\|v\|_{L^2}$$

où la deuxième inégalité vient du lemme 6.1. Ainsi, par convergence dominée :

$$\boxed{\left(\tilde\omega_t^{N_i}\,|\,v\right)_{L^2}\xrightarrow[i\to\infty]{L^1}(\tilde\omega_t\,|\,v)_{L^2}\ \text{ dans } \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}).}$$

On en déduit directement :

$$\boxed{\int_0^t\left(\tilde\omega_s^{N_i}\,|\,\Delta v\right)_{L^2}\mathrm{d}s\xrightarrow[i\to\infty]{L^1}\int_0^t(\tilde\omega_s\,|\,\Delta v)_{L^2}\,\mathrm{d}s \text{ dans } \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}).}$$

et

$$\boxed{\int_0^t\left(\tilde\omega_s^{N_i}\,|\,S_\theta(v)\right)_{L^2}\mathrm{d}s\xrightarrow[i\to\infty]{L^1}\int_0^t(\tilde\omega_s\,|\,S_\theta(v))_{L^2}\,\mathrm{d}s \text{ dans } \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}).}$$

Pour le terme stochastique, soit $M \in \mathbb{N}$ qu'on choisira plus tard. Soit $\varepsilon > 0$. On écrit :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{k,\alpha}\theta_k\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s^{N_i}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha}-\sum_{k,\alpha}\theta_k\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{k,\alpha}\right|\right]\\
\leq\;&\tilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{|k|\leq M,\alpha}\theta_k\left(\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s^{N_i}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha}-\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{k,\alpha}\right)\right|\right]\\
&+\tilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{|k|>M,\alpha}\theta_k\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s^{N_i}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha}\right|\right]\\
&+\tilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{|k|>M,\alpha}\theta_k\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{k,\alpha}\right|\right].
\end{aligned}$$

Notons $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$ les trois espérances du membre de droite. D'une part, on a

$$\begin{aligned}
J^{(2)}&\leq C\tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\sum_{|k|>M,\alpha}\theta_k^2\int_0^T\left(\tilde{\omega}^{N_i}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\right]\\
&\leq C\sup_{|k|>M}|\theta_k|\tilde{E}\left[\left(\int_0^T\sum_{|k|>M,\alpha}\left(\tilde{\omega}^{N_i}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\right]\\
&\leq C\sup_{|k|>M}|\theta_k|\tilde{E}\left[\left(\int_0^T\|\tilde{\omega^{N_i}}\nabla v\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\right]\\
&\leq C\sup_{|k|>M}|\theta_k|T^{1/2}(\|\omega_0\|_{L^2}^2+C_{\delta,\nu,R}T)\|\nabla v\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Or $\sup_{|k|>M}|\theta_k|\xrightarrow[M\to\infty]{}0$. On a une inégalité similaire pour $J^{(3)}$, en utilisant la remarque 15. Pour $J^{(1)}$, on veut appliquer le théorème 4.7. On remarque que pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{\omega}_s^{N_i}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\xrightarrow[i\to\infty]{}\left(\tilde{\omega}_s\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\\
&\tilde{W}_s^{N_i,\alpha,k}\xrightarrow[i\to\infty]{}\tilde{W}_s^{\alpha,k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\tilde{\omega}_s \,|\, \sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v)_{L^2}^4 \,\mathrm{d}s\right] < \infty$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\tilde{\omega}_s^{N_i} \,|\, \sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}^4 \mathrm{d}s\right] < \infty.$$

Or grâce a la remarque 15, on a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\tilde{\omega}_s \,|\, \sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v)_{L^2}^4 \,\mathrm{d}s\right] \leq T\|\tilde{\omega}\|^4_{L^\infty([0,T],\mathcal{H})}\|\nabla v\|^4_{L^\infty} < \infty$$

et de même pour la deuxième intégrale. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k,\alpha}\theta_k \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{N_i} \,|\, \sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2} \mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha} \xrightarrow[i\to\infty]{L^1} \sum_{k,\alpha}\theta_k \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2} \mathrm{d}\tilde{W}_s^{k,\alpha}}$$

dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$. Il ne reste plus que le terme non linéaire. On écrit :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}\left[\sup_{t\in[O,T]}\left|\int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}_s^{N_i}\|_{H^{-\delta}})\left(\tilde{\omega}_s^{N_i} \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s^{N_i}}\mathbf{P}_{N_i}v\right)_{L^2}\mathrm{d}s - \int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}_s\|_{H^{-\delta}})\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s}v\right)_{L^2}\mathrm{d}s\right|\right]\\
\leq &\tilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^T f_R(\|\tilde{\omega}_s^{N_i}\|_{H^{-\delta}})\left|\left(\tilde{\omega}_s^{N_i} \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s^{N_i}}\mathbf{P}_{N_i}v\right)_{L^2} - \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s}v\right)_{L^2}\right|\mathrm{d}s\right]\\
&+\tilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left|f_R(\|\tilde{\omega}_s^{N_i}\|_{H^{-\delta}}) - f_R(\|\tilde{\omega}_s\|_{H^{-\delta}})\right|\left|\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s}v\right)_{L^2}\right|\mathrm{d}s\right].
\end{aligned}$$

On note $I^{(1)}$ et $I^{(2)}$ les deux termes intégrales à droite de l'inégalité. D'une part :

$$I^{(1)} \leq \tilde{\mathbb{E}}\left[\int_0^T \left|\left(\tilde{\omega}_s^{N_i} \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s^{N_i}}\mathbf{P}_{N_i}v\right)_{L^2} - \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s}v\right)_{L^2}\right|\mathrm{d}s\right]$$

