



RAPPORT PSC

MAT04

Avril 2022

Elie Attal, Dorian Bouilly, Yorgo Chamoun, Loris
Domeneghetti, Thomas Louis



Table des matières

1	Métrie de Schwarzschild et Champs de Yang Mills	5
1.1	Métrie de Schwarzschild	5
1.2	Champ de Yang Mills :	5
1.2.1	L'électromagnétisme en relativité	5
1.2.2	Equation de Yang-Mills	6
1.3	Changement de variable :	7
1.3.1	Coordonnées de Kruskal-Szekeres	7
1.3.2	Coordonnées adoptées	9
2	Équation indépendante du temps :	10
2.1	Etude théorique :	10
2.2	Etude numérique	14
3	Etude numérique de l'équation dépendant du temps	18
3.1	Equation d'ondes	18
3.2	Partie non linéaire :	20
3.3	Equation compactifiée	22
4	Étude analytique de l'équation en temps	26
4.1	Formulation du problème de Cauchy	26
4.2	Mise en évidence d'une énergie conservée	27
4.3	Formalisation du problème	27
4.4	Le problème de Cauchy (26) est bien posé	30
A	Preuves de propriétés sur l'équation statique	32
B	Équation des ondes	33

Introduction

En 1915, Einstein propose une théorie, dite de relativité générale, qui complète ses travaux sur l'espace et le temps, unifiés par la notion d'espace-temps, en y intégrant la gravitation. L'équation d'Einstein, qui décrit l'effet de la matière et de l'énergie sur la géométrie de l'espace-temps, est au centre de cette théorie. Elle est de la forme :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

où $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein qui décrit la courbure de l'espace-temps, Λ est la constante cosmologique, G la constante gravitationnelle, c la vitesse de la lumière dans le vide, $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion qui décrit la répartition de la masse et de l'énergie dans l'espace-temps, et $g_{\mu\nu}$ le tenseur métrique. Ce dernier est une forme bilinéaire définie, symétrique, non dégénérée, qui définit donc un produit scalaire sur l'espace-temps, ce qui le munit d'une distance.

Le but de notre travail est l'étude d'un modèle de trous noirs, c'est-à-dire d'une métrique solution de l'équation d'Einstein décrivant la déformation de l'espace-temps par une distribution de masse non chargée à symétrie sphérique. L'équation d'Einstein n'admet pas de solution analytique générale, mais elle peut être résolue dans certains cas particuliers. Nous commencerons donc par introduire la métrique de Schwarzschild, qui n'est autre que la solution de ces équations pour une masse sphérique placée dans le vide, avant de nous pencher sur un problème plus compliqué, à savoir l'effet de cette métrique sur un champ dit de Yang-Mills. On distingue deux solutions à ce dernier problème : les solutions qu'on appelle "lisses" , que l'on n'étudiera pas, et les solutions qui modélisent le cas où la masse sphérique est un trou noir. Ces solutions sont appelées "Trous noirs colorés".

Notre recherche est liée à l'étude de trois articles : [Biz90], [HH], [BRZ18].

Dans un premier temps, nous détaillerons le contexte mathématique et physique qui aboutit à l'établissement de l'équation qui sera le centre de notre analyse. Ensuite, nous étudierons cette équation dans le cas stationnaire, c'est à dire indépendant du temps. D'une part, nous prouverons certains résultats théoriques, inspirés par [HH]. D'autre part, nous proposerons une résolution numérique. Nous esquisserons finalement une étude de l'équation en temps, notamment une étude numérique basée sur des méthodes de différences finies.



FIGURE 1 – Image d'un trou noir photographié par la Nasa

1 Métrique de Schwarzschild et Champs de Yang Mills

1.1 Métrique de Schwarzschild

La métrique de Schwarzschild est, historiquement, la première solution exacte de l'équation d'Einstein dans un cas particulier, à savoir à l'extérieur d'une distribution de masse m sphérique placée dans le vide. Elle a été découverte par l'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild en 1915. Son expression dans les coordonnées de Schwarzschild $(x^\mu)_\mu := (\bar{t}, r, \theta, \phi)$, avec \bar{t} le temps, r la coordonnée radiale (circonférence de la sphère centrée sur la distribution de masse et passant par le point considéré, divisée par 2π), θ la colatitude et ϕ la longitude, est la suivante :

$$g = -N d\bar{t}^2 + N^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1)$$

Avec :

$$N = 1 - \frac{2m}{r} \quad (2)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \quad (3)$$

On définit $R_S := 2m$ le rayon de Schwarzschild. Il s'agit du rayon à partir duquel la vitesse de libération est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. On parle de trou noir lorsque ce rayon est supérieur à celui de la distribution de matière : intuitivement, même la lumière ne s'échappe pas.

1.2 Champ de Yang Mills :

En 1954, Yang et Mills publient un article dans lequel ils proposent une large classe de théories classiques des champs inspirées par et généralisant l'électromagnétisme et satisfaisant une symétrie de jauge. Elles sont aujourd'hui connues sous le nom de théories de Yang-Mills, et sont extrêmement importantes en physique moderne, car en plus de généraliser la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, leur quantification mène à une très grande partie des théories physiques les plus importantes, telles que l'électrodynamique quantique, la théorie électrofaible et le modèle standard des particules, ainsi que les grandes théories d'unification proposées par la suite. Ainsi, toutes les interactions fondamentales peuvent être décrites par une théorie de Yang-Mills, mise à part la gravitation, qu'on ne sait pas quantifier, alors qu'on sait très bien le faire pour une théorie de Yang-Mills en général.

1.2.1 L'électromagnétisme en relativité

En relativité, le potentiel électrique ϕ et le potentiel vecteur magnétique \vec{A} sont regroupés dans le quadrivecteur potentiel $(A^\mu)_\mu := (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$. On définit

alors le tenseur de Faraday par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Ce tenseur décrit en fait les champs électrique et magnétique. En effet, on a :

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E^x & \frac{1}{c}E^y & \frac{1}{c}E^z \\ \frac{1}{c}E^x & 0 & B^z & -B^y \\ \frac{1}{c}E^y & -B^z & 0 & B^x \\ \frac{1}{c}E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix},$$

On rappelle que les équations de Maxwell sans source sont données par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

Le vecteur de Faraday nous permet d'exprimer les équations de Maxwell sans source par la simple équation $dF = 0$.

1.2.2 Equation de Yang-Mills

Dans l'article, nous étudions une théorie de Yang-Mills avec symétrie de jauge $SU(2)$, ce qui signifie qu'une transformation locale du système selon un élément de ce groupe de symétrie n'affecte pas les observations. On rappelle que le groupe $SU(2)$ est le groupe des matrices unitaires de dimension 2, à coefficients complexes et de déterminant 1, et est généré par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

que l'on notera τ_1 , τ_2 et τ_3 . Il s'agit de la symétrie de jauge s'appliquant à l'interaction faible.

Nous considérons à présent un potentiel à symétrie sphérique de la forme

$$(A_{\mu\nu}) = W\tau_1 d\theta + (\cos(\theta)\tau_3 + W\tau_2)\sin(\theta)d\phi \quad (4)$$

W étant une fonction de r et de t à déterminer. Nous calculons la courbure du champs, qui est l'équivalent du tenseur de Faraday pour un champs de Yang-Mills, et qui est donné par :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (5)$$

On pourra commencer par remarquer que cela donne bien le tenseur de Faraday si on l'applique au quadrivecteur potentiel de l'électromagnétisme, car les A_j sont

des nombres et donc commutent nécessairement. Nous pouvons aussi remarquer que clairement $F_{jk} = -F_{kj}$ et $F_{jj} = 0$. Calculons à présent explicitement :

$$\begin{aligned}
 F_{01} &= 0 \\
 F_{02} &= \tau_1 \partial_t W \\
 F_{03} &= \tau_2 \sin(\theta) \partial_t W \\
 F_{12} &= -\tau_1 \partial_r W \\
 F_{13} &= \tau_2 \sin(\theta) \partial_r W \\
 F_{23} &= \tau_3 \sin(\theta) (1 - W^2)
 \end{aligned}$$

Il reste à injecter dans l'équation de Yang-Mills, qui est l'analogue de l'équation de Maxwell :

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} + [A_\alpha, F^{\alpha\beta}] = 0 \quad (6)$$

Cette équation, tous calculs faits, devient :

$$\partial_t^2 W - \partial_x^2 W + \frac{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}{r^2} W (1 - W^2) = 0 \quad (7)$$

où la coordonnée x est définie par :

$$\frac{dx}{dr} = N^{-1}$$

1.3 Changement de variable :

On remarque maintenant que la métrique définie par (1) possède une singularité en $r = 2m$, c'est à dire le rayon du trou noir. On présente ici deux changements de variables qui permettent de s'affranchir de cette singularité, pour ensuite résoudre plus facilement l'équation (7).

1.3.1 Coordonnées de Kruskal-Szekeres

Pour donner l'intuition derrière ce que nous allons faire par la suite, nous pouvons faire une analogie avec les coordonnées sphériques. Prenons une sphère et représentons-la dans le plan (θ en ordonnées, ϕ en abscisses). Avec cette représentation, il n'est pas du tout simple de voir que les points de l'axe $\theta = 0$ sont en fait le même point. Cette représentation n'est donc pas adaptée. Le problème en $r = 2m$ est évidemment plus subtil, mais cette analogie permet de saisir plus intuitivement ce qui se passe.

Nous allons maintenant développer en détail, étape par étape, le changement de variables en question, nous menant aux coordonnées dites de Kruskal-Szekeres.

Nous adoptons pour cette partie uniquement la notation $t = \bar{t}$. Nous commençons par introduire les coordonnées de Regge-Wheeler (coordonnée de la tortue) :

$$r_* = r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right), dr_* = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)}$$

Puis les coordonnées d'Eddington-Finkelstein :

$$\begin{cases} u = t + r_* \\ v = t - r_* \end{cases}$$

A ce stade, nous avons :

$$dudv = (dt)^2 + (dr_*)^2$$

Donc :

$$-Ndt^2 + N^{-1}dr^2 = -Ndudv = -\frac{2m}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) \exp\left(-\frac{v-u}{4m}\right) dudv$$

On introduit alors :

$$\begin{cases} U = -\exp\left(-\frac{u}{4m}\right) \\ v = \exp\left(\frac{v}{4m}\right) \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$-Ndt^2 + N^{-1}dr^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) dUdV$$

Enfin on pose :

$$\begin{cases} T = \frac{V+U}{2} \\ X = \frac{V-U}{2} \end{cases}$$

Et on obtient la métrique de Kruskal-Szekeres :

$$(ds)^2 = \frac{32m^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2m}\right) (dX^2 - dT^2) + r^2 d\Omega^2$$

On s'est bien affranchi de la singularité.