On déduit de la convergence de $\tilde{\omega}^{N_i}$ que

$$\tilde{u}^{N_i} \xrightarrow[i\to\infty]{p.s.} \tilde{u} \text{ dans } L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)$$

et il est facile de voir que $\mathbf{P}_{N_i}v \xrightarrow[i\to\infty]{} v$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{T}^3,\mathbb{R}^3)$. Donc :

$$\int_0^T \left|\left(\tilde{\omega}_s^{N_i} \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s^{N_i}}\mathbf{P}_{N_i}v\right)_{L^2} - \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s}v\right)_{L^2}\right| \xrightarrow[i\to\infty]{p.s.} 0$$

pour tout $s \in [0,T]$. De plus, grace à la remarque 15 :

$$\|\tilde{u}\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)} \leq C_{\|\omega_0\|^2_L,\delta,\nu,R,T}$$
$$\sup_{i\geq 1} \|\tilde{u}^{N_i}\|_{L^2([0,T],\mathcal{V}_\sigma)} \leq C_{\|\omega_0\|^2_L,\delta,\nu,R,T}$$

ce qui nous fournit une domination de l'intégrande. En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient $I^{(1)} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Regardons $I^{(2)}$. Remarquons qu'on a,

$$\left|\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right)_{L^2}\right| \leq \|\tilde{\omega}_s\|_{L^2}\|\mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\|_{L^2} \leq \|\tilde{\omega}_s\|_{L^2}\|\tilde{u}\|_{\mathcal{V}_\sigma}\|v\|_{\mathcal{C}^1} \leq C\|\tilde{\omega}_s\|^2_{L^2}\|v\|_{\mathcal{C}^1}$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré pour écrire $\|\tilde{u}\|_{\mathcal{V}_\sigma} \leq C\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2} \leq C\|\tilde{\omega}\|_{L^2}$. Puis : on en déduit :

$$\left|\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right)_{L^2}\right| \leq \|\tilde{\omega}_s\|_{L^2}\|\mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\|_{L^2} \leq C^2_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,\mathbb{R},T}\|v\|_{\mathcal{C}^1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left|f_R(\|\tilde{\omega}^{N_i}_s\|_{H^{-\delta}}) - f_R(\|\tilde{\omega}_s\|_{H^{-\delta}})\right| \left|\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right)_{L^2}\right| \mathrm{d}s \\
\leq &C^2_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,\mathbb{R},T}\|v\|_{\mathcal{C}^1}\|f'_R\|_{L^\infty}\int_0^T \left(\|\tilde{\omega}^{N_i}_s\|_{H^{-\delta}} - \|\tilde{\omega}_s\|_{H^{-\delta}}\right)\mathrm{d}s \\
\leq &C^2_{\|\omega_0\|_{L^2},\delta,\nu,\mathbb{R},T}\|v\|_{\mathcal{C}^1}\|f'_R\|_{L^\infty}T\sup_{s\in[0,T]}\|\tilde{\omega}^{N_i}_s - \tilde{\omega}_s\|_{H^{-\delta}} \\
&\xrightarrow[i\to\infty]{p.s.} 0
\end{aligned}$$

car $\tilde{\omega}^{N_i}$ converge vers $\tilde{\omega}$ dans $\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})$ p.s.. Finalement, en utilisant le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\boxed{\int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}^{N_i}_s\|_{H^{-\delta}})\left(\tilde{\omega}^{N_i}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}^{N_i}_s}\mathbf{P}_N v\right)_{L^2}\mathrm{d}s \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}\|_{H^{-\delta}})\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right)_{L^2}\mathrm{d}s}$$

dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$. Ce qui conclut la preuve d'existence, puisqu'on vient de montrer, en passant a la limite dans 6.3 :

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\omega}_t \,|\, v\right)_{L^2} = (\tilde{\omega}_0|v)_{L^2} &+ \int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}\|_{H^{-\delta}})\left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right)_{L^2}\mathrm{d}s + \nu\int_0^t \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \Delta v\right)_{L^2}\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s \,|\, S_\theta(v)\right)_{L^2} - \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}}\sum_{k,\alpha}\theta_k\int_0^t \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}^{k,\alpha}_s.
\end{aligned}$$

Unicité (à indstinguabilité près)
On présente les idées de la preuve. Soit deux solutions fortes $\omega(1), \omega(2)$ et on considère la différence $\omega = \omega(1), \omega(2)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_t = &- [f_R(\|\omega(1)_t\|_{H^{-\delta}}) - f_R(\|\omega(2)_t\|_{H^{-\delta}})]\mathrm{d}t + [\nu\Delta\omega_t + S_\theta(\omega_t)]\mathrm{d}t \\ &+ \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k \mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha} \cdot \omega_t)\mathrm{d}W_t^{k,\alpha}. \end{aligned}$$

En appliquant la formule d'Ito, on obtient

$$\mathrm{d}\|\omega_t\|_{L^2}^2 = -2\left(\omega \mid f_R(\|\omega(1)_t\|_{H^{-\delta}})\mathcal{L}_{u(1)_t}\omega(1)_t - f_R(\|\omega(2)_t\|_{H^{-\delta}})\mathcal{L}_{u(2)_t}\omega(2)_t\right)\mathrm{d}t - 2\|\nabla\omega_t\|_{L^2}^2$$

On borne ensuite chaque terme de cette inégalité. On ne présente pas une nouvelle fois ces calculs qui, bien que fastidieux, ressemblent à ce qui a été fait précédemment. On obtient alors

$$\mathrm{d}\|\omega\|_{L^2}^2 \leq C\|\omega_t\|_{L^2}^2 \left(\|\nabla\omega(1)_t\|_{L^2}^{4/3} + \|\nabla\omega(1)_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla\omega(2)_t\|_{L^2}^{4/3} + \|\nabla\omega(2)_t\|_{L^2}^2\right).$$

Et on on conclut par le lemme de Gronwall. □

III Convergence vers l'équation déterministe

Soit $R_0 > 0$. On s'intéresse maintenant plus précisément à l'équation **avec troncature** pour

$$\theta = \theta^{(N)} = \left(\frac{1}{|k|^\gamma}\mathbf{1}_{N \leq |k| \leq 2N}\right)_{k \in \mathbb{Z}_0^3}.$$

On note $\omega^{(N)}$ l'unique solution à

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_t^{(N)} + f_R(\|\omega^{(N)}\|_{H^{-\delta}})\mathcal{L}_{u_t^{(N)}}\omega_t^{(N)}\mathrm{d}t = &[\nu\Delta\omega_t^{(N)} + S_{\theta^{(N)}}(\omega^{(N)})]\mathrm{d}t \\ &+ \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k^{(N)} \sigma_{k,\alpha}(x)\mathrm{d}W_t^{k,\alpha} \end{aligned} \qquad (\mathrm{TS}_{\nu,R}^{(N)})$$

avec $\omega^{(N)}|_{t=0} = \omega_0^{(N)} \in B_{R_0}(\mathcal{H})$, la boule de rayon R_0 dans $\mathcal{H}$. On note Q_N la loi de $\omega^{(N)}$
Le but de cette section est de prouver le résultat suivant :

Théorème 6.3. *Soit $R_0 > 0$, $T > 0$. Soit $(\omega_0^{(N)})_{N \in \mathbb{N}} \subset B_H(R_0)$ qui converge en loi vers ω_0 dans $\mathcal{H}$. Alors il existe une constante $C_0 = C_0(R_0, \nu)$ telle que pour $\nu_0 > C_0$*

et $R > C_1(R_0, \nu, \nu_0)$ assez grands, $\omega^{(N)}$ tend ***en loi*** *vers ω, solution de l'équation de tourbillon déterministe*

$$\partial_t \omega + \mathcal{L}_u \omega = \left(\nu + \frac{3}{5}\nu_0\right) \Delta\omega$$

de condition initiale ω_0. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\omega_0 \in B_H(R_0)} Q_{N,\omega_0} \left(\varphi \in X \mid \|\varphi - \omega(\omega_0)\|_X > \varepsilon\right) = 0$$

où $\omega(\omega_0)$ désigne la solution partant de ω_0 et Q_{N,ω_0} la loi de $\omega^{(N)}$ en supposant $\omega^{(N)}|_{t=0} = \omega_0$. On a également noté

$$\|f\|_X = \|f\|_{L^2([0,T],\mathcal{H})} \vee \|f\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})}.$$

Remarque 16. On comprend maintenant l'utilisation de la notation ν_0 pour le coefficient d'intensité du bruit.

III.1 Convergence de $S_{\theta^{(N)}}$

On va être amenés à prouver la convergence de chaque terme dans l'équation $\mathrm{TS}_{\nu,R}^{(N)}$. Dans cette section, on s'intéresse au terme de correction Ito-Stratonovich, dont on rappelle la définition :

$$S_\theta(\omega) = \frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla\omega)).$$

On donne ici une preuve de la convergence de $S_{\theta^{(N)}}$ vers le laplacien, dans un cas particulier, bien que le théorème énoncé ci-dessous soit plus général.

Théorème 6.4. *Pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$, on a*

$$\lim_{N\to\infty} S_{\theta^{(N)}}(v) = \frac{3}{5}\nu_0 \Delta v$$

dans $L^2(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$.

Faisons d'abord une observation générale. Soit $\mathbf{P}^\perp$ la projection orthogonale $\mathbf{P}$. Alors ona évidemment, pour $v \in \mathcal{C}^\infty$,

$$\mathbf{P}(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v) = \sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v - \mathbf{P}^\perp(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v).$$

Donc :

$$S_\theta(v) = \frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \mathbf{P}\left[\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \left(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v - \mathbf{P}^\perp(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v)\right)\right]$$

or (voir par exemple le calcul 2.1)

$$\frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \mathbf{P}\left[\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \left(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v\right)\right] = \frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \mathbf{P}\left[\sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \left(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v\right)\right]$$

et

$$\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \left(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v\right) = (\sigma_{k,\alpha} \otimes \sigma_{-k,\alpha} : \nabla^2) v + (\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \sigma_{-k,\alpha}) \cdot \nabla v.$$

Et, d'une part : $(\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \sigma_{-k,\alpha}) = -2\pi i (a_{k,\alpha} \cdot k) a_{k,\alpha} = 0$. D'autre part, on pourrait prouver l'égalité :

$$\sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \sigma_{k,\alpha} \otimes \sigma_{-k,\alpha} = \frac{2}{3} \|\theta\|_{l^2}^2 I_3$$

qui donne

$$\frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \mathbf{P}\left[\sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \left(\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v\right)\right] = \nu_0 \mathbf{P} \Delta v = \nu_0 \Delta v.$$

Ainsi, on a

$$S_\theta(v) = \nu_0 \Delta v - \frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \mathbf{P}\left[\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \mathbf{P}^\perp (\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v)\right].$$

On note donc

$$S_\theta^\perp(v) = \frac{C_{\nu_0}^2}{\|\theta\|_{l^2}^2} \sum_{k,\alpha} \theta_k^2 \mathbf{P}\left[\sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla \mathbf{P}^\perp (\sigma_{-k,\alpha} \cdot \nabla v)\right].$$

Le reste de la preuve est destinée à montrer le résultat

$$S_{\theta^{(N)}}^\perp(v) \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{2}{5} \nu_0 \Delta v$$

faiblement dans L^2. Dans un premier temps, on décompose v dans la base de Fourier :

$$v = \sum_{l,\beta} v_{l,\beta} \sigma_{l,\beta}.$$

On va prouver le lemme suivant

Lemme 6.3. *On a*

$$S_\theta^\perp(v) = -\frac{6\pi^2\nu_0}{\|\theta\|_{l^2}^2}\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}|l|^2\mathbf{P}\left[\left(\sum_k \theta_k^2 \sin^2(\angle_{k,l})(a_{l,\beta}\cdot k)\frac{k-l}{|k-l|^2}\right)e_l\right].$$

Preuve. On a :

$$\nabla v(x) = \sum_{l,\beta} v_{l,\beta}\nabla\sigma_{l,\beta}(x) = 2\pi i\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{l,\beta}\otimes l)e_l(x).$$

Donc

$$(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla v)(x) = (a_{k,\alpha}\cdot\nabla v)(x)e_k(x) = 2\pi i\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{k,\alpha}\cdot l)a_{l,\beta}e_{l-k}(x).$$