Il peut être intéressant, pour mieux comprendre la géométrie de l'espace-temps avec ces coordonnées, de tracer le diagramme de Penrose en utilisant des relations simples entre X et T issues des équations ci-dessus. Par exemple, on peut voir que $X + T = X - T = 0$ en $r = 2m$ et que $X^2 - T^2 = cte$ pour $r = cte$. On obtient le diagramme suivant :

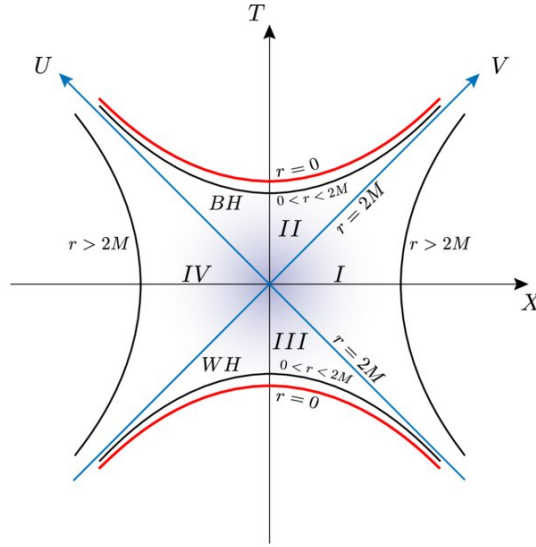


FIGURE 2 – Illustration des coordonnées de Kruskal-Szekeres (U,V)

1.3.2 Coordonnées adoptées

L'auteur de l'article adopte un autre changement de variables, plus adapté au problème étudié. On effectue donc à partir de la métrique de Schwarzschild le changement de variables :

$$t = \bar{t} - h(r)$$

avec h une fonction "hauteur" choisie convenablement, comme nous le verrons. On a :

$$dt = d\bar{t} + H(r)dr, \quad h'(r) = H(r).$$

En injectant dans (1), on obtient :

$$g = -Ndt^2 - 2NHdt dr + \frac{1 - (NH)^2}{N}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

On choisit :

$$H = \frac{1}{N} \frac{J}{\sqrt{N + J^2}}, \quad J = \frac{Kr}{3} - \frac{C}{r^2}$$

On remarque qu'il n'y a effectivement plus de singularité en $r = 2m$. L'équation (7) devient :

$$\frac{1 - (NH)^2}{N} \ddot{W} + 2NH\dot{W}' + (NH)'\dot{W} = (NW')' + \frac{W(1 - W^2)}{r^2} \quad (8)$$

C'est cette équation que nous étudierons par la suite.

2 Équation indépendante du temps :

2.1 Etude théorique :

Dans un premier temps, on décide de regarder les solutions de indépendantes du temps, c'est à dire qu'on pose $\dot{W} = 0$. Le terme de gauche dans l'équation ci-dessus est nul, et l'équation devient :

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) W'' + \frac{1}{r^2} W' + \frac{W(1 - W^2)}{r^2} = 0 \quad (E)$$

sur $[1; +\infty[$.

On note $a = W(1)$ qui détermine une unique solution (selon Cauchy-Lipschitz) puisque en 1, a fixe $W'(1)$.

Les solutions de (E), nous allons le voir, sont soit bornées entre -1 et 1 , soit divergentes vers $\pm\infty$ en $+\infty$. Il existe de plus une suite de solutions bornées W_n qu'on range par ordre décroissant de $a_n = W_n(1)$, avec :

- Les a_n strictement décroissants
- W_n admet n zéros
- $W_n(+\infty) = (-1)^n$

De plus, on connaît W_1 analytiquement :

$$W_1(r) = \frac{c - r}{r + 3(c - 1)} \quad \text{avec} \quad c = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

D'où : $a_1 \approx 0.267949$.

Passons maintenant à la preuve des propriétés énoncées ci-dessus :

Lemme 2.1. *Soit W une solution de (E). On suppose qu'il existe $a \in [1, +\infty[$ tel que $W(a) > 1$ et $W'(a) > 0$. Alors*

$$\forall r \in [a, +\infty[, \quad W'(r) > 0.$$

Preuve. On raisonne par l'absurde. Comme W' est continue, l'ensemble de ses points d'annulation est un fermé non vide. Soit $b = \min \{r > a \mid W'(r) = 0\}$. Par hypothèse, $W' > 0$ sur $[a, b[$, donc $W(b) > W(a) > 1$. W étant solution de (E), on a

$$\left(1 - \frac{1}{b}\right) W''(b) = \frac{W(b)(W(b)^2 - 1)}{b^2} > 0$$

donc

$$W''(b) > 0.$$

Un développement limité à l'ordre un de W' en b montre alors qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $W'(c) < 0$, ce qui contredit la minimalité de b . \square

Propriété 2.1 (Limites possibles des solutions de (E)). *Si W est une solution de (E) qui possède une limite réelle α en $+\infty$, alors $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.*

Preuve. Notons $\ell := \alpha(\alpha^2 - 1) \neq 0$. Écrivons un développement asymptotique de (E) lorsque r tend vers $+\infty$:

$$W'' = -\frac{1}{r(r-1)}W' + \frac{\ell}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

On remarque que l'intégrale du membre de droite est convergente en $+\infty$. En effet, une intégration par parties donne :

$$\int_2^R \frac{W'(r)}{r(r-1)} dr = \left[\frac{W(r)}{r(r-1)} \right]_2^R + \int_2^R \frac{(2r-1)W(r)}{r^2(r-1)^2} dr$$

et cette expression possède une limite lorsque R tend vers $+\infty$. Mais alors l'intégrale de W'' converge en $+\infty$, ce qui signifie que W' possède une limite réelle. Cette limite est nécessairement nulle puisque l'intégrale de W' converge en $+\infty$. On obtient donc

$$W'' = \frac{\ell}{r^2} + o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

En intégrant deux fois, on trouve $W(r) \sim \log(r)$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. \square

Propriété 2.2. *Soit W une solution de (E) telle qu'il existe $r_0 \geq 1$ vérifiant $W(r_0) \notin [-1, 1]$. Alors pour tout $r \geq r_0$, $W(r) \notin [-1, 1]$ et W tend vers $\pm\infty$ avec une dérivée ne s'annulant jamais au delà de r_0 (donc de manière strictement monotone).*

Preuve. Quitte à changer W en $-W$, on suppose $W(r_0) > 1$.

Premier cas : $\lambda := W(1) > 1$. Alors $W'(1) = \lambda(\lambda^2 - 1) > 0$.

Second cas : $\lambda \leq 1$. Il existe $r_0 > 1$ tel que $W(r_0) > 1$. Soit

$$r_1 := \max \{1 \leq r < r_0 \mid W(r) = 1\}.$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué entre r_1 et r_0 , on trouve $r_1 < a < r_0$ tel que $W'(a) > 0$. Par définition de r_1 , on a aussi $W(a) > 1$.

Dans les deux cas, on peut appliquer le Lemme 2.1, qui assure que $W' > 0$ sur $[a, +\infty[$. W est donc croissante, mais n'admet pas de limite réelle d'après la Propriété 2.1, donc W tend vers $+\infty$. \square

Propriété 2.3. *Soit W une solution de (E) différente de la solution constante égale à 1 ou à -1. si $r_a < +\infty$ alors W diverge vers $\pm\infty$ en $+\infty$.*

Preuve. Posons $r_a = \min\{r \geq 1; |W(r)| = 1\}$.

Sans perte de généralité, nous traitons le cas où $W(r_a) = +1$. W est différente de ± 1 donc $r_a > 1$. De plus, comme $|W| < 1$ sur $[1; r_a[$ nous avons forcément $W'(r_a) \geq 0$. Cependant, si $W'(r_a) = 0$ alors par Cauchy-Lipschitz W est la fonction constante égale à 1 (conditions initiales $W(r_a) = 1$ et $W'(r_a) = 0$) ce qui est contradictoire. On en déduit que $W'(r_a) > 0$.

Ainsi il existe $r' > r_a$ tel que $W(r') > 1$ et par la Propriété 2.2., W tend vers $+\infty$ en $+\infty$. \square

Théorème 2.2. *Il existe une suite de solutions bornées W_n qu'on range par ordre décroissant de $a_n = W_n(1)$, avec :*

- Les a_n strictement décroissants
- W_n admet n zéros
- $W_n(+\infty) = (-1)^n$

Preuve. La preuve de ce théorème n'est pas la nôtre, nous tentons simplement ici d'en détailler les idées principales.

Tout d'abord, posons $\alpha \in]0; 1[$, il est possible de montrer que pour tout $a = W(1) \in [0; 1]$ il existe une unique solution associée W_a définie et $C^{2,\alpha}$ sur $[1; r_a]$ où $r_a = \min\{r \geq 1; |W(r)| = 1\}$.

Rappel : $C^{2,\alpha}([1; R])$ correspond à l'ensemble des fonctions f de $C_b^2([1; R])$ telles que f' et f'' sont dans $C^{0,\alpha}([1; R]) = \{g \in L^\infty([1; R]); \sup_{1 \leq x \neq y \leq R} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty\}$. On

munit $C^{2,\alpha}([1; R])$ de la norme :

$$\|f\|_{C^{2,\alpha}([1; R])} = \sum_{k=0}^2 \|f^{(k)}\|_{\infty}^{[1; R]} + \sup_{1 \leq x \neq y \leq R} \frac{|f^{(2)}(x) - f^{(2)}(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Nous allons commencer par énoncer certaines propriétés :

- Il est possible de montrer une forme de continuité des W_a par rapport à a :

Propriété 2.4. *Soient $a \in [0; 1]$ et $\epsilon > 0$, pour tout $1 \leq R \leq r_a$, si a' est suffisamment proche de a , alors $W_{a'}$ est définie sur $[1; R]$ et :*

$$\|W_a - W_{a'}\|_{C^{2,\alpha}([1; R])} \leq \epsilon$$

- Nous disposons aussi d'une propriété qui nous fournit une forme de contrôle sur les extrema et les zéros de W_a , nous l'énonçons ici et nous détaillerons plus loin la manière dont nous l'utilisons dans le cadre de la démonstration du Théorème 2.2 :

Propriété 2.5. *Soit $a \in [0; 1]$, il existe $\epsilon > 0$ et $R > 0$ tels que s'il existe $R < r_0 < r_a$ tel que W_a possède un extremum local en r_0 vérifiant :*

$$1 - \epsilon \leq |W_a(r_0)| \leq 1$$

Alors $r_a < +\infty$ et W_a n'a qu'un seul zéro sur $[r_0; r_a]$.