Or, on peut vérifier que pour tout $X = \sum_l X_l e_l$:

$$\mathbf{P}^\perp X = \sum_l \frac{l\cdot X}{|l|^2} l e_l$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^\perp(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla v)(x) &= 2\pi i\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{k,\alpha}\cdot l)(a_{l,\beta}\cdot(l-k))\frac{l-k}{|l-k|^2}e_{l-k}(x)\\ &= -2\pi i\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{k,\alpha}\cdot l)(a_{l,\beta}\cdot k)\frac{l-k}{|l-k|^2}e_{l-k}(x)\end{aligned}$$

car $a_{l,\beta}\cdot l = 0$. Ensuite :

$$\begin{aligned}&\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\mathbf{P}^\perp(\sigma_{-k,\alpha}\cdot\nabla v)(x)\\ &\quad= -2\pi i\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{k,\alpha}\cdot l)(a_{l,\beta}\dot{k})\frac{l-k}{|l-k|^2}e_k(x)a_{k,\alpha}\cdot\nabla e_{l-k}(x)\\ &\quad= 4\pi^2\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{k,\alpha}\cdot l)(a_{l,\beta}\cdot k)\frac{l-k}{|l-k|^2}a_{k,\alpha}\cdot(l-k)e_k(x)e_{l-k}(x)\\ &\quad= -4\pi^2\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}(a_{k,\alpha}\cdot l)^2(a_{l,\beta}\cdot k)\frac{k-l}{|l-k|^2}e_l(x).\end{aligned}$$

En injectant cette dernière inégalité dans la définition de $S_\theta^\perp$, on obtient :

$$S_\theta^\perp(v) = -\frac{6\pi^2\nu_0}{\|\theta\|_{l^2}^2}\sum_{l,\beta} v_{l,\beta}\mathbf{P}\left[\left(\sum_{k,\alpha}\theta_k^2(a_{k,\alpha}\cdot l)^2(a_{l,\beta}\cdot k)\frac{k-l}{|k-l|^2}\right)e_l\right].$$

Remarquons que par définition de $a_{k,\alpha}$, $\{a_{k,1}, a_{k,2}, \frac{|k|}{k}\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, par Parseval :

$$(a_{k,1} \cdot l)^2 + (a_{k,2} \cdot l)^2 + \left(\frac{l \cdot k}{|k|}\right)^2 = |l|^2$$

Donc, en notant $\angle_{k,l}$ l'angle entre les vecteurs k et l :

$$\sum_{k,\alpha} (a_{k,\alpha} \cdot l)^2 = |l|^2 \left(1 - \frac{l \cdot k}{|l|^2|k|^2}\right) = |l|^2(1 - \cos^2(\angle_{k,l})) = |l|^2 \sin^2(\angle_{k,l}) \tag{6.4}$$

ce qui conlut la preuve. □

Remarquons que jusque ici, on a prouvé prouvé des résultats pour une suite θ quelconque. On prouve maintenant le théorème 6.4, donc on revient à $\theta = \theta^{(N)}$.

Preuve. **(dans un cas particulier)**. On prend $v = \sigma_{l,1} + \sigma_{l,2}$. On va prouver que

$$(S_{\theta^{(N)}}(v) \,|\, \overline{v})_{L^2} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{2}{5} \nu_0 \, (\Delta v \,|\, \overline{v})_{L^2} .$$

On a alors :

$$\begin{aligned} S^{\perp}_{\theta^{(N)}}(v) &= -\frac{6\pi^2 \nu_0}{\|\theta^{(N)}\|^2_{l^2}} \sum_{\beta=1}^{2} |l|^2 \mathbf{P} \left[\left(\sum_k (\theta_k^{(N)})^2 \sin^2(\angle_{k,l}) (a_{l,\beta} \cdot k) \frac{k-l}{|k-l|^2} \right) e_l \right] \\ &= -\frac{6\pi^2 \nu_0}{\|\theta^{(N)}\|^2_{l^2}} \sum_{\beta=1}^{2} |l|^2 \mathbf{P} \left[\left(\sum_{N \le |k| \le 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} (a_{l,\beta} \cdot k) \frac{k-l}{|k-l|^2} \right) e_l \right] . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$S^{\perp}_{\theta^{(N)}}(v) = -\frac{6\pi^2 \nu_0}{\|\theta^{(N)}\|^2_{l^2}} \sum_{\beta=1}^{2} |l|^2 \mathbf{P} \left[\left(\sum_{N \le |k| \le 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} (a_{l,\beta} \cdot k) \frac{k}{|k|^2} \right) e_l \right] + o(1)$$

donc, en remarquant que $\overline{v} = (a_{l,1} + a_{l,2}) e_{-l}$ est dans $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} (S_{\theta^{(N)}}(v) \,|\, \overline{v})_{L^2} = &-\frac{6\pi^2 \nu_0}{\|\theta^{(N)}\|^2_{l^2}} \sum_{\beta,\beta'=1}^{2} |l|^2 \left(\left(\sum_{N \le |k| \le 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} (a_{l,\beta} \cdot k) \frac{k}{|k|^2} \right) e_l \,|\, a_{l,\beta'} e_{-l} \right)_{L^2} \\ &+ o(1). \end{aligned}$$

Or $e_l e_{-l} = 1$ donc

$$(S_{\theta^{(N)}}(v) \,|\, \overline{v})_{L^2} = -\frac{6\pi^2\nu_0}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2} \sum_{\beta,\beta'=1}^{2} |l|^2 \sum_{N\leq|k|\leq 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} \frac{(a_{l,\beta}\cdot k)(a_{l,\beta'}\cdot k)}{|k|^2} + o(1).$$

Or, en écrivant $k = (k_1, k_2, k_3)$ dans la base $\left\{a_{l,1}, a_{l,2}, \frac{l}{|l|}\right\}$, on remarque que l'application

$$(k_1, k_2, k_3) \mapsto (-k_1, k_2, k_3)$$

est une bijection des vecteurs tels que $N \leq |k| \leq 2N$. Donc, pour $\beta \neq \beta'$;

$$\begin{aligned} \sum_{N\leq|k|\leq 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} \frac{(a_{l,\beta}\cdot k)(a_{l,\beta'}\cdot k)}{|k|^2} &= -\sum_{N\leq|k|\leq 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} \frac{(a_{l,\beta}\cdot k)(a_{l,\beta'}\cdot k)}{|k|^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant la formule 6.4

$$\begin{aligned} (S_{\theta^{(N)}}(v) \,|\, \overline{v})_{L^2} &= -\frac{6\pi^2\nu_0}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2} |l|^2 \sum_{\beta=1}^{2} \sum_{N\leq|k|\leq 2N} \frac{\sin^2(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} \frac{(a_{l,\beta}\cdot k)^2}{|k|^2} + o(1) \\ &= -\frac{6\pi^2\nu_0}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2} |l|^2 \sum_{N\leq|k|\leq 2N} \frac{\sin^4(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} + o(1). \end{aligned}$$