Un point important à noter ici est que **R et ϵ ne dépendent pas de la solution concernée**, ils ne dépendent pas de a .

- La Propriété 2.1. nous invite à chercher une condition pour que les solutions admettent une limite finie en $+\infty$, nous disposons justement de la propriété suivante :

Propriété 2.6. *Soit $a \in [0; 1]$, si $r_a = +\infty$ et que W_a a un nombre fini de zéros alors elle converge vers une limite finie.*

[Démonstration en Appendice A]

D'après la Propriété 2.1. nous savons que cette limite appartient à $\{-1; 0; 1\}$. Il est de plus possible de démontrer que **la limite 0 est ici impossible**.

- Au premier abord, il peut ne pas être évident de voir comment utiliser la Propriété 2.5., le corollaire suivant va être la forme sous laquelle nous l'utiliserons pour la démonstration du théorème :

Corolaire 2.2.1. *Soit $a \in [0; 1]$ tel que $r_a = +\infty$ et W_a possède n zéros. Alors, pour a' suffisamment proche de a , soit $W_{a'}$ possède n zéros, soit elle possède $n + 1$ zéros et $r_{a'} < +\infty$.*

[Démonstration en Appendice A]

- Voici une dernière propriété, que nous admettons, essentielle pour la preuve du théorème :

Propriété 2.7. *Notons $X_n = \{a \in [0; 1]; W_a \text{ possède moins de } n \text{ zéros et } r_a < +\infty\}$. Si α est un point limite de X_n alors W_α possède m zéros avec $m = n$ ou $m = n - 1$, $r_\alpha = +\infty$ et W_α tend vers $(-1)^m$ en $+\infty$.*

Passons maintenant à la description de la démonstration du Théorème 2.2. :

Posons $Y_n = \{a \in [0; 1]; W_a \text{ possède moins de } n \text{ zéros}\}$ et $\alpha = \min(Y_n)$. Il est possible de démontrer que $\alpha > 0$, nous l'admettons ici. Nous admettons aussi que $r_\alpha = +\infty$. Notons m le nombre de zéros de W_α . Nous savons par la Propriété 2.6. que W_α converge donc vers ± 1 , comme $W_\alpha(1) > 0$ et que cette fonction a exactement m zéros, on en déduit qu'elle converge vers $(-1)^m$. Distinguons deux cas :

- Si $\alpha \notin Y_n$: Dans ce cas nous avons $m > n$. Ainsi par le Corollaire 2.2.1., dans le voisinage de W_α il n'y a que des solutions à m ou à $m + 1$ zéros. Or dans son voisinage il doit y avoir des points de Y_n car α en est un point limite. Ainsi **ce cas est impossible**.
- Si $\alpha \in Y_n$: Encore une fois par le Corollaire 2.2.1., il existe un voisinage de α tel que toute solution dans ce voisinage (on confond ici les a et les W_a) soit possède m zéros, soit possède $m + 1$ zéros en vérifiant $r_a < +\infty$. Supposons que $m < n$: notons V^- la partie de ce voisinage strictement inférieure à α . V^- est par définition disjointe de Y_n et donc ne contient que des solutions ayant strictement plus de n zéros, or m et $m + 1$ sont inférieurs à

n , ce qui nous donne une contradiction. Ainsi $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, et dans V^- il n'y a que des solutions à $n + 1$ zéros.

En prenant une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ convergeant vers α par valeurs strictement inférieures (on rappelle que $\alpha > 0$), il existe $\alpha_i \in V^-$. Ainsi \mathbf{X}_{n+1} (défini dans la Propriété 2.7.) **n'est pas vide**.

Comme X_1 n'est pas vide (on connaît a_1), alors Y_1 non plus, puis par récurrence aucun X_n n'est vide, idem pour les Y_n . D'après le procédé précédent **nous extrayons un a_n de chaque X_n et la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est bien strictement décroissante. On a de plus $W_{a_n}(+\infty) = (-1)^n$ et W_{a_n} admet n zéros.**

□

2.2 Etude numérique

On reprend l'équation stationnaire :

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right) W'' + \frac{1}{r^2} W' + \frac{W(1 - W^2)}{r^2} = 0 \quad (E)$$

sur $[1; +\infty[$.

On note toujours $a = W(1)$.

Résolvons l'équation par la méthode d'Euler. Pour résoudre numériquement l'équation (E), on la met sous la forme, pour $r > 1$:

$$y' = F(r, y)$$

avec :

$$y = \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix}$$

et :

$$F\left(r, \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} W' \\ -\frac{1}{r^2-r} (W' + W(1 - W^2)) \end{pmatrix}$$

Une difficulté pour l'application de la méthode d'Euler dans ce cas est que la fonction F n'est pas définie au bord de l'intervalle ($r = 1$, correspondant à l'horizon des événements). Pour y remédier, on calcule le premier pas "à la main" : on cherche donc un développement limité de W en 1 :

$$W(1 + h) = a + \alpha h + \beta h^2 + o(h^2).$$

En évaluant simplement (E) en 1, il vient

$$\alpha = \lambda(\lambda^2 - 1).$$

Maintenant, on calcule le développement limité de (E) à l'ordre 1 :

$$\left(1 - \frac{1}{1+h}\right) W''(1+h) = h(1 + o(1))(2\beta + o(1)) = 2\beta h + o(h),$$

$$\frac{1}{(1+h)^2} W'(1+h) = (1-2h+o(h))(\alpha+2\beta h+o(h)) = \alpha+2(\beta-\alpha)h+o(h),$$

$$\begin{aligned} \frac{[W(1-W^2)](1+h)}{(1+h)^2} &= (1-2h+o(h))(\lambda+\alpha h+o(h))(1-\lambda^2-2\lambda\alpha h+o(h)) \\ &= \lambda(1-\lambda^2) + (-2\lambda^2\alpha + \alpha(1-\lambda^2) - 2\lambda(1-\lambda^2))h + o(h) \\ &= \lambda(1-\lambda^2) + 3\alpha(1-\lambda^2)h + o(h). \end{aligned}$$

La somme des trois termes d'ordre 1 est nulle :

$$0 = 4\beta - 2\alpha + 3\alpha(1-\lambda^2)$$

donc :

$$\beta = \frac{1}{4}\alpha(3\lambda^2 - 1) = \frac{1}{4}\lambda(\lambda^2 - 1)(3\lambda^2 - 1).$$

Cette difficulté écartée, on peut coder la résolution de l'équation en Python. Le code est présenté ci-dessous.

```
def F0(r,y):
    return np.array([y[1], -1/(r**2-r)*(y[1]+y[0]*(1-y[0]**2))])

def Euler(a,n,r_max):
    h = (r_max-1)/n
    b = a*(1-a**2)
    c = (b*(1-3*(a**2)))/2
    y0 = np.array([a,b])
    r0 = 1
    y=y0
    r=r0
    Y = [y0]
    R = [r0]
    y1 = np.array([a+h*b,b+h*c])
    y = y1
    r = 1+h
    R = [r0, r0+h]
    Y = [y0,y1]
    for k in range(n) :
        if abs(y[0]) < 1.001 :
            y = y + h*F0(r,y)
            r = r+h
            Y.append(y)
            R.append(r)
    return R,Y
```

Puisque l'on connaît W_1 analytiquement, on peut la comparer à la solution trouvée numériquement pour valider notre approche. Sur le graphique suivant sont tracées les deux fonctions.

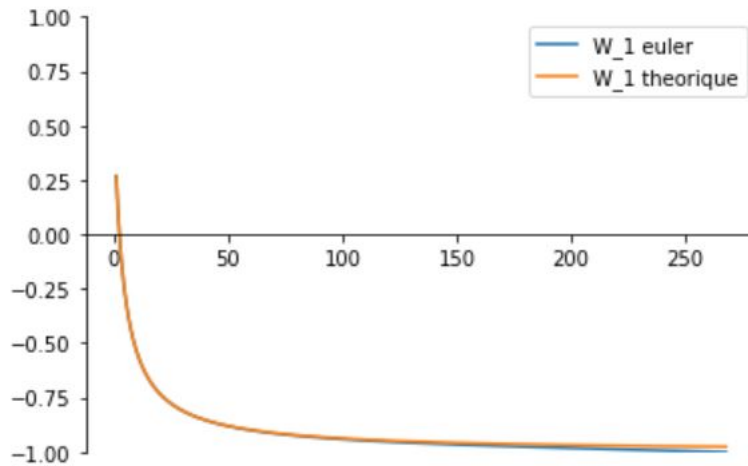


FIGURE 3 – Tracé de W_1 , calculé d'une part numériquement et analytiquement d'autre part

Remarque 2.2.1. Nous avons discuté de l'utilisation d'une méthode plus précise, par exemple un schéma "RK4". Cependant, nous avons vu que nous étions obligés d'adopter pour le premier pas un schéma différent, dont la précision est d'ordre 1. Ainsi, ce premier pas borne la précision du schéma à l'ordre 1, donc l'utilisation de RK4 semble inadapté.

Cherchons à calculer numériquement les $a_n = W_n(1)$. On privilégie encore la méthode d'Euler. On sait que les a_n sont décroissants, que W_n possède n zéros et que $W_n(+\infty) = (-1)^n$. On peut donc réaliser une dichotomie à la main selon le nombre de zéros de la fonction W . En effet, pour $a \in]a_1, a_2[$, la solution W associée possède deux zéros et tend vers $+\infty$. Plus a diminue et se rapproche de a_2 , plus la solution diverge loin. Une fois a_2 dépassé, les solutions possèdent trois zéros ou plus.

On trouve : $a_2 = 0.0445 \pm 0.0005$. Ci-dessous le graphique pour $W(1) = 0.0445$.

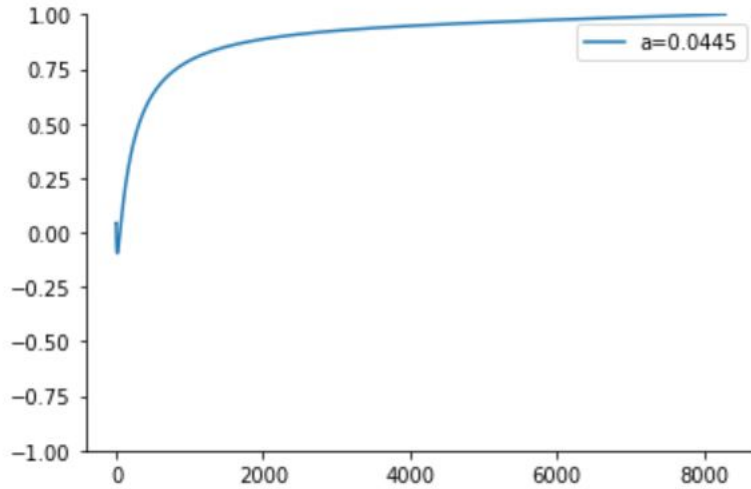


FIGURE 4 – Tracé pour $a = 0.0445$

On observe bien les deux zéros de la fonction, et l'apparente convergence vers la valeur 1.

On applique la même méthode pour a_3 . Une précision correcte est néanmoins difficile à obtenir. On trouve : $a_3 \approx 0.007$.

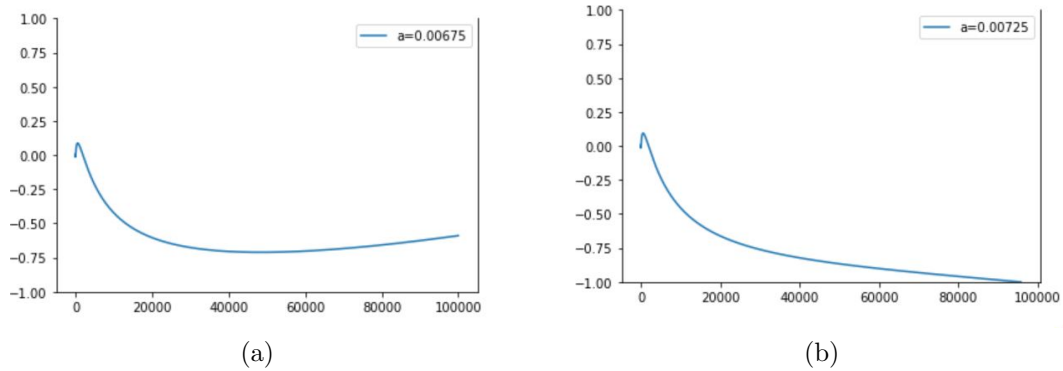


FIGURE 5 – Dichotomie pour a_3 . A gauche, $a = 0.00675$. A droite, $a = 0.00725$

Un fait remarquable est que $\frac{a_3}{a_2} \approx \frac{a_2}{a_1} \approx 0.16$. Dans son article "Colored black holes" de 1990, Piotr Bizon avait déjà remarqué sans la prouver une progression géométrique de ces a_n dans le cas de l'équation dépendant du temps. A la lumière de nos calculs, il semblerait que cette propriété soit conservée dans le cas stationnaire.

3 Etude numérique de l'équation dépendant du temps

3.1 Equation d'ondes

On reprend l'équation (7). Pour commencer, on enlève la partie non linéaire pour effectuer une première résolution. On va donc résoudre l'équation :

$$\frac{\partial W}{\partial t^2} - \frac{\partial W}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

pour $0 \leq x \leq L$ et $0 \leq t \leq T$ avec comme condition initiale, comme dans l'article [BRZ18], la solution statique $W = 1$ perturbée par une gaussienne :

$$W(0, x) = 1 + pe^{-(x-m)^2/\sigma} \quad (10)$$

et comme conditions aux bords fixes $W(0) = W(L) = 1$. Ensuite, on discrétise les intervalles de résolution, c'est à dire qu'on choisit un δx et un δt petits et on note :

$$\begin{aligned} t_k &= k\delta t \\ x_j &= \frac{1}{2} + j\delta x \end{aligned}$$

pour $k \in \{0, \dots, m\}$ et $j \in \{0, \dots, n\}$

On cherche maintenant à trouver :

$$W_j^k = W(t_k, \rho_j)$$

en sachant qu'on connaît déjà W_j^0 , W_0^k et W_n^k

On va transformer l'équation (9) en une équation récurrente sur les W_j^k .

Une méthode du point milieu donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W(t_k, x_j)}{\partial t^2} &= \frac{W_j^{k+1} - 2W_j^k + W_j^{k-1}}{\delta t^2} \\ \frac{\partial^2 W(t_k, x_j)}{\partial x^2} &= \frac{W_{j+1}^k - 2W_j^k + W_{j-1}^k}{\delta x^2} \end{aligned}$$

En injectant dans l'équation (9), et en réarrangeant les termes, on obtient :

$$\frac{W_j^{k+1}}{\delta t^2} + 2W_j^k \left(\frac{1}{\delta x^2} - \frac{1}{\delta t^2} \right) + \frac{W_j^{k-1}}{\delta t^2} - \frac{W_{j-1}^k}{\delta x^2} - \frac{W_{j+1}^k}{\delta x^2} = 0 \quad (11)$$

Ce qu'on peut réécrire, en notant $S = \frac{\delta t^2}{\delta x^2}$:

$$W_j^{k+1} = 2W_j^k (1 - S^2) - W_j^{k-1} + S^2 (W_{j-1}^k + W_{j+1}^k) \quad (12)$$

Notons :

$$\vec{W}^k = \begin{pmatrix} W_0^k \\ \vdots \\ W_n^k \end{pmatrix}$$

Alors l'équation devient une équation matricielle :

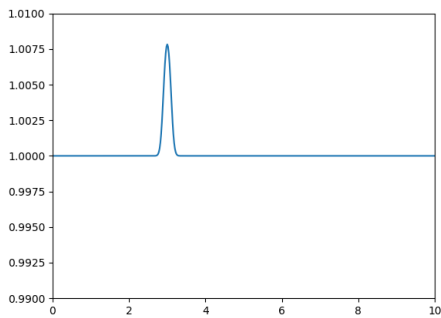
$$\vec{W}^{k+1} = A\vec{W}^k - \vec{W}^{k-1} \quad (13)$$

Avec :

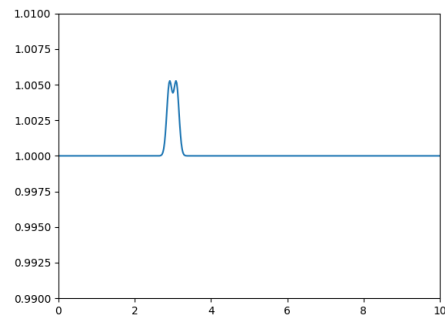
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -S^2 & 2(1-S^2) & -S^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -S^2 & 2(1-S^2) & -S^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Remarque 3.1.1. On a fixé les conditions aux limites avec les coefficients aux extrêmes de la matrice A . Il est facile de se convaincre que de cette façon, les extrémités du vecteur \vec{W}^k restent fixées à 1.

On obtient, comme attendu, la propagation d'une onde dans les deux directions :



(a)



(b)

FIGURE 6

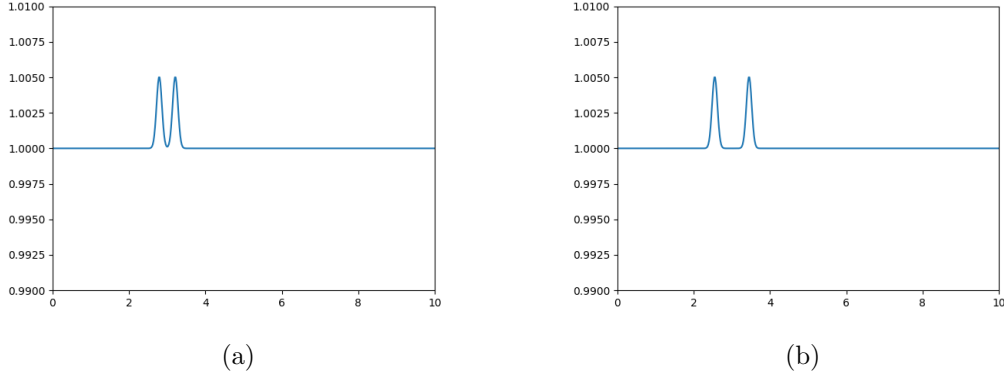


FIGURE 7

3.2 Partie non linéaire :

On regarde désormais l'équation (7), c'est à dire qu'on ajoute la partie non linéaire :

$$\partial_t^2 W - \partial_x^2 W + \frac{\left(1 - \frac{1}{r}\right)}{r^2} W(1 - W^2) = 0 \quad (15)$$

où on a pris, par convention, $2m = 1$. Pour résoudre l'équation en x , il faut pouvoir exprimer r en fonction de x . On sait qu'on a :

$$x = r + \ln(r - 1)$$

Il n'est donc pas possible d'obtenir l'expression analytique de r en fonction de x . Pour palier à ce problème, on calcule numériquement cette valeur $r(x)$. On utilise pour cela une méthode de minimisation de fonction, qu'on applique à la fonction $r \mapsto (r + \ln(r - 1) - x)^2$.

Explicitons le schéma numérique. On reprend l'équation (11) :

$$\frac{W_j^{k+1}}{\delta t^2} + 2W_j^k \left(\frac{1}{\delta x^2} - \frac{1}{\delta t^2} \right) + \frac{W_j^{k-1}}{\delta t^2} - \frac{W_{j-1}^k}{\delta x^2} - \frac{W_{j+1}^k}{\delta x^2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{r(x_j)}\right)}{r(x_j)^2} W_j^k (1 - (W_j^k)^2) = 0 \quad (16)$$

Avec les mêmes notations que ci-dessus :

$$\vec{W}^{k+1} = A\vec{W}^k - \vec{W}^{k-1} + M \star \vec{W}^k \star (\vec{1} - \vec{W}^k \star \vec{W}^k) \quad (17)$$

où on a noté :

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{r(x_0)}\right)}{r(x_0)^2} \\ \vdots \\ \frac{\left(1 - \frac{1}{r(x_{n-1})}\right)}{r(x_{n-1})^2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

et où \star dénote la multiplication terme à terme, $\vec{1}$ est le vecteur colonne composé uniquement de 1.

Remarque 3.2.1. On peut vérifier que l'invariant $W_0^k = W_n^k = 0$ est conservé.