Finalement, on écrit, par l'encadrement somme-intégrale :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2} \sum_{N\leq|k|\leq 2N} \frac{\sin^4(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} &= \frac{\int_{N\leq|x|\leq 2N} \frac{\sin^4(\angle_{x,l})}{|x|^{2\gamma}} \mathrm{d}x}{\int_{N\leq|x|\leq 2N} \frac{1}{|x|^{2\gamma}} \mathrm{d}x} + o(1) \\ &= \frac{\int_N^{2N} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^5(\psi)}{r^{2\gamma}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi}{\int_N^{2N} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\psi)}{r^{2\gamma}} \mathrm{d}r\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi} + o(1). \end{aligned}$$

Les intégrales en r et φ se simplifient. On a

$$\int_O^{\pi} \sin(\psi)\mathrm{d}\psi = 2$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2}\sum_{N\leq|k|\leq 2N}\frac{\sin^4(\angle_{k,l})}{|k|^{2\gamma}} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^5(\psi)\mathrm{d}\psi \\ &= \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$(S_{\theta^{(N)}}(v)\,|\,\overline{v})_{L^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} -\frac{16}{5}\pi^2|l|^2,$$

or $\Delta v = -4\pi^2|l|^2\nu_0 v$. Donc

$$\begin{aligned}(\Delta v\,|\,\overline{v}) &= -4\pi^2|l|^2\left(a_{l,1}e_l + a_{l,2}e_l\,|\,a_{l,1}e_{-l} + a_{l,2}e_{-l}\right) \\ &= -8\pi^2|l|^2\end{aligned}$$

et $\frac{2}{5}\times 8 = \frac{16}{5}$, ce qui donne le résultat. □

III.2 Convergence vers l'équation avec troncature

On peut prouver que la solution $\omega^{(N)}$ vérifie toujours l'inégalité du lemme 6.2. Ainsi, en notant Q_N la loi de $\omega^{(N)}$. On en déduit directement le corollaire suivant

Corollaire 6.3. *La famille $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est tendue sur $L^2([0,T],\mathcal{H})\cap\mathcal{C}([0,T],\mathcal{H}^{-\delta})$.*

Encore avec les mêmes arguments, on obtient un nouvel espace de probabilité $(\tilde{\Omega},\tilde{F},\tilde{\mathbb{P}})$, des variables aléatoires $(\tilde{\omega}^{(N_i)}),\tilde{\omega}$ et des mouvements browniens $(\tilde{W}^{N_i,k,\alpha}),\tilde{W}^{k,\alpha}$ définis sur cet espace tels que :

(i). $(\tilde{\omega}^{(N_i)},\tilde{W}^{N_i})$ et $(\omega^{(N_i)},W^{N_i})$ ont la même loi jointe.

(ii). Pour tout $i\in\mathbb{N}$

$$\tilde{\omega}^{(N_i)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \tilde{\omega} \text{ dans } L^2([0,T],\mathcal{H})\cap\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta}).$$

(iii). Pour tout $i\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}_0^3, \alpha=1,2$:

$$W^{N_i,k,\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} W^{k,\alpha} \text{ dans } \mathcal{C}([0,T],\mathbb{C}).$$

Dans un premier temps, on prouve la convergence l'équation avec troncature.

Proposition 6.2. *On suppose que $\omega_0^{(N)}$ converge faiblement dans $\mathcal{H}$ vers ω_0. Alors $\tilde{\omega}$ résout l'équation de Navier Stokes déterministe avec troncature : pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3, \mathbb{R}^3)$,*

$$(\tilde{\omega}_t \,|\, v)_{L^2} = (\omega_0 \,|\, v)_{L^2} + \left(\nu + \frac{3}{5}\nu_0\right) \int_0^t (\tilde{\omega}_t \,|\, \Delta v)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}_s\|_{H^{-\delta}}) \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right) \mathrm{d}s$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\omega}_t^{(N_i)} \,|\, v\right)_{L^2} &= (\tilde{\omega}_0^{(N_i)} | v)_{L^2} + \int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}^{(N_i)}\|_{H^{-\delta}}) \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s^{(N_i)}} v\right)_{L^2} \mathrm{d}s \\
&\quad + \nu \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, \Delta v\right)_{L^2} \mathrm{d}s + \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, S_{\theta^{(N_i)}}(v)\right)_{L^2} \mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta_k^{(N_i)} \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, \sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla v\right)_{L^2} \mathrm{d}\tilde{W}_s^{(N_i),k,\alpha}.
\end{aligned}$$

Exactement de la même façon que dans la preuve du théorème 6.1, on prouve que

$$\boxed{\left(\tilde{\omega}_t^{(N_i)} \,|\, v\right)_{L^2} \xrightarrow[i\to\infty]{L^1} (\tilde{\omega}_t \,|\, v)_{L^2} \text{ dans } \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}).}$$

et

$$\boxed{\int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, \Delta v\right)_{L^2} \mathrm{d}s \xrightarrow[i\to\infty]{L^1} \int_0^t (\tilde{\omega}_s \,|\, \Delta v)_{L^2} \,\mathrm{d}s \text{ dans } \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}).}$$

et

$$\boxed{\int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\|_{H^{-\delta}}) \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s^{(N_i)}} v\right)_{L^2} \mathrm{d}s \xrightarrow[i\to\infty]{L^1} \int_0^t f_R(\|\tilde{\omega}\|_{H^{-\delta}}) \left(\tilde{\omega}_s \,|\, \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right)_{L^2} \mathrm{d}s.}$$