La résolution numérique donne :

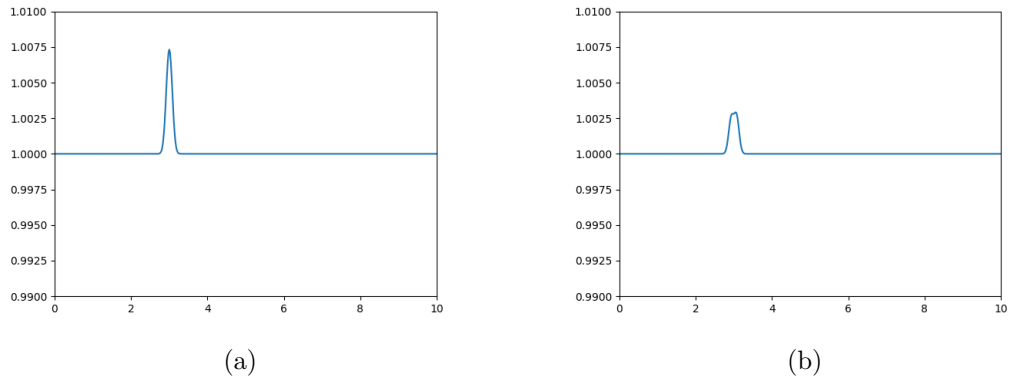


FIGURE 8

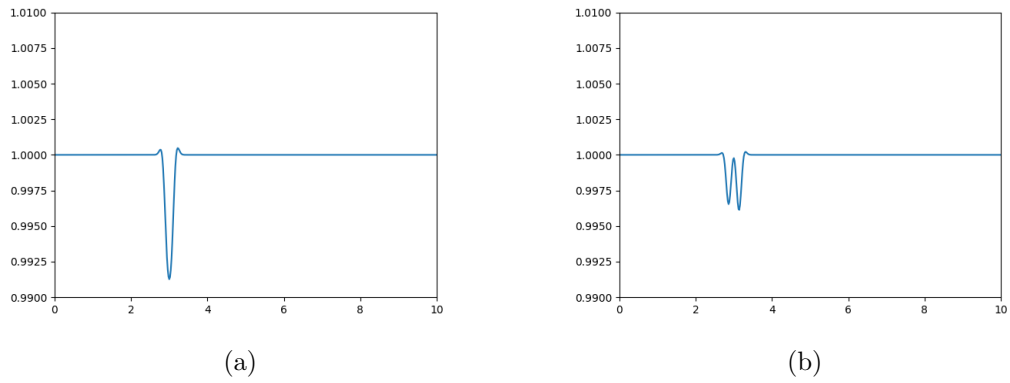


FIGURE 9

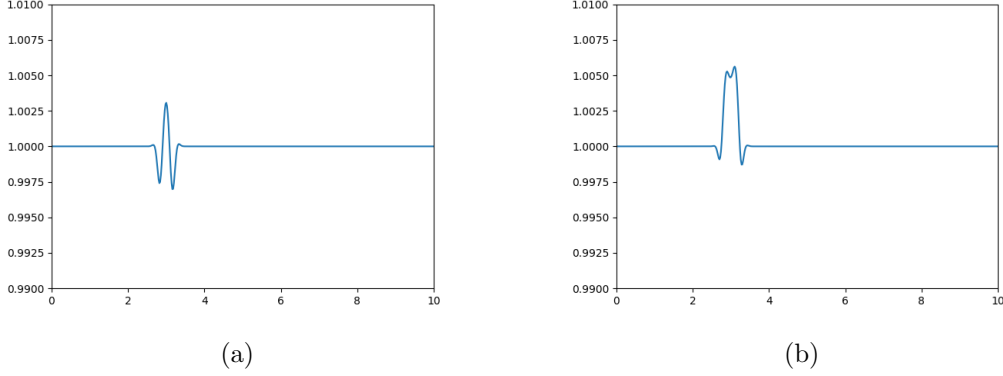


FIGURE 10

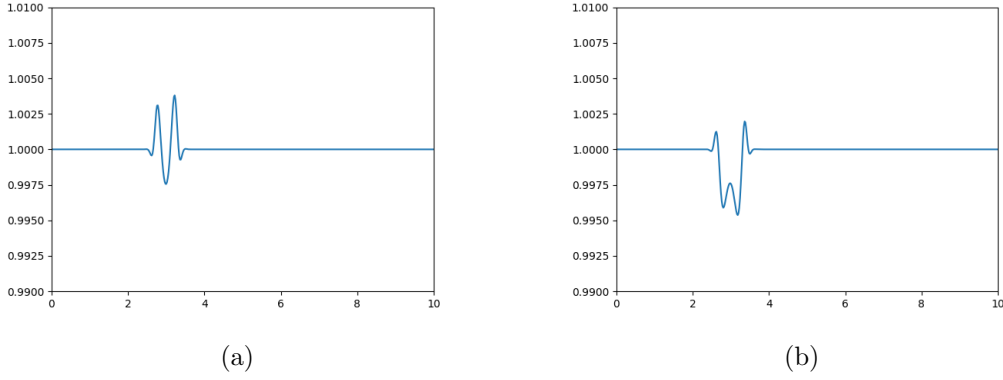


FIGURE 11

On voit aussi ici, comme attendu, deux ondes se propager, une vers la gauche et l'autre vers la droite, mais de manière moins distincte que dans le cas linéaire.

3.3 Equation compactifiée

L'équation (15) a un défaut majeur : elle place l'horizon des évènements, $r = 1$, en $x = -\infty$. C'est pour cela qu'on étudie plutôt l'équation après changement de variable, c'est à dire l'équation (8) :

$$\frac{1 - (NH)^2}{N} \ddot{W} + 2NH\dot{W}' + (NH)'\dot{W} = (NW')' + \frac{W(1 - W^2)}{r^2}$$

avec W une fonction de r et de t . On peut ainsi étudier le comportement de la solution W lorsqu'elle approche de l'horizon des évènements.

Nous prenons $K = C = m = 0.5$, et nous faisons le changement de variables suivant :

$$\rho = \frac{r}{r+1}, \quad r = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Ceci permet de compactifier la région $1 \leq r \leq +\infty$ sur laquelle W est définie en un intervalle compact $1/2 \leq \rho \leq 1$. De cette façon, on obtient également l'information sur $r = +\infty$.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{r+1-r}{(r+1)^2} \right) = \frac{1}{(r+1)^2} \frac{\partial}{\partial \rho} = (1-\rho)^2 \frac{\partial}{\partial \rho}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) &= (1-\rho)^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1-\rho)^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \\ &= (1-\rho)^2 \left[-2(1-\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} + (1-\rho)^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = (1-\rho)^3 \left[-2 \frac{\partial}{\partial \rho} + (1-\rho) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right]$$

On exprime en fonction de ρ :

$$J = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{3} - \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{3(1-\rho)} - \frac{(1-\rho)^2}{\rho} \right)$$

$$J' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{r^3} \right) = \frac{1}{6} + \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^3$$

$$N = 1 - \frac{1-\rho}{\rho} = 2 - \frac{1}{\rho}$$

$$N' = \frac{1}{r^2} = \left(\frac{1-\rho}{\rho} \right)^2$$

$$NH = \frac{J}{\sqrt{N+J^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{N}{J^2}}}$$

$$\frac{1 - (NH)^2}{N} = \frac{1 - \frac{J^2}{J^2+N}}{N} = \frac{1}{J^2+N}$$

$$\begin{aligned} (NH)' &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{N}{J^2}}} \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{N}{J^2} \right)' \left(1 + \frac{N}{J^2} \right)^{-3/2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1-\rho}{\rho J} \right)^2 + 2 \frac{NJ'}{J^3} \right) \left(1 + \frac{N}{J^2} \right)^{-3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (NW')' &= N'W' + NW'' \\
 &= \frac{(1-\rho)^4}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + N(1-\rho)^3 \left[-2 \frac{\partial}{\partial \rho} + (1-\rho) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \\
 &= (1-\rho)^3 \left[\frac{(1-\rho)}{\rho^2} - 2N \right] \frac{\partial}{\partial \rho} + N(1-\rho)^4 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}
 \end{aligned}$$

On obtient donc finalement l'équation

$$\begin{aligned}
 &\frac{1 - (NH)^2}{N} \ddot{W} + 2NH(1-\rho)^2 \frac{\partial \dot{W}}{\partial \rho} + (NH)' \dot{W} \\
 &= \\
 &N(1-\rho)^4 \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + (1-\rho)^3 \left[\frac{(1-\rho)}{\rho^2} - 2N \right] \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{(1-\rho)^2}{\rho^2} W(1-W^2)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Re-notons cette l'équation ci-dessus :

$$a\ddot{W} + b\frac{\partial \dot{W}}{\partial \rho} + c\dot{W} + d\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + e\frac{\partial W}{\partial \rho} + fW(1-W^2) = 0 \tag{20}$$

L'objectif est de résoudre cette équation pour :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq t \leq T \\
 1/2 &\leq \rho \leq 1
 \end{aligned}$$

où T est un paramètre. On discrétise les intervalles de résolution, de la même façon que ci-dessus.

On note :

$$W_j^k = W(t_k, \rho_j)$$

La méthode d'Euler nous donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W(t_k, \rho_j)}{\partial t} &= \frac{W_j^{k+1} - W_j^k}{\delta t} \\
 \frac{\partial W(t_k, \rho_j)}{\partial \rho} &= \frac{W_{j+1}^k - W_j^k}{\delta \rho}
 \end{aligned}$$

Une méthode du point milieu donne :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 W(t_k, \rho_j)}{\partial t^2} &= \frac{W_j^{k+1} - 2W_j^k + W_j^{k-1}}{\delta t^2} \\
 \frac{\partial^2 W(t_k, \rho_j)}{\partial \rho^2} &= \frac{W_{j+1}^k - 2W_j^k + W_{j-1}^k}{\delta \rho^2} \\
 \frac{\partial \dot{W}(t_k, \rho_j)}{\partial \rho} &= \frac{W_{j+1}^{k+1} - W_j^{k+1} - W_{j+1}^k + W_j^k}{\delta t \delta \rho}
 \end{aligned}$$

L'équation (20) se réécrit, en notant $a_j = a(\rho_j)$, et de même pour tous les autres termes :

$$\begin{aligned} \frac{a_j}{\delta t^2}(W_j^{k+1} - 2W_j^k + W_j^{k-1}) + \frac{b_j}{\delta t \delta \rho}(W_{j+1}^{k+1} - W_j^{k+1} - W_{j+1}^k + W_j^k) + \frac{c_j}{\delta t}(W_j^{k+1} - W_j^k) \\ + \frac{d_j}{\delta \rho^2}(W_{j+1}^k - 2W_j^k + W_{j-1}^k) + \frac{e_j}{\delta \rho}(W_{j+1}^k - W_j^k) + f_j W_j^k (1 - (W_j^k)^2) = 0 \end{aligned}$$

On rassemble les termes :

$$\begin{aligned} W_{j+1}^{k+1} \frac{b_j}{\delta t \delta \rho} + W_j^{k+1} \left(\frac{a_j}{\delta t^2} - \frac{b_j}{\delta t \delta \rho} + \frac{c_j}{\delta t} \right) + W_j^k \left(-\frac{2a_j}{\delta t^2} + \frac{b_j}{\delta t \delta \rho} - \frac{c_j}{\delta t} - \frac{2d_j}{\delta \rho^2} - \frac{e_j}{\delta \rho} \right) \\ + f_j W_j^k (1 - (W_j^k)^2) + W_{j+1}^k \left(-\frac{b_j}{\delta t \delta \rho} + \frac{d_j}{\delta \rho^2} + \frac{e_j}{\delta \rho} \right) + W_{j-1}^k \frac{d_j}{\delta \rho^2} + W_j^{k-1} \frac{a_j}{\delta t^2} \end{aligned}$$

On réécrit l'équation :

$$\alpha_j W_{j+1}^{k+1} + \beta_j W_j^{k+1} + \gamma_j W_j^k + \lambda_j W_{j+1}^k + \mu_j W_{j-1}^k + \nu_j W_j^{k-1} + f_j W_j^k (1 - (W_j^k)^2) = 0 \quad (21)$$

Notons :

$$\vec{W}^k = \begin{pmatrix} W_0^k \\ \vdots \\ W_n^k \end{pmatrix}$$

Alors l'équation (21) se réécrit sous forme matricielle :

$$A \vec{W}^{k+1} + B \vec{W}^k + \vec{f} \star \vec{W}^k \star (\vec{1} - \vec{W}^k \star \vec{W}^k) + \vec{v} \star \vec{W}^{k-1} = 0$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & \gamma_1 & \lambda_1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \mu_{n-1} & \gamma_{n-1} & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\vec{\nu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Ainsi, on a, pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$:

$$\vec{W}^{k+1} = -A^{-1} \left(B\vec{W}^k + \vec{f} \star \vec{W}^k \star (\vec{1} - \vec{W}^k \star \vec{W}^k) + \vec{\nu} \star \vec{W}^{k-1} \right)$$

Pour implémenter numériquement ce schéma, on a d'abord calculé, à l'aide d'un logiciel de calcul formel, les valeurs des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu, \lambda, f$.

Les résultats obtenus ne sont pas concluants. Il a été impossible d'obtenir une solution non divergente, malgré l'essai de plusieurs gammes de coefficients $\delta t, \delta \rho$.

4 Étude analytique de l'équation en temps

4.1 Formulation du problème de Cauchy

Nous étudions le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 W - \partial_x^2 W + P(W(W^2 - 1)) = 0 \\ W(x, 0) = f, \partial_t W(x, 0) = g \end{cases} \quad (26)$$

avec

$$(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \text{ et } P = \frac{1 - \frac{2m}{r}}{r^2}.$$

4.2 Mise en évidence d'une énergie conservée

Le but de la section 4 est de montrer que le problème (26) est bien posé. Il nous faut dans un premier temps préciser pour quel type de conditions initiales nous souhaitons montrer cela afin de formaliser le problème. Nous commençons par effectuer des calculs formels pour mettre en évidence une énergie adaptée au problème. On s'intéressera ensuite à l'étude du problème de Cauchy dans l'espace des énergies finies, c'est à dire que l'on prendra comme condition initiale (f, g) vérifiant $\mathcal{E}(f, g) < \infty$. Multiplions l'équation (26) le facteur intégrant $\partial_t W$. Commençons par calculer chaque terme. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}\partial_t W \partial_t^2 W &= \frac{1}{2} \partial_t [(\partial_t W)^2] \\ PW \partial_t W (W^2 - 1) &= \frac{1}{4} P \partial_t [(W^2 - 1)^2] = \partial_t \left[\frac{1}{4} P (W^2 - 1)^2 \right].\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\partial_x (\partial_t W \partial_x W) &= \partial_x \partial_t W \partial_x W + \partial_t W \partial_x^2 W \\ &= \partial_t \partial_x W \partial_x W + \partial_t W \partial_x^2 W \quad (\text{Schwarz}) \\ &= \frac{1}{2} \partial_t [(\partial_x W)^2] + \partial_t W \partial_x^2 W,\end{aligned}$$

On a donc

$$\partial_t [(\partial_t W)^2] + \partial_t [(\partial_x W)^2] - 2 \partial_x (\partial_t W \partial_x W) + \partial_t \left[\frac{1}{2} P (W^2 - 1)^2 \right] = 0.$$

Maintenant, en intégrant sur $x \in \mathbb{R}$, et en sortant la dérivée temporelle de l'intégrale, il vient

$$\partial_t \mathcal{E}(W, \partial_t W) = 2 [\partial_t W \partial_x W]_{-\infty}^{+\infty},$$

avec

$$\mathcal{E}(f, g) = \int_{\mathbb{R}} \left(g^2 + (\partial_x f)^2 + \frac{1}{2} P (f^2 - 1)^2 \right) dx. \quad (27)$$

Nous allons nous placer dans des conditions qui assurent que le terme $[\partial_t W \partial_x W]_{-\infty}^{+\infty}$ est nul, et ainsi que l'énergie est conservée, ce qui sera nécessaire dans notre preuve du caractère bien posé du problème.

4.3 Formalisation du problème

Nous allons ici préciser notre espace de travail, en reprenant les idées de [GH16]. Nous renvoyons à [MAT432] pour tous les résultats concernant la théorie des distributions et les espaces de Sobolev.

Notation. (i) Pour $p > 1$, on définit L_P^p comme étant l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $Pf^p \in L^1(\mathbb{R})$, muni de la norme

$$\|f\|_{L_P^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} P |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- (ii) On dénote par $H^1 := H^1(\mathbb{R})$ l'espace de Sobolev (inhomogène) d'ordre 1 sur l'ensemble des réels (voir [MAT432, Section 5.7]).
- (iii) La notation \dot{H}^1 désigne l'espace de Sobolev homogène d'ordre 1, qui est l'ensemble des distributions tempérées sur \mathbb{R} dont la dérivée est une fonction L^2 . \dot{H}^1 est muni de la semi-norme

$$\|f\|_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}} (f')^2.$$

- (iv) On pose $\mathcal{H}^1 = H^1 \cap L_P^4$, que l'on munit de la norme définie par

$$\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \|\cdot\|_{\dot{H}^1}^2 + \|\cdot\|_{L_P^4}^2$$

- (v) Le symbole $\cdot \lesssim \cdot$ signifie que le membre de gauche est inférieur à une constante positive fois le membre de droite.
- (vi) $\|\cdot\|$ désignera toujours la norme L^2 sur \mathbb{R} .

Pour tout $p > 1$, L_P^p est complet. En effet, si $(f_n) \in (L_P^p)^\mathbb{N}$ est une suite de Cauchy, alors $P^{1/p}f_n$ est de Cauchy dans L^p , donc converge vers $g \in L^p$ qui est complet. Comme P ne s'annule pas, $g/P^{1/p} \in L_P^p$ est bien définie, et est la limite de f_n dans L_P^p . On utilisera dans la suite uniquement L_P^2 et L_P^4 .

La définition de \mathcal{H}^1 donnée dans [GH16] est plus générale car elle revient à prendre l'intersection de L_P^4 avec \dot{H}^1 au lieu de H^1 ici. Nous avons fait ce choix pour une raison qui s'exprime à deux endroits. Notre preuve utilise à deux reprises le plongement de H^1 dans l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini [MAT432, Théorème 5.7.5 et Théorème de Riemann-Lebesgue], or nous n'avons pas de résultat similaire pour \dot{H}^1 , qui contient plus d'éléments (en particulier les fonctions constantes ou la primitive d'une Gaussienne qui possède des limites différentes en $\pm\infty$). En contrepartie, nous montrerons que le problème de Cauchy (26) est bien posé dans un espace légèrement plus petit que l'espace d'énergie finie.

Évidemment, nous avons besoin que notre espace de travail soit complet :

Propriété 4.1. *L'espace \mathcal{H}^1 muni de $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(f_n) \in (\mathcal{H}^1)^\mathbb{N}$ une suite de Cauchy. Comme L^2 et L_P^4 sont complets, on sait que (f_n) (resp. (f'_n)) possède une limite $f \in L_P^4$ (resp. $g \in L^2$). Or la convergence dans L_P^4 entraîne la convergence dans L_{loc}^1 d'après l'inégalité de Hölder : si K est un compact de \mathbb{R} , on a

$$\int_K |f_n - f| \leq \left(\int_K P |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K P^{-\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad p = 4, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Donc $f_n \rightarrow f$ dans L_{loc}^1 , et a fortiori dans \mathcal{D}' . D'autre part, encore par l'inégalité de Hölder, f'_n tend vers g dans \mathcal{D}' . Par continuité séquentielle de la dérivation et unicité de la limite dans \mathcal{D}' , il vient $f' = g$, ce qui montre que $f_n \rightarrow f$ dans \mathcal{H}^1 . \square

Lemme 4.1 (Lemma A.1. [GH16]). *Soit $f \in \mathcal{H}^1$. On a les inégalités suivantes :*

$$\|f\|_{L_P^4}^4 \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{P}{2} (f^2 - 1)^2 + 1 \quad (28)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P}{2} (f^2 - 1)^2 \lesssim \|f\|_{L_P^4}^4 + 1 \quad (29)$$

$$\|f\|_{L_P^2} \lesssim \|f\|_{L_P^4} \quad (30)$$

$$\|P^{\frac{1}{2}} f^2\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}^1}^2 \quad (31)$$

Preuve. (29) vient du fait que $(f^2 - 1)^2 \leq f^4 + 1$. (30) se montre grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_{L_P^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} f^2 \leq \|P^{\frac{1}{2}}\| \|f\|_{L_P^4}^2.$$

Pour (28), on écrit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P f^4 &= \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1 + 1)^2 = \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1)^2 + 2 \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1) + \int_{\mathbb{R}} P \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1)^2 + \int_{\mathbb{R}} P + 2 \left(\int_{\mathbb{R}} P \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1)^2 + \int_{\mathbb{R}} P + \left(\int_{\mathbb{R}} P \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1)^2 \right) \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}} P (f^2 - 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la deuxième ligne. \square

Nous supposons dans la suite que la dernière inégalité (31) est vraie, cependant, nous avons des doutes. En effet, la preuve donnée dans [GH16] semble utiliser un plongement de Sobolev pour un élément de \dot{H}^1 , résultat que nous ne connaissons pas. Ce premier problème se résout en se restreignant à H^1 comme nous l'avons fait. Cependant, la preuve utilise également le fait que $P^{-1}P'$ est bornée, ce qui est faux puisque quand $r \rightarrow 1$, $P' \rightarrow 1$ mais $P^{-1} \rightarrow \infty$.