D'autre part, on a d'après le théorème 6.4,

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, S_{\theta^{(N_i)}}(v)\right)_{L^2} \mathrm{d}s - \frac{3}{5}\nu_0 \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, \Delta v\right)_{L^2} \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_0^T \left| \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, S_{\theta^{(N_i)}}(v) - \frac{3}{5}\nu_0 \Delta v\right)_{L^2} \right| \mathrm{d}s \xrightarrow[i\to\infty]{p.s.} 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \,|\, S_{\theta^{(N_i)}}(v)\right)_{L^2} \mathrm{d}s \xrightarrow[i\to\infty]{p.s.} \frac{3}{5}\nu_0 \int_0^t (\tilde{\omega}_s \,|\, \Delta v)_{L^2} \,\mathrm{d}s}$$

dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$. De plus, on a, par l'isométrie d'Ito :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}}\sum_{k,\alpha}\theta^{(N_i)}\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha}\right)^2\right]\\
=&\tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{3\nu_0}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}^2}\sum_{k,\alpha}\left(\theta^{(N_i)}\right)^2\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}^2\mathrm{d}s\right]\\
\leq&\tilde{\mathbb{E}}\left[3\nu_0\frac{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^\infty}^2}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}^2}\int_0^t\sum_{k,\alpha}\left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}^2\mathrm{d}s\right]
\end{aligned}$$

Or, on écrit, d'après Plancherel :

$$\begin{aligned}
\sum_{k,\alpha}\left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}^2&=\sum_{k,\alpha}\left((\nabla v)\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\mid\sigma_{k,\alpha}\right)_{L^2}^2\\
&\leq\|(\nabla v)\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\|_{L^2}^2\leq\|\nabla v\|_{L^\infty}^2\|\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Or, d'après les bornes du théorème 6.1, conservées car ω^N et $\tilde{\omega}^N$ ont les mêmes lois :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}\left[\left(\frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}}\sum_{k,\alpha}\theta^{(N_i)}\int_0^t\left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\mid\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla v\right)_{L^2}\mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha}\right)^2\right]\\
\leq&\tilde{\mathbb{E}}\left[3\nu_0\frac{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^\infty}^2}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}^2}\int_0^t\|\nabla v\|_{L^\infty}^2\|\tilde{\omega}_s^{(N_i)}\|_{L^2}\mathrm{d}s\right]\\
\leq&C_{R_0,\nu,\delta,\nu_0,R,T}\frac{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^\infty}^2}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}^2}\|\nabla v\|_{L^\infty}^2
\end{aligned}$$

. Or :

$$\|\theta^{(N)}\|_{l^\infty}^2=\frac{1}{|N|^{2\gamma}}$$

et

$$\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2=\sum_{N\leq|k|\leq 2N}\frac{1}{|k|^{2\gamma}}$$

donc

$$\frac{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2}{\|\theta^{(N)}\|_{l^\infty}^2}=\sum_{N\leq|k|\leq 2N}\left(\frac{|N|}{|k|}\right)^{2\gamma}.$$

Le carré de coté $N/2$ est inclus dans le cercle de rayon N. Ainsi, il y a au moins $(N/2)^3$

éléments dans la somme ci-dessus. Donc :

$$\frac{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}^2}{\|\theta^{(N)}\|_{l^\infty}^2} \geq \frac{N^3}{2^{3+2\gamma}} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$$

Donc :

$$\frac{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^\infty}^2}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}^2} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Ainsi le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers 0. On en déduit que

$$\boxed{\frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N_i)}\|_{l^2}} \sum_{k,\alpha} \theta^{(N_i)} \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \mid \sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla v\right)_{L^2} \mathrm{d}\tilde{W}_s^{N_i,k,\alpha} \xrightarrow[i\to\infty]{L^2} 0}$$

pour tout $t \in [0,T]$. En particulier, toutes les convergences (encadrées) ci-dessus, se font en probabilité, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\tilde{\omega}$ vérifie bien l'égalité recherchée. □

Remarque 17. On a utilisé l'isométrie d'Ito plusieurs fois, sans preuve. L'inégalité ci-dessus (de la deuxième à la troisième ligne) montre en fait que $\left(\tilde{\omega}_s^{(N_i)} \mid \sigma_{k,\alpha} \cdot \nabla v\right)_{L^2} \in L^2_{ad}([0,T] \times \tilde{\Omega})$ donc ces utilisations sont bien fondées.

III.3 Convergence vers l'équation sans troncature

On en déduit alors le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6.4. *Soit $R_0, T, \nu > 0$. On suppose que $\omega_0^{(N)}$ converge faiblement dans $\mathcal{H}$ vers $\omega_0 \in B_H(R_0)$. Alors il existe une constante $C_0 = C_0(R_0,\nu)$ telle que pour $\nu_0 > C_0$ et $R > C_1(R_0,\nu,\nu_0)$ assez grands, $\tilde{\omega}$ est un solution **globale** de l'équation de Navier-Stokes déterministe **sans troncature** : pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3,\mathbb{R}^3)$,*

$$(\tilde{\omega}_t \mid v)_{L^2} = (\omega_0 \mid v)_{L^2} + \left(\nu + \frac{3}{5}\nu_0\right) \int_0^t (\tilde{\omega}_t \mid \Delta v)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \left(\tilde{\omega}_s \mid \mathcal{L}^*_{\tilde{u}_s} v\right) \mathrm{d}s.$$

Remarque 18. En d'autres termes, ce corollaire implique que pour un bruit assez intense, la suite $\omega^{(N)}$ (chacun des éléments de cette suite étant définie sur $[0,T]$) converge **en loi** vers la solution déterministe de l'équation de Navier-Stokes. Cette dernière solution est globale, mais cela n'implique pas (directement) que les solutions approchées $\omega^{(N)}$ sont globales ; c'est d'ailleurs l'objet de la section suivante.