On déduit du Lemme 4.1 que si $(f, g) \in \mathcal{H}^1 \times L^2$, alors $\mathcal{E}(f, g) < \infty$, où \mathcal{E} est définie par (27). Cependant, l'inclusion est stricte puisque les fonctions constantes ne sont pas dans \mathcal{H}^1 .

Lemme 4.2 (Conservation de l'énergie). *Soit $W \in C^1([0, +\infty[, \mathcal{H}^1)$ une solution de (26). Alors $\mathcal{E}(W, \partial_t W)$ est finie et se conserve dans le temps.*

Preuve. La solution W est d'énergie finie par le Lemme 4.1. De plus, $\partial_t W \in H^1$ donc par plongement de Sobolev, on a

$$\partial_t \mathcal{E}(W, \partial_t W) = 2 [\partial_t W \partial_x W]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

\square

On admet que ce résultat reste vrai en supposant simplement $W \in C^0([0, +\infty[, \mathcal{H}^1)$.

4.4 Le problème de Cauchy (26) est bien posé

Théorème 4.3. *Soit $(f, g) \in \mathcal{H}^1 \times L^2(\mathbb{R})$ une condition initiale. Alors le problème de Cauchy (26) admet une et une seule solution globale dans $C^0([0, \infty[, \mathcal{H}^1)$.*

Preuve. La conservation de l'énergie (Lemme 4.2) nous permet de nous ramener à l'existence locale sur $t \in [0, T]$, où T ne dépend que de l'énergie des conditions initiales. Pour $T > 0$, on considère l'application $\phi_T : C^0([0, T], \mathcal{H}^1) \rightarrow C^0([0, T], \mathcal{H}^1)$ qui à U associe la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t^2 V - \partial_x^2 V = -P(U(U^2 - 1)) \\ V(x, 0) = f, \quad \partial_t V(x, 0) = g. \end{cases}$$

L'existence et l'unicité de V sont assurées par la Propriété B.2. Montrons que V est dans \mathcal{H}^1 pour tout t . On commence par une estimation de l'énergie. On multiplie l'équation vérifiée par V par $\partial_t V$. Pour $t \in [0, T]$, on obtient par les mêmes calculs qu'en sous-section 4.2

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t V)^2 + (\partial_x V)^2 \right) &= 2 \int_{\mathbb{R}} -PU(U^2 - 1) \partial_t V \\ &\leq 2 \|\partial_t V\| \|PU(U^2 - 1)\| \\ &\leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t V)^2 + (\partial_x V)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|PU(U^2 - 1)\| \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et T , il vient

$$\forall t \in [0, T], \quad \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t V)^2 + (\partial_x V)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{\dot{H}^1} + \|g\| + \int_0^T \|PU(U^2 - 1)\|. \quad (32)$$

D'autre part, on a par le Lemme 4.1

$$\begin{aligned} \|PU(U^2 - 1)\| &\leq \|P^{\frac{1}{2}} U^2\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} P^{\frac{3}{2}} (U^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|U\|_{\mathcal{H}^1} \|P^{\frac{1}{2}}\|_{L^\infty} \left(\|U\|_{L_P^4}^2 + 1 \right) \\ &\lesssim \|U\|_{\mathcal{H}^1}^3 + \|U\|_{\mathcal{H}^1} \\ &\leq 2\|U\|_{\mathcal{H}^1}^3 + 1 \\ &\lesssim \|U\|_{\mathcal{H}^1}^3 + 1. \end{aligned} \quad (33)$$

En combinant (32) et (33), on trouve

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\int_{\mathbb{R}} (\partial_t V)^2 + (\partial_x V)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{\dot{H}^1} + \|g\| + CT(\|U\|_{\mathcal{H}^1}^3 + 1). \quad (34)$$

avec $C > 0$ une constante ne dépendant que de P . Il reste à montrer que $V \in L_P^4$. Pour cela, on utilise la formule de représentation de la Propriété B.2. On écrit

$$\|f(\cdot \pm t)\|_{L_P^4} \leq C_1(t) \|f\|_{L_P^4}. \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P \left(\int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi \right)^4 &\leq \int_{\mathbb{R}} 4t^2 P \left(\int_{x-t}^{x+t} g^2(\xi) d\xi \right)^2 \\ &\leq 4t^2 \|g\|^4 \|P\|_{L^1} = C_2(t) \|g\|^4 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P \left(\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, \xi) d\xi ds \right)^4 &\leq \int_{\mathbb{R}} P \left(\int_0^t (2(t-s))^{\frac{1}{2}} \|F\|_{\xi} ds \right)^4 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} 4t^6 P \sup_{t \in [0, T]} \|F\|_x^4 \\ &\leq C_3(t) \sup_{t \in [0, T]} \|F\|_x^4 \end{aligned} \quad (37)$$

En remplaçant F par $-PU(U^2 - 1)$, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|V\|_{L_P^4} &\leq C(T) \left(\|f\|_{L_P^4} + \|g\|^4 + \sup_{t \in [0, T]} \|PU(U^2 - 1)\|^4 \right) \\ &\leq C(T) \left(\|f\|_{L_P^4} + \|g\|^4 + \sup_{t \in [0, T]} \|U\|_{\mathcal{H}^1}^{12} + 1 \right) < \infty \end{aligned} \quad (38)$$

avec $C(t) = \sup \{C_1(t), C_2(t), C_3(t)\}$. Ainsi, l'application ϕ_T est bien définie. Montrons maintenant que c'est une contraction pour T assez petit. Comme l'équation des ondes est linéaires, si $U_1, U_2 \in C^0([0, \infty[, \mathcal{H}^1)$, on a

$$\phi_T(U_1) - \phi_T(U_2) = \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} P(\xi) (U_1(s, \xi)(U_1^2(s, \xi) - 1) - U_2(s, \xi)(U_2^2(s, \xi) - 1)) d\xi ds$$

donc par (37)

$$\sup_{t \in [0, T]} \|V_1 - V_2\|_{L_P^4} \leq C(T) \sup_{t \in [0, T]} \|P(U_1(U_1^2 - 1) - U_2(U_2^2 - 1))\|^4.$$

On écrit donc, pour $t \in [0, T]$:

$$\|P(U_1(U_1^2 - 1) - U_2(U_2^2 - 1))\| \leq \|P(U_1 - U_2)(U_1^2 - 1)\| + \|PU_2(U_1^2 - U_2^2)\|,$$

où

$$\begin{aligned} \|P(U_1 - U_2)(U_1^2 - 1)\| &\leq \|P^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)^2\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} P^{\frac{3}{2}}(U_1^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|P^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)^2\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} (\|U_1\|_{L_P^4}^2 + 1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|PU_2(U_1^2 - U_2^2)\| &= \|P(U_1 - U_2)U_2(U_1 + U_2)\| \\
&\leq \|P^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)^2\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} P^{\frac{3}{2}} U_2^2 (U_1 + U_2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \|P^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)^2\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} (\|U_1\|_{L_P^4}^2 + \|U_2\|_{L_P^4}^2)
\end{aligned}$$

Dans la deuxième ligne, $P^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)^2$ est bien bornée car $(U_1 - U_2)^2 \leq 2(U_1^2 + U_2^2)$ (on utilise ensuite le Lemme 4.1), et pour obtenir la troisième ligne, on a appliqué deux fois l'inégalité de Young :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
\|P(U_1(U_1^2 - 1) - U_2(U_2^2 - 1))\| &\leq \|P^{\frac{1}{2}}(U_1 - U_2)^2\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}} (\|U_1\|_{L_P^4}^2 + \|U_2\|_{L_P^4}^2 + 1) \\
&\leq \|U_2 - U_1\|_{\mathcal{H}^1} (\|U_1\|_{L_P^4}^2 + \|U_2\|_{L_P^4}^2 + 1) \quad (39)
\end{aligned}$$

Comme $C(T)$ tend vers 0 lorsque T tend vers 0, cela montre que ϕ_T est contractante pour T suffisamment petit. En appliquant le théorème du point fixe de Banach, on obtient l'existence d'une unique solution locale au problème de Cauchy (26). Cela achève la preuve. \square

A Preuves de propriétés sur l'équation statique

Preuve de la Propriété 2.6. Montrons tout d'abord que W_a ne peut pas avoir de maximum local strictement négatif ni de minimum local strictement positif : Soit $r \in [1; +\infty[$ (on rappelle que $r_a = +\infty$) tel que W_a possède un maximum local en r vérifiant $W_a(r) < 0$, alors en réinjectant dans l'équation statique nous obtenons :

$$(1 - \frac{1}{r})W_a''(r) = \frac{W_a(r)(W_a(r)^2 - 1)}{r^2} \geq 0$$

Car $r \in [1; +\infty[$ donc $|W_a(r)| < 1$ et on a supposé $W_a(r) < 0$. Ainsi $W_a''(r) > 0$ ce qui est impossible pour un maximum local.

Par l'absurde notre affirmation est démontrée (la cas du minimum local est identique).

W_a possède un nombre fini de zéros, ainsi, il existe $R > 1$ tel que W_a est de signe constant sur $[R; +\infty[$. Par exemple, W_a est strictement positive sur cet intervalle, distinguons 2 cas :

- W_a est croissante sur $[R; +\infty[$, alors elle admet une limite finie en $+\infty$ car elle est majorée par 1 ($r_a = +\infty$).

- Il existe $r_0 \geq R$ tel que $W'_a(r_0) < 0$, alors W_a est obligatoirement décroissante sur $[r_0; +\infty[$ car dans le cas contraire elle admettrait un minimum local strictement positif. Ainsi W_a admet une limite finie en $+\infty$ car elle est minorée par 0.