Preuve. Soit ξ solution de T_{ν_1} de condition initiale ω_0, avec $\nu_1 = \left(\nu + \frac{3}{5}\nu_0\right)$. Alors d'après le théorème 5.1, il existe c' tel que si $R_0 < c'\nu_1$, alors la solution est globale et

$$\|\xi_t\|_{H^{-\delta}} \leq \|\xi_t\|_{L^2} \leq c'\nu_1.$$

On choisit ν_0 tel que $\nu_1 > 2^{1/4}\frac{R_0}{c'} > \frac{R_0}{c'}$ et R tel que $R > c'\nu_1$. Ainsi ξ est également solution de l'équation avec troncature (car $\|\xi_t\|_{H^{-\delta}} \leq R$). Par unicité, $\tilde{\omega} = \xi$ (à indistinguabilité près) est solution de T_{ν_1}. □

Remarque 19. On aurait pu prendre $\nu_1 > \frac{R_0}{c}$, mais ce choix sera utile dans la suite. De plus, notons bien que ce choix se fait **à ν fixée**. C'est l'augmentation de l'intensité du bruit, à travers ν_0 qui nous permet d'obtenir ce lemme.

On peut maintenant prouver le théorème 6.3.

Preuve. (du théorème 6.3).
Soit R, ν_0 comme dans le corollaire ci-dessus. Remarquons d'abord que comme ω et $\tilde{\omega}$ ont les mêmes lois, (Q_{N_i}) convergence étroitement vers δ_ω. Soit $(Q_{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(Q_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Alors $(Q_{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est toujours tendue, et admet donc une sous suite convergeant étroitement vers δ_ω. Ainsi, toute sous suite de (Q_N) admet une sous suite convergeant étroitement vers δ_ω : c'est précisément la définition de la limite (on peut le voir par exemple par l'absurde). Ainsi, (Q_N) converge étroitement en loi vers δ_ω), c'est à dire que $\omega^{(N)}$ converge en loi vers ω.

Montrons maintenant la deuxième assertion du théorème. Par contradiction, on suppose qu'il existe ε_0 tel que

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\omega_0\in B_H(R_0)} Q_{N,\omega_0}\left(\varphi \in X \mid \|\varphi - \omega(\omega_0)\|_X > \varepsilon_0\right) > 0$$

Par définition, on peut trouver une sous-suite $(\omega_0(N_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset B_H(R_0)$ telle que :

$$Q_{N_i,\omega_0(N_i)}\left(\varphi \in X \mid \|\varphi - \omega(\omega_0)\|_X > \varepsilon_0\right) \geq \varepsilon_0$$

Soit ω_{N_i} la solution de l'EDS avec troncature, de condition initiale ω_{0,N_i}. Quitte à extraire, comme $(\omega_0(N_i))_{i\in\mathbb{N}} \subset B_H(R_0)$, on peut supposer que cette suite converge faiblement dans H vers ω_0. Alors on peut montrer que la famille $(Q_{N_i,\omega_0(N_i)})_{i\in\mathbb{N}}$ est toujours tendue sur X, et on réutilise (encore) les mêmes arguments, pour trouver une autre suite, $\tilde{\omega}_{N_i}$ qui converge fortement (p.s.) dans X vers $\tilde{\omega}$, et cette suite converge forcement vers l'équation de Navier-Stokes déterministe de condition initiale ω_0, par les remarques précédentes.

Ainsi, $\tilde{\omega} = \omega(\omega_0)$. En particulier, la convergence se fait en probabilité : pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{i\to\infty} \tilde{\mathbb{P}}(\|\tilde{\omega}_{N_i} - \omega(\omega_0)\|_X \geq \varepsilon) = 0. \tag{6.5}$$

Or, par définition, pour tout $i \geq 1$ et

$$\tilde{\mathbb{P}}(\|\tilde{\omega}_{N_i} - \omega(\omega_{0,N_i})\|_X \geq \varepsilon_0) > 0.$$

On écrit :

$$\|\tilde{\omega}_{N_i} - \omega(\omega_{0,N_i})\|_X \leq \|\tilde{\omega}_{N_i} - \omega(\omega_0)\|_X + \|\omega(\omega_0) - \omega(\omega_{0,N_i})\|_X$$

Le premier terme est contrôlé grâce à l'équation 6.5. Le deuxième terme tend également vers 0 en probabilité : on peut le voir en appliquant exactement les mêmes méthodes que la section 6.II, à partir du corollaire 6.1. Ces deux faits mis ensemble aboutissent à une contradiction. □

IV Existence et unicité pour les hauts modes

Le but de cette section est de terminer la démonstration du théorème 5.2. On commence par un lemme :

Lemme 6.4. *Soit $R_0, T, \nu, \varepsilon > 0$ et $\omega_0 \in B_H(R_0)$. Alors il existe des constante $C_0 = C_0(R_0, \nu)$ et $N_0 = N_0(R_0, \nu, \nu_0, R, T, \varepsilon)$ tels que si $\nu_0 \geq C_0$ et $N > N_0$, l'équation*

$$\mathrm{d}\omega_t + \mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = \nu\Delta\omega_t \mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta^{(N)}\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k^{(N)} \sigma_{k,\alpha} \circ \mathrm{d}W_t^{k,\alpha} \tag{$\mathrm{TS}_\nu^{(N)}$}$$

de condition initiale ω_0 admet une unique solution forte sur $[0, T]$ avec une probabilité plus grande que $1 - \varepsilon$.

Preuve. Soit $C_0(R_0, \nu)$, $\nu_0 \geq C_0$, $C_1(R_0, \nu, \nu_0)$ et $R > C_1$ comme dans le théorème 6.3. On rappelle que $\omega^{(N)}$ converge donc en loi vers ω, solution de l'équation de tourbillon déterministe. Ici, conformément à la présentation du corollaire, on prend $\omega_0^{(N)} = \omega_0$ pour tout N. Quitte à prendre R plus grand, on peut supposer que

$$\|\omega\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})} \leq R - 1.$$

Or, le théorème 6.3 impose que

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left[\|\omega^{(N)} - \omega\|_X \leq \varepsilon\right] = 1$$

Donc il existe une constante $N_0 = N_0(R_0, \nu, \nu_0, R, T, \varepsilon)$ telle que pour tout $N > N_0$:

$$\mathbb{P}\left[\|\omega^{(N)} - \omega\|_X \leq \varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon \tag{6.6}$$

En particulier, en écrivant $\|\omega^{(N)}\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta}} \leq \|\omega^{(N)} - \omega\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta}} + \|\omega\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta})}$, on obtient

$$\mathbb{P}\left[\|\omega^{(N)}\|_{\mathcal{C}([0,T],H^{-\delta}} < R\right] \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit τ_R^N le temps d'arrêt défini par

$$\tau_R^N = \inf\{t > 0\,,\ \|\omega_t^{(N)}\|_{H^{-\delta}} > R\}.$$

Alors on a évidemment $\mathbb{P}\left[\tau_R^N > T\right] \geq 1-\varepsilon$. De plus, pour tout $t < \tau_R^N$, on a $f_R(\|\omega_t^{(N)}\|_{H^{-\delta}}) = 1$, donc $(\omega_t^{(N)})_{t\leq T}$ est solution forte de $\mathrm{TS}_\nu^{(N)}$ avec une probabilité plus grande que $1 - \varepsilon$. $\square$

Pour prouver le théorème 5.2, on a besoin de la proposition suivante

Proposition 6.3. *Il existe une constante c_0 telle que pour tout $\omega_0 \in B_H(c_0\nu)$, l'équation de tourbillon*

$$\mathrm{d}\omega_t + \mathcal{L}_{u_t}\omega_t \mathrm{d}t = \nu\Delta\omega_t \mathrm{d}t + \frac{C_{\nu_0}}{\|\theta\|_{l^2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}_0^3} \sum_{\alpha=1,2} \theta_k \mathbf{P}(\sigma_{k,\alpha}\cdot\nabla\omega) \circ \mathrm{d}W_t^{k,\alpha}$$

de condition initiale ω_0 admet une unique solution globale.

Preuve. La preuve est similaire a ce qui est fait dans la section 6.II, la condition de petitesse de la norme remplaçant la troncature. Les estimées sont un peu différents mais la méthode est la même. $\square$

On peut maintenant prouver le théorème 5.2.

Preuve. **(du théorème 5.2).** On prend $R_0, T, \nu > 0$ et $0 < \varepsilon < \frac{c_0}{2}\nu$ où c_0 est la constante de la proposition ci-dessus. Soit C_0, N_0 comme dans le lemme 6.4. Soit $N > N_0$. La preuve du théorème 5.1, équation (5.4) impose que

$$\begin{aligned}\|\omega_t\|_{L^2} &\leq \left[\left(\frac{1}{\|\omega_0\|_{L^2}^4} - \frac{1}{(c'\nu_1)^4}\right)e^{C^2\nu_1 t} + \frac{1}{(c'\nu_1)^4}\right]^{-1/4} \\ &\leq \left[\left(\frac{1}{R_0^4} - \frac{1}{(c'\nu_1)^4}\right)e^{C^2\nu_1 t}\right]^{-1/4}.\end{aligned}$$

Or on a choisi ν_0 tel que $(c'\nu_1)^4 \geq 2R_0^4$. Donc

$$\|\omega_t\|_{L^2} \leq \left[\frac{1}{2R_0^4}e^{C^2\nu_1 t}\right]^{-1/4} \leq 2R_0 e^{-2\pi^2\nu_1 t}$$

Remarquons que comme ν_0 est choisit indépendemment de T, on peut décider que T est tel que

$$2R_0 e^{-2\pi^2\nu_1(T-1)} \leq \varepsilon$$

Ainsi, on a alors

$$\|\omega\|_{L^2([T-1,T],\mathcal{H})} \leq 2R_0 e^{-2\pi^2\nu_1(T-1)} \leq \varepsilon$$

On rappelle l'équation 6.6 :

$$\mathbb{P}\left[\|\omega^{(N)} - \omega\|_X \leq \varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon.$$

Soit alors

$$\Omega_\varepsilon = \{a \in \Omega : \|\omega^{(N)(a)} - \omega\|_X \leq \varepsilon\}$$

donc $\mathbb{P}\left[\Omega_\varepsilon\right] \geq 1 - \varepsilon$. Pour $a \in \Omega_\varepsilon$ on a :

$$\|\omega^{(N)}(a)\|_{L^2([T-1,T],\mathcal{H})} \leq \|\omega^{(N)} - \omega\|_{L^2([T-1,T],\mathcal{H})} + \|\omega\|_{L^2([T-1,T],\mathcal{H})} \leq 2\varepsilon \leq c_0\nu$$

Donc $\|\omega^{(N)}(a)\|_{L^2([T-1,T],\mathcal{H})} \leq c_0\nu$. Pour tout $a \in \Omega_\varepsilon$, il existe donc un $t(a)$ tel que

$$\|\omega_{t(a)}^{(N)}(a)\| \leq c_0\nu$$

Par la proposition ci-dessus, la solution démarrant en $\omega_{t(a)}^{(N)}(a)$ est globale, ce qui conlut la preuve. $\square$

Bibliographie

[1] Jean-Yves CHEMIN, Benoit DESJARDINS, Isabelle GALLAGHER et Emmanuel GRENIER : *Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*. Oxford University Press, 04 2006.

[2] Franco FLANDOLI, Lucio GALEATI et Dejun LUO : Scaling limit of stochastic 2d euler equations with transport noises to the deterministic navier–stokes equations. *Journal of Evolution Equations*, 21(1):567–600, jun 2020.

[3] Franco FLANDOLI et Dejun LUO : High mode transport noise improves vorticity blow-up control in 3d navier–stokes equations. *Probability Theory and Related Fields*, 180(1-2):309–363, mar 2021.

[4] Jean-Francois Le GALL : *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique.* Springer Berlin, Heidelberg, 04 2006.

[5] Isabelle GALLAGHER : Analyse fonctionnelle, Mai 2019.

[6] Thomas KURTZ : The Yamada-Watanabe-Engelbert theorem for general stochastic equations and inequalities. *Electronic Journal of Probability*, 12(none):951 – 965, 2007.

[7] Dejun LUO : Absolute continuity under flows generated by sde with measurable drift coefficients. *Stochastic Processes and their Applications*, 121(10):2393–2415, 2011.

[8] Jacques SIMON : Compact sets in the space lp(o,t ; b). *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 146:65–96, 01 1986.

[9] Bernt ØKSENDAL : *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*, volume 82. Springer Berlin, Heidelberg, 01 2000.