Dans tous les cas : $\boxed{W_a \text{ admet une limite finie en } +\infty}$. □

Preuve du Corolaire 2.2.1. D'après la Propriété 2.6., W_a converge vers ± 1 . Comme W_a possède un nombre fini de zéros, il existe $R_0 > 0$ à partir duquel elle ne s'annule plus et elle est strictement monotone (voir démonstration de la Propriété 2.6.). Prenons de plus R et ϵ liés à la Propriété 2.5. (indépendants du W étudié). Ensuite, nous pouvons prendre $R_1 > 0$ tel que W_a est $\frac{\epsilon}{2}$ -proche de sa limite ± 1 à partir de R_1 . Enfin, posons $R_{max} = \max(R_0, R, R_1)$.

Maintenant, grâce à la Propriété 2.4. (propriété de continuité par rapport à a) sur $[1; R_{max}]$, il existe un voisinage de a tel que si a' est de ce voisinage :

- $W_{a'}$ est définie sur $[1; R_{max}]$.
- $W_{a'}$ possède exactement n zéros sur $[1; R_0]$ (car suffisamment proche de W_a sur ce segment).
- En R_{max} , $W_{a'}$ a la même monotonie que W_a (après R_0).
- $1 - \epsilon \leq |W_{a'}(R_{max})| \leq 1$ et $R_{max} \geq R$ (car comme $r_a = +\infty$ W_a n'atteint jamais sa limite et sa distance à cette dernière est donc minorée par un $\delta > 0$ sur $[1; R_{max}]$).

Le dernier point nous montre que toutes les conditions de la Propriété 2.5. sont réunies pour $W_{a'}$, ainsi nous distinguons 2 cas :

- Si à partir de R_{max} $W_{a'}$ n'a pas d'extremum local, alors ne s'annule plus et a exactement n zéros (car même monotonie que W_a , qui est orientée vers sa limite, et donc non vers 0).
- Si $W_{a'}$ possède un extremum local après R_{max} , alors cela se situe après R et ϵ -proche de la limite de W_a (car $W_{a'}$ a la même monotonie que W_a entre R_{max} et le premier extremum local). Ainsi par la Propriété 2.5., $r_{a'} < +\infty$ et $W_{a'}$ a exactement un zéro en plus, c'est-à-dire $n + 1$ zéros au total.

□

B Équation des ondes

On présente ici les idées de résolution de l'équation des ondes, et notamment la formule de représentation de la solution, qui est utile dans la preuve du Théorème 4.3. Nous suivons la méthode employée dans [MAT568, Chapitre 4]. Commençons avec le cas homogène.

Propriété B.1 (Équation des ondes homogène en dimension 1). *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0, & (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u^{\text{in}}(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_t^{\text{in}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (40)$$

admet une unique solution :

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u^{\text{in}}(x+t) + u^{\text{in}}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi.$$

Preuve. On factorise l'opérateur d'alembertien pour réécrire l'équation sous la forme suivante :

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = 0.$$

Cela fait apparaître deux équations du transport que nous allons résoudre successivement. On considère donc le problème de cauchy suivant :

$$\begin{cases} \partial_t v + c \partial_x v = 0, & (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ v(0, x) = v^{\text{in}}, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (41)$$

avec $c \in \mathbb{R}$. La méthode de résolution employée dans [MAT432, Théorème 2.1.2] consiste à remarquer qu'une solution v de (41) est constante sur les demi-droites $D_y := \{(t, y+ct) ; t > 0\}$. Ainsi,

$$v(t, x) = v(t, (x-ct) + ct) = v(0, x-ct) = v^{\text{in}}(x-ct).$$

Réciproquement, ceci est bien solution de l'équation de transport (41). En appliquant cela à l'équation des ondes avec $c = 1$, on en déduit qu'il existe $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(\partial_t - \partial_x)u = a(x-t)$. On a encore un équation de transport, cette fois pour $c = -1$, et avec un second membre. Soit A une primitive de $\frac{-a}{2}$. On a :

$$(\partial_t - \partial_x)A(x-t) = -2A'(x-t) = a(x-t),$$

donc $(t, x) \mapsto A(x-t)$ est une solution particulière. En résolvant l'équation homogène, on trouve finalement qu'il existe B telle que $u(t, x) = A(x-t) + B(x+t)$. La satisfaction des conditions initiales est équivalente au système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} A + B = u^{\text{in}} \\ B' - A' = u_t^{\text{in}} \end{cases} &\implies \begin{cases} A + B = u^{\text{in}} \\ B - A = \int_0^y u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 2A = u^{\text{in}} - \int_0^y u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi - C \\ 2B = u^{\text{in}} + \int_0^y u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi + C \end{cases}. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$u(t, x) = A(x-t) + B(x+t) = \frac{1}{2} \left[u^{\text{in}}(x-t) + u^{\text{in}}(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi \right],$$

et il est immédiat de vérifier que u est bien solution de (40). \square

Propriété B.2 (Équation des ondes en dimension 1 avec second membre). *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = F, & (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u^{\text{in}}(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_t^{\text{in}}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (42)$$

admet une unique solution, donnée par

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[u^{\text{in}}(x - t) + u^{\text{in}}(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, \xi) d\xi ds \right]$$

Preuve. Si l'on trouve une solution particulière u_p au système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = F, & (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (43)$$

alors $u := u_h + u_p$ où u_h satisfait à (40) est solution de (42). Réciproquement, si u est solution de (42), alors $u - u_p$ satisfait à (40), ce qui implique $u = u_h + u_p$. Ainsi, l'existence et l'unicité d'une solution au problème (42) se ramène à trouver une solution particulière à (43). La méthode de Duhamel [MAT568, Section 4.1.4] nous suggère de regarder

$$u_p(t, x) = \int_0^t U(s, t, x) ds,$$

avec pour tout $s \geq 0$, $(t, x) \mapsto U(s, t, x)$ solution de

$$\begin{cases} \partial_t^2 U - \partial_x^2 U = 0, & (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ U(s, s, x) = 0, \quad \partial_t U(s, s, x) = F(s, x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (44)$$

qui est un cas particulier de (40) en prenant la condition initiale en $t = s$ au lieu de $t = 0$. Vérifions. Premièrement, on a

$$u_p(0, \cdot) \equiv 0. \quad (45)$$

Calculons les dérivées de u_p . On a déjà :

$$\partial_x u_p = \int_0^t \partial_x U(s, t, x) ds, \quad \partial_x^2 u_p = \int_0^t \partial_x^2 U(s, t, x) ds.$$

De plus, en écrivant, pour $t \geq 0$,

$$u_p(t, x) = t \int_0^1 U(ts, t, x) ds,$$

il vient, pour $t > 0, x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \partial_t u_p(t, x) &= \int_0^1 U(ts, t, x) ds + t \int_0^1 (s \partial_s U(ts, t, x) + \partial_t U(ts, t, x)) ds \\
 &= \frac{u_p(t, x)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t s \partial_s U(s, t, x) ds + \int_0^t \partial_t U(s, t, x) ds \\
 &= \frac{u_p(t, x)}{t} + \frac{1}{t} \left([sU(s, t, x)]_0^t - \int_0^t U(s, t, x) ds \right) + \int_0^t \partial_t U(s, t, x) ds \\
 &= \frac{u_p(t, x)}{t} + U(t, t, x) - \frac{u_p(x, t)}{t} + \int_0^t \partial_t U(s, t, x) ds \\
 &= U(t, t, x) + \int_0^t \partial_t U(s, t, x) ds.
 \end{aligned}$$

Comme $U(t, t, x) = 0$ pour tout (t, x) , cela se simplifie :

$$\partial_t u_p(t, x) = \int_0^t \partial_t U(s, t, x) ds. \quad (46)$$

Pour calculer $\partial_t^2 u_p$, on réutilise la même méthode pour dériver l'intégrale que dans le calcul précédent, en remplaçant U par $\partial_t U$. On a donc :

$$\partial_t^2 u_p(t, x) = \partial_t U(t, t, x) + \int_0^t \partial_t^2 U(s, t, x) ds = F(t, x) + \int_0^t \partial_t^2 U(s, t, x) ds.$$

En faisant tendre t vers 0 dans (46), on obtient :

$$\partial_t u_p(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} u_p(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \partial_t U(s, t, x) ds = 0. \quad (47)$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
 \partial_t^2 u_p(t, x) - \partial_t^2 u_p(t, x) &= F(t, x) + \int_0^t \partial_t^2 U(s, t, x) ds - \int_0^t \partial_x^2 U(s, t, x) ds \\
 &= F(t, x) + \int_0^t (\partial_t^2 U(s, t, x) - \partial_x^2 U(s, t, x)) ds \\
 &= F(t, x)
 \end{aligned} \quad (48)$$

puisque $U(s, \cdot, \cdot)$ est solution de (44) pour tout $s \geq 0$. Les trois équations (45), (47) et (48) montrent que u_p est solution de (43). On peut maintenant donner l'écriture explicite de la solution u à (42) grâce à la Propriété B.1. En effet, $u = u_h + u_p$, avec

$$u_h(t, x) = \frac{1}{2} \left[u^{\text{in}}(x - t) + u^{\text{in}}(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi \right]$$

et

$$U(s, t, x) = \frac{1}{2} \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, \xi) d\xi,$$

ce qui donne finalement

$$u(t, x) = \frac{1}{2} \left[u^{\text{in}}(x - t) + u^{\text{in}}(x + t) + \int_{x-t}^{x+t} u_t^{\text{in}}(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(s, \xi) d\xi ds \right] \quad (49)$$

□

Références

- [Biz90] Piotr BIZON. « Colored Black Holes ». In : *Physical Review Letters* (1990).
- [BRZ18] Piotr BIZON, Andrzej ROSTWOROWSKI et Aml ZENGINOGLU. « Saddle-point dynamics of a Yang-Mills field on the exterior Schwarzschild spacetime ». In : *arXiv* (2018).
- [GH16] Sari GHANEM et Dietrich HÄFNER. *The decay of the $SU(2)$ Yang-Mills fields on the Schwarzschild black hole for spherically symmetric small energy initial data*. 2016. DOI : 10.48550/ARXIV.1604.04477. URL : <https://arxiv.org/abs/1604.04477>.
- [HH] Dietrich HAFNER et Cécile HUNEAU. « Instability Of Infinitely-Many Stationary Solutions Of The $SU(2)$ Yang-Mills Fields On The Exterior Of The Schwarzschild Black Hole ». In : ().
- [MAT432] François GOLSE. *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. École Polytechnique.
- [MAT568] Cécile HUNEAU. *Wave equations and general relativity*. École Polytechnique.